

pythagoras

nr.2



december 1998 38ste jaargang



Inhoud

COLOFON

uitgave

Pythagoras is een uitgave van het
Wiskundig Genootschap en verschijnt
zes keer per jaar.

Een jaargang loopt van september tot en
met augustus. ISSN: 0033-4766

redactieadres

Redactie Pythagoras
t.a.v. Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

e-mail

pythagoras@wins.uva.nl

www

www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/

redactie

Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

abonnee-administratie

telefoon: 0522-855175
fax: 0522-855176

grafisch ontwerp

WILDEVLEES, Amsterdam

drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

1 Mim

2-3 Kleine nootjes

Varia Historica

4-5 Mohammad ibn Musa Al-Khwarizmi

6-7 Een eigenwijs bewijs van Ann

Financiële wiskunde

8 t/m 13 Risico's aan het verzekeren van risico's

14 t/m 16 Pythagoras Olympiade

Wiskunde & taal

17 Wisconst

18 t/m 21 Kanonskogels stapelen

22 t/m 25 4D-fractals in 3D

26-27 Nogmaals eerlijk delen

28 Problemen

29 Oplossingen nr.1

30 Agenda

Drogredeneringen

31 Een stompe hoek van 90°

32 Oplossingen kleine nootjes

Iedereen kent het jaar 2000 probleem. Veel minder bekend is dat ook aan het jaartal 1999 een probleem kleeft. Maar gelukkig heeft dit probleem geen gevolgen voor computerprogrammatuur.

MIM

Hessel Pot

Als je in de bioscoop een film gezien hebt, verschijnt na het eind van de film op het doek de aftiteling: een hele lijst van namen; acteurs, cameramensen, geluid, make-up, iedereen wordt genoemd. Meestal staat het publiek dan al op en verlaat de zaal. Maar vanaf volgend jaar wordt het interessant om de aftiteling met iets meer aandacht te bekijken. Want ook het jaar van productie komt even in beeld en daarvoor worden vaak Romeinse cijfers gebruikt. Dit jaar wordt bijvoorbeeld weergegeven als:

$$\begin{aligned} 1998 &= 1000 + 900 + 90 + 8 \\ &= M + CM + XC + VIII \\ &= MCMXCVIII. \end{aligned}$$

Voor het volgende jaar zijn er meer mogelijkheden; het jaartal 1999 kun je op minstens drie manieren in Romeinse cijfers schrijven. Om te beginnen heb je natuurlijk:

$$\begin{aligned} 1999 &= 1000 + 900 + 90 + 9 \\ &= M + CM + XC + IX \\ &= MCMXCIX. \end{aligned}$$

Deze omzetting heeft als voordeel dat elk cijfer uit onze schrijfwijze apart in de Romeinse vorm wordt omgezet. Bij bijna alle getallen is dit ook de enige gangbare

methode. Maar voor getallen als 49, 99, 490 is er ook een kortere vorm mogelijk. Zo kun je 99 in Romeinse cijfers ook schrijven als IC. Je krijgt dan:

$$\begin{aligned} 1999 &= 1000 + 900 + 99 \\ &= M + CM + IC \\ &= MCMIC. \end{aligned}$$

Nog korter is het om 999 als IM te schrijven:

$$\begin{aligned} 1999 &= 1000 + 999 \\ &= M + IM \\ &= MIM. \end{aligned}$$

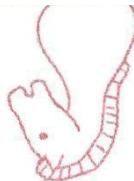
In de praktijk genieten voor 49 en 99 de schrijfwijzen XLIX en XCIX de voorkeur boven IL en IC. Daarom verwachten we volgend jaar toch vaker MCMXCIX te zien dan de kortere vormen. Er bestaat, voor zover wij weten, geen instantie die voorschrijft wat hier goed of fout is.

De Romeinen zelf gebruikten de aftreknotaties IV en IX maar zelden. Zij zouden waarschijnlijk gekozen hebben voor MDCCCCLXXXVIII. 

Redactioneel

Op deze plaats wenst de redactie van Pythagoras namens alle medewerkers haar lezers een gelukkig MIM.





Kleine nootjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen 'gekraakt' kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op p. 32 van dit nummer.

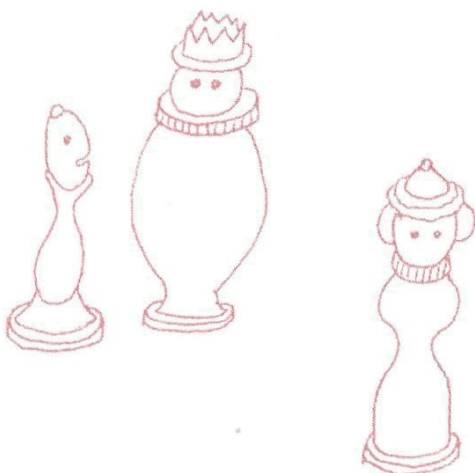
kleine



Bluf?



Katja is een 14-jarig Russisch meisje dat nog maar net met schaken begonnen is. Ze woont in dezelfde stad als wereldkampioen Gari Kasparov. Op een dag komt ze Kasparov tegen en ze raakt met hem in gesprek. Ze daagt de grote kampioen uit met de woorden: "Speel met mij twee partijen tegelijk en ik wed dat u niet beide partijen van mij wint". Kasparov gelooft zijn oren niet en laat twee schaakborden klaar zetten. Ieder speelt eenmaal met wit, terwijl Kasparov begint. Inderdaad blijkt de wereldkampioen niet beide partijen te kunnen winnen. Wat moet Katja doen om niet beide partijen te verliezen?



Tienduizend

Vind twee getallen die met elkaar vermenigvuldigd tienduizend opleveren. In geen van de twee getallen mag je een 0 gebruiken.

Met de bus naar Bussum

Twee vertegenwoordigers gaan met de bus naar Bussum. Slepnd met hun zware koffers gevuld met handelswaar stappen ze één voor één de bus in. Na een kwartier vertrekt de bus, om drie uur later in Bussum aan te komen. Hoe laat is het dan?

Waterproef

In de tuin staan twee even grote gieters. De ene gieter is gevuld met water van 15° Celcius, in de andere gieter zit water van 15° Fahrenheit. Je gooit in beide gieters tegelijkertijd twee even grote kiezelsteentjes. Welk steentje raakt het eerste de bodem van de gieter?



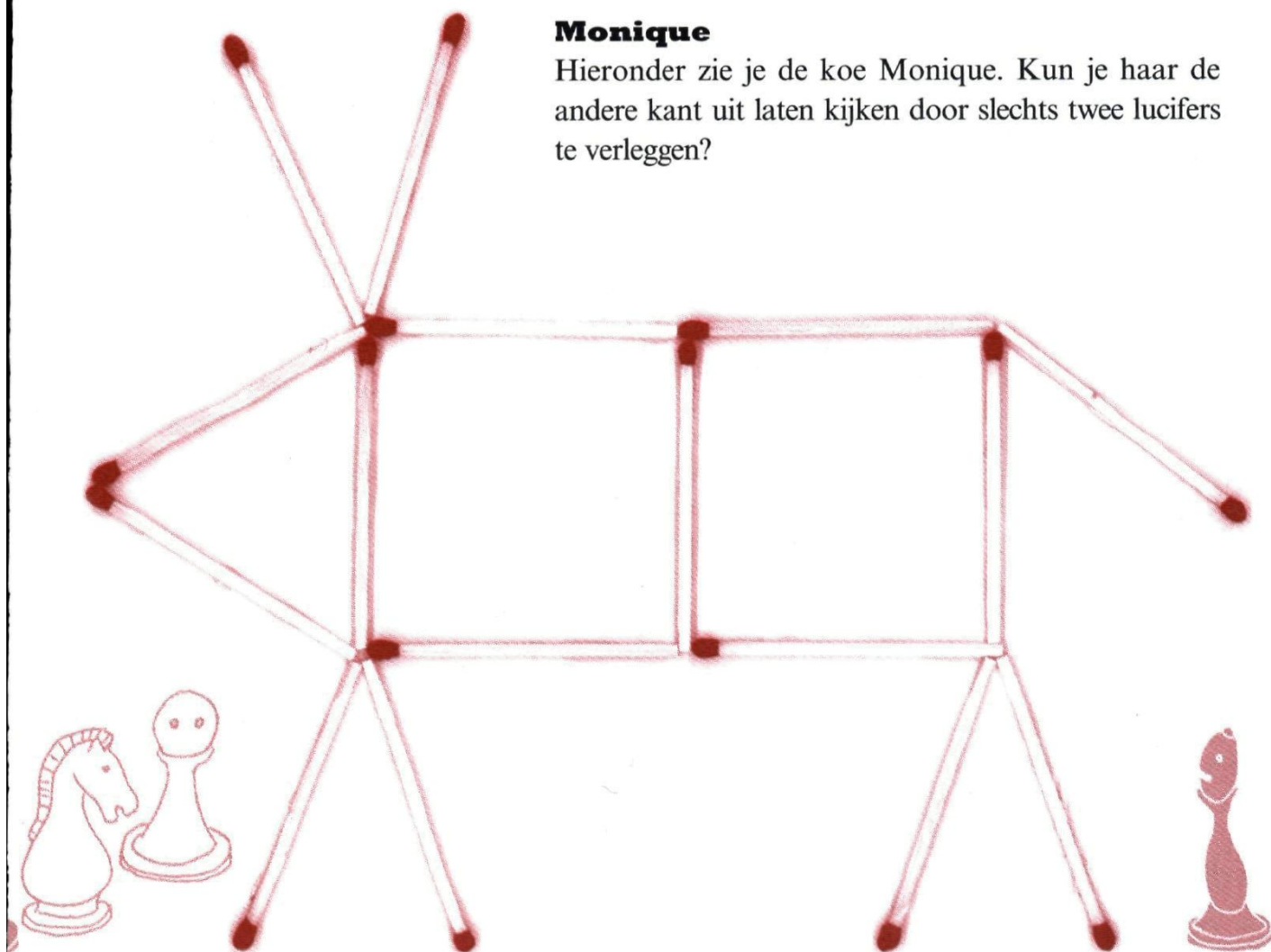
nootjes

Vierkante meter

Wat is groter: een halve vierkante meter of een halve meter in het vierkant?

Monique

Hieronder zie je de koe Monique. Kun je haar de andere kant uit laten kijken door slechts twee lucifers te verleggen?



Mohammad ibn Musa Al-Khwārizmī

Mohammad ('zoon van Mozes') ontwikkelde zich tot een breed geleerde: naast wiskunde bestudeerde hij geschiedenis, sterrenkunde en astrologie.

Mohammads werk was niet echt origineel. Zijn wereldfaam heeft hij te danken aan twee belangrijke leerboekjes. Beide hadden te maken met

taald en de naam Al-Khwārizmī werd daarbij verbasterd tot 'algorismi'. Hieruit is het woord *algoritme* ontstaan. Algoritme betekent rekenmethode of rekenrecept: als een computer iets uit moet rekenen, dan heeft hij daarvoor een algoritme nodig. Het woord 'cijfer' komt ook uit het Arabisch en betekent letterlijk lege plaats. Het is de naam voor de 0 (de nul in 406 geeft aan dat er geen tientallen zijn, dus dat die plaats leeg is).



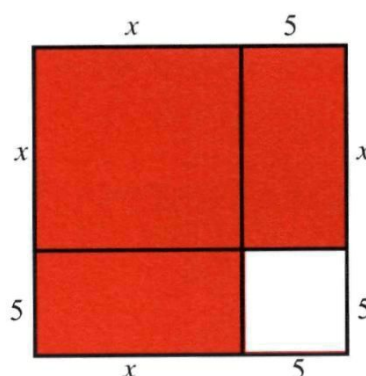
Restauratie

Het tweede rekenboekje gaat over de leer van 'Restauratie en confrontatie', waarmee het werken met kwadratische vergelijkingen bedoeld werd. Mohammad gebruikt alleen positieve getallen. In een vergelijking als $x^2 + 8x = 39 - 2x$ (in zijn woorden: een kapitaal en acht wortels is gelijk aan negenendertig behalve twee wortels) wordt de term $-2x$ ('behalve twee wortels') opgevat als iets dat ontbreekt. Mohammad 'restaureert' eerst dit gebrek $-2x$, hij krijgt dan $x^2 + 10x = 39$. Hij tekent een plaatje met een vierkant x^2 en daar aan vastgeplakt twee rechthoeken met zijden x en $10/2 = 5$; de totale oppervlakte daarvan is $x^2 + 10x$ (zie figuur 1). Om hieruit een groter vierkant met zijde $(x + 5)$ te maken moet je nog $5 \times 5 = 25$ toevoegen. Zodoende krijg je $(x + 5)^2 = 64$, dus $(x + 5) = 8$. De conclusie is dat $x = 3$.

Mohammad legt duidelijk uit hoe je elke kwadratische vergelijking kan herleiden tot een standaardvorm en hoe je elke standaardvorm kan oplossen. Daarnaast staan er in het boek veel opgaven die stap voor stap worden uitgewerkt.

Algebra

Het woord 'restauratie' is in het Arabisch al-dzjabr. In het Westen werd dit uitgesproken als 'al-gabr', en hieruit is ons woord algebra (de leer voor het rekenen met onbekenden) ontstaan. De oorspronkelijke betekenis is nog te zien in het Spaanse woord 'algebrista' dat stamt uit de tijd van Don Quichote. De betekenis is: iemand bij wie je gebroken beenderen kan laten zetten.



