pythagoras

nr.3

februari 1999 38ste jaargang

Beurskoersen & toeval

Uitslag Escherprijsvraag

Inhoud

1 **Cijfers verwisselen**

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 t/m 6 **De reeks 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, .**

7 - 8 **De fabel van Moritz Cantor**

Financiële wiskunde

9 t/m 14 **Beurskoersen en toeval**

15 t/m 24 **Uitslag Escherprijsvraag**

25 t/m 27 **De schatzoekersprijsvraag**

28 t/m 30 **Pythagoras Olympiade**

Wiskunde en taal

31 **Potjeslatijn**

Varia Historica

32 t/m 34 **Made in China**

Drogredeneringen

35 **64 = 65**

36 Problemen

37 Oplossingen **nr.2**

38 **Agenda**

39 **De post**

40 **Oplossingen** kleine nootjes

COLOFON

uitgave
Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

redactieadres
Redactie Pythagoras
t.a.v. Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

e-mail
pythagoras@wins.uva.nl

WWW
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/

redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

abonnee-administratie
telefoon: 0522-855175
fax: 0522-855176

grafisch ontwerp
WILDVLEES, Amsterdam

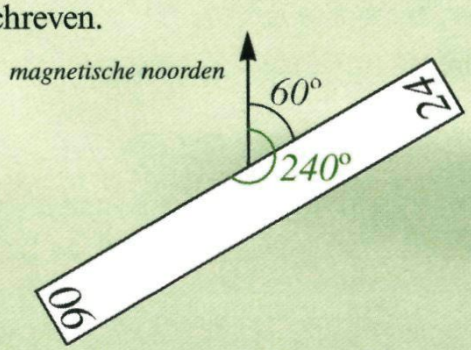
drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Thomas ter Horst, leerling in havo 5 van RSG Pantarijn te Wageningen, kwam met het volgende probleem bij zijn leraar.

Cijfers verwisselen

Leon van den Broek

Start- en landingsbanen zijn op alle vliegvelden in de wereld volgens hetzelfde systeem genummerd. Dat systeem is afgesproken op een internationale luchtvaartconferentie in 1944 in Chicago. Het nummer staat aan het begin van de baan met twee cijfers groot geschreven.



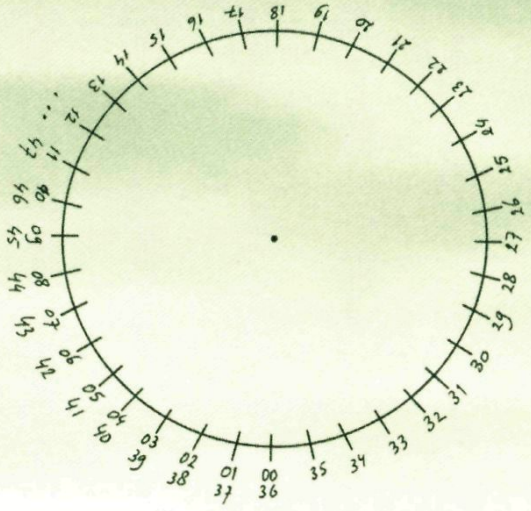
Als een piloot vanuit het zuidwesten gaat landen op de Kaagbaan van Schiphol, dan ziet hij in het begin van de baan 06 staan. Dat betekent dat de piloot vliegt in de richting die 60° maakt met de magnetische noordpool. Als de piloot van de andere kant komt op de Kaagbaan ziet hij de cijfers 24; hij vliegt dan in de richting die 240° maakt met de magnetische noordpool. Men rekent dus in tientallen graden en draait daarbij met de richting van de klok mee. De twee cijferparen aan weerszijden van de baan hangen samen: ze verschillen 18 (dus 180°).

Op het vliegveld van Le Mans in Frankrijk staan op de landingsbaan de cijfers 02 aan de ene kant en 20 aan de andere kant.
Die twee verschillen inderdaad 18.

Het bijzondere is dat de aanduidingen 02 en 20 bij de twee tegengestelde richtingen uit elkaar ontstaan door de cijfers 0 en 2 te verwisselen. Op Texel is er net zo iets aan de hand: daar staan 13 en 31 op de landingsbaan.

