
pythagoras
wiskundetijdschrift voor jongeren
Escher
37ste jaargang nr.4 april 1998

COLOFON

uitgave

Pythagoras is een uitgave van het NIAM en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

redactieadres

Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede

email

pythagoras@wins.uva.nl

WWW

www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

redactie

Klaas Pieter Hart
Erjen Lefeber
René Swarttouw
Chris Zaal

hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

grafisch ontwerp

Joke Mestdagh, Amsterdam

drukwerk

Koninklijke van de Garde, Zaltbommel

copyright

Alle reproducties van M.C. Escher's werk
© 1998 Cordon Art, Baarn, Holland

Inhoud

1 **M.C. Escher honderd jaar**

2-3 **Kleine nootjes**

4-6 **Escher, de wiskunstenaar**

7-9 **Het onmogelijke tralieraam**

10 **Vierkant zomerkampen**

11 **M.C. Escher in 1998**

12-13 **Onmogelijke kubussen**

14-17 **Escher en het oneindige**

18-19 **Escherprijsvraag 1998**

20-21 **Sierlijke betegelingen**

22-23 **Tegels kleuren**

24-27 **Je eigen regelmatige vlakvulling**

28-29 **Pythagoras Olympiade**

30-32 **Een stelling van Escher**

33-35 **Eendjes & teddyberen**

36 **Problemen**

37 **Oplossingen** nr.3

38 **Agenda**

40 **Oplossingen** Kleine nootjes

M.C. Escher

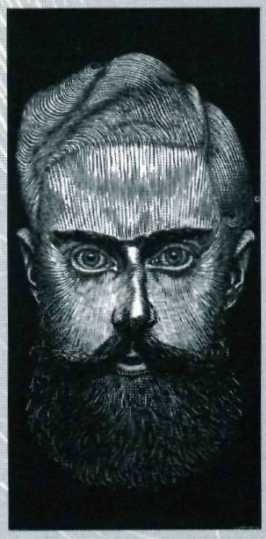
Jan van de Craats

Op 17 juni 1998 is het honderd jaar geleden dat de graficus Maurits Cornelis Escher in Leeuwarden geboren werd. Het werk van Escher is nauw met wiskunde verbonden. Zijn honderdste geboortedag is daarom een goede reden om een heel nummer van Pythagoras aan Escher te wijden.

Zelf beweerde Escher altijd dat hij van wiskunde geen snars begreep. Zijn middelbare-schooltijd in Arnhem was geen succes; alleen de tekenlessen volgde hij met plezier. Hij bleef twee maal zitten en zakte voor zijn eindexamen. Zijn vader wilde dat hij architect zou worden, maar uiteindelijk werd de graficus S. Jessurun de Mesquita zijn leermeester. Escher kreeg van hem een degelijke opleiding in tekenen en grafische technieken. Zijn eerste tekeningen, linoleumsneden en houtsneden zien er traditioneel uit: het zijn portretten, stillevens, stadsgezichten en landschappen.

In 1936 bezoekt Escher het Alhambra paleis in het Spaanse Granada, waar hij de prachtige Moorse ornamenten bestudeert. Dit bezoek markeert een keerpunt in Eschers werk. Vanaf dat moment zal bijna elke Escherprent een 'beeldgedachte' gaan uitdrukken. Regelmatige vlakvullingen en andere wiskundige patronen vormen steeds vaker de ingrediënten van een vreemde of zelfs onmogelijke wereld. We zien ongebruikelijke perspectieven, bolspiegelingen, onmogelijke figuren, handen die zichzelf tekenen, monniken die trappen op- en aflopen zonder hoger of lager te komen en nog veel meer wonderlijke zaken.

Ter gelegenheid van het Internationale Mathematische Congres dat in 1954 in Amsterdam plaatsvindt, wordt een expositie van Eschers werk georganiseerd die veel belangstelling trekt. Escher zelf schrijft een boek *Regelmatige vlakverdeling* en houdt over dat onderwerp een aantal lezingen. In 1960 geeft Escher in Cambridge op uitnodiging een voordracht op een groot internationaal congres van kristallografen. Geleidelijk aan stijgt Eschers bekendheid. *Scientific American* wijdt in 1966 een uitvoerig artikel aan zijn grafische werk, en in 1971 wordt het boek *De werelden van M.C. Escher* een bestseller. Escher kan dan echter niet lang meer van zijn grote roem genieten: op 27 maart 1972 overlijdt hij in het Diakonessenhuis te Hilversum.



Zelfportret, Houtsnede 1923

honderd jaar

Kleine nootjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen 'gekraakt' kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op pagina 40 van dit nummer.



Kleine

Rood geverfd

Een houten kubus is aan alle kanten rood geverfd. Hij wordt nu in 125 kleine kubusjes gezaagd, allemaal even groot. Hoeveel van deze kubusjes hebben geen enkel rood zijvlak?

Klopt de rechthoek?

In de onderstaande rechthoek moet je op de puntjes cijfers invullen, zodanig dat alles klopt. Maar pas op: als je overal een 1 neerzet, dan staan er plotseling 6 enen en dus niet "1 keer het cijfer 1"...

In deze rechthoek staat...keer het cijfer 1.
In deze rechthoek staat...keer het cijfer 2.
In deze rechthoek staat...keer het cijfer 3.
In deze rechthoek staat...keer het cijfer 4.
In deze rechthoek staat...keer het cijfer 5.

Schrijf voluit

a. 3 K K die zaten op een H
b. 20 S is een G
c. 12 A, 13 O
d. 30 D hebben A, J, S en N
e. 150 L heeft de T K
f. 64 V heeft een S

Drie kabouters

Kabouters dragen zoals je weet een puntmuts, en die muts is rood òf blauw. Drie kabouters staan achter elkaar op een trap. Alle drie kijken ze in de richting van de trap naar beneden; de bovenste ziet dus de andere twee, de middelste alleen de voorste. De kabouters weten zelf niet welke kleur muts ze op hebben en ze mogen dit ook niet aan elkaar vragen. Maar als een kabouter *uit wat hij ziet* kan afleiden welke kleur muts hij heeft, dan zegt hij: "Ik weet het!" De mutsen die ze dragen hebben niet allemaal dezelfde kleur. Is er een kabouter die uit wat hij *hoort* kan afleiden welke kleur muts hij op heeft?

Boompjes planten

Een tuinman heeft de opdracht gekregen om boompjes te kopen en deze achter in de tuin te plaatsen. Zijn baas zegt: "Ik wil vijf rijen van vier bomen zien". De baas verwacht natuurlijk dat de tuinman 20 boompjes koopt, maar hij koopt er maar 10, want dat is minder werk. Laat zien dat de opdracht ook met 10 boompjes uitvoerbaar is.

Eendenkroos

In een grote ronde vijver groeit eendenkroos. De oppervlakte van het kroos verdubbelt zich elke dag. Na 30 dagen is het wateroppervlak dichtgegroeid. Na hoeveel dagen was de helft van de vijver bedekt?

nootjes

10

10 munten

Tien munten liggen in de vorm van een driehoek met de punt naar beneden. Kun je door slechts *drie* munten te verplaatsen ze in een driehoek leggen met de punt *omhoog*?



De wiskunde is een tuin waar een machtige boom in het midden staat. Die boom is behangen met namen van belangrijke wiskundigen zoals Euclides, Apollonius, Leibniz en Newton. Maar er groeit nog veel meer: prachtige struiken en fraaie plantjes. In die tuin is ook plaats voor Escher. Dat blijkt uit de grote bewondering die Escher bij vele wiskundigen geniet en uit de waardering voor zijn werk.

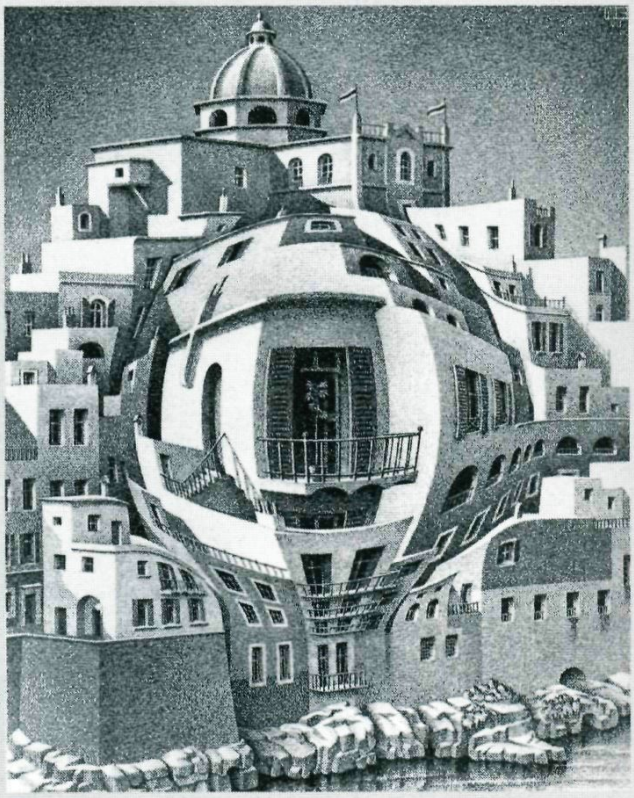
Escher,

Bruno Ernst

Op wiskundig gebied zijn er heel wat simpele, eeuwenoude wiskundige problemen die heel moeilijk op te lossen zijn. Bijvoorbeeld het vierkleurenprobleem, de Laatste Stelling van Fermat (een stelling uit 1637 die pas in 1995 bewezen is) of de vraag naar een eenvoudige formule voor de priemgetallen.
Maar vaak ligt het ook anders: het vinden van een zinnig probleem, het stellen van de vraag is dikwijls het belangrijkste element bij het bedrijven van wiskunde. Zoiets komt niet uit de lucht vallen, maar komt meestal voort uit het lang en intensief werken op het gebied waar deze vraagstelling als het ware verborgen ligt.
Eschers gedachtenleven concentreerde zich voor een groot deel op de essentie van het afbeelden zelf: hoe kun je een driedimensionale ruimte op een tweedimensionaal vlak afbeelden? Kunnen meerdere ruimten op dezelfde plaats op een vlak worden afgebeeld? Op welke verschillende manieren kan een vlak verdeeld worden in congruente figuren?

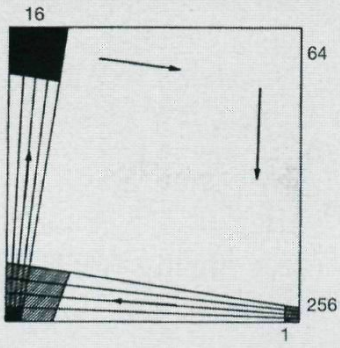
Uitdijing

Een van Eschers thema's was: wat gebeurt er met een afbeelding als het tekenvlak op een bepaalde manier vervormd wordt. Als we het bijvoorbeeld in het centrum willen laten uitdijen, wat gebeurt er dan met het gedeelte daarbuiten? Een netwerk hiervoor was wiskundig niet moeilijk te tekenen, maar Escher vond het resultaat interessant genoeg om er een prent van te maken en zo ontstond de litho *Balkon* uit 1945:



Balkon, litho 1945

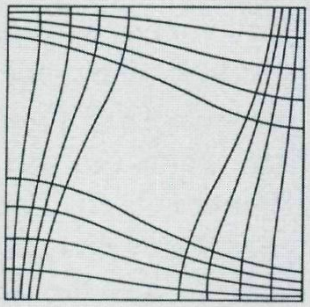
Tien jaar later probeerde hij een veel moeilijker probleem op te lossen: wat gebeurt er als we een vlak ringvormig laten uitdijen? Hoe hij dit onderzocht is door hemzelf beschreven. Hij ging uit van een vierkant (figuur 1) rechts onder begin-

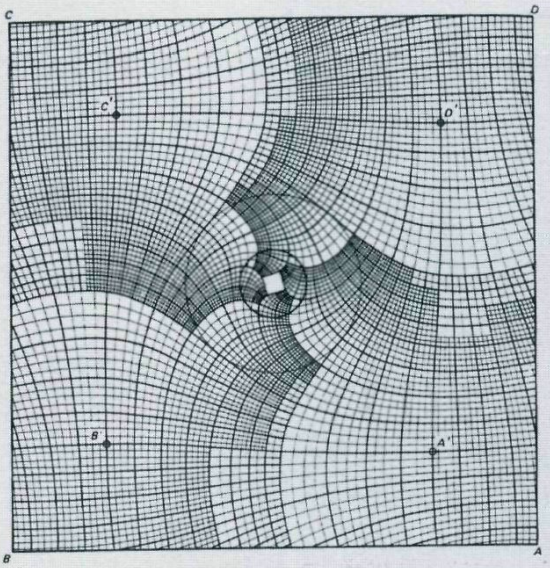


Figuur 1

le wiskunstenaar

nend met 1 cm. Gaande naar links groeit deze aan tot 4 cm en teruggaande naar het beginpunt is die ene cm aangegroeid tot 256 cm.


Figuur 2

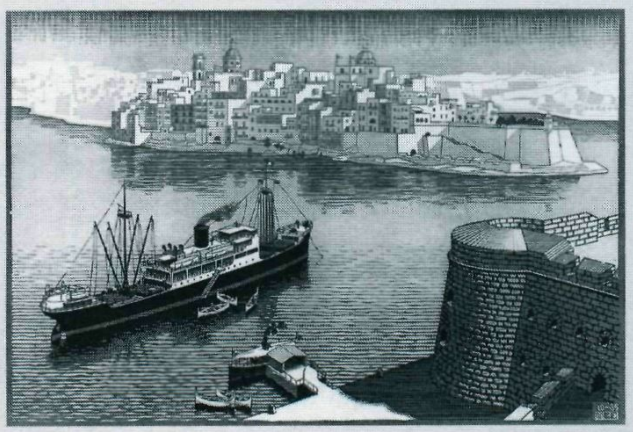


Figuur 3

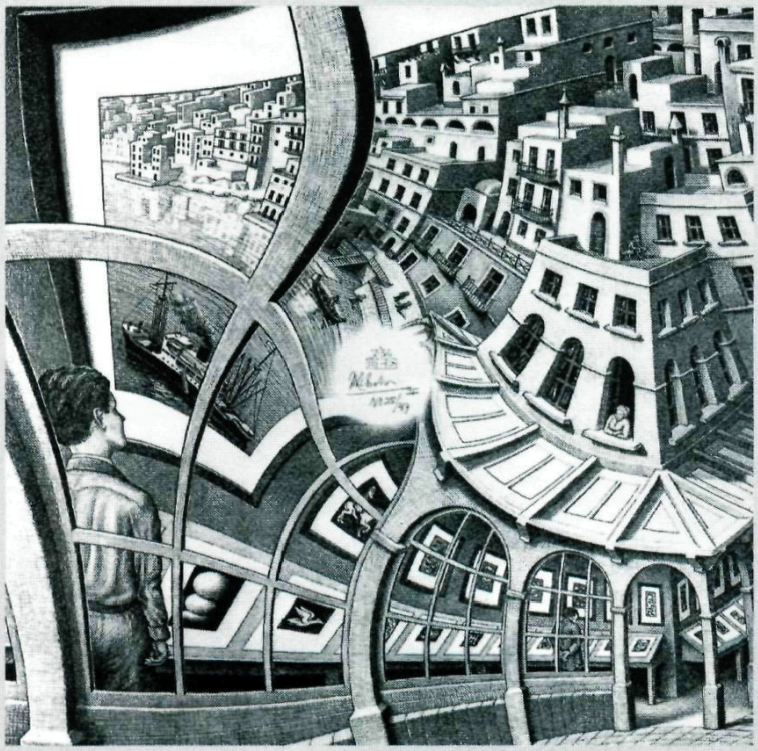
Zolang we met rechte lijnen werken is het effect onnatuurlijk. Als we bekijken wat er met een vierkantje bij het beginpunt gebeurt, dan verliest dat zijn rechte hoeken. Door met gebogen lijnen te werken bereikte Escher dat een vierkant meer op een vierkant bleef lijken (figuur 2). Hiermee is slechts het principe beschreven dat Escher gebruikte voor wat hij zich voorstelde bij een ringvormige uitdijing van het tekenvlak. Na veel puzzelen kwam hij tot het fraaie netwerk dat we in figuur 3 zien. Aanvankelijk stelde het hem teleur dat het centrum van de prent onbereikbaar was. Ook het op een logische manier uitbreiden van het netwerk buiten het gekozen uitgangsvierkant kostte hem veel hoofdbrekens.