Figuur 1. Naar een Arabische tekst van Al-Khwārizmī:
Tekening bij de vergelijking $x^2 + 10x$ (het gele gebied) = 39.

Astrologie

Al-Khwārizmī heeft ook veel aan sterrenkunde gedaan. Hij heeft een handboek uitgegeven met tabellen waarmee op elk moment de positie van de zeven zichtbare planeten kon worden uitgerekend. In de astrologie was dat belangrijk; in die tijd geloofden veel mensen dat gebeurtenissen in het leven van een persoon konden worden voorspeld aan de hand van de stand van de planeten op het moment van diens geboorte. Die planeetstanden moesten worden berekend, want overdag schijnt de zon en 's nachts zijn lang niet alle planeten zichtbaar.

Mohammad verbeterde het beroemdste sterrenkundige instrument uit zijn tijd, het astrolabium. Hij heeft er de azimuthale krommen op aangebracht, waarmee je aan de hand van de zonnestand makkelijk het noorden kunt bepalen.

In Spanje, een uithoek van het Islamitische rijk, werden de boeken van Al-Khwārizmī nog lang bestudeerd, en zo zijn ze in het middeleeuws Europa bekend geworden. Lang niet iedereen die het woord 'algoritme' uitspreekt zal zich daarvan bewust zijn. ▀

Mensen voelen zich tot de wiskunde aangetrokken door het spel en het vernuft. Om daarvan te genieten is het niet nodig om een uitgebreide kennis te hebben van allerlei delen van de wiskunde – dat wordt aangetoond door het bewijs van Ann Condit.

Een eigenwijs bewijs van Ann

Bruno Ernst

Het was oktober 1938. Een meisje van zestien, Ann Condit, kwam bij haar wiskundeleraar van een Amerikaanse middelbare school met de mededeling: "Ik heb een nieuw bewijs gevonden voor de stelling van Pythagoras." Ze liet hem een blaadje zien waarop een figuur stond en het bewijs. Het bleek niet zomaar een interessante variant te zijn op de vele reeds bekende bewijzen voor deze stelling, maar een heel bijzonder en knap bedacht bewijs.

Ann's figuur

Voor haar bewijs tekende Ann een rechthoekige driehoek, het midden van de schuine zijde noemde ze M . Verder gebruikte ze alleen maar hulplijnen die uitgaan van M . Op de zijden van de rechthoekige driehoek ABC had Ann vierkanten getekend. Vanuit M trok ze loodlijnen op de tegenoverliggende zijden van de vierkanten. Deze verdelen elk vierkant in twee gelijke rechthoeken. Verder trok ze vanuit M de lijnen MP , MQ en MS . En tenslotte de lijn MA die PQ in R snijdt. Zie de figuur.

Ann's bewijs

We zullen nu haar bewijs (wat ingekort) vervolgen. Eerst twee voorbereidende opmerkingen:

1. De driehoeken ABC en AQP zijn congruent (dat is zonder meer duidelijk).

2. Hoek R is 90° , want ten eerste geldt $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle C$ (driehoek AMC is gelijkbenig), ten tweede $\angle B = \angle Q$ (zie 1), en ten derde $\angle C + \angle B = 90^\circ$, zodat $\angle A_1 + \angle Q = 90^\circ$, en daarmee geldt $\angle R = 90^\circ$.

Nu begint het bewijs, dat erop neerkomt de volgende beweringen **A** en **B** te bewijzen:

A. De oppervlakte van Δ_1 is gelijk aan een kwart van de oppervlakte van het linker vierkant, de oppervlakte van Δ_2 is een kwart van de oppervlakte van het rechter vierkant en de oppervlakte van Δ_3 is een kwart van de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.

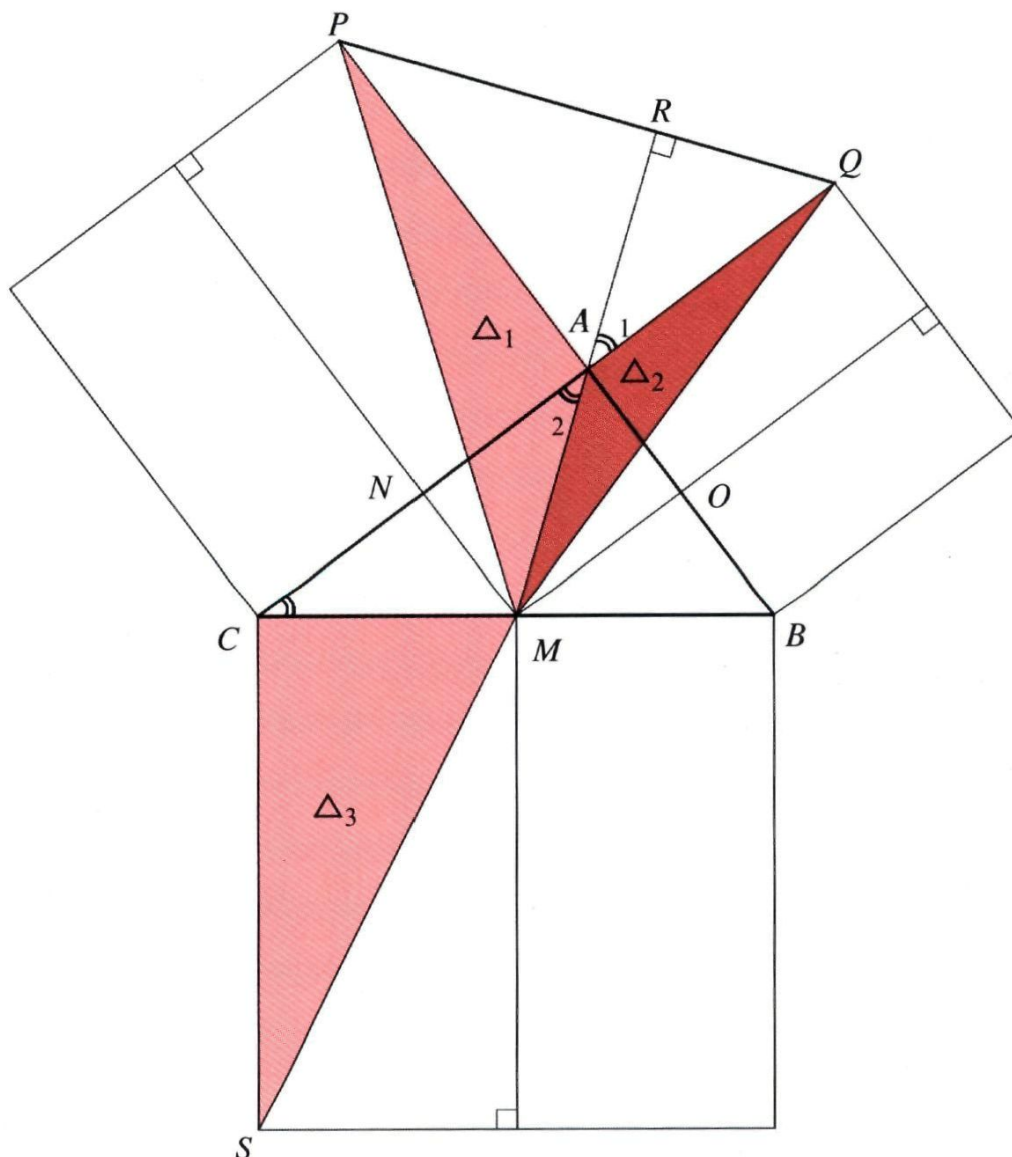
B. De oppervlakten van Δ_1 en Δ_2 zijn samen gelijk aan de oppervlakte van Δ_3 .

We beginnen met het bewijs van **A**. Het is zonder meer duidelijk dat de oppervlakte van Δ_3 een kwart van de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde is. De oppervlakte van Δ_1 is gelijk aan $\frac{1}{2}MO \times AP$, maar omdat $MO = NA$ is deze oppervlakte ook gelijk aan $\frac{1}{2}NA \times AP$ en dat is gelijk aan de oppervlakte van ΔNAP . Daarvan is weer zonder meer duidelijk dat die gelijk is aan

een kwart van de oppervlakte van het linker vierkant. Op dezelfde wijze blijkt dat de oppervlakte van Δ_2 gelijk is aan een kwart van de oppervlakte van het rechter vierkant. Nu **B**; dit vormt de vernuftige kern van Ann's bewijs. Als we AM als de basis van Δ_1 beschouwen dan is PR de hoogte ervan; de oppervlakte van Δ_1 is dus $\frac{1}{2}PR \times AM$. Het lijnstuk AM is ook de basis van Δ_2 , waarbij dan de hoogte QR hoort, zodat de oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{2}QR \times AM$. Als we beide oppervlakten optellen krijgen we $\frac{1}{2}AM \times (PR + QR) = \frac{1}{2}AM \times PQ$.

Maar omdat ABC en AQP congruent zijn geldt $PQ = CS$, en dus is de som van de oppervlakten gelijk aan $\frac{1}{2}AM \times CS$. Omdat $CM = AM$ is dat gelijk aan $\frac{1}{2}CM \times CS$, en dat is weer de oppervlakte van Δ_3 .

Door nu in **A** en **B** alle oppervlakten met vier te vermenigvuldigen staat er dat de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde gelijk is aan de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden, en dat is precies de stelling van Pythagoras. $\blacktriangle$



Risico's in het Financiële wi

Het leven zit vol risico's. De meeste tegenslagen die ons treffen, zoals een lekke band, een verkoudheid of een verloren tientje overleven we gelukkig moeiteloos. Maar meer serieuze rampen proberen we uit alle macht te ontlopen. Dat lukt nooit helemaal, maar we kunnen tenminste proberen ons tegen de gevolgen te verzekeren.

Verzekeren van risico's

Wim Albers

Verzekeren is al eeuwen oud. Het principe is heel simpel. Laten we beginnen met een eenvoudig model: stel dat de ervaring leert dat per jaar gemiddeld 1 op de 4000 huizen afbrandt. Neem dan eens 4000 huis-eigenaren, die voor het gemak een even duur huis hebben van bijvoorbeeld twee ton. Als zij afspreken jaarlijks allemaal een premie van 50 gulden te betalen, hebben ze daarmee een onderlinge brandverzekering opgezet. De 4000 maal 50 gulden levert immers precies de tweehonderdduizend gulden die nodig is om dat ene huis te vergoeden dat dat jaar in vlammen opgaat.

De werkelijkheid is natuurlijk ingewikkelder. Niet alle huizen zijn even duur en ook niet even brandgevaarlijk. Er moeten taxaties plaatsvinden en risico's bepaald worden. Verder moet er een administratie bijgehouden worden, er moeten premies geïnd worden, enzovoort. Dit wordt al snel te ingewikkeld om onderling te regelen. Daarmee komt de professionele verzekeraar in beeld, die aan zo'n onderneming iets verdienen wil. Daarom wordt er een opslagfactor in de premie verwerkt, ter dekking van de kosten en het maken van winst.

Tabel 1. Uitgekeerde aardbevingsschade in Californië als percentage van de betaalde premies.

1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
17.4%	0%	0.6%	3.4%	0%	0%	0.7%	1.5%	2.2%	9.2%	0.9%

kunde



De rol van het toeval

Tot nu toe zijn we uitgegaan van de *gemiddelde* schadelast en hebben geen rekening gehouden met toevallige schommelingen. Maar dergelijke schommelingen spelen een belangrijke rol. Laten we nog eens het geval van de 4000 huiseigenaren bekijken. Het is natuurlijk nooit zo dat er elk jaar precies één huis afbrandt. Als er eerst twee, dan drie, en daarna een aantal jaren geen huizen afbranden, dan moeten de gedupeerde eigenaren jarenlang wachten voordat er geld is om hen schadeloos te stellen. Het jaarlijks innen van de gemiddelde schadelast (plus kosten en winst) garandeert dus niet dat de schades altijd gedekt zijn.

De verzekeraar loopt dus een risico, namelijk dat hij meer moet uitkeren dan hij in kas heeft, waardoor hij wel eens failliet zou kunnen gaan. Om dit risico te verkleinen kan hij de genoemde opslagfactor verhogen. Met de zo verkregen extra opbrengst kan

een premiereserve worden gevormd, een spaarpotje waarmee tegenvallers worden opgevangen. Volledige zekerheid biedt deze aanpak niet, maar de kans dat het als nog fout loopt kan zo acceptabel klein worden gemaakt. Hoe kleiner die gewenste kans is, hoe groter het spaarpotje moet zijn en dus hoe hoger de premie. Er moet dus een middenweg gezocht worden tussen een onverkoopbaar dure verzekering aan de ene kant en een niet voldoende gegarandeerde dekking aan de andere kant (zie rekenvoorbeeld 1).

Herverzekeren

Door het aanleggen van een premiereserve kan een verzekeraar voorkomen dat hij in de problemen komt. Maar deze oplossing is niet 100% waterdicht. Uitschieters naar boven blijven mogelijk en de kans hierop is in het algemeen lastig te berekenen. Het is van belang om met uitschieters rekening te houden, want als individuele schades niet allemaal even hoog zijn maar van het toeval afhangen, kunnen er ook enorme schadebedragen optreden.

Dit verhoogt de kans op pech voor de verzekeraar, in de vorm van een flinke overschrijding van de verwachte schadelast. Daarom is het vaak verstandig om het niet bij een premiereserve te laten.

De verzekeraar kan precies hetzelfde doen als een individuele verzekerde: hij kan op zijn beurt het risico dat hij loopt verzekeren. Dit wordt *herverzekeren* genoemd.