Vragen

1. Komt dat ook bij andere richtingen voor?
2. En hoe liggen de richtingen ten opzichte van elkaar als je in het algemeen de twee cijfers verwisselt, bijvoorbeeld: 23 en 32?
Je kunt zelfs boven de 36 doorgaan, door gewoon verder te tellen. Dan krijg je de onderstaande 'gradenboog'. De antwoorden vind je op bladzijde 27. ◢



Kleine nootjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen 'gekraakt' kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op p. 40 van dit nummer.

Kleine

T-shirt

Henk heeft ongelukkig genoeg zijn T-shirt binnenste buiten aangetrokken. Ook heeft hij voor en achter verwisseld. Gewoonlijk zit het wasetiket aan de binnenkant van de linker mouw. Waar zit het nu?

Klokkijken

Op de vraag hoe laat het was, gaven vier verschillende mensen de volgende antwoorden:

Joke: 3 minuten voor 10,
Kitty: 3 minuten over 10,
Elly: 6 minuten voor 10,
Joop: 2 minuten over 10.

Deze vraag werd op hetzelfde moment gesteld, maar van iedereen liep het horloge voor of achter, en wel 2, 3, 4 en 5 minuten, maar niet noodzakelijk in deze volgorde. Hoe laat was het in werkelijkheid?

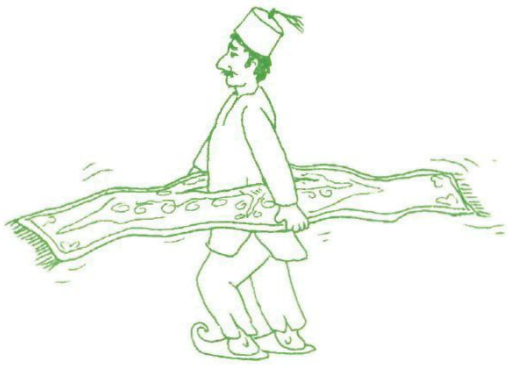
Ra, ra, hoe zit dat?

Voor je staan drie doosjes die ieder van een etiket zijn voorzien. De opschriften zijn achtereenvolgens ZZ, WW en ZW, hetgeen wil zeggen dat het eerste doosje twee zwarte knikkers bevat, het tweede doosje twee witte en het derde doosje één zwarte en één witte knikker. Dat was althans de bedoeling, maar iemand is zo verstrooid geweest de etiketten te verwisselen, waardoor alle opschriften niet meer kloppen. Om erachter te komen wát in wélk doosje zit, mag je, zonder in de doosjes te kijken, uit ieder doosje één knikker nemen. Bij het hoeveelste doosje weet je hoe het zit?

nootjes

Versleten banden

Mijn Volvo heeft 24.000 km gereden, en heeft over die afstand in totaal zes banden versleten. Elke band heeft dezelfde afstand afgelegd. Hoeveel kilometer heeft elke band afzonderlijk afgelegd?

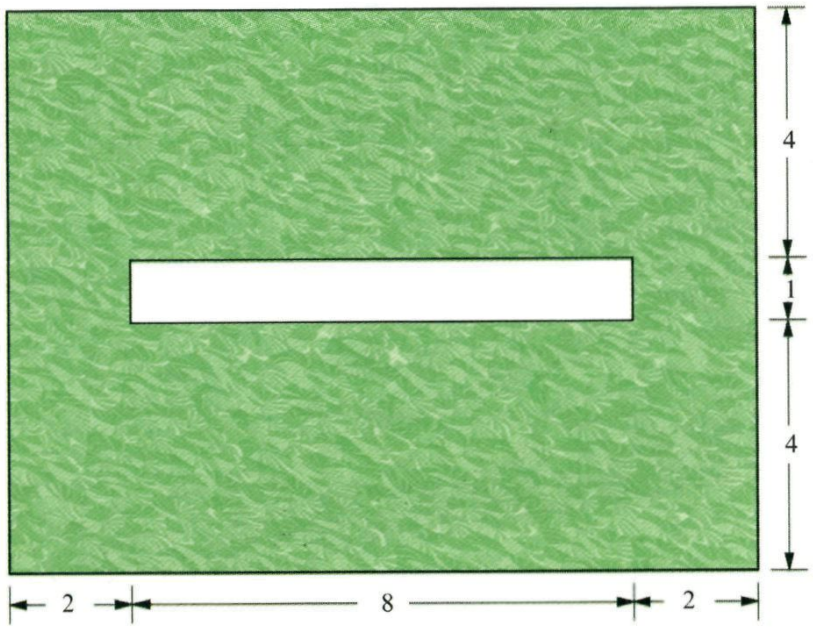


Knippen

Je wil een stuk touw in tien gelijke stukken knippen. Hoeveel keer moet je daarvoor ten minste knippen?