Senglea

Daarna volgde Escher een weg die een wiskundige zeker niet zou zijn gegaan. Escher wilde de uitdijing die hem zo wonderlijk voorkwam zó in beeld brengen, dat iemand die niets wist van het ontstaansproces zich toch over het resultaat kon verwonderen. Hier begon het werk van de wis*kunstenaar*. Voor de beeldinhoud greep Escher terug naar een vroegere houtsnede: *Senglea* uit 1935 (een schiereiland op Malta):


Senglea, houtsnede 1935

Hij stelde zich voor dat één van de gebouwtjes op Senglea een winkel is waar prenten tentoongesteld worden. De ingang van deze galerie koos hij als beginpunt van de prent, rechtsonder. Naar links gaande worden de prenten (overigens allemaal Escherprenten) die aan de muur hangen en in de vitrines liggen steeds groter en dan komen we bij een jongeman die de prent Senglea bekijkt. Deze prent wordt naar boven toe steeds meer uitgerekt. Naar rechts gaande gebeurt hetzelfde en we zien de huizen, die op de oorspronkelijke prent kleine blokjes waren, op ons af komen, sterk vergroot en gedetailleerd.
Nu kwam voor Escher de grootste moeilijkheid: de vergroting langs de rechterzijde naar beneden. Die moest op de een of andere manier aansluiten bij het begin. De oplossing was even eenvoudig als geniaal. Escher liet de afbeelding uitlopen op een ingang van een prentengalerij die exact overeenkwam met de ingang waarmee de prent en de uitdijing begon. De afbeelding lijkt nu perfect gesloten, maar is het in feite niet, want het einde van de afbeelding is 256 maal zo groot als het begin: een ingang van een galerij kan onmogelijk identiek zijn aan een sterk vergrote ingang van een galerij die op de oorspronkelijke prent afgebeeld is.
Gaan we nu nog eens naar links, dan komen we weer een jongeman tegen die sprekend lijkt op degene die we reeds ontmoet hebben bij onze rondgang. Maar hij kan niet dezelfde zijn. Hij staat op de sterk vergrote prent en hij kijkt naar een prent ... waarop hij zelf afgebeeld is. En zo kunnen we eindeloos doorgaan en steeds in nieuwe werelden terecht komen, die weliswaar dezelfde beeldinhoud hebben, maar toch niet gelijk zijn.
Hiermee heeft Escher een wonderlijke, oneindig veelvoudige, wereld gecreëerd voor de toeschouwer die zijn prent zorgvuldig bekijkt, zonder hem lastig te vallen met al het getob dat hij had om een netwerk te tekenen waarin het vlak een ringvormige uitdijing ondergaat. ◢



Prententoonstelling, litho 1956

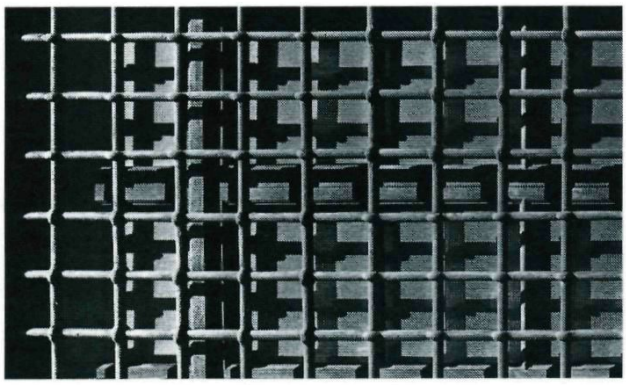
Het onmogelijke tralieraam



Escher maakte in 1958 de prent *Belvedere*. Op deze prent kom je een aantal interessante dingen tegen: een onmogelijk gebouw, een onmogelijke kubus, maar ook een onmogelijk tralieraam.

Rinus Roelofs

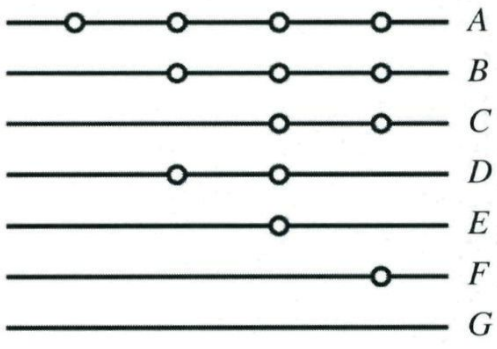
Bekijk eens de prent *Belvedere* (pagina 8). Linksonder in het gebouw zie je een mannetje achter tralies. De tralies zijn opgebouwd uit staven met daarin gaten waar een andere staaf doorheen geschoven kan worden. Dit soort ramen kom je veelvuldig tegen in Rome, waar Escher meer dan 10 jaar heeft gewoond (zie foto).



Het lijkt er dus op dat Escher zo'n tralieraam uit Rome als voorbeeld heeft gebruikt. Maar de ramen in Rome zijn allemaal volledig uit elkaar te schuiven tot een pakketje losse staven. Als je goed kijkt, dan zie je dat dit bij het tralieraam op de prent niet lukt. Escher heeft hier dus z'n eigen 'onmogelijke' tralieraam gemaakt.

(On)mogelijke tralieramen

We zullen zulke tralieramen eens nader bekijken. We gaan onderzoeken welke mogelijkheden we hebben wanneer we een raam met 4 horizontale en 4 verticale staven in elkaar willen schuiven. Elke staaf heeft dan 4 'knooppunten' met andere staven en dus 4 plaatsen waar we eventueel een gat in de staaf moeten hebben zodat er een andere staaf doorheen geschoven kan worden. Dit levert op het eerste gezicht $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ mogelijke verschillende staven op. Dit aantal wordt al minder wanneer we beseffen dat een staaf met 1 gat aan het begin hetzelfde is als een staaf met 1 gat aan het eind. Ga na dat er in totaal tien verschillende staven zijn te maken. Maar deze zijn niet allemaal bruikbaar. Omdat een gat in de staaf ook een verdikking veroorzaakt kunnen we daar geen staaf overheen schuiven. Dus bijvoorbeeld de staaf met aan het begin en aan het eind een gat is niet te gebruiken. Alleen de volgende zeven staven zijn bruikbaar:



Op de foto en in figuur 1a zie je een tralieraam waarin alle staven gelijk zijn: type C. Dit raam heeft de bijzonderheid dat je er niet één staaf van af kunt halen, maar dat je alle staven tegelijk (centraal) van elkaar af moet schuiven.

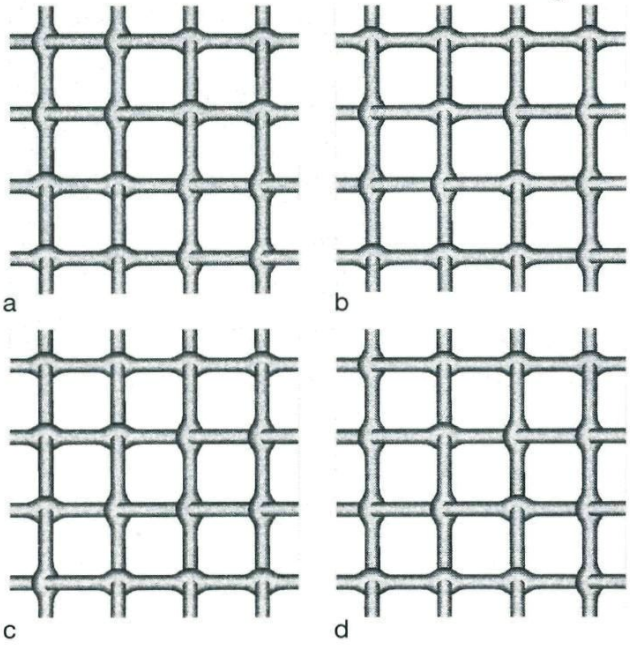


Belvedere, litho 1958

Het raam uit figuur 1b demonteer je juist wel staaf voor staaf, bijna spiraalsgewijs. Voor dit raam heb je vier typen staaf nodig. In figuur 1c zien we een raam opgebouwd met zes verschillende typen staaf. Je kunt je nu afvragen of je een raam kunt samenstellen met gebruikmaking van alle typen staaf (elk type minimaal één keer). Dit blijkt niet te kunnen. Ook is het niet zo dat alle ramen opgebouwd met de 'goede' staven *A*–*G* demontabel zijn! Kijk maar eens naar figuur 1d. Dit tralieraam is niet demontabel. Het raam dat Escher in zijn prent heeft gebruikt is nog weer anders, maar ook niet demontabel!

OPGAVE. Bedenk een niet-demontabel tralieraam dat echt verschilt van figuur 1d en van het raam in de *Belvedere*.

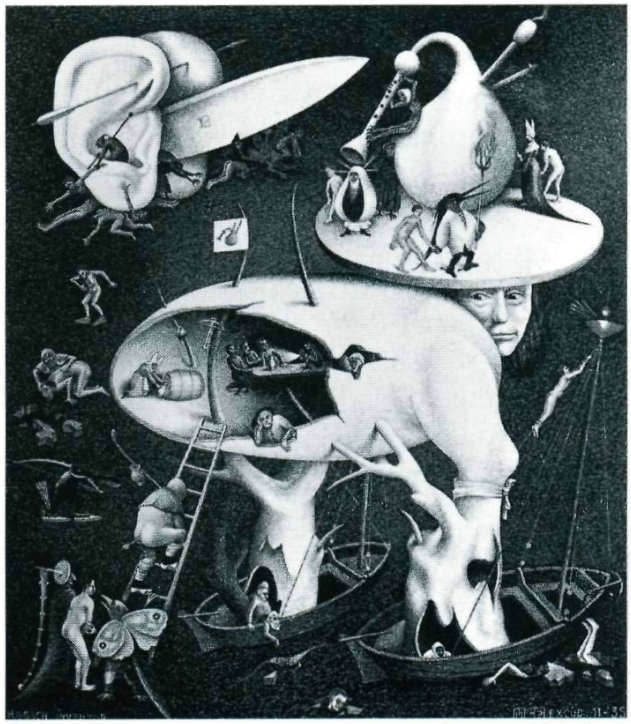
Figuur 1



Hieronymus Bosch

In de *Belvedere* is met elke persoon iets vreemds aan de hand: de jongen met de onmogelijke kubus, de gevangene achter het tralieraam. Over de figuren op de ladder heeft Escher zelf gezegd: "de twee personen die de ladder beklimmen bevinden zich in een onmogelijke relatie ten opzichte van elkaar". Rechtsonder aan het begin van de trap zie je twee figuren, een man en een vrouw in enigszins vreemde kledij. De man lijkt al wijzend te zeggen: "Is dit wat je bedoelt?" De vrouw lijkt iets terug te zeggen, maar wat? Op een prent van Escher uit 1935 komen we precies dezelfde vrouw tegen. De prent heet *De Hel* en is een getekende copie van een schilderij van Hieronymus Bosch (zie onder). Dit schilderij heeft Escher wellicht het idee gebracht voor de *Belvedere*. Want het 'bouwwerk' van de bootjes beneden, verbonden via twee boom-achtige dingen met de holle figuur erboven, heeft eenzelfde verwrongen struktuur als het gebouw in de *Belvedere*. Of dit echt zo is? We kunnen het Escher niet meer vragen. ◢

De hel, litho 1935



Vierkant zomer kampen

Wat doen zomerkampen in een wiskundetijdschrift voor jongeren? Het zal wel iets met wiskunde te maken moeten hebben, dat kan niet anders. Zijn het een soort pony-kampen alleen dan vol wiskunde? Nou, dat klopt wel ongeveer...

Liesbeth de Clerck en Mirjam Spijker

De zomerkampen die de stichting Vierkant voor Wiskunde organiseert zitten boordevol 'wiskunde'. Maar dan net even anders dan de wiskunde die je op school krijgt. Geen opgaven uit een wiskundeboek maar wel puzzelen. Een voorproefje uit het kampprogramma '97 voor 10 tot 12 jarigen:

Hoe kun je zonder tijdsverlies met behulp van een zandloper van 7 minuten en een zandloper van 11 minuten een ei precies 15 minuten laten koken?

De afgelopen zomervakantie hebben 60 jongens en meisjes van 10 tot 17 jaar deze zomerkampen bezocht. Ze zijn in drie verschillende kampen bezig geweest met diverse wiskundige activiteiten zoals het oplossen van spannende vraagstukken, het volgen van onderzoeksprogramma's om je wiskundige horizon te verruimen, en het ontwerpen van wiskundige kunstwerken. "Nou, het moeten dan wel echte bollebozen zijn die daar komen want ze zijn de hele dag met wiskunde bezig!" Dat valt wel mee. Per dag ben je ca. 5 uur met deze activiteiten bezig. Daarnaast wordt de dag gevuld met bosspelen, sportactiviteiten (zwemmen, volleyballen) en muziek. 's Avonds zijn er lezingen (sterrenkunde, cryptografie) of er is een spannend zoekspel en een kampvuur.

De kampen worden al een aantal jaren georganiseerd. Ze worden geleid door wiskundigen en wiskundestudenten. Afgelopen zomer was er voor het eerst een kamp voor 10 tot 12 jarigen. De deelnemers zijn onder andere bezig geweest met een onderzoeksprogramma waarbij ze zelf de logica probeerden te snappen achter een machine die woorden uit een taal kan herkennen. Ook hebben ze een aantal regelmatige veelvlakken onderzocht en zelf levensgrote ruimtelijke figuren gemaakt.



zomerkamp '97

Zomerkampen 1998

Deze zomer worden er vier verschillende kampen georganiseerd in de jeugdherberg de Poelakker te Lunteren. De week van 10 tot 14 augustus is voor 10 tot 14 jarigen, 17 tot 21 augustus is voor 14 tot 17 jarigen.

Ben je geïnteresseerd en wil je je aanmelden of meer informatie ontvangen, neem dan contact op met de stichting Vierkant voor Wiskunde. Telefoon: 020 - 444 77 76, email: vierkant@cs.vu.nl.

M.C. Escher in '98

Eschers werk is anno 1998 nog even populair als vijfentwintig jaar geleden. Met name in Japan, waar in het Huis ten Bosch te Nagasaki het Eschertheater veel bezoekers trekt (www.bekkoame.or.jp/~suga/htbe4.html).

Overal in de wereld wordt dit jaar de honderste geboortedag van M.C. Escher gevierd. De Rijksmunt slaat een herdenkingspenning en op 7 juli komt een 80-cents postzegel uit. Op Eschers geboortedag 17 juni wordt een plastiek onthuld bij Eschers geboortehuis Museum het Princessehof te Leeuwarden. Aansluitend is daar een tentoonstelling die tot eind juni duurt. Van oktober tot half december 1998 wordt in kasteel Groeneveld te Baarn de tentoonstelling 'M.C. Escher, Leven in Beeld' georganiseerd. In dezelfde periode is er in de Kunsthal te Rotterdam een overzichtstentoonstelling van zijn werk.

Baarn

Van 1941 tot 1970 woonde en werkte Escher in Baarn. In het stadhuis van Baarn kun je twee kunstwerken van Escher bewonderen: een glaskunstwerk boven de ingang en een plastiek in de hal. Deze zomer komt er een openluchttentoonstelling en op de nieuwe provinciale rotonde wordt een beeldhouwwerk 'Concentrische schillen' geplaatst. Onlangs gereedgekomen is de Escherlaan: in de gevel van een rijtje nieuwbouwwoningen kun je Eschers meest beroemde vlakvullingen terugvinden als tegeltje in de gevel.