Lees door op pagina 11

1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
0%	2.9%	5.0%	1.3%	9.3%	22.8%	11.5%	129.8%	47.0%	17.2%	12.8%	3.3%

Rekenvoorbeeld 1

Hoe berekent een verzekeraar zijn premiereserve? Hoe wordt een middenweg gevonden tussen enerzijds een onverkoopbaar dure verzekering en anderzijds een niet voldoende gegarandeerde dekking? Dit probleem kun je oplossen door een model te maken.

Als voorbeeld nemen we een autodiefstal-verzekeringsmaatschappij met 10.000 verzekerden. De kans dat een verzekerde een claim indient is 0.01. De hoogte van de claim is vast, bijvoorbeeld tienduizend gulden. Een verzekerde kan maximaal één claim per jaar indienen. Het totaal aantal schadegevallen N per jaar is in ons model binomiaal verdeeld. De kans op k schadeclaims wordt gegeven door de formule:

$$P(N=k) = \binom{10.000}{k} 0.01^k (1 - 0.01)^{10.000 - k}.$$

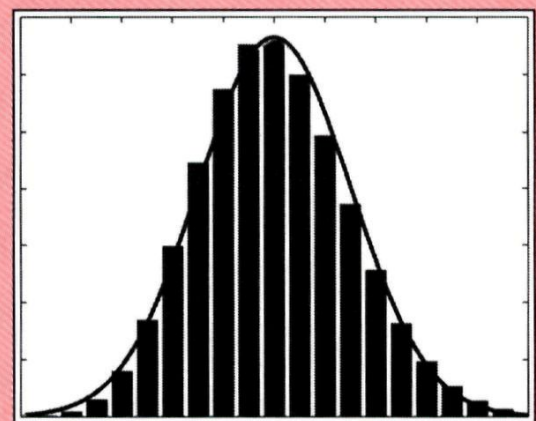
Gemiddeld verwacht je 100 schadeclaims per jaar, de verwachte schadelast is dus een miljoen gulden. Maar je kunt in een jaar méér dan honderd claims krijgen. In het ergste geval claimen alle verzekerden schade, en daarvoor zou je honderdmiljoen gulden moeten reserveren. Maar dit geval doet zich natuurlijk nooit voor. Zelfs de kans op 150 claims of meer per jaar is niet groot: $P(N > 150) = 0.000010$. Boven de verwachte schadelast van een miljoen gulden (100 claims) hoef je dus niet meer dan een half miljoen gulden extra te reserveren.

Maar het reserveren van een half miljoen gulden is duur, we zijn daarom tevreden met

een premiereserve die toereikend is voor 97.5% van alle gevallen. We moeten daartoe uitrekenen bij hoeveel schadeclaims de kans op dat aantal of meer schadeclaims ongeveer 2.5% is. Met andere woorden, we willen n oplossen uit:

$$P(N > n) \approx 0.025.$$

De kans $P(N > n)$ kunnen we berekenen door de binomiale verdeling te benaderen met behulp van een normale verdeling. In figuur 1 zie je een binomiale verdeling (het staafdiagram) en een normale verdeling (de kromme). Je ziet dat de normale verdeling de binomiale verdeling benadert (al is de benadering niet perfect).



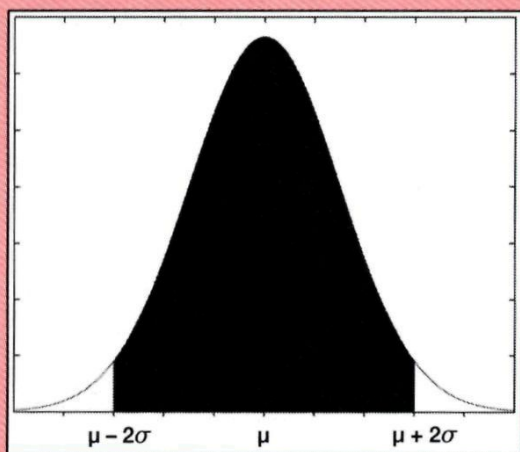
Figuur 1.
De binomiale verdeling (staafjes) benaderd met een normale verdeling (de kromme).

Deze binomiale verdeling wordt het best benaderd met een normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en met dezelfde standaardafwijking; onze binomiale verdeling heeft gemiddelde $\mu=100$ en standaard-



Vervolg van pagina 9

afwijking $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0.01 \cdot (1 - 0.01)} = 9.95$. Wat is het nut van deze benadering? Wel, we gebruiken de bekende regel dat bij een normale verdeling ongeveer 95% van alle kansmassa zich tussen de grenzen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ bevindt. Dat betekent dat 2.5% van alle kansmassa zich onder de waarde $\mu - 2\sigma$ bevindt en 2.5% kansmassa boven $\mu + 2\sigma$ (zie figuur 2). Zodoende hebben we een oplossing van $P(N > n) \approx 0.025$ gevonden, namelijk $n = \mu + 2\sigma$ en dit is ongeveer gelijk aan 120. Als we dus 120 schadeclaims kunnen dekken, dan is in 97.5% van alle gevallen de schade gedekt. Daarvoor is 1.2 miljoen gulden nodig, en dat is maar tweehonderdduizend gulden meer dan de gemiddelde schadelast.



Figuur 2.

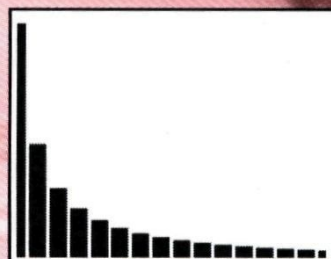
Bij een normale verdeling bevindt 95% van de kansmassa zich tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

Er wordt bijvoorbeeld afgesproken dat tot anderhalf maal de verwachte jaarschade de verzekeringsmaatschappij zelf betaalt, terwijl alles wat daar boven komt voor rekening van de herverzekeraar is. Deze strijkt daar dan natuurlijk een premie voor op. Zo'n herverzekeraar is ook een verzekeringsmaatschappij, al dan niet gespecialiseerd in dit soort activiteiten.

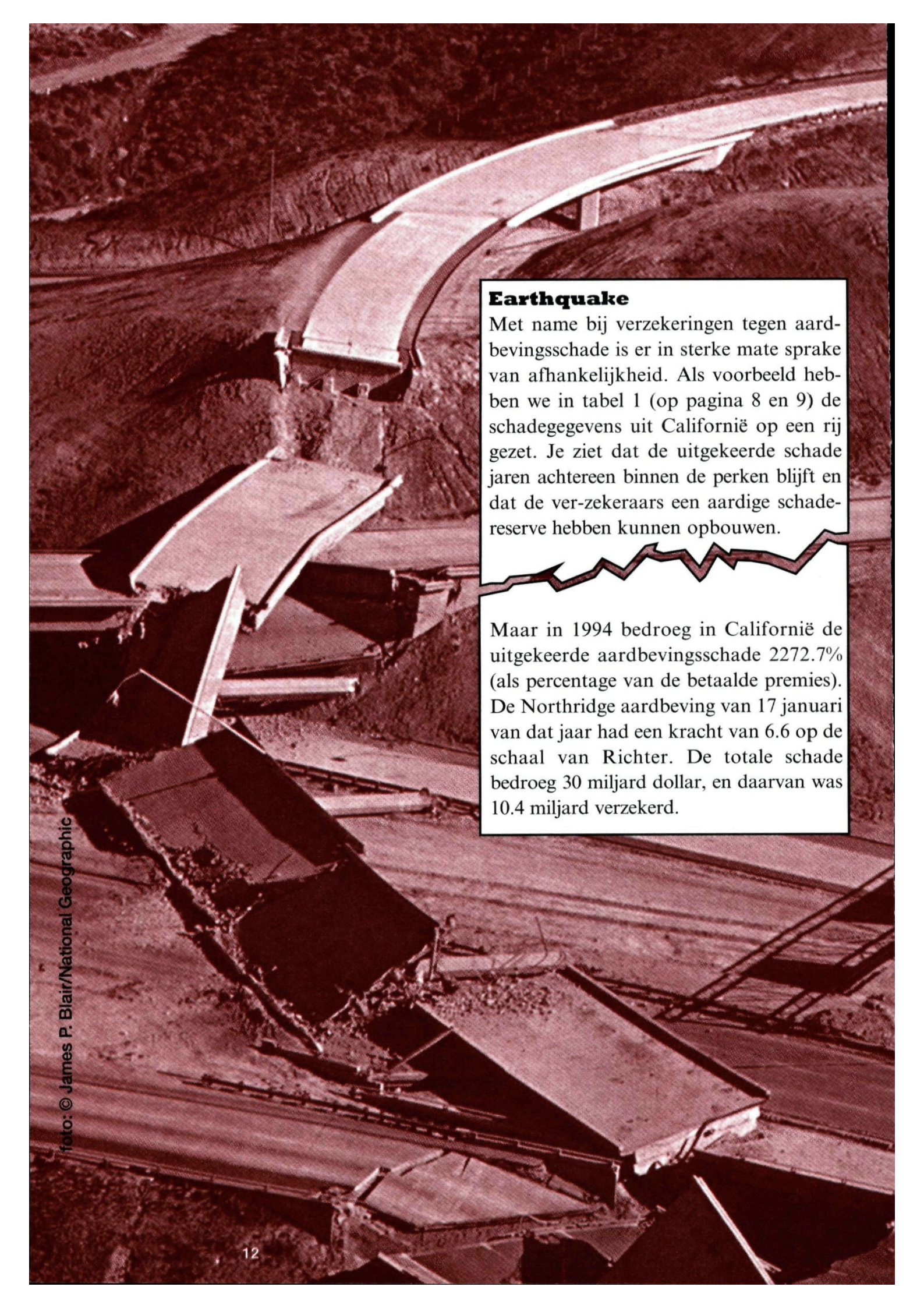
Herverzekeren is een ingewikkelde bezigheid: allereerst is er de verzekerde, die z'n risico onderbrengt bij een verzekeringsmaatschappij. Die maatschappij brengt het risico van het verzekeren van dat risico onder bij de herverzekeraar. Dus zit de laatste opgescheept met het risico van het verzekeren van het risico van het verzekeren van risico!

Uitschieters

Omdat herverzekeren een hachelijke bezigheid is, proberen verzekeraars een zo'n goed mogelijk model te maken voor het verwachte schadebedrag, een model waarin uitschieters betrouwbaar weergegeven worden. Eén manier is om kansverdelingen te gebruiken die niet symmetrisch zijn zoals de normale verdeling, maar die een dikke 'staart' hebben aan de rechter kant (zie figuur 3). Dergelijke zogenaamde 'scheve' verdelingen voor de schadebedragen geven grote schades letterlijk en figuurlijk een kans.



Figuur 3:
Een 'scheve' kansverdeling met een dikke 'staart' rechts.



Earthquake

Met name bij verzekeringen tegen aardbevingsschade is er in sterke mate sprake van afhankelijkheid. Als voorbeeld hebben we in tabel 1 (op pagina 8 en 9) de schadegegevens uit Californië op een rij gezet. Je ziet dat de uitgekeerde schade jaren achtereen binnen de perken blijft en dat de verzekeraars een aardige schade-reserve hebben kunnen opbouwen.

Maar in 1994 bedroeg in Californië de uitgekeerde aardbevingsschade 2272.7% (als percentage van de betaalde premies). De Northridge aardbeving van 17 januari van dat jaar had een kracht van 6.6 op de schaal van Richter. De totale schade bedroeg 30 miljard dollar, en daarvan was 10.4 miljard verzekerd.

Afhankelijkheid

Maar dit is niet het enige aspect dat van belang is. Steeds is er stilzwijgend van uitgegaan dat schades bij verschillende verzekerden geheel onafhankelijk van elkaar optreden (zoals in rekenvoorbeeld 1). Maar in de praktijk komt een ongeluk nooit alleen. Als een orkaan de kust van Florida treft, dan lopen alle boten schade op. Als het Westland getroffen wordt door een hagelbui, dan hebben alle tuinders glasschade. Ook op kleinere schaal spelen afhankelijkheden een rol: het busongeluk tijdens de personeelsreis, brandweerlieden die omkomen tijdens hun werk – in al deze gevallen is het waarschijnlijk dat er van gezamenlijke verzekeringen sprake is.

Het is mogelijk om in de wiskundige modellen voor verzekeringen allerlei afhankelijkheden in te passen. Men kan bijvoorbeeld aannemen dat voor elke verzekerde een kleine fractie (zo'n 1 tot 5%) van het risico in een collectief stuk zit. Dat collectieve stuk wordt geactiveerd door het optreden van een speciale gebeurtenis (een natuurramp, een vlieg- of verkeersongeluk) en treft dan bepaalde groepen van verzekerden waarbij de kans op schade groter is. Door het collectieve stuk apart te modelleren kunnen de effecten van afhankelijkheid opgespoord worden.

Dergelijke modellen zijn tamelijk ingewikkeld en niet erg doorzichtig. De kunst is de modelvorming zó uit te voeren dat de effecten van afhankelijkheden duidelijk zijn. Het is nuttig om er achter te komen wanneer afhankelijkheden veilig genegeerd kunnen worden, maar ook om uit te vinden wanneer dat absoluut *niet* kan. Onder bepaalde omstandigheden kan de te verwachten schadelast voor de

herverzekeraar de pan uit rijzen en een veelvoud worden van wat er anders het geval zou zijn geweest (zie rekenvoorbeeld 2). Zeldzame gebeurtenissen, maar met grote kans op schade voor grotere groepen vormen een groot risico voor (her)verzekeraars! 