Verknipt

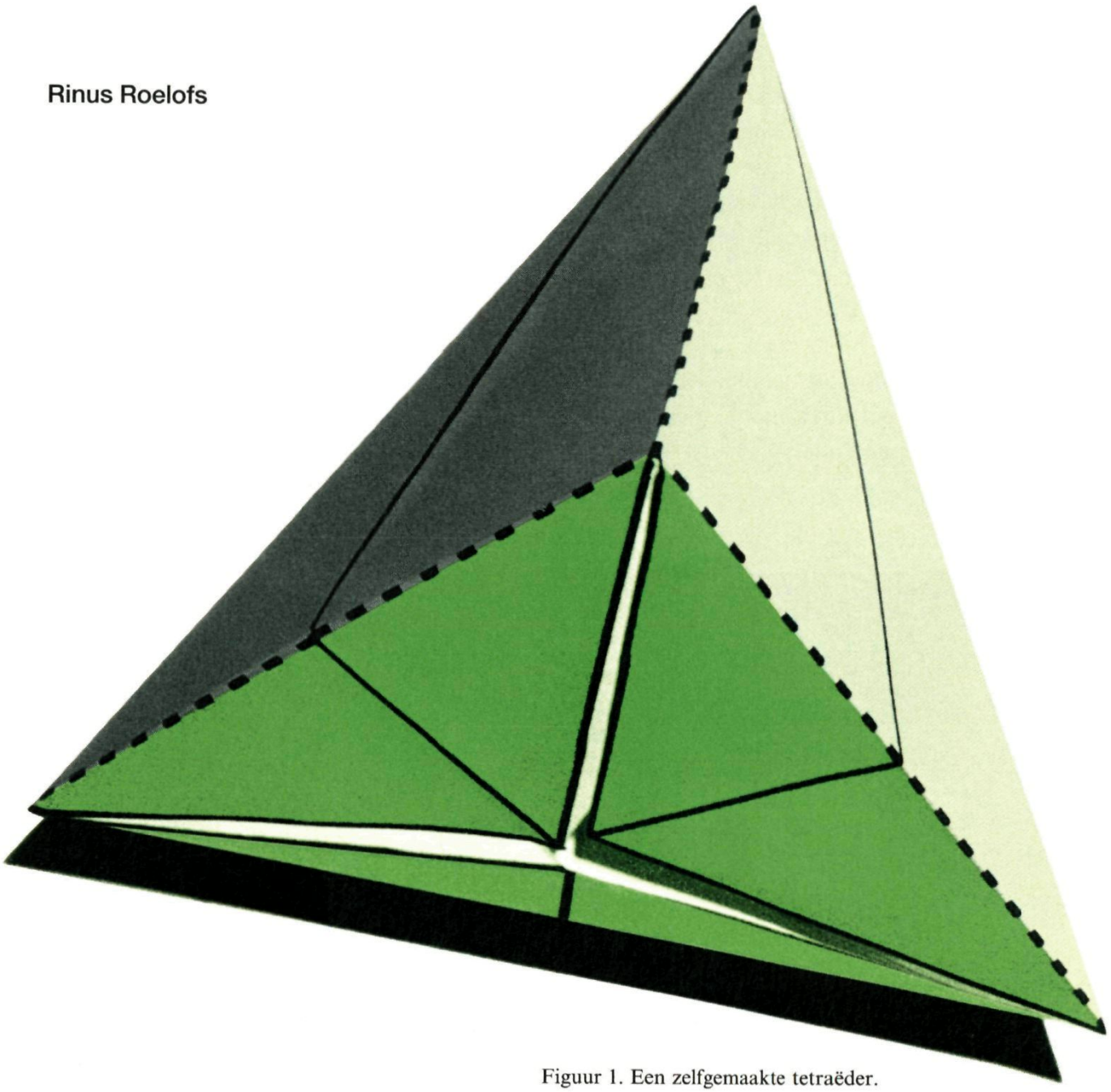
Abdul, tapijtverkoper te Instanbul, heeft een probleem. Hij moet voor zonsondergang een stuk tapijt van 1 m bij 1 m leveren aan een Engelse toerist. Hij wil het maken van een stuk tapijt van 9 dm bij 12 dm dat hij nog heeft liggen, maar tot zijn grote ontsteltenis heeft hij ontdekt dat iemand er in het midden een stuk van 1 dm bij 8 dm heeft uitgeknipt. Abdul vindt echter al vlug een manier om het tapijt in twee stukken te knippen zó, dat hij het weer aan elkaar kan naaien met het gewenste resultaat. Zie jij hoe dit moet?