Badlakens & stropdassen

Veel van Eschers bekendste grafische werk is verkrijgbaar in elke goed gesorteerde posterwinkel. Voorbeelden: *Klimmen en Dalen*, *Waterval*, en ook de 22 cm brede en 4 meter lange *Metamorfose II*. Al deze posters zijn te bestellen via de winkel van Cordon Art te Baarn (035-541 80 41).
Er is meer dan alleen posters: ook te koop zijn Escherpotloden, Escherbroches, Eschermousepads met de prent *Twee Handen* voor naast de PC, Escherspeelkaarten, Escherbadlakens en verschillende Escher T-shirts. Voor vaderdag zijn er heuse zijden Escherstropdassen. Deze artikelen zijn onder meer verkrijgbaar bij de Museumshop te Baarn, de enige museumwinkel in Nederland die niet in een museum gevestigd is (035-542 42 22).

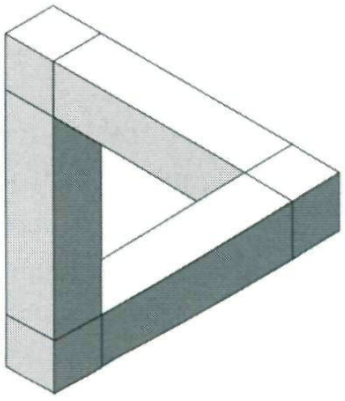
Internet & CD-ROM's

Escher heeft op Internet vele fans. Een aantal sites die zonder toestemming afbeeldingen van zijn werk toonden zijn echter gesloten. Een goed startpunt met veel verwijzingen naar Eschersites is de Escherpagina op de homepage van Pythagoras. Daar vind je ook informatie over over de CD-ROMS *Escher Interactief* en *Spiegelkunstenaar*. Met de laatste CD-ROM kun je makkelijk zelf betegelingen ontwerpen. Vergelijkbare software is ook op Internet aanwezig, bijvoorbeeld als JAVA-applet.

In 1983 maakten Dick Baas Becking, prof. Koos Verhoeff en beeldend kunstenaar Popke Bakker een ingewikkelde driedimensionale constructie die van één kant bekeken precies de onmogelijke kubus in Eschers *Belvedere* te zien gaf.
Maar er zijn ook driedimensionale 'onmogelijke figuren' die je makkelijk zelf maken kunt.

Onmogelijke kubussen

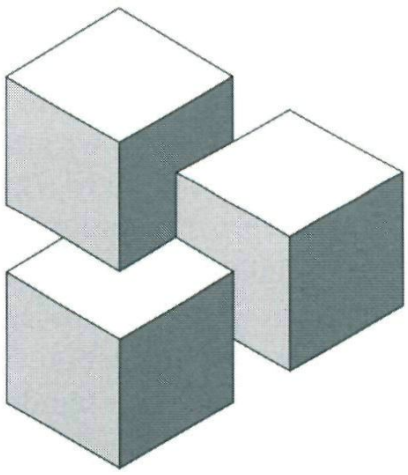
Roger Penrose is een wereldvermaard wiskundige. In 1954 was hij een jonge student die in Amsterdam deelnam aan het Internationaal Mathematisch Congres. Hij bezocht er de tentoonstelling die aan Escher gewijd was. Zelf vertelt hij hierover: "Ik ging naar de tentoonstelling, en ik herinner me dat ik volkomen in de ban raakte van dit werk. Op de terugweg naar Engeland probeerde ik zelf iets 'onmogelijks' te maken. Ik probeerde verschillende ontwerpen met stokken die op allerlei manieren voor en achter elkaar liepen, en tenslotte kwam ik op de onmogelijke driehoek."



Je ziet een driehoekige constructie die bestaat uit drie kubussen en drie balkjes. Met de kubussen en de balkjes zelf is niets aan de hand – ze zitten alleen op een vreemde manier aan elkaar vast. Bekijk maar eens de bovenste kubus en de rechter kubus. Hun bovenkanten liggen in één horizontaal vlak. Hetzelfde geldt voor de rechter en de onderste kubus. Maar als je de bovenste en onderste kubus met elkaar vergelijkt, dan zie je dat hun bovenkanten helemaal *niet* in hetzelfde vlak liggen. Kortom, de tekening suggereert een object dat in werkelijkheid niet kan bestaan.

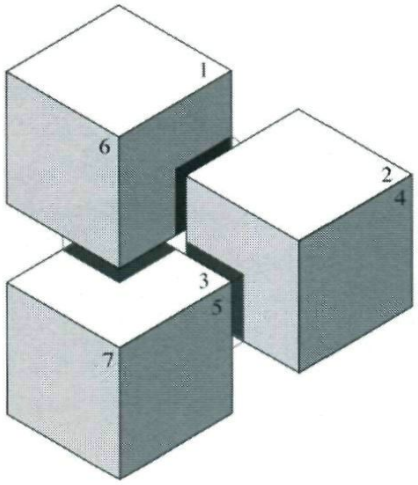
Zonder balkjes

Je kunt de balkjes in de onmogelijke driehoek van Penrose zo lang maken als je wilt. De figuur verandert daardoor niet wezenlijk. Maar dan kun je de balkjes net zo goed korter maken. Als je de balkjes helemaal weglaat krijg je de volgende figuur.



Je ziet dat we precies de drie kubussen van de onmogelijke driehoek overgehouden hebben. De bovenkanten van de bovenste en de rechter kubus lijken weer in hetzelfde vlak te liggen, evenals de bovenkanten van de rechter en de onderste kubus. Anderzijds lijken de bovenkanten van de bovenste en de onderste kubus duidelijk *boven* elkaar te liggen. Weer een onmogelijk figuur!

Maar de laatste conclusie hebben we te snel getrokken. De figuur van de drie kubussen is best mogelijk, maar op een andere manier dan gesuggereerd wordt. Voor de duidelijkheid trekken we de kubussen een beetje uit elkaar. Je ziet dan het volgende.



We zien dat bovenvlak 1 hoger ligt dan bovenvlak 2, en vlak 2 ligt weer hoger dan vlak 3. Verder ligt het vlak waar zijvlak nr. 4 in ligt vóór het vlak van 5. Op dezelfde manier ligt het vlak van zijvlak nr. 7 vóór het vlak van nr. 6.

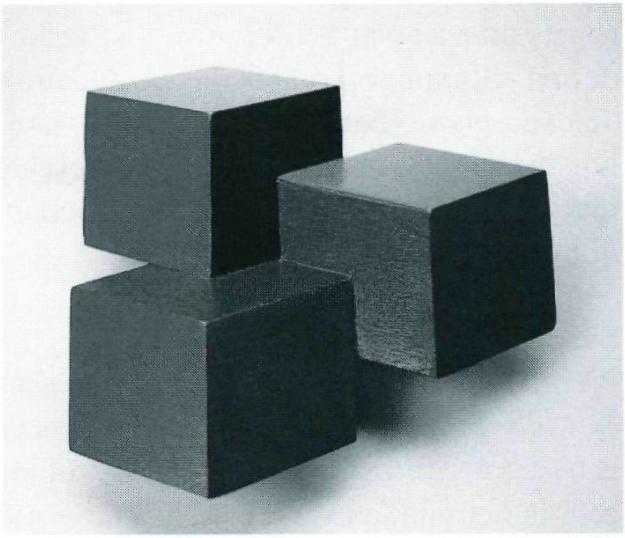
Deze ruimtelijke figuur is eenvoudig zelf te maken. Teken op dik papier drie kubusuitslagen met plakrandjes, knip die uit en plak die in elkaar. Met drie extra lijmvlakken plak je de kubussen in elkaar tot je eigen 'mogelijke onmogelijke' figuur.

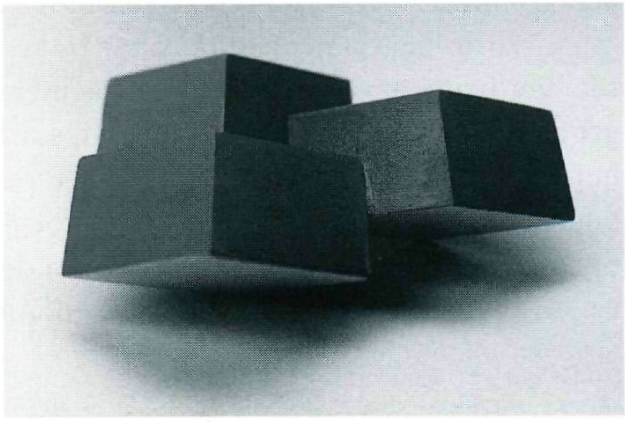
Popke Bakker

Als we het driedimensionale model van de drie kubussen van precies de goede kant bekijken, dan zien we de 'onmogelijke figuur' van de vorige pagina. Beeldend kunstenaar Popke Bakker realiseerde zich dat als je de kubussen in de kijkrichting platdrukt, je nog steeds dezelfde figuur blijft zien.

Hij nam zes even grote ruiten met een tophoek van 60° en maakte daarvan een vervormde, 'platgedrukte' kubus. Drie van die 'kubussen' stelde hij samen tot een object dat van de zijkant bekeken eruit ziet als een platte presse-papier. Van de goede kant bekeken zie je echter drie 'mogelijke onmogelijke' kubussen.

Bron: Bruno Ernst, *Nieuwe avonturen met onmogelijke figuren.*





objecten van Popke Bakker

In Eschers gepubliceerde grafische werk komen betegelingen haast nooit in hun 'kale', wiskundige vorm voor. Hij gebruikt ze altijd om er iets verrassends mee uit te drukken: iets dat de kijker aan het denken of aan het filosoferen zet.

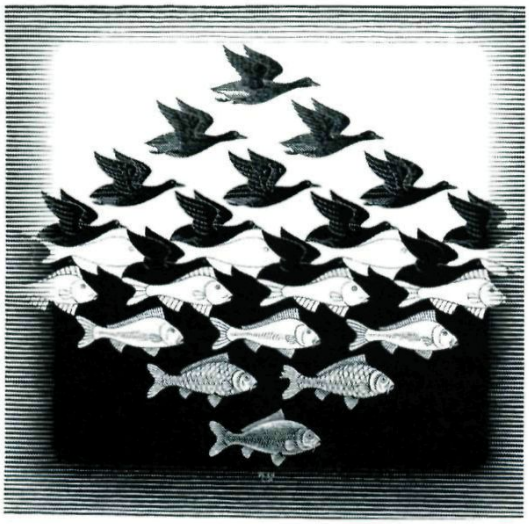
Escher en het o

Jan van de Craats

Uit de schetsboeken van M.C. Escher kunnen we opmaken dat hij een uitgebreide studie van regelmatige vlakvullingen en tegelpatronen gemaakt heeft. Voor zijn prenten vervormt hij de tegels tot herkenbare dieren- of mensenfiguren, en vervolgens laat hij ze binnen de prent van gedaante veranderen. Ze lijken uit het papier omhoog te komen, ze bijten zichzelf in hun eigen staart, ze verdwijnen in de achtergrond of komen er in spiegelbeeld weer uit te voorschijn. Zo drukken ze iets uit van wat het leven zelf is: verandering. Sommige prenten heten dan ook *Metamorphose*, hetgeen gedaanteverwisseling betekent. Of ze beelden de levenscyclus uit: geboorte, groei, volwassenheid, ouderdom, verval.

Lucht en Water

Neem bijvoorbeeld de houtsneden *Lucht en water I* en *Lucht en water II*, die allebei gebaseerd zijn op regelmatige vlakvullingen: in het midden van de prent kun je die vlakvullingen met vogels en vissen in hun 'pure' vorm herkennen. Maar naar boven toe verdwijnen de vissen in de achtergrond en komen de vogels helemaal los uit het papier, terwijl naar beneden toe de vogels juist verdwijnen en de vissen volledig gedetailleerd uitgewerkt worden. In de eerste prent is de wiskundige vlakvulling een simpel patroon van ruiten met alleen maar verschuivingen erin. De vogels en de vissen bewegen allebei naar rechts. De vlakvulling van *Lucht en Water II* is interessanter: naast verschuivingen komen ook *glijspiegelingen* voor. Kijk maar naar de



Lucht en water I, houtsnede 1938

Lucht en water II, houtsnede 1938



Vissen, houtgravure 1956



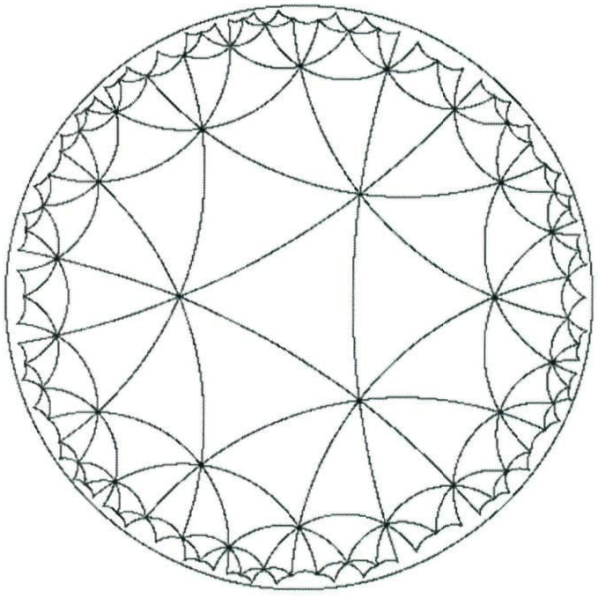
neindige

vissen in het midden: de bovenkant van elke staart raakt de ondervin van de vis die er schuin boven de andere kant op zwemt. Je kunt de ene vis in de andere overvoeren door hem eerst te spiegelen in een verticale lijn, en het spiegelbeeld vervolgens te verschuiven. Tegelijk met de vissen gaan ook de vogels door die beweging in elkaar over. Spiegelen en glijden dus, vandaar dat we die beweging samen een glijspiegeling noemen.

Het oneindige

Wat Escher in zijn schetsen van tegelpatronen misschien als 'onvolkomenheid' zag, is dat ze eigenlijk maar een kleine uitsnede zijn van een vlakvulling die naar alle kanten doorloopt. Je ziet maar een klein stukje; de tekening is niet afgerond. In zijn twee houtsneden *Lucht en water* heeft hij als oplossing gekozen voor een afronding naar boven en naar beneden waarbij de vogels en vissen vrij wegvliegen of wegzwemmen. Artistiek gezien zijn deze platen dan ook volkomen bevredigend. Let ook eens op de harmonieuze wijze waarop de randen van de prenten in dit spel meedoen. Maar de oneindigheid van de vlakvulling is daarmee verdwenen. In latere prenten wilde Escher die 'oneindigheid' duidelijker naar voren halen. Bij zijn eerste stappen op dat gebied deed hij dit door zijn figuren naar het midden van de prent toe te verkleinen. De houtgravure *Vissen* uit 1956 is daar een mooi voorbeeld van. Naar het midden toe worden de ringen van telkens vier vissen steeds kleiner: het oneindige is binnen het bereik van de prent gebracht! Maar naar buiten toe zouden ze ook steeds groter moeten worden, en dat kan in werkelijkheid natuurlijk nooit getekend worden. In zekere zin zijn zulke prenten dus nog steeds niet 'af'.

Heel lang heeft Escher geworsteld met de vraag hoe hij hier een mouw aan kon passen. Veel prenten heeft hij gemaakt met oneindige verkleiningen naar een of meer centra toe, maar allemaal werden ze aan de rand op een willekeurige manier afgesneden. De Canadese wiskundige H.S.M. Coxeter zorgde voor een doorbraak door Escher een meetkundige figuur te laten zien van een cirkel met daarin een patroon van cirkelbogen dat zich juist naar de rand toe steeds verder verkleint. Het oneindige zit daarbij dus niet in het centrum, maar aan de rand, en de cirkel is daarmee een symbool geworden van een in zichzelf besloten, volmaakte wereld die ons het oneindige toont zonder daarvoor oneindig veel ruimte in te nemen.