Rekenvoorbeeld 2

Welke invloed hebben afhankelijkheden op de hoogte van het schadebedrag? We geven een getallenvoorbeeld. We gaan uit van 6000 verzekerden met een kans op schade van 0.003. Het verwachte aantal schades is dus 18. De schade-bedragen zijn normaal verdeeld met verwachting 100.000 en standaardafwijking 12500. De gemiddelde schade is dus een ton, en 95% van de schades ligt tussen 0.75 en 1.25 ton. De gemiddelde schadelast is dus 1.8 miljoen. De verzekeraar wil schades boven 2.7 miljoen (anderhalf maal het verwachte schadebedrag) herverzekeren. Als alle schades onafhankelijk optreden kan berekend worden dat de herverzekeraar daar een netto premie (dus zonder kosten en winst) van 4300 gulden voor moet rekenen.

Maar wat als de schades niet onafhankelijk zijn? Als voorbeeld verdelen we de 6000 verzekerden in 200 groepen van 30 verzekerden en nemen aan dat er binnen elke groep een kans is van 0.0003 op een of andere catastrofe die ervoor zorgt dat de kans op schade plotseling 100 keer zo groot wordt voor *iedereen* in die groep. Buiten de gewone kans op schade lopen de verzekerden dus een 'groepsrisico'. Met behulp van wiskundige modellen kan berekend worden dat de herverzekeringspremie nu 13.700 gulden is, drie keer zo veel als zonder afhankelijkheden!

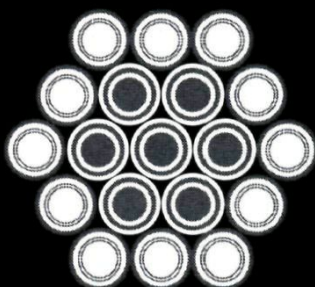


Pythagor

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden!

Opgave 41

Op een regenachtige dag heeft Ilse in een creatieve bui verschillende zeshoeken gelegd van damstenen. Dit doet ze zó, dat de buitenste ring stenen wit is en de rest zwart. Een voorbeeld van zo'n zeshoek met zijde drie staat hier getekend.



De volgende dag ruimt haar moeder alles op. Alleen van één van de zeshoeken blijft nog het volgende over.



Hoe groot kan de zijde geweest zijn van deze zeshoek en uit hoeveel witte en hoeveel zwarte stenen heeft de zeshoek dan bestaan?

Opgave 42

Er is een flatgebouw met 36 verdiepingen. Jij hebt een glas. Als je dat glas van een verdieping naar beneden gooit dan breekt het glas, of het breekt niet. Als het glas wel breekt, dan breekt het ook vanaf alle hogere verdiepingen: als het niet breekt dan breekt het ook niet vanaf alle lagere verdiepingen. Je wilt uitzoeken vanaf welke verdieping precies het glas breekt. Er is maar één manier om daar achter te komen: je gooit het glas van de 1e verdieping naar beneden, als het niet breekt dan gooi je het van de 2e verdieping naar beneden, enzovoort, net zolang tot het glas breekt of tot je alle 36 verdiepingen gehad hebt. In het slechtst denkbare geval moet je 36 keer het glas naar beneden gooien.

Wat is de beste manier om uit te zoeken vanaf welke verdieping de glazen breken als je niet één, maar twee (identieke) glazen hebt? Een manier is beter dan een andere als er in het slechtst mogelijke geval minder pogingen nodig zijn dan in het slechts mogelijke geval van de andere manier.

Pythagoras Olympiade

Stuur je oplossing naar:
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam, adres, school en klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 31 januari 1999. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftientig gulden verloot. Hieronder volgen de oplossingen van de opgaven uit het augustusnummer.

Veel succes! Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnsouw.

Opgave 37

Honderd mensen staan achter elkaar in een lange rij. De achterste persoon ziet de 99 mensen voor hem. De voorste ziet niemand. Ze kunnen elkaar wel horen. Uit een doos met daarin honderd witte en 99 zwarte hoeden geef ik iedereen een willekeurige hoed. Niemand kan zien welke hoed hem is opgezet. Nu vraag ik aan de achterste persoon (die dus het meeste kan zien) of hij kan bedenken welke kleur hoed hij op heeft. Hij kan het niet. Daarop vraag ik het aan de persoon voor hem. Ook deze kan het niet afleiden. Zo ga ik de hele rij af en uiteindelijk vraag ik aan de voorste persoon of hij weet wat de kleur van zijn hoed is. Deze weet het wél. Kun jij ons vertellen wat de kleur van zijn hoed is? Leg uit!

OPLOSSING. Als de voorste 99 mensen allemaal een zwarte hoed op hebben, dan weet de achterste persoon dat alle zwarte hoeden al gebruikt zijn en dat hij zelf een witte hoed heeft. Omdat de achterste persoon niet weet welke hoed hij heeft, heeft er dus iemand voor hem een witte hoed op. De een-na-achterste persoon weet dit, dus als hij zelf niemand voor hem ziet met een witte hoed, dan concludeert hij dat hij die zelf op heeft. Hij weet het echter ook niet, dus heeft er iemand voor hem nog een witte hoed op. De twee-na-achterste persoon weet dit weer en zou concluderen dat hij zelf een witte hoed op heeft als hij alleen maar zwarte hoeden voor zich ziet. Omdat hij dit niet kan concluderen, ziet hij dus nog een witte hoed en de persoon voor hem weet dit.

Laddercompetitie

De Pythagoras Olympiade heeft ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Dit jaar zijn er voor het eerst drie hoofdprijzen voor de bovenste drie leerlingen van de laddercompetitie:

f250,-, f200,- en f150,-

De laddercompetitie van jaargang 1997-1998 is gewonnen door Gertjan Kok van het Sint-Maartenscollege te Voorburg. Gertjan had alle opgaven goed. Hij wint een boekenbon van honderd gulden. Hartelijk gefeliciteerd!



Pythagoras Olympiade

Iedereen die nog niet weet welke kleur hoed hij op heeft, ziet dus nog een witte hoed voor zich. Omdat de een-na-voorste persoon het ook niet weet en die alleen de voorste persoon ziet, weet de voorste persoon dat hij een witte hoed op heeft.

Deze opgave is opgelost door: Gertjan Kok, **Sint-Maartenscollege** te Voorburg, Barbara Ravan, **Johan van Oldenbarnevelt** te Amersfoort, Selma de Mink, **Geert Groote College** te Deventer, Jenny de Jong, **Groene Hart Lyceum** te Alphen a/d Rijn, Maurits Meijer, **Groene Hart Lyceum**, Sandra Zwolsman, **Berger Scholengemeenschap** te Bergen, Jim Kasteel, Arnhem, Sanne Himmelreich, **Berger Scholengemeenschap**, Maarten van de Weijden, **Berger Scholengemeenschap**, Frank van Es, **Berger Scholengemeenschap**, Ana Koeman, **Berger Scholengemeenschap**, Melanie Aalders, **Berger Scholengemeenschap**, Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Birgit van Dalen, **Vlaardingse Scholengemeenschap** Bart Vandewoestijne, Zwevegem, Martijn Kropman, **Lorentz-Casimir Lyceum** te Eindhoven, Peter Deleu, Hulste, H. Verdonk, 's-Gravenhage. De boekenbon gaat naar Selma de Mink.

Opgave 38

Van vier getallen a , b , c en d kunnen we op zes verschillende manieren de som nemen van twee getallen, namelijk $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$. Van de zes getallen die we zo krijgen zijn er vijf gelijk aan 5, 6, 8, 9 en 13. Bepaal het zesde getal en de mogelijke waarden van a , b , c en d .

Dit was een moeilijke opgave; we hebben veel oplossingen binnen gekregen, maar veel inzenders vonden ofwel niet alle mogelijke oplossingen of konden niet bewijzen dat er geen andere mogelijk waren.

OPLOSSING. We weten niet welk getal bij welke som hoort, dus we kunnen niet zomaar een stelsel van vergelijkingen opstellen. Wel zien we dat we de zes sommen zó in drie paren kunnen verdelen, dat de som van elk paar hetzelfde is, want:

$$\begin{aligned}(a+b) + (c+d) &= (a+c) + (b+d) \\ &= (a+d) + (b+c).\end{aligned}$$

Uit de vijf getallen 5, 6, 8, 9 en 13 zijn maar op één manier twee paren met dezelfde som te maken, namelijk $5+9 = 14 = 6+8$. Het getal 13 vormt dus een paar met het gezochte zesde getal x en uit $13+x = 14$ volgt $x = 1$. Omdat alle zes de sommen verschillend zijn, zijn ook de vier getallen verschillend.

Als we aannemen dat $a < b < c < d$, dan is $a+b < a+c < a+d < b+d < c+d$ en $a+c < b+c < b+d$. De sommen $a+b$ en $a+c$ zijn dus het kleinst en de sommen $b+d$ en $c+d$ zijn het grootst. Er geldt dus $a+b = 1$, $a+c = 5$, en $c+d = 13$. Bovendien geldt er $b+c = 6$ en $a+d = 8$ of er geldt $b+c = 8$ en $a+d = 6$. In het eerste geval krijgen we $a = 0$, $b = 1$, $c = 5$ en $d = 8$ en dit is inderdaad een oplossing. In het tweede geval krijgen we $a = -1$, $b = 2$, $c = 6$ en $d = 7$ en ook dit is een oplossing.

Deze opgave is opgelost door: Gertjan Kok, **Sint-Maartenscollege** te Voorburg, Maarten van de Weijden, **Berger Scholengemeenschap**, Bart Vandewoestijne, Zwevegem.

De boekenbon gaat naar Maarten van de Weijden. ▀

Tot ver in de zeventiende eeuw was Latijn de taal der wetenschap.

Simon Stevin introduceerde het Nederlands als wetenschappelijke taal. Omdat voor veel begrippen nog geen Nederlands woord bestond, bedacht hij zelf nieuwe woorden.

Wisconst

Klaas Pieter Hart

In de meeste talen wordt vrijwel hetzelfde woord voor wiskunde gebruikt: mathematics, mathématique, Mathematik, matematikk.

Al die woorden komen van het Griekse woord voor wiskunde: *μαθηματική*. Het feit dat wij over *wiskunde* spreken hebben we voor een groot deel te danken aan Simon Stevin, geboren te Brugge in 1548. Stevin vond het Nederlands heel geschikt om wetenschap in te bedrijven. Hij spande zich in om voor zoveel mogelijk termen passende Nederlandse woorden te vinden. Het woord 'wisconst' was in zijn tijd (eind 16e eeuw, begin 17e eeuw) al in gebruik. Stevin voegde daar vele andere woorden aan toe, zoals brantsne, everedich, houckmaet, keghelsne, lanckrondt, meetconst, noemer, scherp-houck, stomphouck en 'werf'.

Zeker weten

'Wisconst' betekent 'wiskunde' en het 'wis' in wisconst betekent 'zeker' – denk aan de uitdrukking wis en waarachtig. Wiskunde is de kunst van het zeker weten en dat zeker weten doen we door elke bewering te bewijzen. Ook sommige andere woorden herkennen we onmiddellijk: 'everedich' is nu 'evenredig' en 'keghelsne', 'meetconst', 'noemer', 'scherp-houck' en 'stomphouck' kennen we – in een ietwat andere spelling – nog steeds.

Driewerf

Andere woorden zijn raadselachtiger; die hebben zich blijkbaar niet staande kunnen houden. Zo was 'brantsne' een ander woord voor parabool. Eigenlijk wel een mooi woord, want door in een parabolische spiegel zonlicht in te laten vallen kun je de zonnehitte concentreren in het brandpunt van de parabool.

De betekenis van 'lanckrondt' wordt duidelijk als je er iets langer naar kijkt: lang en rond, dat beschrijft een ellips. Het woord 'werf' is lastiger. Maar door aan een woord als driewerf te denken, dat 'drie keer' betekent, zien we dat werf gewoon 'keer' of 'maal' betekent. Het woord maal betekende vroeger 'gedeeld door': Stevin vertaalde het Latijnse woord 'quotiens' (gedeeld door) met 'mael' of 'soomenichmael'. Simon Stevin gebruikte 'houckmaet' voor de sinus van de hoek; dat is een beetje dubbelzinnig, omdat het ook op de grootte van de hoek zou kunnen slaan.

Simon Stevin heeft niet alleen in de wiskunde Nederlandse woorden ingevoerd; het woord scheikunde komt bijvoorbeeld ook bij hem vandaan: 'stofscheyding'. ▀

Op 9 augustus 1998 kondigde de Amerikaanse wiskundige Tom Hales van de Universiteit van Michigan per e-mail aan dat het hem gelukt was om een bewijs te geven voor het vermoeden van Kepler. Als dit bewijs correct is heeft hij de dichtst mogelijke bolstapeling in de ruimte bepaald en daarmee een van de oudste problemen uit de wiskunde opgelost.

Kanonskogels stapelen

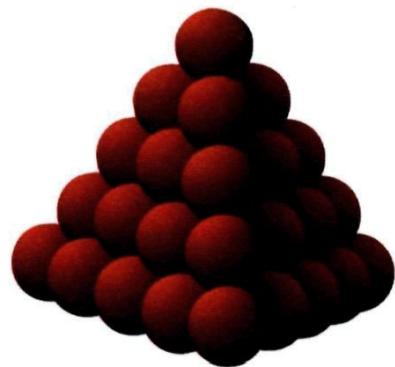
Hans Melissen

De vraag naar hoe je bollen zo dicht mogelijk op elkaar kunt stapelen is al heel oud. De vroegste discussie over dit probleem die we in de literatuur kunnen vinden lijkt zo'n vierhonderd jaar oud. Sir Walter Raleigh was een Engels zeevaarder, avonturier en gunsteling van koningin Elizabeth I. Misschien ken je zijn naam wel uit de verhalen over zeeslagen en kapers uit die tijd. Door zijn beroep was hij geïnteresseerd in het netjes opstapelen van kanonskogels. Hij vroeg in 1591 zijn wis- en sterrenkundig adviseur, Thomas Harriot, formules te ontwikkelen om het aantal kogels in een stapel met kanonskogels te bepalen.