Een van de onderwerpen van de Escherwedstrijd was het bedenken van interessante betegelingen op ruimtelijke figuren. Dit artikel laat zien dat zelfs op de meest eenvoudige ruimtelijke figuur interessante betegelingen te bedenken zijn.

De reeks
1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, ...

Rinus Roelofs

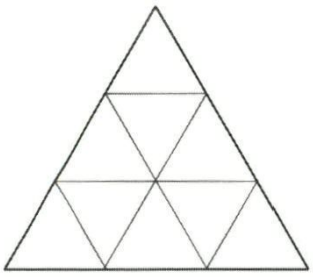


Figuur 1. Een zelfgemaakte tetraëder.

Een tetraëder is een piramide met een driehoekig grondvlak en drie gelijke gelijkzijdige driehoeken als zijvlak. Met andere woorden, het is een regelmatig viervlak: een ruimtelijke figuur opgebouwd uit vier gelijkzijdige driehoeken, zie figuur 1.
Wanneer we zo'n viervlak willen betegelen met tegels van dezelfde maat, dan kan dat natuurlijk met vier gelijkzijdige driehoeken. Maar er zijn nog meer mogelijkheden. Die zullen we nader gaan onderzoeken.

Eén vlak verdelen

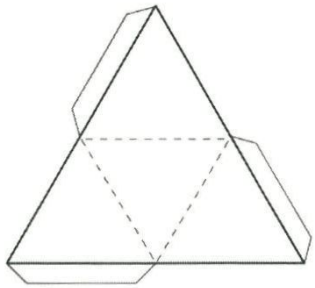
We kijken eerst hoe je één vlak van de tetraëder, een gelijkzijdige driehoek, kunt verdelen in kleinere gelijkzijdige driehoeken. De meest voor de hand liggende verdeling krijg je wanneer je elke zijde van de driehoek in twee gelijke stukken verdeelt en de middens verbindt. We krijgen dan een verdeling in vier kleinere driehoeken. Als je alle zijden in drieën deelt, krijgen je een verdeling in negen gelijkzijdige driehoeken, zie figuur 2.



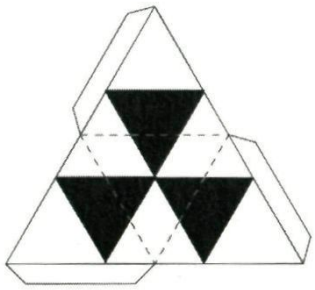
Figuur 2. Een verdeling van een gelijkzijdige driehoek in negen gelijkzijdige driehoeken.

Algemeen gezegd: het verdelen van alle zijden in n gelijke stukken geeft een verdeling in $n \times n$ kleinere driehoeken. Elk vlak van de tetraëder kun je dus bedekken met 1, 4, 9, 25, 36 tegels, enzovoort. Voor de hele tetraëder heb je dan 4×1, 4×4, 4×9, 4×25, 4×36 tegels nodig, enzovoort.

Maar als je bedenkt dat een tetraëder te vouwen is uit één enkele driehoek (zie figuur 3), dan kun je concluderen dat je de gehele tetraëder kunt bedekken met 1, 4, 9, 16, 25 tegels, enzovoort. Je moet daarvoor wel sommige tegels over de rand van de tetraëder heen vouwen. In figuur 4 zie je een bouwplaat voor een tetraëder bestaande uit negen gelijke gelijkzijdige driehoeken.



Figuur 3. Een bouwplaat voor een tetraëder bestaande uit uit één enkele gelijkzijdige driehoek.

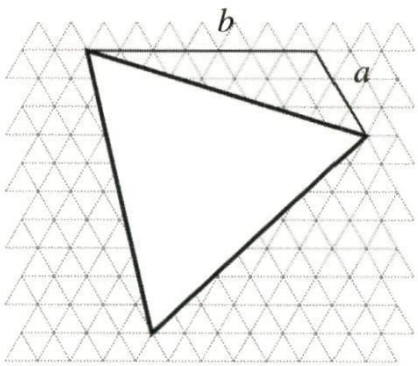


Figuur 4. Een bouwplaat voor een tetraëder bestaande uit negen gelijkzijdige driehoeken.