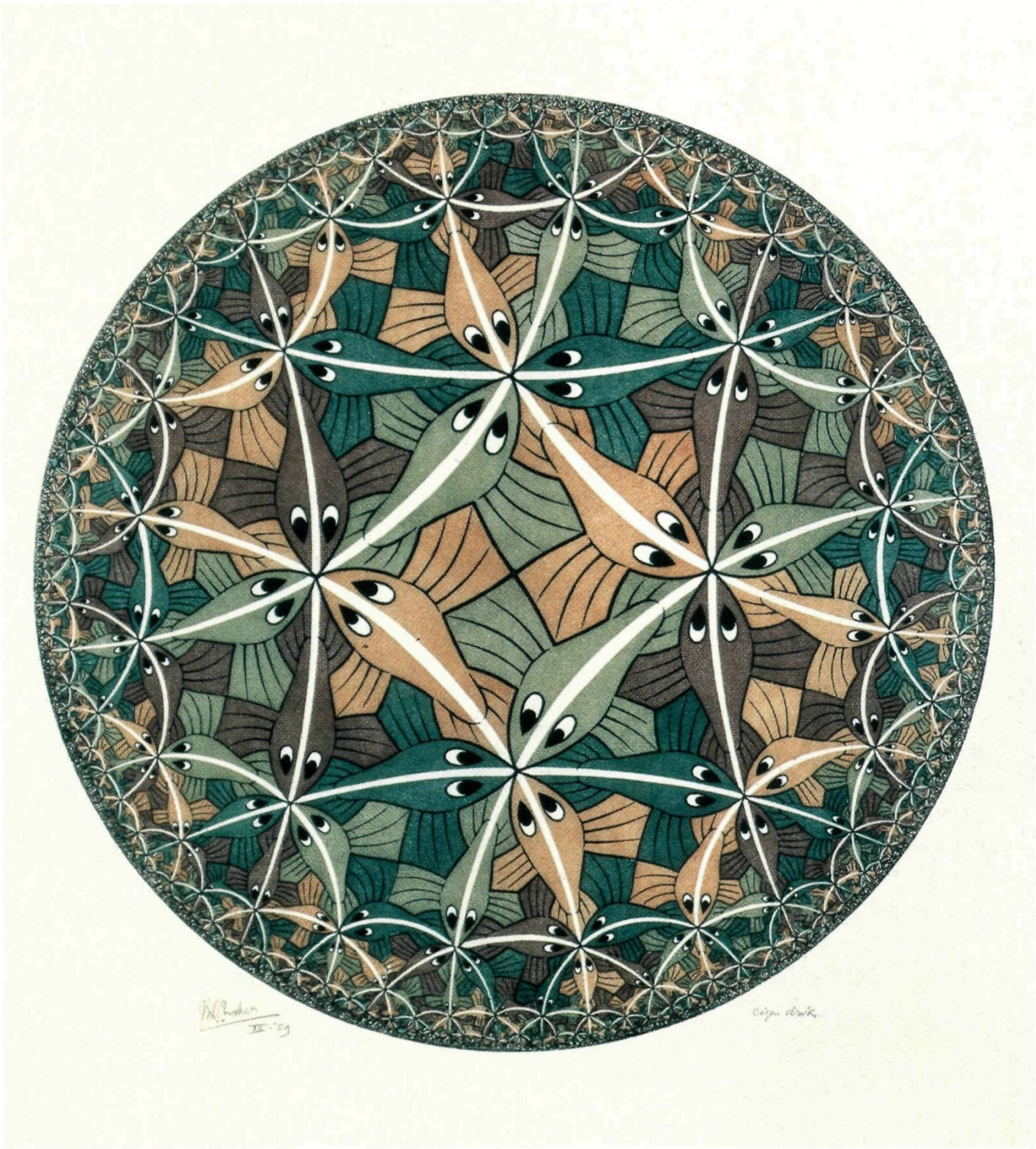
Cirkellimieten

Enthousiast begon Escher aan een hele serie 'Cirkellimieten' en aanverwante prenten, waarin hij deze ideeën op een artistieke wijze uitwerkte. Maar niet alleen artistiek: ook wiskundig sloeg Escher, die zelf altijd beweerde geen wiskundige scholing te hebben gehad, onvermoede nieuwe paden in.

In Cirkellimiet III, artistiek en wiskundig gezien een van de absolute hoogtepunten van zijn oeuvre, toont Escher op een magistrale wijze zijn meesterschap. In deze houtsnede zijn vier soorten vissen te zien in vier verschillende kleuren die kop aan staart van rand naar rand zwemmen. Elke vis wordt op precies dezelfde wijze door zijn buren omringd. In elk snijpunt van wegen komen drie cirkelbanen samen. De grote cirkelschijf wordt op een volmaakte manier door al die witte cirkelbanen verdeeld in 'vierkanten' en 'driehoeken'. Het patroon houdt nooit op; naar de rand toe zet het zich tot in het oneindige voort.

Voordat Escher aan die prent kon beginnen, moest hij eerst uitdenken hoe al die verschillende cirkelbogen lopen, waar hun middelpunten zich bevinden en hoe groot hun stralen zijn. Dat vereist een fikse dosis meetkundig inzicht. H.S.M. Coxeter heeft later het onderliggende cirkelpatroon volledig uitgewerkt en doorgerekend. Hij stelde daarbij onder andere vast dat de witte cirkels de rand moeten snijden onder een hoek waarvan hij de cosinus exact kon berekenen: het is $(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1/2})/2 \approx 0{,}1741553$. Dit correspondeert met een hoek van ongeveer 79,97°, en dat klopt prachtig met wat je in de echte houtsnede kunt opmeten.

Coxeters voorbeeld kwam uit een tak van de meetkunde die bekend staat als de niet-euclidische meetkunde. De cirkels waarmee Escher zijn patroon gemaakt heeft, staan in die meetkunde bekend als 'equidistantielijnen', maar van al die geleerdheid had Escher geen weet. Hij ontdekte op eigen houtje een nieuwe cirkelwereld met eigen schoonheden en wetmatigheden. ◢



Cirkellimiet III, houtsnede 1959

In het kader van het 100ste geboortejaar van M.C. Escher organiseert de Stichting Ars et Mathesis samen met Pythagoras in Nederland en Vlaanderen een prijsvraag.

Stichting Ars et Mathesis en Pythagoras

Escherprijs

Prijzen

Elke prijs bestaat uit een kunstwerk en een geldbedrag. Er zijn prijzen in drie leeftijdsgroepen: 1e prijs: *f* 500,-, 2e prijs: *f* 250,- en 3e prijs: *f* 125,-. De leeftijdsgroepen zijn:

1. onderbouw = t/m 14 jaar
2. bovenbouw = t/m 17 jaar
3. open groep = alle leeftijden

KLASSENPRIJS. Voor schoolklassen is er een speciale prijs: 1e prijs: *f* 1000,-, 2e prijs: *f* 500,- en 3e prijs: *f* 250,-. De prijzen zijn beschikbaar gesteld door door de M.C. Escherfoundation, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, het Freudenthal Instituut en Pythagoras (met steun van de Stichting de Wageningse Methode).

Beoordelingscriteria

Beoordeeld wordt op artisticiteit (creativiteit, originaliteit en kleurgebruik) en op wiskundige inbreng.
De jury bestaat uit: prof. dr F. van der Blij, Jos de Mey, dr Zsofia Ruttkay, Joke Mestdagh, prof. dr E. Looijenga en Hans van Lint.

Inzendtermijn

Inzendingen moeten uiterlijk maandag 19 oktober 1998 binnen zijn bij het redactieadres van Pythagoras:

Erjen Lefeber
Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede

Prijsuitreiking

De prijsuitreiking vindt plaats in november 1998 tijdens de jaarlijkse Ars et Mathesisdag te Baarn. Er wordt dan een expositie ingericht met werk van de prijswinnaars. Tezelfdertijd wordt er in kasteel Groeneveld te Baarn een tentoonstelling gehouden over het leven van M.C. Escher.

Meer informatie

Aanvullende informatie is te vinden op Internet, op de homepage van Pythagoras. Het adres is:
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/Escher98/

Daar vindt u een reglement, een uitgebreide toelichting en literatuurverwijzingen. Heeft u geen Internet, dan kunt een briefje naar de redactie schrijven, u krijgt dan de gewenste informatie thuisgestuurd.
U kunt ook de redactie e-mailen:
pythagoras@wins.uva.nl.

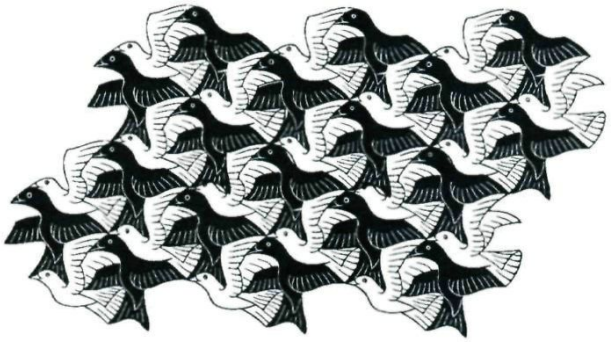
De opdracht

Maak een kunstwerk geïnspireerd op het werk van M.C. Escher.
Het werk moet passen in een van de drie volgende categorieën:

vraag 1998

1. VLAKVULLINGEN.

Maak een tekening waarin slechts één of twee motieven voorkomen die het vlak geheel of gedeeltelijk opvullen. Het motief kun je letterlijk herhalen, zoals Escher deed in onderstaande Regelmatige vlakvulling met Vogels, houtgravure 1949.



Je mag ook het motief geleidelijk laten veranderen. Met de letterlijke herhaling van het motief suggereer je een oneindige herhaling. Met een geleidelijke verandering kun je de suggestie van oneindigheid *in* de tekening aanbrengen. Escher deed dit bijvoorbeeld in zijn *Cirkellimiet III* (zie pagina 17).

Belvedere (detail)





Relativiteit (detail), 1953

2. ONMOGELIJKE FIGUREN.

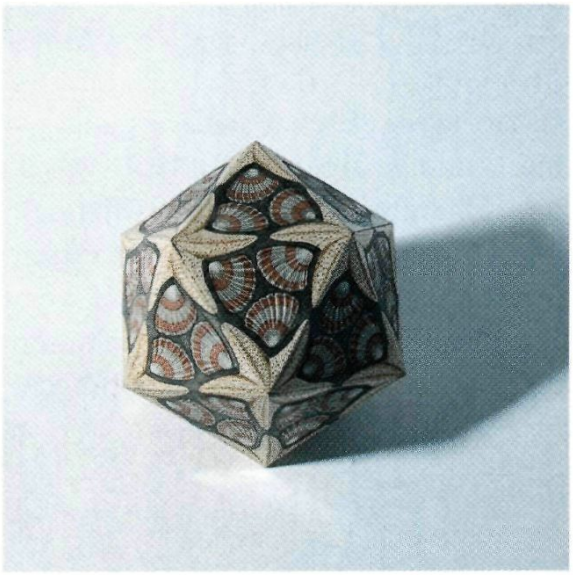
In Eschers werk komen 'onmogelijkheden' voor: dingen die je wel kan tekenen, maar die in de werkelijkheid niet mogelijk zijn. Bedenk zelf een of meer onmogelijkheden en verwerk die in een kunstwerk.

3. BETEGELINGEN OP OPPERVLAKKEN IN DE RUIMTE.

Escher heeft een aantal kunstwerken gemaakt door regelmatige vlakvullingen om ruimtelijke objecten heen te 'vouwen'. Maak zelf een ruimtelijk kunstwerk door een wiskundig interessant ruimtelijk oppervlak (bijvoorbeeld een buckyball, een torus of een puntige ster) te 'betegelen' met één of meerdere motieven.

Icosaëder met zeesterren en schelpen





foto's © C. Crommelin

Decoratieve vlakvullingen kun je zelf maken uitgaande van een paar simpele meetkundige vormen. Deze elementaire vormen zijn misschien wel abstract, maar heel gemakkelijk om mee te werken en ze leveren prachtige evenwichtige en kleurrijke patronen op.

Sierlijke

Ton Schotten

In 1922 maakte Escher de onderstaande houtsnede. Je ziet 8 verschillende gezichten. Door met dit patroon te gaan stempelen kun je, zonder tussenruimte en zonder te overlappen, het hele vlak opvullen.



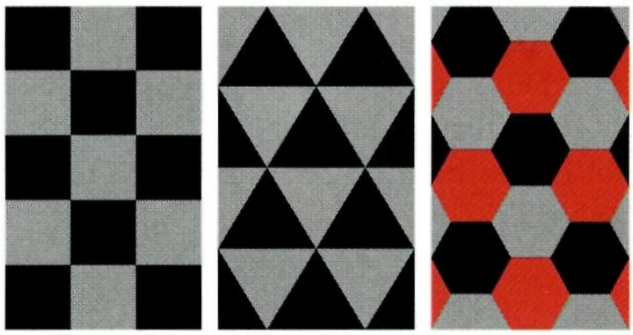
Acht gezichten, houtsnede 1922

Later kreeg Escher belangstelling voor meetkundige figuren. In 1936 was hij in het Alhambra te Granada (Spanje), een Moors paleis dat op tal van plaatsen met prachtig gekleurd tegelwerk is versierd. Daar maakte Escher talrijke schetsen van de Moorse decoratieve vlakvullingen.

Vlakvullingen

Een metselaar die een muur metselt, vult een vlak met stenen, dus rechthoeken. De stratenmaker doet hetzelfde. De stenen zijn eigenlijk een soort vul-elementen; er blijft geen ruimte over. Rechthoekige vormen zijn het meest praktisch; ze worden volop gebruikt, onder andere bij tegelwerk en parket.

Maar behalve met rechthoeken en vierkanten kun je het platte vlak ook met andere vormen vullen. We gaan hier uit van de drie regelmatige veelhoeken waarmee je een vlak kunt vullen zonder ruimte over te laten: het vierkant, de gelijkzijdige driehoek en de regelmatige zeshoek.



Zelf een tegel maken

We gaan nu zelf een decoratieve vlakvulling maken. Dat gaat in drie stappen.

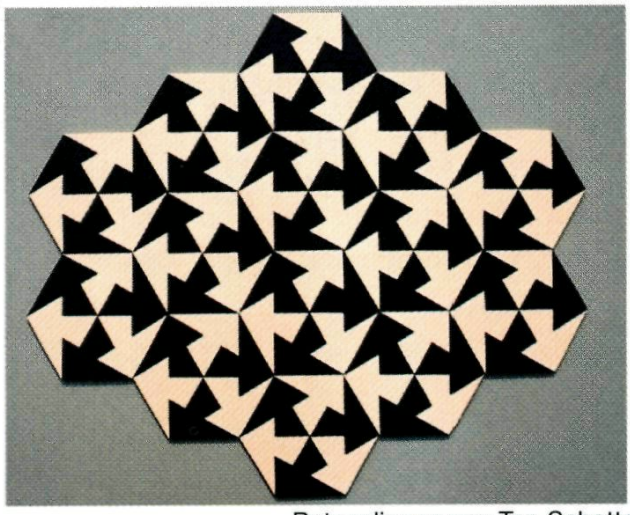
STAP 1. Kies één van de regelmatige veelhoeken waarmee het platte vlak kunt betegelen als grondvorm. Als voorbeeld nemen we de gelijkzijdige driehoek.

Sierlijke betegelingen



STAP 2. Deze grondvorm gaan we veranderen. We halen er een vormpje uit en voegen dat op een andere plaats weer toe. In de figuurtjes hierboven zie je een aantal voorbeelden.

STAP 3. Met de 'tegel' uit stap 2 kun je het platte vlak gaan betegelen. Als je dan het tegelpatroon invult met harmonieuze en contrasterende kleuren, dan krijg je een decoratieve vlakvulling. In de afbeeldingen hieronder zie je drie uitgewerkte voorbeelden.