Stapelen

Je zou dit zelf als volgt kunnen proberen. Een stapel van één hoog is eenvoudig: daar heb je maar één kanonskogel voor nodig. Voor een stapel van twee hoog begin je met drie kogels in een driehoek tegen elkaar. Er past er dan precies één op, dus in een stapel van twee hoog passen vier kogels. Voor een stapel van drie hoog begin je met een driehoek van zes kogels. Op deze driehoek past

precies de stapel die we daarnet hadden, van twee hoog. We krijgen zo een stapel van drie hoog met $6 + 3 + 1 = 10$ kogels. Zo kun je verder gaan, en in het algemeen heb je dan voor een stapel van n hoog $n(n+1)(n+2)/6$ kogels nodig. Je kunt ook nog een ander soort stapel maken door in elke stapel de bollen in een vierkant te leggen. Een stapel van drie hoog heeft dan $1 + 4 + 9 = 14$ kogels nodig. Kun je hier, net als Harriot, een formule voor vinden?



Kepler

Na het oplossen van het probleem van de Engelse admiraal dacht Harriot nog wat door. Hij voerde een briefwisseling met Johannes Kepler, de eerste astronoom die durfde te beweren dat niet de aarde, maar de zon in het centrum van ons zonnestelsel staat. Kepler beschreef in 1609 een stapeling

die eigenlijk de stapeling van de kanonskogels van Harriot was. Hij merkte, zonder bewijs, op dat een dichtere stapeling niet mogelijk is. Zoals in die tijd gebruikelijk was deed hij dat in het Latijn: *'Coaptatio fiet arctissima: ut nullo praeterea ordine plures globuli in idem vas compingi queant'* (deze stapeling is de dichtste: op geen enkele manier kunnen meer bollen in dezelfde ruimte worden geplaatst).

Hierdoor is het bolstapelingsprobleem zijn naam gaan dragen. Het bleek een echt probleem te zijn, want hoe logisch Kepler het ook vond, het lukte geen enkele wiskundige om dit te bewijzen. In de wetenschappelijke wereld sprak men er snel schande van dat het probleem nog niet was opgelost.

Stuivers

Waarom is het probleem van Kepler zo lastig? Laten we eerst eens naar de situatie in het platte vlak kijken. Daar zijn 'bollen' gewoon cirkels, bijvoorbeeld stuivers dus. Door wat te schuiven met stuivers op een tafel zie je al snel dat er precies zes stuivers om één stuiver passen. Vervolgens ligt het erg voor de hand hoe je nu verder moet. Door telkens nieuwe stuivers tegen de 'kuiltjes' te leggen wordt de hele tafel tenslotte op een regelmatige manier gevuld. Het is overduidelijk dat het ook niet beter kan. Meer stuivers krijg je er echt niet op. Toch werd dit pas zo'n honderd jaar geleden bewezen door de Noorse getaltheoreticus Thue, om precies te zijn in 1892. Welk gedeelte van het vlak wordt nu door de stuivers bedekt? Om dit uit te rekenen kun je om elke stuiver een gelijkzijdige zeshoek tekenen, zodanig dat de zeshoeken samen de hele tafel opvullen. De vulverhouding is

dan gewoon de oppervlakte van een stuiver gedeeld door de oppervlakte van een zeshoek. Als je dit uitrekent vind je een verhouding van

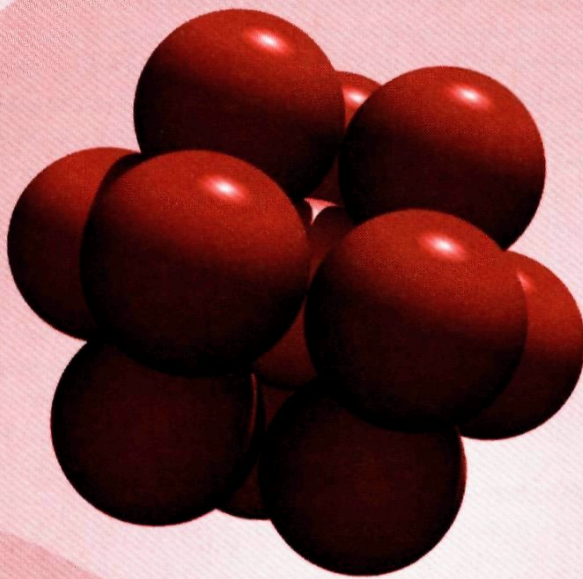
$$\frac{\pi r^2}{6r^2 \tan(\pi/6)} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

De stuivers bedekken dus bijna 91% van de tafel.

Kussende bollen

In de ruimte lijkt de situatie ook zo klaar als een klontje. Je begint in het vlak en legt de bollen zo goed mogelijk neer, alsof het stuivers zijn. Met een tweede laag doe je hetzelfde en legt die vervolgens zó op de eerste dat z'n bolletjes precies in de kuiltjes van de eerste laag vallen. Zo kun je een stapeling maken die in vaktermen de *face-centered-cubic* stapeling heet. In deze stapeling raakt elke bol aan twaalf andere en de dichtheid is $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$. Dat wil zeggen, ongeveer 74% van de ruimte wordt nu gevuld met bollen.





De face-centered-cubic stapeling

Als we willen bewijzen dat het niet beter kan duiken er onverwachte problemen op. Hoeveel bollen passen er eigenlijk om een bol? In vaktaal heet dit *the kissing number*. Al in 1694 lag de Schotse astronoom David Gregory over deze kwestie overhoop met de bekende Engelse wetenschapper Isaac Newton. Newton beweerde dat het er twaalf zijn, terwijl volgens Gregory dertien ook mogelijk zou moeten zijn. Twaalf is in ieder geval mogelijk, want in de 'piramide-stapeling' die we al kennen heeft elke bol precies twaalf burens. Als je echter een bol bekijkt met zijn twaalf directe burens, dan liggen hun posities niet vast zoals dat met de stuivers het geval was. Je zou ze allemaal nog wat kunnen verschuiven, terwijl ze toch aan de middelste blijven raken. Zou deze vrijheid niet net voldoende kunnen zijn om genoeg ruimte voor een extra bol te maken? In 1874 werd bewezen dat Newton gelijk had. Voor dertien bollen is er niet genoeg ruimte. Wat het bewijs erg moeilijk maakt is dat de bollen nog verplaatst kunnen worden en niet zoals bij de stuivers vast liggen.

Regelmatische stapelingen

Gauss was de eerste die iets bewees over het bolstapelingsprobleem. In 1840 toonde hij aan dat als je er vanuit gaat dat de stapeling regelmatig is, de dichtheid nooit groter kan zijn dan $\pi/\sqrt{18}$. Het blijft nog altijd denkbaar dat met een misschien ingewikkelde stapeling, die niet regelmatig is, een hogere dichtheid kan worden gehaald. Andere wiskundigen zijn bezig geweest om een bovengrens voor de stapelingsdichtheid te vinden. De meest recente bovengrens (uit 1993) is 0.773055 maar die is nog ver verwijderd van de echte waarde: 0.74048.

Suiker

Vanwege het praktische belang hebben ook veel experimentatoren zich op de bepaling van maximale stapelingsdichtheid geworpen. Ze hebben talloze proeven werden gedaan met hagelkorrels en plastic balletjes, die in een pot werden geschud of aangestampt, om maar een zo hoog mogelijke dichtheid te bereiken. Er zijn zelfs een paar biologen geweest die dit met erwten deden, deze dan hard aanstampen, en ze vervolgens weer uit elkaar pulkten om het aantal vlakjes te tellen die de platgedrukte erwten hadden gekregen. Als je een grote hoeveelheid kleine bolletjes (denk bijvoorbeeld aan suikerkorrels) in potje doet, dan krijg je een zogenaamde *random loose packing* die een dichtheid heeft van ongeveer 0.60. Uit ervaring (denk aan een suikerpot die net gevuld is) weet je waarschijnlijk dat je er altijd nog wel wat meer in kunt krijgen door eerst hard met het potje op een tafel te stampen. De *random close packing* die je zo krijgt blijkt een dichtheid van ongeveer 0.64 te hebben. Helaas is

dit nog altijd akelig ver verwijderd van de optimale waarde 0.74048. Een reden hiervoor is dat de bolletjes groepjes met een kristalstructuur gaan vormen en deze groepjes zijn door schudden haast niet meer uit elkaar te krijgen. Je weet nu dus wat je moet zeggen als je moeder weer eens moppert omdat niet het hele pak suiker in de suikerpot past. Door de suikerkorrels netjes te stapelen kan er zeker tien procent meer suiker in de pot!

Klopt het bewijs?

Terug naar het bolstapelingsprobleem. Hebben we nu eindelijk een bewijs? Er kleeft een klein bezwaar aan het bewijs dat Tom Hales nu heeft aangekondigd. Het is zo'n walgelijk ingewikkeld bewijs dat het een boekwerk is geworden van 250 pagina's. Helaas is dat nog niet alles, want een belangrijk deel van het bewijs bestaat uit het controleren van een heleboel ingewikkelde situaties met behulp van computers. De programmatuur voor de computer, samen met de gegevens die de computer nodig heeft en oplevert, beslaan ook nog eens zo'n 3 Gigabytes aan computergeheugen, dit komt neer op zo'n drie miljoen pagina's tekst. Je kunt je voorstellen dat het hierdoor niet eenvoudig voor andere wiskundigen is om dit bewijs te controleren, en pas een gecontroleerd bewijs geldt als echt.

De wiskundige wereld heeft een groot vertrouwen in Thomas Hales, want hij heeft de afgelopen jaren regelmatig delen van zijn werk gepubliceerd, en dat zag er allemaal uitstekend uit. Het ziet er dus naar uit dat we dit bewijs wel kunnen vertrouwen.

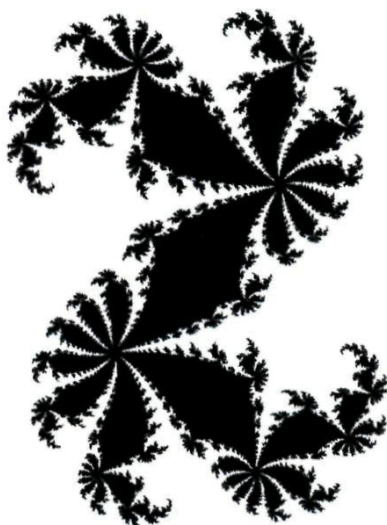
In het bewijs van Hales wordt aan elke bol een cel toegewezen waar de bol in ligt, zodanig, dat al deze cellen de hele ruimte vullen. Dit lijkt een beetje op de zeshoeken die we bij de stuivers hebben gebruikt. Het bewijs bestaat uit het controleren van een hele hoop (zo'n 5000) mogelijke situaties, waarbij telkens door een computer het maximum van een hele ingewikkelde functie moet worden gevonden, een functie met zo'n 150 variabelen. Zulk soort problemen zijn in het algemeen erg lastig. Eén geval bleek extra moeilijk te zijn. Aan de behandeling hiervan is het proefschrift van Samuel Ferguson gewijd, een student van Hales. Dit werk is ook onderdeel van het bewijs. En wat nu? Op naar de dichtste bolstapeling in vier dimensies! 

Fractals zijn mooi om naar te kijken, maar nog leuker is het om ze zelf te maken. Martijn Dekker heeft een computerprogramma geschreven waarmee je makkelijk 3D-fractals kunt maken. Alle illustraties bij dit stukje zijn gemaakt met dit programma. Het programma is gratis en kan via Internet opgehaald worden.

4D-fractals in 3D

Fractals zijn fraaie wiskundige figuren die sinds de introductie van de PC heel populair zijn. Fractals teken je niet met de hand maar op een computer, omdat je een fractal eigenlijk niet tekent, maar berekent.

Hieronder zie je een voorbeeld van een zogenaamde Julia-fractal (figuur 1). Julia-fractals zijn figuren in het xy -vlak. Veel minder bekend zijn de zogenaamde quaternion Julia-fractals. De wiskundige achtergronden hiervan worden uitgelegd op de homepage. Hier gaan we ze alleen tekenen, met een computerprogramma dat je gratis van Internet af kan halen.



Figuur 1. Een Julia-fractal

QJN

Quaternion Julia fractals kunt je zelf maken met een computerprogramma dat Martijn Dekker heeft geschreven. Het heet QJN, een afkorting van *Quaternion Julia Navigator*. Alle illustraties bij dit stukje zijn gemaakt met QJN. Het programma is gratis en je kunt het ophalen op Internet door naar de QJN-homepage te surfen. Je vindt daar een beschrijving van het programma en voorbeelden. Met dit programma kun je allerlei trucs uithalen met de fractals; je kunt ze roteren, een ander kleurtje geven of kiezen voor een andere belichting. Met een stereo-bril krijg je zelfs 3D-effecten.