Betegelingen van Ton Schotten

Op verschillende manieren kun je van je betegeling een echt werkstuk maken:
1. teken met potlood de vlakvulling op papier; en kleur de tegels met bijvoorbeeld kleurpotlood of verf;
2. zet de tekening op dun, gekleurd karton, knip of snijd de vormen uit en plak ze op stevig materiaal,
3. breng de tekening over op triplex of MDF, zaag de elementen uit, schilder ze en lijm ze op wat dikker materiaal.

Op de hierboven beschreven methode kun je naar hartelust variëren. Je kunt bijvoorbeeld in plaats van één stukje ook meerdere stukjes weghalen en ergens anders weer toevoegen (zie ook pagina 33).





In de straten van Caïro kun je een tegelpatroon tegenkomen dat uit vijfhoeken bestaat. Dit patroon staat bekend als Caïro-patroon. Om dit patroon in te kleuren heb je de keuze uit een aantal leuke mogelijkheden.

Tegels

Rinus Roelofs

Escher is misschien wel het meest bekend door zijn regelmatige vlakverdelingen. Wanneer we een vloer willen bedekken met tegels van dezelfde vorm komt al snel het gebruik van kleur aan de orde. Om het patroon duidelijk naar voren te laten komen is het wenselijk twee tegels die met een kant tegen elkaar liggen elk een andere kleur te geven. Dit is meestal niet zo'n moeilijke opgave, zelfs wanneer je als extra eis stelt dat je zo weinig mogelijk kleuren wilt gebruiken.



Regelmatige vlakverdeling E3, 1936

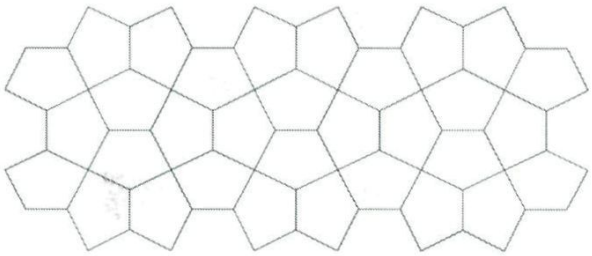
In de linker tekening van Escher zie je tegels in de vorm van een mannetje, een gewichtheffer. Escher gebruikt hier drie kleuren en je ziet bijvoorbeeld dat nergens twee witte mannetjes tegen elkaar aan liggen. We komen dezelfde tekening nog een paar keer tegen in het werk van Escher. Eén keer gebruikt hij geen drie maar vier kleuren, maar wel zo dat de kleuren mooi regelmatig zijn verdeeld.



schets

Vier kleuren

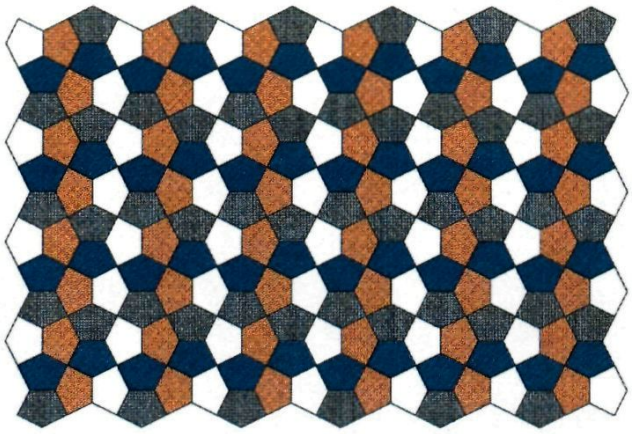
Op hoeveel manieren kunnen we deze tekening regelmatig intekenen met vier kleuren? Om dit probleem wat gemakkelijker te kunnen bekijken vereenvoudigen we de figuur tot een vijfhoek (elk mannetje grenst aan vijf andere). Dit patroon van vijfhoeken staat bekend als het Caïro-patroon, omdat het in de straten van Caïro echt als betegeling is gebruikt.



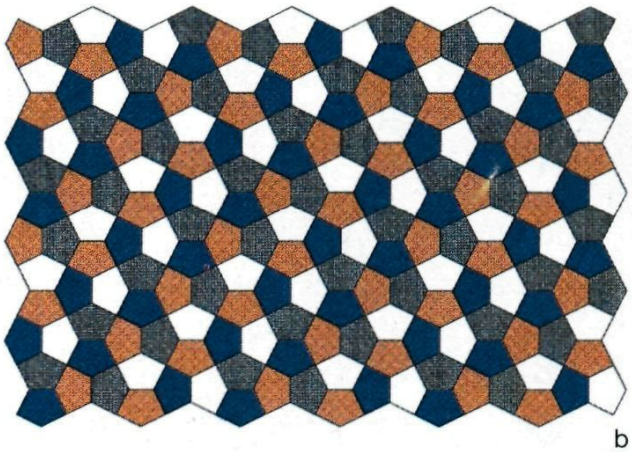
kleuren

In figuur 1 zie je de drie verschillende regelmatige verdelingen van de vier kleuren. In figuur 1a herken je het patroon dat Escher in zijn de tekening gebruikte voor zijn kleuring met vier kleuren. Daarin zie je ketens van dezelfde kleur: twee verticale en twee horizontale. Figuur 1c is erg regelmatig: alle vijfhoeken met dezelfde stand hebben dezelfde kleur.

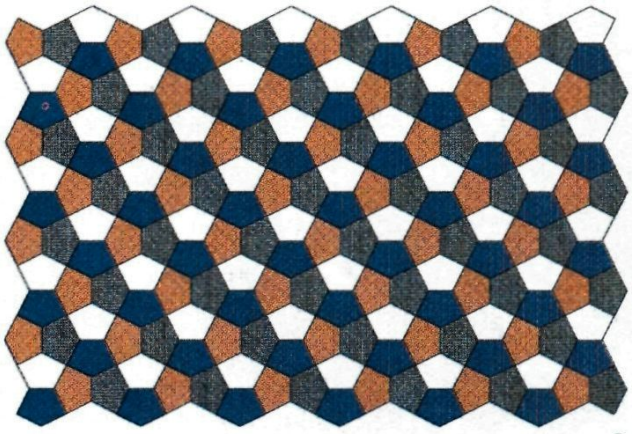
Figuur 1



a



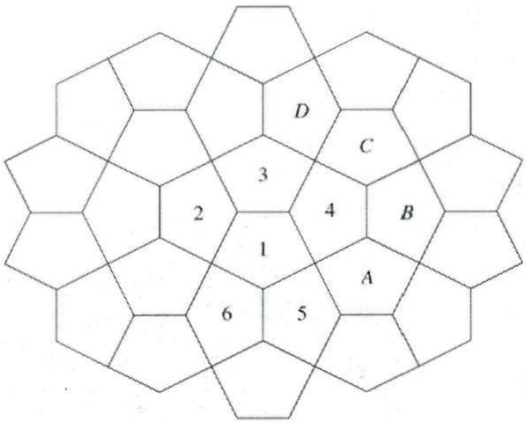
b



c

Zes kleuren

Ook met vijf kleuren is het Caïro-patroon heel mooi regelmatig in te kleuren. Maar wanneer je de vloer met zes verschillende kleuren wilt bedekken en wel zo dat aan elke tegel van een bepaalde kleur de andere vijf kleuren grenzen, dan blijkt dat niet te kunnen!



In de bovenstaande figuur zien we een tegel van kleur 1, met daarom heen tegels met de kleuren 2, 3, 4, 5 en 6. Tegel *A* mag niet met kleur 4 of 5 worden bedekt. Ook valt kleur 3 af, omdat dan de tegel met kleur 4 tussen twee tegels met kleur 3 ligt. Omdat ook de kleuren 1 en 6 afvallen blijft alleen kleur 2 over. Voor tegel *B* kunnen we eenzelfde redenering volgen en we zien dat tegel *B* kleur 6 moet krijgen. Je ziet nu misschien zelf al dat tegel *C* met kleur 5 bedekt moet worden. Wanneer je nu tegel *D* volgens de regels wilt kleuren zie je dat geen van de zes kleuren gebruikt kan worden!

Je eigen regelma

Regelmatige vlakverdeling E105, 1959



Regelmatige vlakvullingen kom je overal tegen. Lopend op straat herken je in de rangschikking van de stoeptegels verschillende patronen. We zullen in dit artikel laten zien hoe je zelf zo'n regelmatige vlakvulling ontwerpen kunt.

tige vlakvulling

Anrina Kolkman en Monique Pijls

In Spanje en Portugal zijn de huizen vaak versierd met mooie betegelingen. Dit zijn mozaïeken waar een herhalend patroon in zit. Escher heeft veel van die betegelingen in Zuid-Spanje bestudeerd. Hij heeft ze nagetekend en heeft er variaties op gemaakt met allerlei dieren en figuurtjes.
Bekijk de prent op pagina 24 eens. Het is een voorbeeld van een regelmatige vlakvulling. Je ziet dat de paarden zó herhaald worden dat ze elkaar niet overlappen, maar dat ze wel het hele vlak opvullen.
Een regelmatige vlakvulling is een patroon dat ontstaat door een bepaald figuurtje, ook wel 'tegel' genoemd, zó te herhalen dat het hele vlak wordt opgevuld zonder dat de tegels elkaar overlappen. Het hele patroon kan door translatie (verschuiving) in twee richtingen zó verplaatst worden, dat het weer op zichzelf terecht komt. Bovendien kan het patroon extra symmetrieën hebben: rotatie-symmetrie (draaiingen) en spiegelings-symmetrie.

OPDRACHT 1.
Neem een vel transparant papier en trek het herhalende deel, de 'tegel' over. Let op: we maken geen onderscheid tussen de bruine en witte paarden. [In de kantoorboekhandel is mat transparant papier te koop. Dit heb je straks ook nodig voor je eigen ontwerp.] Hoe kun je de tegel verplaatsen zo dat hij weer op zichzelf terecht komt?

OPDRACHT 2.
Onder de mooie paarden kun je een rooster van veelhoeken (driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken ...) herkennen waar het hele vlak mee wordt opgevuld. Teken dit onderliggende rooster op een transparant vel.
Een systematische manier om dit onderliggende rooster te vinden is de volgende: Je zoekt de hoekpunten in de tekening waar verschillende figuren samenkomen. Bij een van die figuren loop je de hele vorm langs op zoek naar andere punten waar meerdere figuren samenkomen. Als je alle punten hebt gevonden, dan kun je die punten met elkaar verbinden door rechte lijnen en dat is dan het onderliggende rooster. Probeer het nog maar eens!

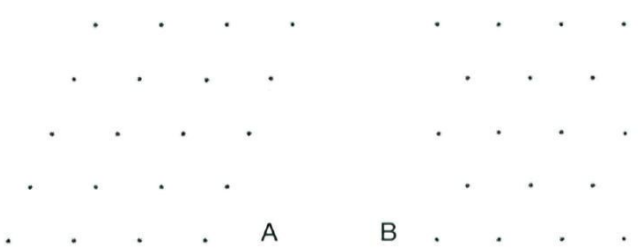
OPDRACHT 3.
Zoek op de homepage van Pythagoras nog meer regelmatige vlakvullingen van Escher en teken het onderliggende rooster.

OPDRACHT 4.
Er zijn verschillende roosters te gebruiken voor een vlakvulling. Bedenk nog meer roosters van veelhoeken waar je het vlak mee kunt vullen en teken ze.

Je eigen vlakvulling

Nu ga je je eigen vlakvulling ontwerpen! Omdat het lastig is om zo maar een diertje te tekenen en daar het vlak mee te vullen, zullen we in vier stappen aangeven hoe je te werk kunt gaan. We geven ook twee voorbeelden. Voorbeeld A is het gemakkelijkst, voorbeeld B is wat moeilijker. Zelf kun je met andere variaties aan de slag.

STAP 1. KIES EEN ROOSTER. Teken op een vel ruitjespapier een puntrooster. Dit is een rooster waarvan je alleen de hoekpunten tekent. Je kunt kiezen uit: parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant, gelijkzijdige driehoek, regelmatige zeshoek. Neem dit puntrooster met potlood over op een vel transparantpapier. Op dit transparantpapier komt straks de tekening van je eigen vlakvulling. We noemen dit vel 1.



Hier zie je twee puntroosters. Voorbeeld A (links) is een parallellogramrooster. Voorbeeld B is een rooster van gelijkzijdige driehoeken.

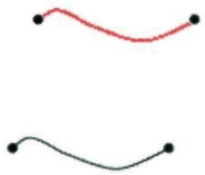
STAP 2. MAAK EEN TEGEL. Hiervoor gebruiken we nog een transparant papier (vel 2) waarop je de hoekpunten van één veelhoek uit het rooster tekent.



De tegels uit voorbeeld A en B.

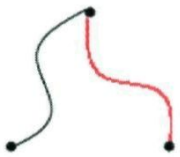
Maak nu op het ruitjespapier een variatie op één van de 'zijden' in het puntrooster. Neem de variatie over op het transparantpapier. Kies uit de volgende bewerkingen:
(a) Translatie. Te gebruiken bij alle roosters behalve de gelijkzijdige driehoek.

Voorbeeld A:



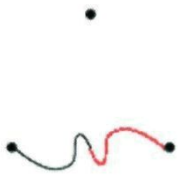
(b) Rotatie om hoekpunten. Te gebruiken bij bijvoorbeeld de volgende roosters: driehoeken, vierkanten of zeshoeken.

Voorbeeld B:

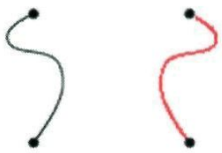


(c) Rotatie om middens van zijden. Hiervoor maak je een variatie op een halve zijde en die roteer je over 180° om het midden van een zijde. Te gebruiken bij de volgende roosters: driehoeken.

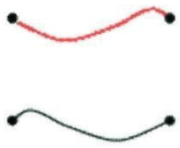
Voorbeeld B:



(d) Spiegeling. Te gebruiken bij bijvoorbeeld: vierkant, ruit, rechthoek of zeshoeken.



(e) Glijspiegeling. Dit is een samenstelling van een spiegeling en een translatie evenwijdig aan de spiegelas. Te gebruiken bij bijvoorbeeld de volgende roosters: parallellogram, vierkant, ruit, rechthoek.



Pas ook een variatie toe op een andere zijde van je puntrooster. Nu is je tegel af.



links: Voorbeeld A, twee translaties

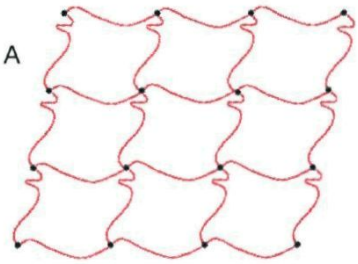
rechts: Voorbeeld B, rotatie om hoekpunt & om midden

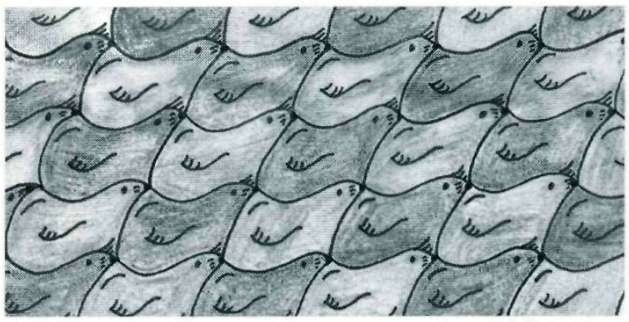
STAP 3. MAAK DE VLAKVULLING. Vul het vlak op met de tegel door deze over te nemen op vel 1, zó dat het hele vlak wordt opgevuld.

STAP 4. JE EIGEN 'ESCHER'. Herken je in je krabbels een dier of een figuur? Werk dit dan verder uit bijvoorbeeld door ogen of handen te tekenen. Kleur je figuur in. Je eigen vlakvulling is nu voltooid. We hebben twee voorbeelden gegeven, maar je kunt zelf andere soorten regelmatige betegelingen krijgen door de genoemde bewerkingen op verschillende puntroosters uit te proberen.

Het bovenstaande is slechts één van de vele manieren om een vlakvulling te maken. Misschien verzin je zelf wel een eigen methode. Veel succes!

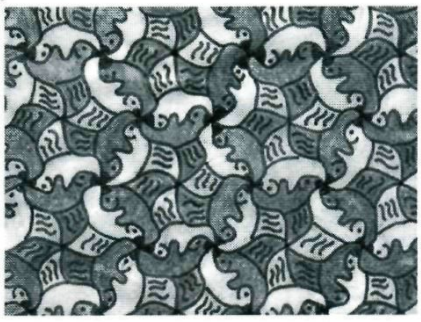
Voorbeeld A

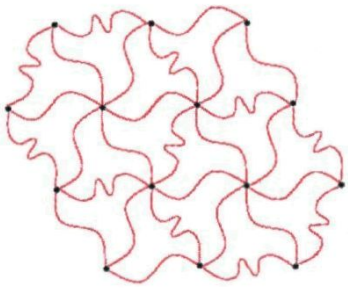




Eindpatroon voorbeeld A

Eindpatroon voorbeeld B





Voorbeeld B

Verder lezen

Wil je meer weten? Op de Escherpagina op de homepage van Pythagoras vind je veel meer informatie over betegelingen. Verder bevelen we de volgende boeken aan:

1. Frits Göbel, *Tegels leggen, en dergelijke*, Vierkant Doe-boekje nr. 2 (*f* 10,-).
2. Jill Britton, Dale Seymour, *Introduction to Tessellations*, Dale Seymour Publications, 1989. Geschreven voor leraren.
3. Doris Schattschneider, *M.C. Escher, Visions of Symmetry*, Freeman, New York, 1990 (± *f* 80,-). Een schitterend boek over Eschers studie van regelmatige vlakverdelingen.
4. Branko Grünbaum, G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, Freeman, New York, 1987 (± *f* 190,-). Een complete wiskundige studie van het onderwerp met heel veel plaatjes.

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden!

Pythagoras

Opgave 33

In mijn speelgoedtreinbaan thuis zijn sommige van de treinbaanonderdelen delen van een cirkel. Door een aantal van die stukjes aan elkaar te zetten krijg ik precies een hele cirkel. De spoorbreedte (de afstand tussen de binnenste en de buitenste rails) is 10 cm. Hoeveel is de buitenste rail langer dan de binnenste?

Opgave 34

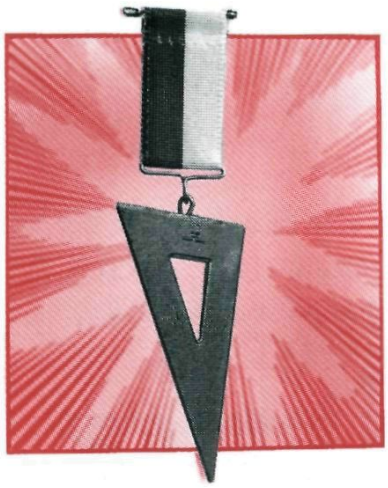
Er zijn 40 kamers in een hotel. Het hotel heeft slechts één gang waar alle kamers achter elkaar liggen. De kamers zijn opeenvolgend genummerd van 1 tot en met 40. Het hotel heeft de volgende twee regels: een gast mag één kamer huren voor twee dagen of twee opeenvolgende kamers voor één dag (er zijn geen andere huurmogelijkheden). De kamers kosten *f*100,- per dag. Op de eerste dag van het seizoen stond kamer 1 leeg en op de laatste dag van het seizoen was kamer 40 leeg. Het seizoen duurt precies 100 dagen. Laat zien dat het hotel niet meer dan *f* 399600,- omzet heeft kunnen maken tijdens dat seizoen.

Stuur je oplossing naar:
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 mei 1998. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 25 gulden verloot.
De oplossingen van deze opgaven verschijnen te zijner tijd op de homepage en in het augustusnummer van Pythagoras. Op de bladzijde hiernaast staan de oplossingen van opgave 29 en 30 uit het decembernummer.

Veel succes!

Ronald van Luijk, Sander van Rijnswou en Wim Oudshoorn



Olympiade

Opgave 29

Hoeveel deelverzamelingen van de verzameling $\{1, 2, \ldots, 1997\}$ hebben een even aantal elementen?

OPLOSSING. Het antwoord is 2^{1996}. Een aantal inzenders had een slimme truc bedacht om dit aan te tonen. Het aantal deelverzamelingen (even of oneven) van de verzameling $\{1, 2, \ldots, 1996\}$ is 2^{1996}. Voor elk element hebben we namelijk twee keuzen, ofwel we stoppen het erin ofwel we doen dat niet. We kunnen deze deelverzamelingen nu uitbreiden met 1997. Als een deelverzameling een oneven aantal elementen bevat dan stoppen we 1997 erbij en anders niet. Je ziet dat je op deze manier alle deelverzamelingen krijgt van $\{1, 2, \ldots, 1997\}$ die een even aantal elementen hebben.

Deze opgave werd opgelost door:
Peter Deleu, Hulste (België), Yoeuk Roevers, **Koninklijk Atheneum Berchem** (België), H. Verdonk, 's Gravenhage, Jeroen Verhaeghe, **Sint-Leocollege, Brugge** (België), Maxim Hendriks, **Stedelijk Gymnasium Leiden**, Jacobine Bakker, **Groene Hart Lyceum, Boskoop**, Jeroen Schillewaert, **Sint-Leocollege, Brugge** (België), Gertjan Kok, **Sint-Maartenscollege , Voorburg**.
De boekenbon gaat naar Jeroen Schillewaert.

Opgave 30

Suzanne heeft in het vlak een vierkant getekend. Ook heeft zij een punt in het vlak gezet met onzichtbare inkt. Jij mag rechte lijnen trekken en Suzanne (die een speciale bril op heeft) vertelt je dan aan welke kant van de lijn het punt ligt (of op de lijn). Hoeveel vragen heb je nodig om uit te zoeken of het punt binnen, buiten of op het vierkant ligt? [Let op: Als je denkt dat er 18 vragen nodig zijn moet je bewijzen dat je met 18 vragen er altijd uit komt, maar ook dat het met 17 vragen niet altijd lukt.]

OPLOSSING. Het kan met drie lijnen. Met slechts twee lijnen lukt het niet altijd, omdat je met twee lijnen geen eindig gebied kan omsluiten. Met drie lijnen kan het wel. Teken eerst de twee diagonalen van het vierkant. Het vlak heb je nu verdeeld in 4 oneindig grote 'taartpunten'. Uit de antwoorden van Suzanne blijkt in welke het punt ligt. Teken nu de zijde van het vierkant dat in die taartpunt ligt. Je weet nu of het punt binnen of buiten het vierkant ligt.

Deze opgave werd opgelost door:
Yoeuk Roevers, **Koninklijk Atheneum Berchem** (België), Maxim Hendriks, **Stedelijk Gymnasium Leiden**, Jacobine Bakker, **Groene Hart Lyceum, Boskoop**, Gertjan Kok, **Sint-Maartenscollege, Voorburg**, Birgit van Dalen, **Vlaardingse Openbare Scholengemeenschap**, Jan Tutman, **Praedinius Gymnasium, Groningen**.
De boekenbon gaat naar Gertjan Kok.

Escher heeft zich lang beziggehouden met de studie van regelmatige vlakverdelingen. De resultaten van zijn systematische onderzoek schreef hij in de oorlogsjaren '40 - '41 op. In zijn aantekeningenboeken vinden we in het hoofdstuk 'Driehoeksystemen' een stelling.

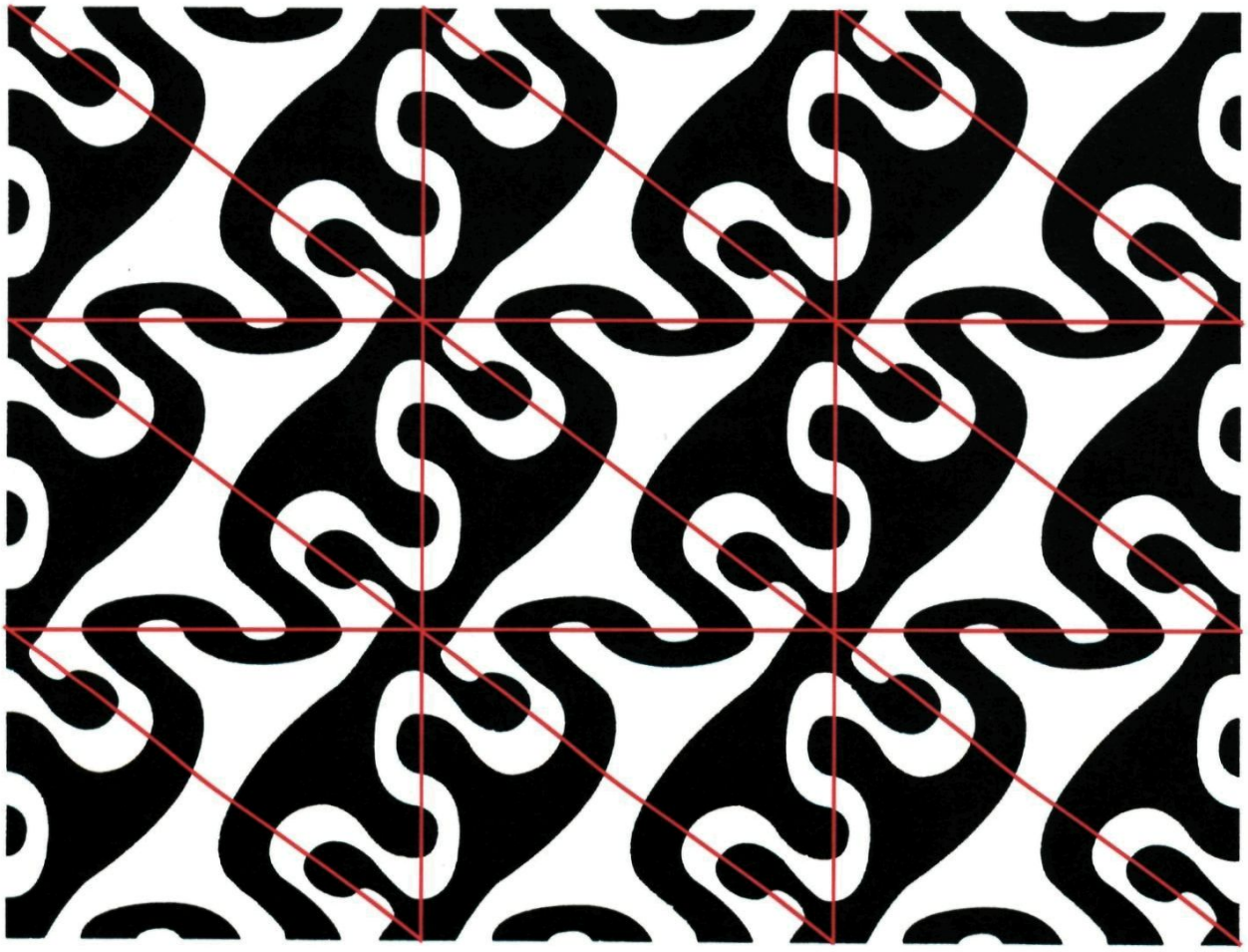
Een stelling van Escher

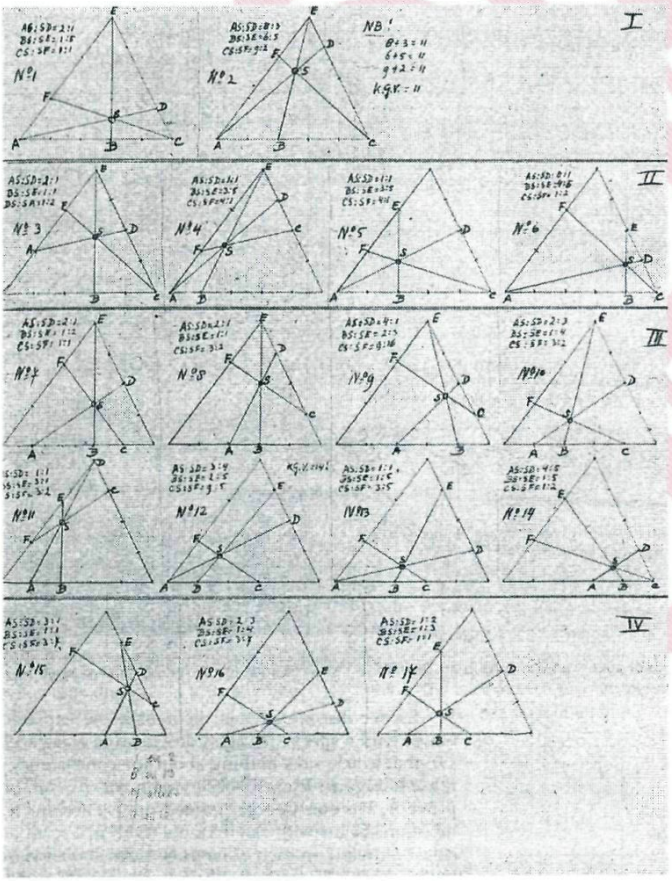


Chris Zaal

Escher ontdekte zijn stelling bij een van zijn experimenten met vlakverdelingen.

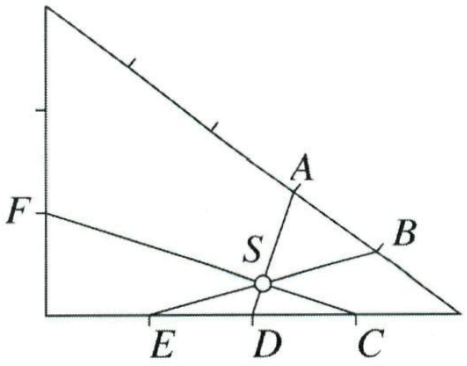
Van een rechthoekige 3 : 4 : 5 driehoek maakte hij een stempel door hierop een patroon aan te brengen. Links zie je een voorbeeld. Door met deze driehoek te gaan stempelen kreeg hij verschillende interessante patronen, zoals het patroon hieronder.





overzicht van de 17 gevallen van Eschers stelling

Om een geschikt patroon in de driehoek te kunnen ontwerpen, verdeelde hij de zijden van de driehoek achtereenvolgens in drie, vier en vijf gelijke stukken. Tegenoverliggende deelpunten verbond hij met rechte lijnstukken of met krommen. Soms sneden drie van die lijnstukken elkaar in één punt. Een voorbeeld:



Deze ontdekking leidde tot een systematisch onderzoek van drietallen lijnstukken die de deelpunten van zijden van willekeurige driehoeken verbinden.

Wat zegt de stelling?

Eschers stelling is afgedrukt op de volgende pagina. Hierin worden alle drietallen opgesomd van verbindingslijntjes die door één punt gaan. Het zijn er precies 17. Als bovendien drie van die lijnstukjes door één punt gaan, dan verdeelt het snijpunt de verbindingslijnen in 'mooie' verhoudingen. De links afgebeelde driehoek is geval 15 uit het overzicht. De drie verbindingslijnstukken snijden elkaar in één punt S en $AS : SD = 3 : 1$, $BS : SE = 1 : 1$ en $CS : SF = 3 : 7$.