Installeren

Het QJN-programma draait onder Windows 95. Je kunt het zelf installeren. Surf op Internet naar:

www.pff-software.demon.nl/qjn/qjn.htm

Download daar QJN. Je krijgt dan een bestand `qjnv091.zip`. Dit bestand moet je unzippen (sommige browsers doen dat vanzelf). Je krijgt dan een bestand `qjnv091.exe`, dat is een programma dat je kunt opstarten. Als je deze bestanden niet kunt vinden, zoek dan met 'find' naar `qjnv`.

Figuur 2. Een 'screenshot' van de Quaternion Julia Navigator



Gebruiksaanwijzing

Als je qjnv091.exe opstart krijg je twee schermen: een tekenscherf en een coördinatenscherf. Op het tekenscherf kun je met 'view' een fractal berekenen en tekenen. Maak in het begin het plaatje niet al te groot, want een berekening kan veel tijd in beslag nemen. De grootte van het plaatje stel je in met 'size'.

De eerste fractal die je zo krijgt is niet erg indrukwekkend, een soort bol. Om interessante figuren te krijgen, heb je het coördinatenscherf nodig ('coordinates'). Door in de twee figuurtjes linksonder met je muis punten aan te klikken krijg je een andere fractal. Op de plaats waar je geklikt hebt verschijnt een rood puntje. Alleen puntjes in de

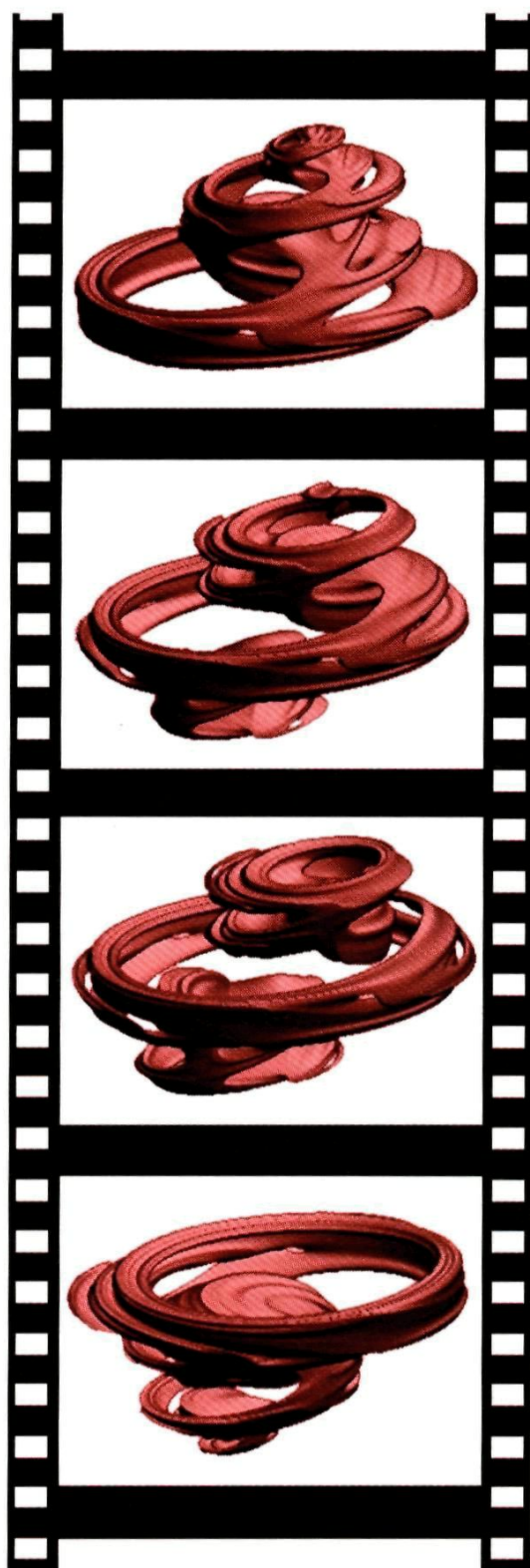
gele gebieden leveren Julia-fractals op en punten aan de rand van het gele gebied geven de interessantste figuren. Op het coördinatenscherf kun je verder nog kiezen welk stuk van de xyz-ruimte je wil tekenen en onder welke hoek je de fractal wil bekijken.

Als je een keuze gemaakt hebt, kun je met 'view' de nieuwe figuur berekenen en tekenen. Je kunt ook schaduwen toevoegen of zelfs stereobeelden maken, maar om die te bekijken heb je wel een stereobril nodig, een bril met een rood en een blauw glas. Onder 'rendering' zitten nog een aantal leuke opties, waarmee je kleur en belichting van de figuur kunt wijzigen zonder dat de figuur opnieuw berekend hoeft te worden.



4D

Vlakke figuren teken je in het xy-vlak, driedimensionale figuren in de xyz-ruimte. In de plaatjes zie je steeds

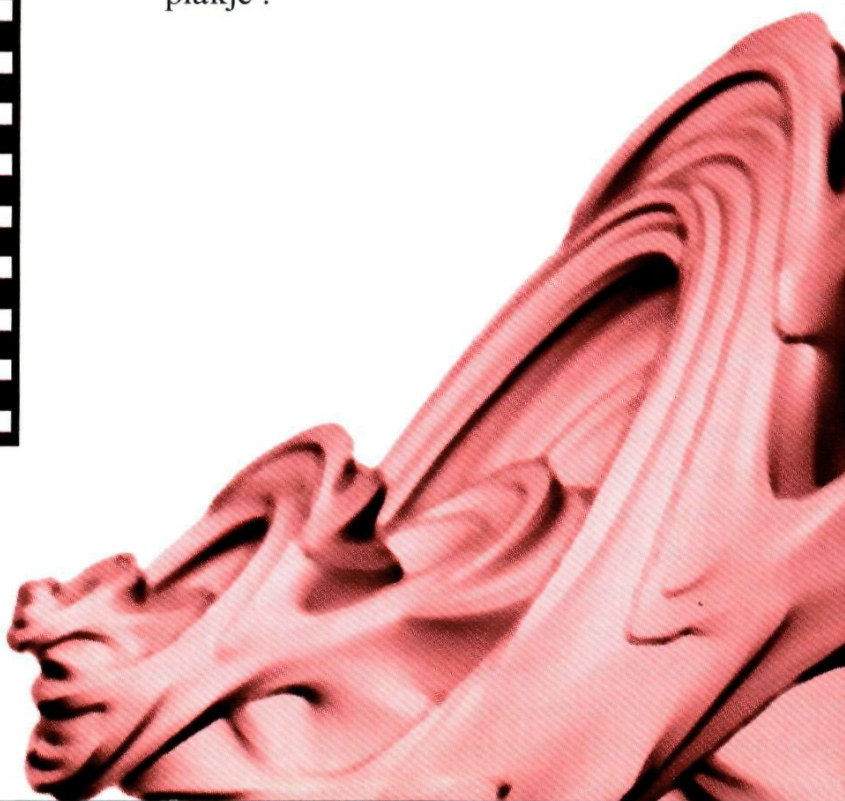


Figuur 3. Vier 3-dimensionale 'plakjes' van dezelfde quaternion Julia fractal

driedimensionale figuren afgebeeld. Toch zijn quaternion Julia fractals niet drie-, maar vierdimensionaal! Dit betekent dat je vier coördinaten nodig hebt om te tekenen, je tekent ze in een $xyzt$ -ruimte.

Hoe kunnen we die vierdimensionale fractals weergeven? Om dit uit te leggen bekijken we eerst een driedimensionaal object, bijvoorbeeld een bol. Als je die in hele dunne plakjes snijdt, dan krijg je een heleboel steeds kleiner wordende cirkels. Elk van die cirkels is een tweedimensionale figuur en als je die allemaal achter elkaar neerzet vormen ze een bol. Maar de cirkelplakjes kun je ook in de goede volgorde één voor één bekijken. Je krijgt dan een film die als het ware een reis door de bol weergeeft. Het begint met een stipje dat uitgroeit tot steeds grotere cirkels. Later worden de cirkels weer kleiner, om weer te eindigen in een stipje.

Onze quaternion Julia fractals zijn vierdimensionaal, maar in het QJN-programma bekijk je steeds een driedimensionaal 'plakje'.



De plaats van dit plakje kun je wijzigen met 'hyperplane'. Als je de fractal opnieuw berekent met een andere 'hyperplane'-waarde, krijg je een ander plakje van dezelfde quaternion Julia fractal. Door een aantal van deze plakjes achter elkaar te bekijken, krijg je een indruk van de vierdimensionale fractal (zie figuur 3). Door heel veel van deze plaatjes achter elkaar te plakken kun je zelfs een filmpje maken. In Pythagoras kunnen we zo'n filmpje niet tonen, maar op Internet kan dat wel – kijk op de QJN-homepage of op de homepage van Pythagoras. ▲

Meer informatie

1. De QJN-homepage:
www.pff-software.demon.nl/qjn/qjn.htm
2. De wiskundige achtergronden van de quaternion Julia fractals worden uitgelegd in een artikel van Martijn Dekker. Daarin wordt ook uitgelegd hoe zijn programma werkt. Het artikel kun je vinden op de homepage van Pythagoras. Kijk bij het decembernummer.
3. Het aprilnummer van 1997 bevat een artikel over tweedimensionale Julia fractals
(Pythagoras nr. 4, jaargang 36).
4. De fractal-links op de homepage van Pythagoras: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/fractals.html

Prijsvraag

Als je met QJN speelt vind je de prachtigste figuren die waarschijnlijk niemand eerder gezien heeft. Als je een plaatje wilt bewaren, kun je het opslaan onder 'file'. Voor de mooiste quaternion Julia fractal looft de redactie van Pythagoras twee boekenbonnen uit van honderd gulden. Stuur je fractal op een schijfje voor 28 februari 1999 naar het redactieadres van Pythagoras en maak kans op een prijs van honderd gulden!

In de vorige aflevering van Pythagoras hebben we het gehad over het eerlijk in tweeën of in drieën verdelen van stroopwafels, taarten en pizza's. Maar hoe verdeel je nu een pizza eerlijk in vieren of in vijven? We bespreken hier een methode die in het algemeen werkt.



Peter de Paepe

Eerlijk delen met zijn tweeën is niet zo moeilijk; dat doe je met de snij-en-kies-methode. Als bijvoorbeeld Alice en Bart een stroopwafel moeten delen, dan snijdt Alice de wafel in twee stukken die volgens haar even groot zijn. Daarna mag Bart één van de twee stukken kiezen. Hij kiest natuurlijk het stuk dat in zijn ogen het grootst is, of, als de stukken hem even groot toeschijnen, een willekeurig stuk. Alice krijgt het overblijvende stuk. Bart is tevreden, want hij heeft minstens de helft van de stroopwafel gekregen. Ook Alice is tevreden, want in haar ogen zijn de stukken precies even groot.

Met drie personen is de situatie ingewikkelder. Bijvoorbeeld als Alice, Bart en Chris een pizza eerlijk in drie stukken moeten delen. *Eerlijk* betekent dat iedereen tevreden is met het ontvangen stuk, en *tevreden* dat iedereen in zijn eigen visie tenminste eenderde van de pizza krijgt (tenminste wil zeggen: precies eenderde of méér).

In het vorige nummer van Pythagoras hebben we één manier besproken om een pizza eerlijk in drieën te verdelen. We behandelen hier een tweede manier om dat te doen.

eerlijk delen

Het voordeel van de nieuwe methode is dat deze makkelijk kan worden aangepast zó, dat de methode ook werkt voor méér dan drie stukken.

Eerlijk delen met zijn drieën

Alice, Bart en Chris zitten met een pizza Quattro Stagioni voor hun neus en willen deze eerlijk in drieën verdelen. Hoe gaan zij te werk? Alice begint; ze snijdt een stuk van de pizza af dat naar haar idee precies eenderde groot is en legt dit op een bord.

Dan is Bart aan de beurt. Als hij vindt dat dit stuk groter dan eenderde is, snijdt hij er een reepje van af zó, dat er naar zijn idee een stuk van precies eenderde blijft liggen. Vindt Bart het stuk op het bord precies eenderde groot of minder, dan verandert hij niets en laat het stuk gewoon liggen.

Nu is Chris aan de beurt. Net als Bart beoordeelt Chris het stuk op het bord. Als Chris vindt dat er op het bord méér dan eenderde ligt, snijdt hij er een reepje van af. Vindt hij het stuk precies eenderde groot of minder, dan verandert hij niets.

In de figuur rechts is een zogenaamde

beslissingsboom getekend, waarin de gang van zaken schematisch weergegeven is. Bovenaan staat Alice die een stuk afgesneden heeft dat zij precies eenderde groot vindt. Dan komt Bart aan de beurt. Voor Bart zijn er twee mogelijkheden: niks doen (de linkertak) of snijden (de rechtertak). Bij elk van deze twee mogelijkheden heeft Chris weer de keuze om niks te doen (linkertak) of te snijden (rechtertak). Er zijn dus vier eind-situaties mogelijk.

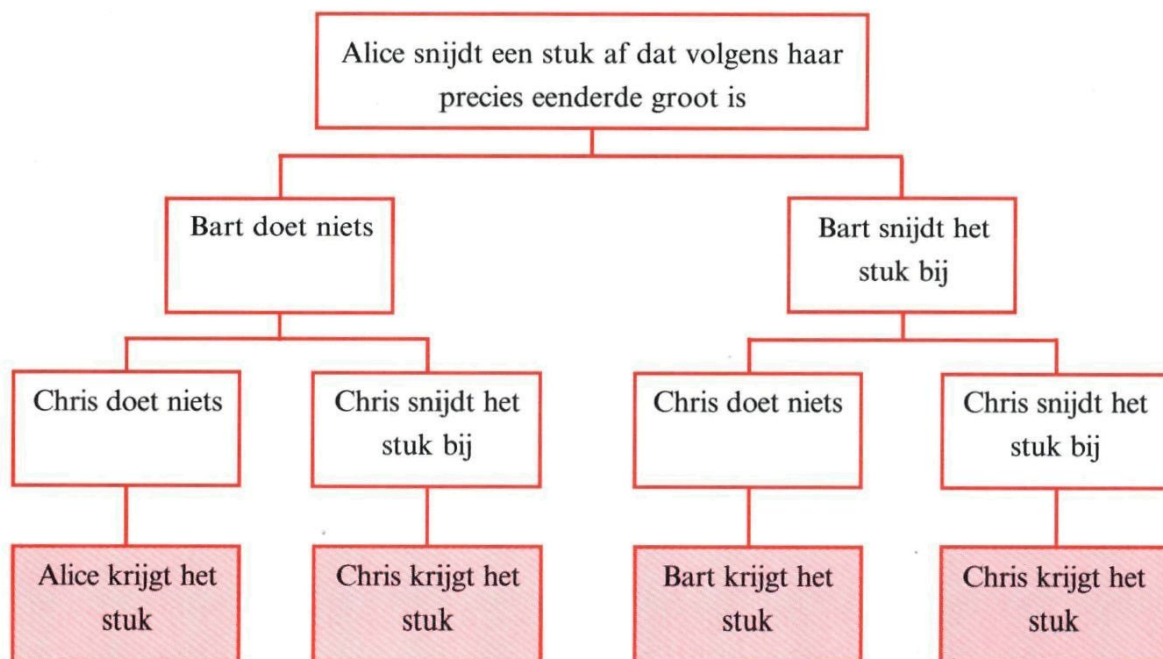
Wie krijgt nu het stuk op het bord? Dat is degene die als *laatste* gesneden heeft (zie onderaan in het schema). Dus als Bart en Chris beiden niks gedaan hebben, krijgt Alice het op het bord liggende stuk. Als Bart het stuk op het bord bijgesneden heeft en Chris heeft niks gedaan, dan krijgt Bart het stuk. En als Chris als laatste gesneden heeft krijgt hij het stuk. Degene die het stuk krijgt is tevreden, want in zijn of haar ogen is het stuk precies eenderde groot.

De overgebleven stukken worden tegen elkaar aan gelegd. De twee overgebleven personen vinden dit deel van de pizza *minstens* tweederde groot, je kunt dit zelf nagaan aan de hand van het schema. Op dit stuk passen de overgebleven twee de snij-en-kies-methode toe, ze krijgen beiden dus minstens de helft van tenminste tweederde pizza, dat wil zeggen, minstens eenderde deel. Zo is iedereen tevreden! ▀

OPDRACHT. Bedenk een methode waarmee vier of vijf personen een pizza eerlijk kunnen verdelen. Probeer de bovenstaande methode zoveel mogelijk te volgen.

Meer informatie

De informatie uit dit artikel en het artikel uit het vorige nummer komt uit *An envy-free cake division protocol* van S.J. Brams en A.D. Taylor in het tijdschrift *American Mathematical Monthly* 102 (1995), 9-18.



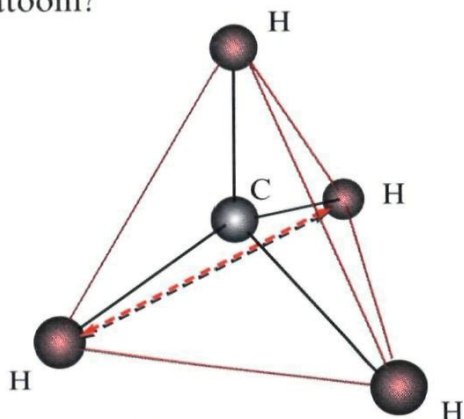
Een beslissingsboom voor het eerlijk in drieën delen van een pizza

Problemen

Dion Gijswijt

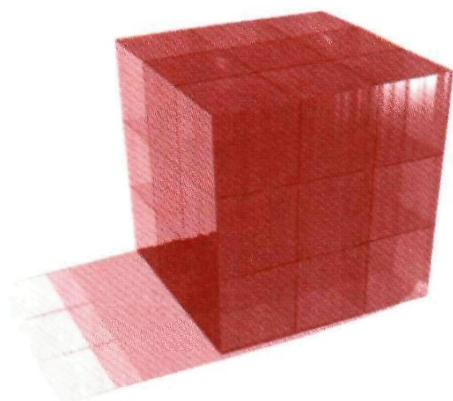
Methaan

In de figuur is een model te zien van een methaanmolekuul. De vier waterstofatomen H vormen een tetraëder waar het koolstofatoom C precies middenin zit. Als we de afstand tussen twee waterstofatomen gelijkstellen aan 1, wat is dan de afstand tussen het koolstofatoom en een waterstofatoom?



Ondoorzichtig

Een kubus is onderverdeeld in 27 kleine kubusjes. Sommige kleine kubusjes zijn doorzichtig, andere ondoorzichtig. Als je loodrecht tegen een willekeurig zijvlak van de grote kubus aankijkt, kun je niet door de kubus heen kijken. Hoeveel kleine kubusjes zijn er op z'n minst ondoorzichtig?

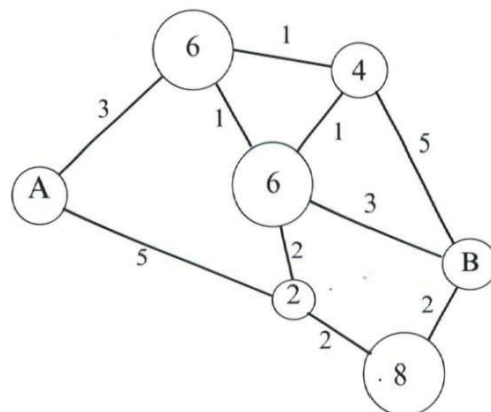


De ronde tafel

In de hoek van een zuiver rechthoekige kamer staat een ronde tafel tegen de muren gedrukt. De afstand van de tafel tot het hoekpunt van de kamer is 230 mm. Bereken de diameter van de tafel. *Bob de Jongste*

De kortste weg

Pieter wil van A naar B fietsen. Op z'n kaart staan de wegen tussen de verschillende dorpjes met de bijbehorende afstanden. Ook staat bij elk dorp aangegeven hoeveel kilometer hij binnen dat dorp moet afleggen. Wat is de kortste route van A naar B?



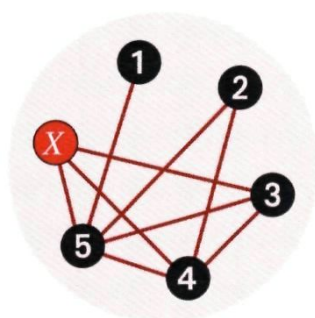
Oplossingen ^{nr. 1}

Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken.

Dion Gijswijt

Zes Getallen

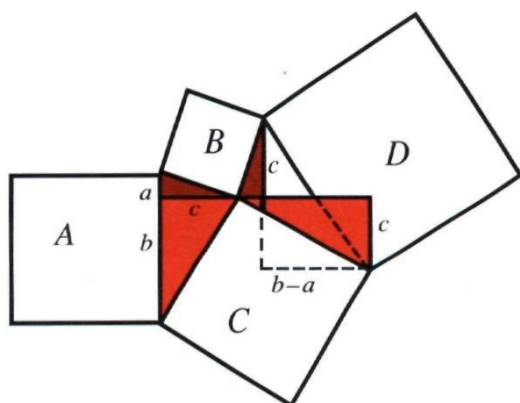
De getallen moeten verbonden zijn als in de figuur. We zien dat $X=3$.



Vierde vierkant

Met behulp van de stelling van Pythagoras zie je dat $A = (a+b)^2$, dat $B = a^2+c^2$, dat $C = b^2+c^2$ en dat $D = (c+c)^2+(b-a)^2$, zodat $A+D = 2B+2C$. De oppervlakte van het vierde vierkant is dus gelijk aan

$$D = 2B + 2C - A = 10 + 26 - 16 = 20.$$



Roddelen

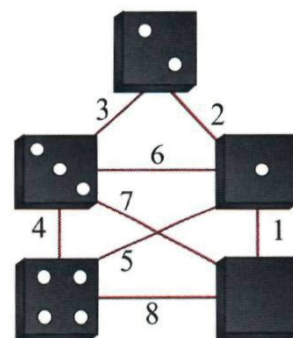
Het communiceren van alle roddels kan met acht gesprekken: 1-2, 3-4, 5-6, 1-3, 3-5, 4-6, 2-4 en 1-6. Met minder gesprekken gaat het niet. Voor een bewijs zie de homepage; kijk bij het decembernummer.

De legpuzzel

De legpuzzel heeft n maal m stukjes. We weten dat $nm = 300$ en $2n+2m-4 = 66$, dus dat $n+m=35$. Omdat $(n+m)^2 - (n-m)^2 = 4nm$ zien we dat $35^2 - (n-m)^2 = 1200$ en dus dat $n-m = 5$. De puzzel meet dus 20 bij 15 stukjes en er passen 20 stukjes in de lengte.

Domino

De acht lijntjes in het onderstaande 'huisje' stellen de dominostenen voor, de nummers verwijzen naar de dominostenen uit de opgave. Als je dit huisje met een pen overtrekt zonder een lijn tweemaal te tekenen en zonder je pen van het papier te halen, krijg je vanzelf de gewenste rij domino's.



Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij pythagoras@wins.uva.nl

t/m zondag 20 december '98
M.C. Escher, een leven in beeld
Kasteel Groeneveld, Baarn

Bewijzen en bewijsmethoden
Wintersymposium WG, Amersfoort

zaterdag 23 januari '99
5e Mathematische Modelleercompetitie

vrijdag 29 januari '99
De getallen e en π
UvA Mastercourse voor wiskundedocenten

vrijdag 5 en zaterdag 6 februari '99
Nationale Wiskunde Dagen
Noordwijkerhout

vrijdag 26 en zaterdag 27 maart '99
Finale Wiskunde A-lympiade

vrijdag 5, 12, en 19 februari '99
vrijdag 5, 12, en 19 maart '99
Wiskunde en de computer
VU Masterclass voor 5 en 6 VWO

donderdag 8 en vrijdag 9 april '99
Nederlands Wiskundig Congres 1999
Universiteit Utrecht

vrijdag 16 april '99
De wiskunde van Escher
UvA Mastercourse voor wiskundedocenten

JAAROVERZICHT 1999

(035) 542 04 46

(076) 527 32 67
(076) 541 97 57

(043) 388 38 34

(020) 525 50 74

(030) 2 611 611

(030) 2 611 611

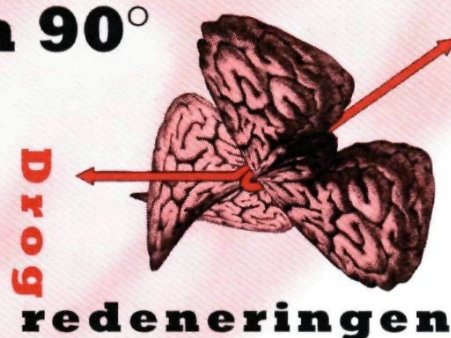
(020) 4447787

(030) 253 14 19

(020) 525 50 74

Een stompe hoek van 90°

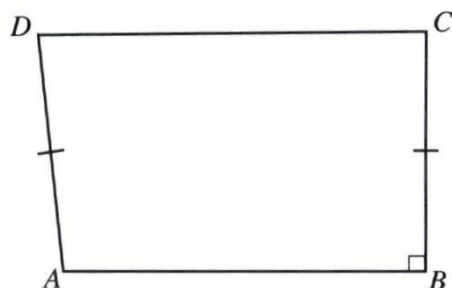
In de wiskunde moet je alles kunnen beredeneren. Maar met redeneren kun je makkelijk de mist in gaan; door foute redeneringen kun je dingen bewijzen die niet waar zijn. Bijvoorbeeld dat er stompe hoeken van negentig graden zijn.



André de Boer

In het vorige nummer van Pythagoras heb je een 'bewijs' kunnen zien van $1 = 2$. Dit bewijs klopt natuurlijk niet. Op de home-page van Pythagoras kun je lezen waarom.

Dus is 1 niet gelijk aan 2, maar kleiner, precies zoals je op school geleerd hebt. Op school leer je ook dat een stompe hoek *groter* is dan 90° . Nu gaan we 'bewijzen' dat er stompe hoeken bestaan die precies 90° zijn.



Figuur 1.

We gaan uit van figuur 1. De figuur is zo geconstrueerd dat $\overline{AD} = \overline{BC}$. Verder is de hoek bij A groter dan 90° , de hoek bij B is precies 90° . We gaan bewijzen dat $\angle A = \angle B$.