De stelling

We geven de stelling weer in Eschers eigen bewoordingen:

STELLING. Van een willekeurige driehoek verdeelt men een willekeurige zijde in 5 gelijke delen; één van de overgebleven delen in 4 gelijke delen en de derde zijde in 3 gelijke delen. Verbindt men de deelpunten onderling en met de hoekpunten, dan snijden drie van deze verbindingslijnen elkaar in één punt zodanig dat de verbindingslijnen door het snijpunt in twee delen wordt gescheiden waarvan de verhouding is uit te drukken in kleine getallen. In het geheel zijn er 17 gevallen van 3 elkaar in één punt snijdende lijnen (zie overzicht op pagina 31):

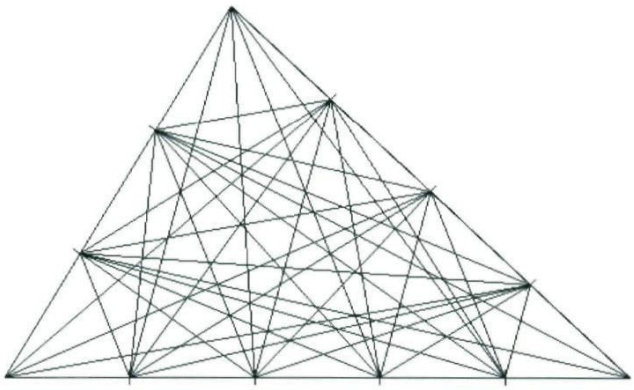
Groep I : 2 gevallen: 3 lijnen beginnen in de 3 hoekpunten
Groep II : 4 gevallen: 2 van de 3 lijnen beginnen in hoekpunten
Groep III : 8 gevallen: 1 van de 3 lijnen begint in een hoekpunt
Groep IV : 3 gevallen: geen van de lijnen begint in een hoekpunt

N.B. De snijpunten van gevallen 4, 5 en 13 liggen tezamen op één rechte lijn en delen die in vier gelijke delen.

Een bewijs

Tot zover de stelling. Er lijkt te staan dat elk drietal verbindingslijnen een gemeenschappelijk snijpunt heeft, maar dat is natuurlijk niet zo. Escher ontdekte in totaal zeventien gevallen en gaf deze gevallen keurig in het op pagina 31 afgebeelde overzicht weer.

Hoe zou je zelf te werk gaan om al deze gevallen op te sporen? Je kunt natuurlijk beginnen een willekeurige driehoek te tekenen. Dan verdeel je de zijden in drie, vier resp. vijf stukken en trek je *alle* verbindingslijnen (zie de figuur hieronder).



In dit oerwoud van lijntjes kun je dan door goed te kijken uitvinden welke drietallen door één punt gaan en welke niet. Als je nauwkeurig tekent zie je wel welke drietallen lijnen *niet* door een punt gaan. Maar of drietallen lijnen die door één punt lijken te gaan dit ook echt doen is maar de vraag. Dat dat echt zo is moet je bewijzen! Op de homepage van Pythagoras vind je een bewijs van Jan Aarts voor geval 15.

Verder onderzoek

Escher verdeelde de opeenvolgende zijden van een driehoek in drie, vier en vijf gelijke stukken. Je kunt de zijden van een willekeurige driehoek ook verdelen in andere verhoudingen. Bijvoorbeeld twee, drie en vier gelijke stukken, in twee, drie en vijf of in twee, vier en vijf gelijke stukken. Hoeveel drietallen lijnstukken zijn er dan die door een punt gaan? En kun je dat bewijzen? ◢

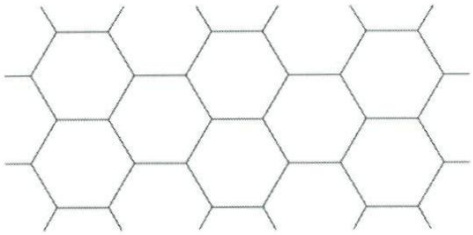
Op 15-jarige leeftijd zag Peter Raedschelders in een tijdschrift een artikel over het werk van Escher. Dat tijdschrift was Pythagoras. Daarin maakte hij kennis met de prenten *Waterval*, *Belvedere* en *Klimmen en dalen*. Sindsdien heeft het werk van Escher hem niet meer losgelaten.

Eendjes & teddyberen

Peter Raedschelders maakt in zijn vrije tijd tekeningen geïnspireerd op het werk van Escher. Hij werkt met wiskundige ideeën en modellen die Escher niet gebruikt heeft. Eén zo'n onderwerp is niet-periodieke vlakverdelingen. Daarover gaat dit stukje.

Puzzelen

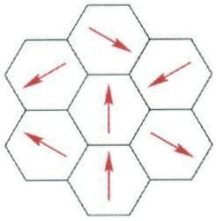
Kun je een puzzel maken van alleen maar *gelijke* puzzelstukjes? Dat hangt er maar van af wat je precies wilt. Met bijvoorbeeld een regelmatige zeshoek als grondvorm kun je het hele platte vlak vullen.



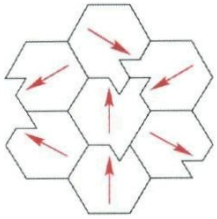
Dit is natuurlijk geen moeilijke puzzel, want in verschillende richtingen is er translatiesymmetrie. Dat wil zeggen dat je door verschuiven hetzelfde patroon kunt terugkrijgen. Een patroon zonder translatiesymmetrie, zou dat kunnen? Kun je met één puzzelstukje een vlakvulling maken die geen translatiesymmetrie heeft?

Over deze puzzel zat Peter Raedschelders ooit in bad na te denken. Hij kwam toen op het idee om de zeshoeken in het zeshoeksrooster te vervormen en te bekijken welk resultaat dat gaf. Reeds bij zijn eerste poging vond hij een vorm die een vlakverdeling zonder translatie-symmetrie opleverde. De grondvorm van deze vlakverdeling ontstaat in drie stappen.

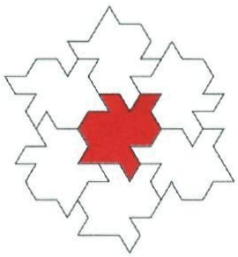
Eerst worden om één zeshoek zes andere zeshoeken gelegd. Elke zeshoek krijgt één van de zes mogelijke richtingen. De richting wordt aangegeven met een pijl.



In elke zeshoek wijst de pijl nu twee zijdes aan: een onderzijde en een bovenzijde. Uit de bovenste zijde wordt een driehoek geknipt. Dit wordt bij elke zeshoek gedaan.



De zeshoeken zijn nu niet meer gelijk. De middelste zeshoek heeft een driehoekje verloren, maar heeft er ook twee bijgekregen. Daarom krijgen alle andere tegels op dezelfde plaats ook twee driehoekjes. Zo doorgaande kunnen met een beetje geluk alle tegels gelijk gemaakt worden. Peter Raedschelders had dat geluk en vond de volgende tegelvorm.



Eendjes

In de bovenstaande figuur zijn alle zeven stukjes gelijk. De vorm van het stukje doet denken aan een diertje, en Peter Readschelders maakte er een eendje van. De eendjes kunnen door te draaien op zes manieren in het zeshoeksrooster gelegd worden. Deze zes 'orientaties' kleurde hij om en om zwart en wit. Met deze eendjes ging hij aan de slag.

Het bleek helemaal niet eenvoudig om van deze eendjes een vlakvulling te maken. Pas na veel systematisch puzzelen vond hij een interessante oplossing en het resultaat daarvan is zijn prent *Eendjes* (pagina 35).

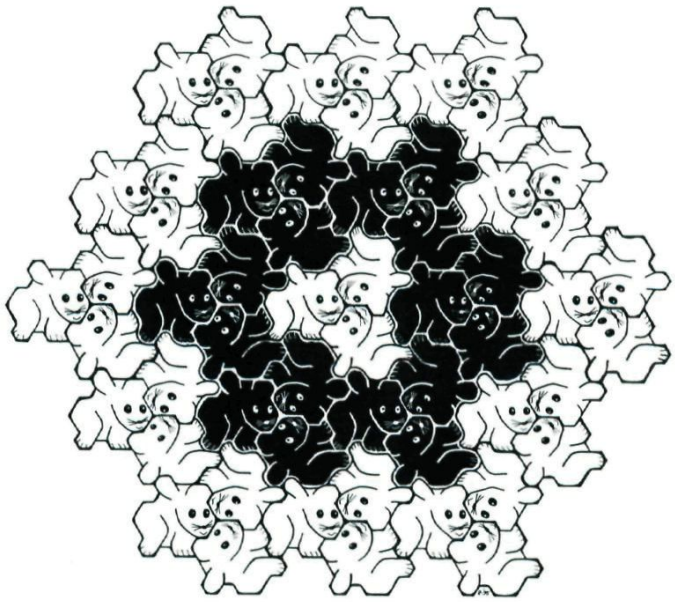
Het patroon is opgebouwd vanuit de middelste rij van zwarte eendjes. Vanuit deze rij kunnen de overige puzzelstukjes nog maar in één patroon neergelegd worden. De vlakverdeling met de eendjes lijkt heel regelmatig, maar is dat in werkelijkheid niet. Het kost nogal wat denkwerk, maar je kunt laten zien dat deze vlakvulling geen translatie-symmetrie heeft.

A-periodieke vlakvullingen

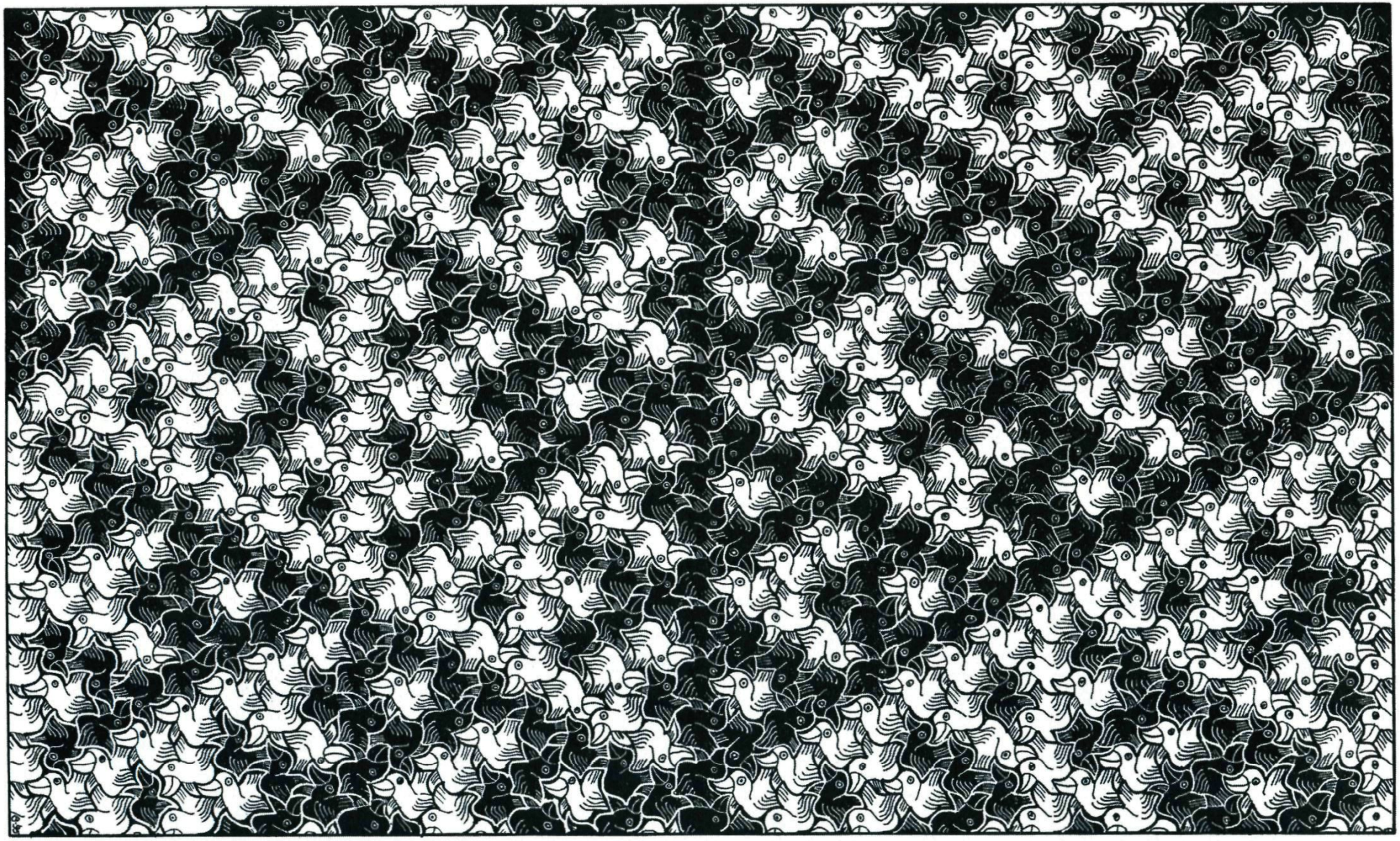
Een tot op heden onopgelost probleem op het gebied van vlakverdelingen is: bestaat er *één* tegel waarmee je alleen maar niet-periodieke vlakverdelingen kunt maken? Zo'n vlakverdeling noemen we dan *a-periodiek*. Prof. Penrose heeft a-periodieke vlakverdelingen gemaakt met twee tegels, maar tot nu toe kent men geen a-periodieke vlakverdelingen met slechts één tegel.

Teddyberen

Een vlakvulling met translatie-symmetrie in één of meerdere richtingen heet *periodiek*. De prent *Eendjes* is een voorbeeld van een niet-periodieke vlakvulling. Peter Raedschelders was heel blij met zijn *Eendjes*, maar eigenlijk was hij op zoek naar een puzzelstukje waarmee je alléén maar niet-periodieke vlakvullingen kon leggen. Tot zijn spijt ontdekte hij later dat je met dit puzzelstukje ook een periodieke vlakvulling kunt maken. Voor deze periodieke vlakvulling heeft hij van het puzzelstukje een teddybeertje gemaakt. Het resultaat is de prent *Teddyberen*. ◢



Peter Raedschelders: Teddyberen



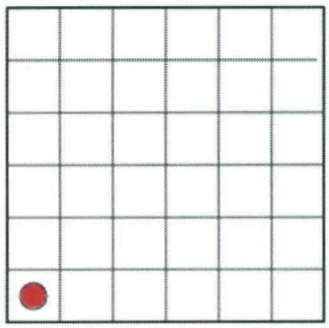
Peter Raedschelders: Eendjes

Problemen

Dion Gijswijt

Wie krijgt de kers?

Voor hun verjaardagsfeest hebben de tweelingzusjes Aline en Astrid een grote vierkante taart gekocht. Op de taart zit maar één kers, helemaal in de hoek. Beide zusjes zijn dol op kersen, maar ze kunnen het niet eens worden wie het stuk met de kers krijgt. Aline heeft een voorstel. Om de beurt snijden ze langs een van de lijnen een stuk zonder kers van de taart af. Degene die het laatste stuk afsnijdt en zo het stuk met de kers over laat, mag dit heerlijke stuk opeten. Astrid begint. Wie van de twee zusjes kan de kers bemachtigen?



Een zak met knikkers

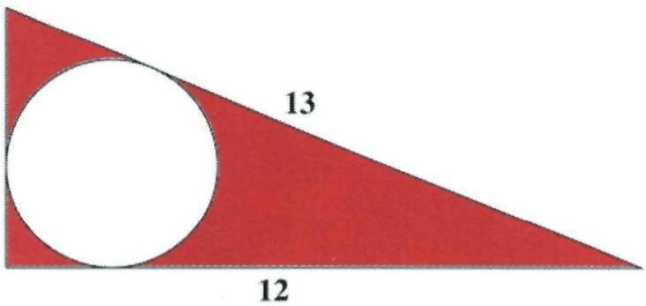
Silvia heeft een grote zak met tien rode en tien zwarte knikkers. Ze pakt zonder te kijken steeds twee knikkers uit de zak. Als de twee knikkers verschillend zijn van kleur, stopt Silvia de zwarte knikker terug in de zak. Als de twee knikkers dezelfde kleur hebben, dan doet ze een rode knikker in de zak. Vervolgens schudt ze de knikkers goed door elkaar en pakt opnieuw twee knikkers. Ze doet dit net zo lang tot er nog maar één knikker in de zak over is. Hoe groot is de kans dat deze knikker rood is?

De hangbrug

Vader, moeder en hun kinderen Mark en Marieke moeten in het donker een gevaarlijke hangbrug oversteken. Over de hangbrug kunnen niet meer dan twee personen tegelijkertijd. Bovendien hebben ze maar 1 zaklamp, die ze voortdurend nodig hebben om bij te lichten. Ze lopen niet allemaal even snel: vader kan de oversteek maken in 1 minuut, moeder in 2 minuten, Marieke is moe en doet het in 5 minuten. Mark heeft zijn enkel verstuikt en heeft 10 minuten nodig. Twee personen die tegelijk oversteken hebben uiteraard de snelheid van de langzaamste. Hoe komt het viertal het snelst aan de overkant? [Het kan in 17 minuten.]