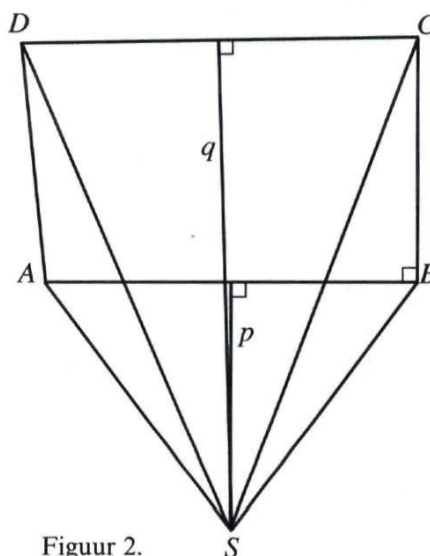
Een middelloodlijn deelt een lijnstuk in twee gelijke delen en staat loodrecht op het lijnstuk. De lijnstukken AB en CD zijn niet evenwijdig en de middelloodlijnen p van AB en q van CD dus ook niet. De middelloodlijnen snijden elkaar dus, zoals getekend in

figuur 2, in een punt S. Elk punt op p heeft dezelfde afstand tot A als tot B. Omdat S op p ligt, volgt $\overline{AS} = \overline{BS}$. Evenzo volgt: $\overline{CS} = \overline{DS}$

Omdat ook nog geldt $\overline{AD} = \overline{BC}$ zijn de driehoeken $\triangle ASD$ en $\triangle BSC$ congruent en hebben ze precies dezelfde afmetingen. Dan volgt: $\angle SAD = \angle SBC$. Omdat S op de middelloodlijn p ligt geldt $\overline{AS} = \overline{BS}$, zodat $\triangle ABS$ gelijkbenig is. Daarom geldt: $\angle SAB = \angle SBA$. Trekken we deze gelijke hoeken van elkaar af, dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle SAD - \angle SAB \\ &= \angle SBC - \angle SBA = \angle B.\end{aligned}$$

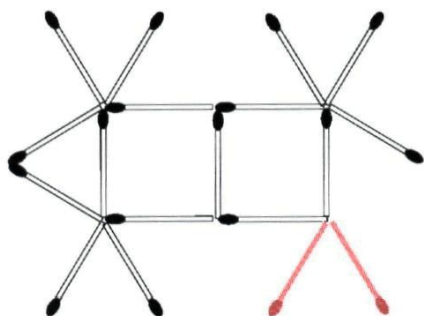
Conclusie: Een stompe hoek van 90° . Zie jij waar de fout in het bewijs zit? Een uitleg vind je op de homepage van Pythagoras (kijk bij het decembern timer).



Figuur 2.

Oplossingen Kleine nootjes

Monique



Vierkante meter

De oppervlakte van een halve meter in het vierkant is gelijk aan $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ vierkante meter, dus aan $\frac{1}{4}$ vierkante meter. Een halve vierkante meter is dus groter.

Met de bus naar Bussum

14 minuten over 4

Waterproof

Water van 15°
Fahrenheit is ijs!

Tienduizend

$$\begin{aligned} 10.000 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 16 \times 625. \end{aligned}$$

Bluf?

Katja kopiëert de zetten van Kasparov. Haar eerste zet is niet met zwart in de eerste partij, maar met wit in de tweede. Haar zet is dezelfde als de openingszet van de wereldkampioen. Ze wacht totdat Kasparov deze zet met zwart beantwoord heeft, en dan doet zij in de eerste partij met zwart dezelfde zet. Enzovoort.

Over de medewerkers

prof.dr. W. Albers is hoogleraar statistiek aan de UT

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam

prof.dr. J. van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA

dr. M. Dekker is werkzaam als projectleider en IT-medearchitect bij de ABN Amro bank

Bruno Ernst is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren

D.C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA

dr. K.P. Hart is docent topologie aan de TU Delft

dr. J. Hogendijk is docent wiskunde aan de UU

dr. J.K. Hoogland is onderzoeker Financiële Wiskunde aan het CWI

B. de Jongste is recreatief wiskundige te Den Haag

dr. ir T. Koetsier is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU

ir. A.A.J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT

R. van Luijk is student wiskunde aan de UU

dr. J.B.M. Melissen is docent wiskunde aan de Hogeschool 's Hertogenbosch

drs. W.R. Oudshoorn is AIO algebra en meetkunde aan de RUG

dr. P.J. de Paepe is docent wiskunde aan de UvA

H.N. Pot is woonachtig te Woerden

ir. S.M. van Rijnsouw is OIO computeralgebra aan de TUE

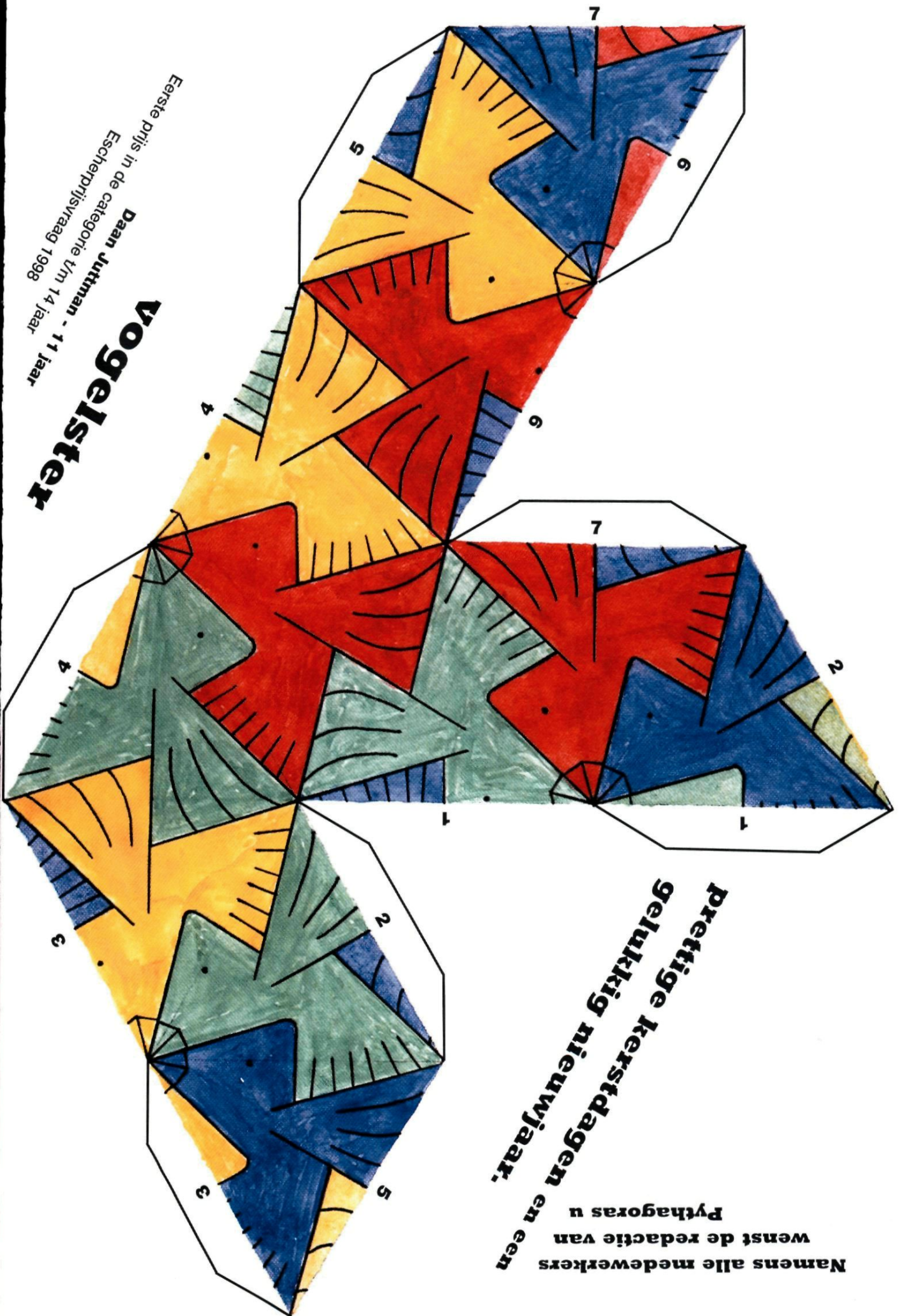
prof.dr. J.M. Schumacher is onderzoeker bij het CWI en deeltijdhoogleraar wiskunde aan de KUB

dr. ir. R.F. Swarttouw is docent wiskunde aan de VU

dr. ir. M.H. Vellekoop is docent Toegepaste Wiskunde aan de UT

drs. C.G. Zaal is docent wiskunde aan de TU Delft

Namens alle medewerkers
 wenst de redactie van
 Pythagoras u
 prettige kerstdagen en een
 gelukkig nieuwjaar.



vogelster

Daan Juttman - 11 jaar
 Escherprijsvraag 1998
 Eerste prijs in de categorie t/m 14 jaar

Geachte abonnee, geachte lezer,

Het decembern timer van 1998 is het tweede nummer van Pythagoras uitgegeven onder het Wiskundig Genootschap. Het uitbrengen van het eerste nummer is met nogal wat moeite gepaard gegaan. U hebt dit wellicht bespeurd: velen van u hebben het oktobernummer twee keer ontvangen.

Voor het twee keer verzenden van het oktobernummer waren goede redenen: door technische problemen bij de drukker ontbraken de eerste keer twintig illustraties. Daardoor was met name het artikel over Japanse puzzels moeilijk te begrijpen. Deze fout is ongelukkig genoeg niet opgemerkt, waardoor het eerste nummer abusievelijk toch naar de abonnees gestuurd is. De tweede keer was het nummer helemaal compleet, maar helaas ontbrak hierbij in de meeste gevallen de begeleidende brief van de drukker, waarin het een en ander uitgelegd wordt.

Dit heeft bij veel abonnees voor onduidelijkheid gezorgd, waarvoor bij deze onze excuses. Als u het eerste oktobernummer bewaard heeft en het tweede weggegeven, dan heeft u het dus precies verkeerd om gedaan (schrijft u dan even een briefje naar de redactie, dan krijgt u van ons als-nog het goede oktobernummer).

Kerstster

De Escherprijsvraag is zeer succesvol verlopen: er zijn meer dan vijfhonderd werkstukken ingezonden. In het februari nummer van Pythagoras wordt verslag gedaan van de afloop van de prijsvraag, met afbeeldingen van alle winnende kunstwerken. Als voorproefje vindt u aan de achterzijde van deze kaart een bouwplaat van het kunstwerk dat de hoofdprijs in de categorie tot en met 14 jaar gewonnen heeft: een kleurige kerstster met twaalf vredesduiven. Voor in de kerstboom!

Nieuwe abonnementsvorm

Op dit moment vormen middelbare-schoolleerlingen een relatief klein gedeelte van het abonneebestand van Pythagoras. Om het blad aantrekkelijker te maken voor leerlingen introduceren we een nieuwe abonnementsvorm: het *leerlingabonnement*, een individueel abonnement tegen een gereduceerd tarief bestemd voor leerlingen tot en met 18 jaar (zie verder de achterkant van het omslag). Wellicht een goed idee als u een kerstcadeautje zoekt!

Schoolabonnementen

Met ingang van 1 december 1998 zijn de voorwaarden van de schoolabonnementen gewijzigd, zie de achterkant van het omslag. Leraren die op school reclame willen maken voor Pythagoras kunnen bij de redactie promotiemateriaal (proefnummers en folders) aanvragen.



TI-83: veelzijdig en krachtig

De TI-83 is een veelzijdige grafische rekenmachine voor de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Terecht is deze machine door het Freudenthal instituut gekozen als 'standaard' in het experiment voor de nieuwe bovenbouwprogramma's wiskunde (PROFI).

Ervaringen met de bekende TI-82 zijn in de TI-83 verwerkt; een eigentijdse machine dus! Zo is de **interface** sterk verbeterd en kan er volop worden gewerkt met **matrices**.

Ook de **grafische presentaties** en de mogelijkheden om **vergelijkingen** op te lossen zijn uitgebreid. Daarnaast kunnen uw leerlingen **gegevens uitwisselen** via de I/O-poort terwijl met TI-graph-link-software **aansluiting op een PC** mogelijk is.



Met name de veelzijdigheid van de TI-83 maakt, dat deze machine naast **wiskunde**, ook voor diverse andere vakken zeer geschikt is. Doordat de machine gekoppeld kan worden aan de CBL en CBR is hij uitermate geschikt voor **natuurkunde**.

Door de financiële functies is de machine een uitkomst bij **financiële en economische vakken**, maar ook bij vakken als **aardrijkskunde, biologie en informatica** kan de TI-83 zeer behulpzaam zijn.

Als extra service naar scholen, is er persoonlijke begeleiding beschikbaar. Een ervaren wiskunde leraar komt desgewenst bij U langs op school. U kunt een afspraak met hem maken. Zijn telefoonnummer is: 026-33 90 383. Zijn E-mail adres is: pietersc@bart.nl

Wiskunde dichterbij

TI-83: dé machine voor de tweede fase!

Texas Instruments Nederland, Rutherfordweg 102, 3542 CG Utrecht, tel. 030-2417417

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras verschijnt zes keer per jaar en stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

- telefonisch: 0522-855175, • per fax: 0522-855176,
 - via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/
 - schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
- Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

Tarieven '98-'99

Een jaarabonnement op Pythagoras kost f 37,50. Losse nummers f 8,- of BF 160. Overige prijzen per jaar: Pythagoras België BF 950, Pythagoras buitenland f 52,50. Pythagoras/Archimedes f 67,50, Pythagoras/Archimedes België BF 1570, Pythagoras/Archimedes buitenland f 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen (gewijzigd met ingang van 1-12-1998)

Voor scholen zijn er *bulkabonnementen*. Prijs: f 25,- per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522-855175.

Leerlingabonnementen (nieuw)

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot en met 18 jaar) zijn er *leerlingabonnementen*. Prijs: f 30,- per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een *doorlopend* abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522-855175

Uitgever

Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht



TU Delft

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskundeafdelingen van de Universiteit van Amsterdam en de Technische Universiteit Delft.