Ingeschreven cirkel

Van een rechthoekige driehoek heeft een rechthoekszijde lengte 12 en de schuine zijde lengte 13. Wat is de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek?



Oplossingen nr. 3

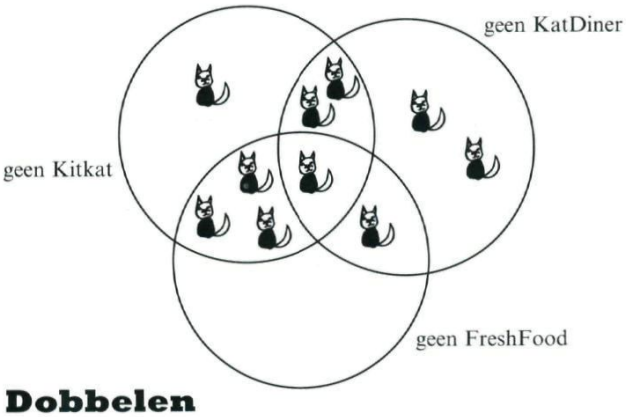
Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken. Een volledige bespreking van alle vragen en problemen is te vinden op de homepage.

De roltrap

Noem de hoogte van de roltrap h. Lopend over een stilstaande roltrap is de snelheid $h/90$. Op een bewegende roltrap is de snelheid $h/60$ m/s. De totale snelheid is dus $h/90 + h/60$. De benodigde tijd om lopend over een bewegende roltrap boven te komen is dus $h/(h/60 + h/90) = 36$ seconden.

Katten, katten en katten

De oplossing kun je vinden door een Venn-diagram te tekenen. Je telt dan in totaal 10 katten in Kitty's huis.



Dobbelen

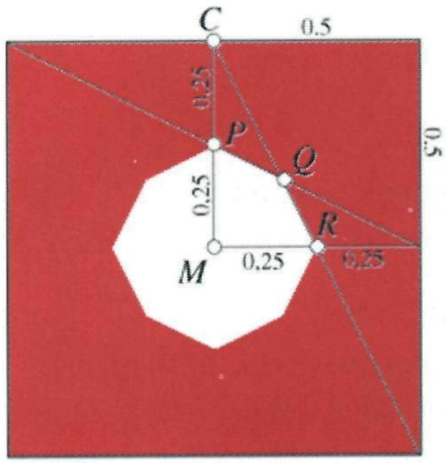
Op René's dobbelsteen staan op een zijvlak 7 ogen, in plaats van 3. Van alle 36 mogelijke uitkomsten van het dobbelspel wint René er met z'n speciale dobbelsteen 4 meer dan met een gewone dobbelsteen, namelijk wanneer hij 7 ogen gooit en z'n tegenspeler gooit 3, 4, 5 of 6 ogen. Z'n kans om te winnen is dus toegenomen met $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Geen kwadraat

Kies 100 verschillende machten van 10, alle met een oneven exponent. De som van een aantal van deze getallen eindigt op een oneven aantal nullen en kan dus geen kwadraat zijn van een natuurlijk getal.

De achthoek

Getekend is de rechterbovenhoek van het vierkant. De punten P, Q en R zijn drie opeenvolgende punten van de achthoek.
Er geldt dat opp $\Delta CMR = \frac{1}{16}$, opp $\Delta CPQ =$ opp $\Delta MPQ =$ opp ΔMQR.
Dus opp $\Delta PQM = \frac{1}{48}$, zodat de oppervlakte van de achthoek gelijk is aan $8 \times \frac{1}{48} = \frac{1}{6}$.



Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij pythagoras@wins.uva.nl

Hieronder volgt een overzicht van de verschillende wiskundige activiteiten die in de komende periode voor middelbare scholieren georganiseerd worden. Ook bepaalde activiteiten voor wiskundedocenten komen op de lijst voor.

vr 3 april '98
Eerste Ronde Wiskunde Olympiade (026) 352 12 94

vr 3 april '98
Discrete wiskunde, kleuren en routes in grafen (020) 525 50 74
UvA mastercourse voor VWO-docenten wiskunde

do 16, vr 17 april '98
33ste Nederlands Mathematisch Congres (053) 489 34 17
Universiteit Twente

vr 17 april '98
Wiskunde uit de kunst (053) 489 34 35
Symposium W.S.G. Abacus, Universiteit Twente

Eindexamens
vr 15 mei '98 havo wiskunde A en vwo wiskunde B
di 19 mei '98 vbo/mavo C/D en vwo wiskunde A
wo 27 mei '98 havo wiskunde B

za 30 mei '98
4e Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (020) 612 12 82
Hogeschool Domstad

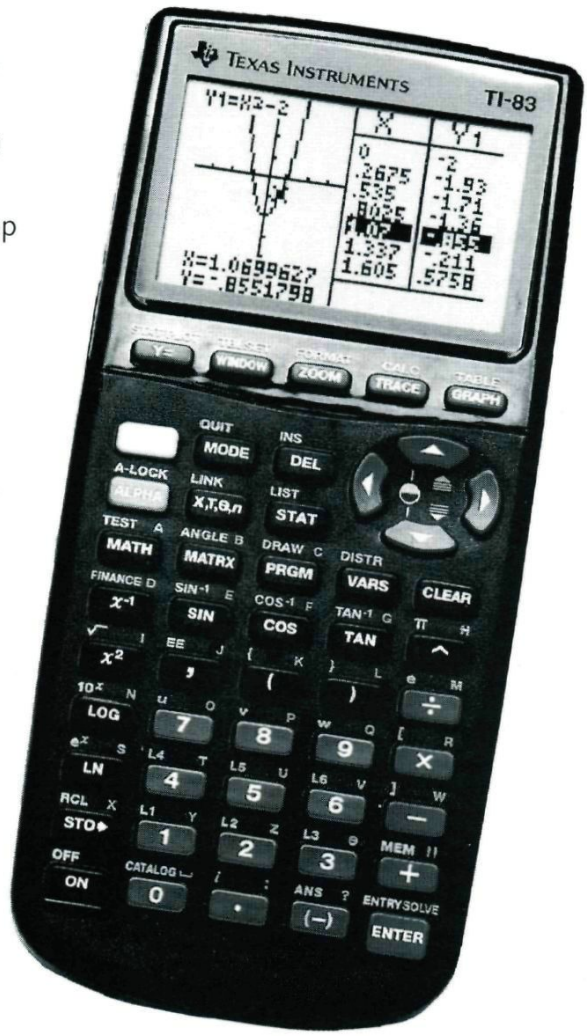
vr 5 juni '98
Open dag op locatie, UvA
Faculteit Wiskunde, Informatica, Natuur- en Sterrenkunde (020) 525 50 47

wo 17 juni '98
100ste geboortedag M.C. Escher
Onthulling Escherplaquette bij Museum het Princessehof Leeuwarden.
Aansluitend (tot eind juli): Escherexpositie (058) 212 74 38

TI-83: veelzijdig en krachtig

De TI-83 is een veelzijdige grafische rekenmachine voor de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Terecht is deze machine door het Freudenthal instituut gekozen als 'standaard' in het experiment voor de nieuwe bovenbouwprogramma's wiskunde (PROFI).

Ervaringen met de bekende TI-82 zijn in de TI-83 verwerkt; een eigentijdse machine dus! Zo is de **interface** sterk verbeterd en kan er volop worden gewerkt met **matrices.**
Ook de **grafische presentaties** en de mogelijkheden om **vergelijkingen** op te lossen zijn uitgebreid. Daarnaast kunnen uw leerlingen **gegevens uitwisselen** via de I/O-poort terwijl met TI-graph-link-software **aansluiting op een PC** mogelijk is.



Met name de veelzijdigheid van de TI-83 maakt, dat deze machine naast **wiskunde**, ook voor diverse andere vakken zeer geschikt is. Doordat de machine gekoppeld kan worden aan de CBL en CBR is hij uitermate geschikt voor **natuurkunde**.
Door de financiële functies is de machine een uitkomst bij **financiële** en **economische vakken**, maar ook bij vakken als **aardrijkskunde**, **biologie** en **informatica** kan de TI-83 zeer behulpzaam zijn.

Als extra service naar scholen, is er persoonlijke begeleiding beschikbaar. Een ervaren wiskunde leraar komt desgewenst bij U langs op school. U kunt een afspraak met hem maken. Zijn telefoonnummer is: 026-33 90 383. Zijn E-mail adres is: pietersc@bart.nl

Wiskunde dichterbij

TI-83: dé machine voor de tweede fase!

Texas Instruments Nederland, Rutherfordweg 102, 3542 CG Utrecht, tel. 030-2417417

TEXAS INSTRUMENTS

Oplossingen

Rood geverfd

De kubusjes zonder rood zijvlakje zitten in de binnenste $3 \times 3 \times 3$ kubus. Dat zijn er dus 27.

De rechthoek

3, 2, 3, 1, 1

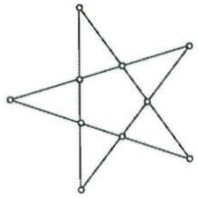
Schrijf voluit

3 kleine kleutertjes die zaten op een hek,
20 stuivers is een gulden,
12 ambachten, 13 ongelukken,
30 dagen hebben April, Juni, September en November,
150 leden heeft de Tweede Kamer,
64 velden heeft een schaakbord.

Drie kabouters

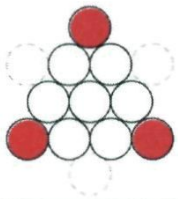
Als de bovenste kabouter zegt "Ik weet het" dan heeft de middelste kabouter dezelfde kleur muts als de onderste. En als de bovenste niets zegt, dan heeft de middelste kabouter een andere kleur muts dan de onderste. De *middelste* kabouter kan dus altijd beredeneren welke kleur muts hij op heeft.

Boompjes planten



De vijver

Pas op de een-na-laatste dag is de vijver voor de helft dichtgegroeid.



10 munten

Over de medewerkers

prof. dr J. Aarts is hoogleraar topologie aan de TU Delft
P. Bakker is beeldend kunstenaar te Bergen
dr L. de Clerck is directrice van de stichting VIERKANT voor Wiskunde
prof. dr J. van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA
Bruno Ernst is auteur van diverse boeken over onmogelijke figuren en over Escher
dr L.J. van Gastel is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland
D.C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA
dr K.P. Hart is docent topologie aan de TU Delft
drs A. Heck is werkzaam bij het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland
B. de Jongste is recreatief wiskundige te Den Haag
dr ir T. Koetsier is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU
drs A.H.W. Kolkman is lerares wiskunde aan de Oec. Scholengemeenschap Het Baken te Almere
ir A.A.J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT
R. van Luijk is student wiskunde aan de UU
drs W.R. Oudshoorn is AIO algebra en meetkunde aan de RUG
drs M.H.J. Pijls is lerares wiskunde aan het Lyceum Sancta Maria te Haarlem
P. Raedschelders is procesingenieur bij Opel Belgium N.V.
ir S.M. van Rijnswou is OIO computeralgebra aan de TUE
R. Roelofs is beeldend kunstenaar te Hengelo
T. Schotten is oud-leraar tekenen en handenarbeid te Heerhugowaard
M. Spijker is lerares wiskunde aan het Jac. P. Thijsse college te Castricum
dr ir R.F. Swarttouw is docent wiskunde aan de VU
drs C.G. Zaal is leraar wiskunde aan de J.S.G. Maimonides te Amsterdam

Herziene kerndoelen basisvorming,
Tweede Fase havo/vwo

Wolters-Noordhoff biedt u de keuze

Voor elke school een complete wiskundemethode met vier delen voor (i)vbo, vbo-mavo, mavo-havo (-vwo) en havo-vwo voor de *basisvorming* en nieuwe delen voor de *Tweede Fase* havo en vwo van

Moderne wiskunde zevende editie
en
Netwerk tweede editie

Beide methoden doen op hun eigen wijze recht aan de veranderingen van (i)vbo tot en met vwo en bereiden uw leerlingen voor op de examens.

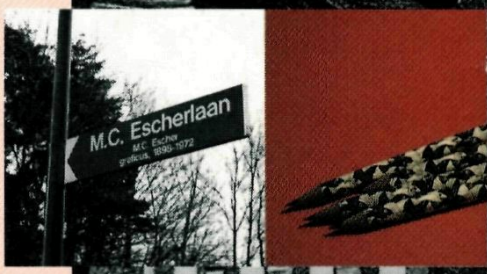
Vraag een beoordelingspakket aan en beoordeel zelf welke methode het best past bij uw school, uw sectie en uw leerlingen.

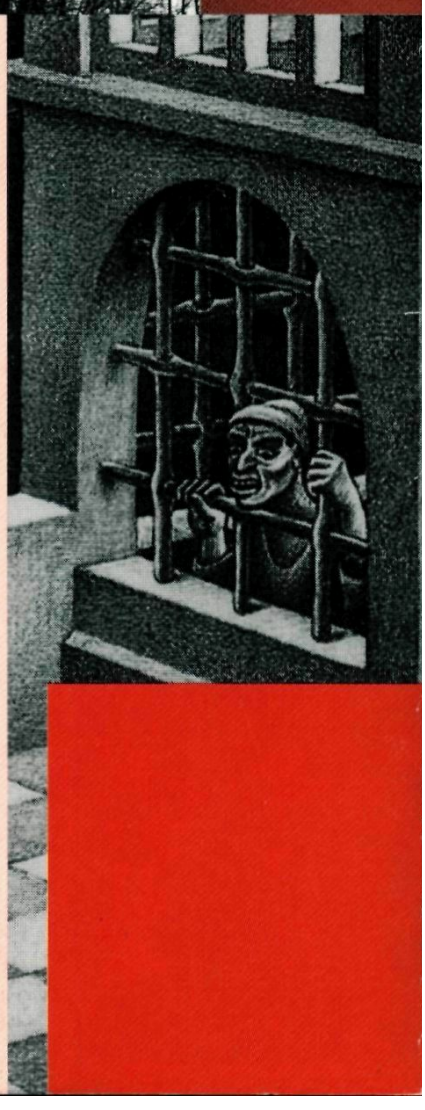
Wolters-Noordhoff
Elka van de Steeg
voorlichter exact
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/8024







Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Abonnees kunnen zich op één van de volgende manieren aanmelden.
Telefonisch: (070) 314 46 00, per fax: (070) 314 46 09,
via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/abonnee.html
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
NIAM, Antwoordnummer 97007, 2509 VH Den Haag

Tarieven '97-'98

Een jaarabonnement op Pythagoras kost *f* 37,50
Losse nummers *f* 8,- of BF 160
Overige prijzen per jaar: Pythagoras België BF 950
Pythagoras buitenland *f* 52,50
Pythagoras/Archimedes *f* 67,50
Pythagoras/Archimedes België BF 1570
Pythagoras/Archimedes buitenland *f* 83,50

Schoolabonnementen

Voor leerlingen in het voortgezet onderwijs en studenten aan lerarenopleidingen zijn er speciale schoolabonnementen. Voor *f* 25,00 per jaar ontvangen zij één heel jaar lang Pythagoras, op voorwaarde dat de docent wiskunde zorgt voor de aanmelding en verspreiding. Abonnees krijgen een acceptgiro thuisgestuurd. Bij aanmelding van 5 of meer abonnees, 1 jaarabonnement gratis.

Uitgever/advertenties

NIAM, Neuhuyskade 94, 2596 XM Den Haag
Telefoon (070) 314 46 00, fax (070) 314 46 09, giro 5513796
Bankrekening België: ING Bank Brussel
reknr. 627-7064242-48 t.n.v. TMS

Pythagoras wordt gesponsord door de faculteit WINS van de Universiteit van Amsterdam.