Andere mogelijkheden

Er zijn echter nog meer mogelijkheden. Om die te onderzoeken tekenen we een gelijkzijdige driehoek op een zogenaamd isometrisch rooster, dat is een rooster dat uit allemaal gelijkzijdige driehoekjes bestaat (zie figuur 5). Elk van de drie hoekpunten van de driehoek leggen we op een roosterpunt. We gaan nu de oppervlakte bepalen

van de getekende driehoek, waarbij we de kleine driehoekjes als eenheid zullen gebruiken.

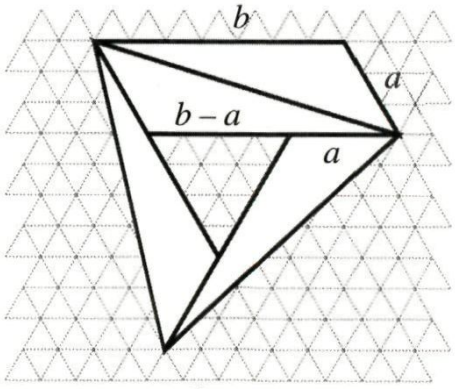


Figuur 5.

Voor het bepalen van de oppervlakte verdelen we de driehoek in een aantal stukken: zie figuur 6. De oppervlakte van het middelste stuk is $(b-a) \times (b-a)$ driehoekjes (ga na). Om de oppervlakte van de overige stukken te bepalen is het handig om er twee samen te voegen, zie weer figuur 6. Je krijgt dan een parallellogram en de oppervlakte daarvan is gelijk aan $2 \times a \times b$ driehoekjes, zodat de totale oppervlakte van de driehoek $3 \times \frac{1}{2} \times 2ab + (b-a)^2$ is, ofwel

$$3ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

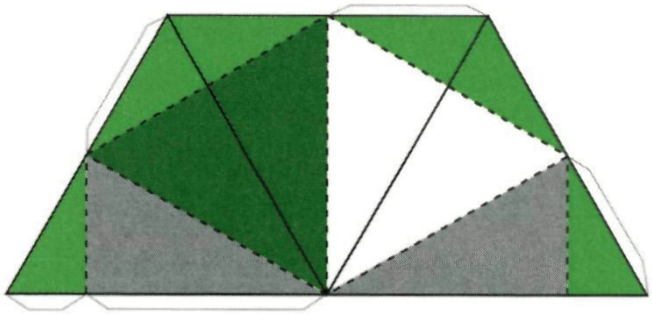
Dit houdt in dat we een gelijkzijdige driehoek kunnen verdelen in $a^2 + b^2 + ab$ kleinere driehoekjes, waarbij a en b gehele getallen zijn.



Figuur 6.

Voor $a = 1$ en $b = 1$ levert dit drie driehoekjes, voor $a = 1$ en $b = 2$ zeven driehoekjes. De tetraëder is dus te betegelen met 3 of met 7 tegels. Is $a = 0$ of $b = 0$ dan komen we weer uit op de eerder gevonden reeks kwadraten. Hoe de reeks verder loopt kun je het eenvoudigst zien wanneer je een tabel maakt:

a \ b	0	1	2	3	4
0	0	1	4	9	16
1	1	3	7	13	21
2	4	7	12	19	28
3	9	13	19	27	37
4	16	21	28	37	48



Figuur 7. Een bouwplaat voor een tetraëder bestaande uit drie gelijkzijdige driehoeken.

Bouwplaat

We zien dus dat we een tetraëder met ook drie driehoekige tegels kunnen betegelen. We kunnen daarom een tetraëder vouwen vanuit een bouwplaat met drie driehoeken in plaats van met vier! Zie figuur 7. ◢

Hoe maakten de Egyptenaren hun rechte hoeken? Volgens een wijd verbreide fabel gebruikten ze daarvoor de zogenaamde 3-4-5-steek. Maar het is best mogelijk dat ze een eenvoudiger methode hebben toegepast.

De fabel van Moritz Cantor

Bruno Ernst

Voor het uitzetten van het grondplan van grote gebouwen is het noodzakelijk een methode te hebben om hoeken van 90° zo nauwkeurig mogelijk in het veld te realiseren. Hoe hebben de Egyptenaren dat gedaan bij de bouw van reusachtige piramides?

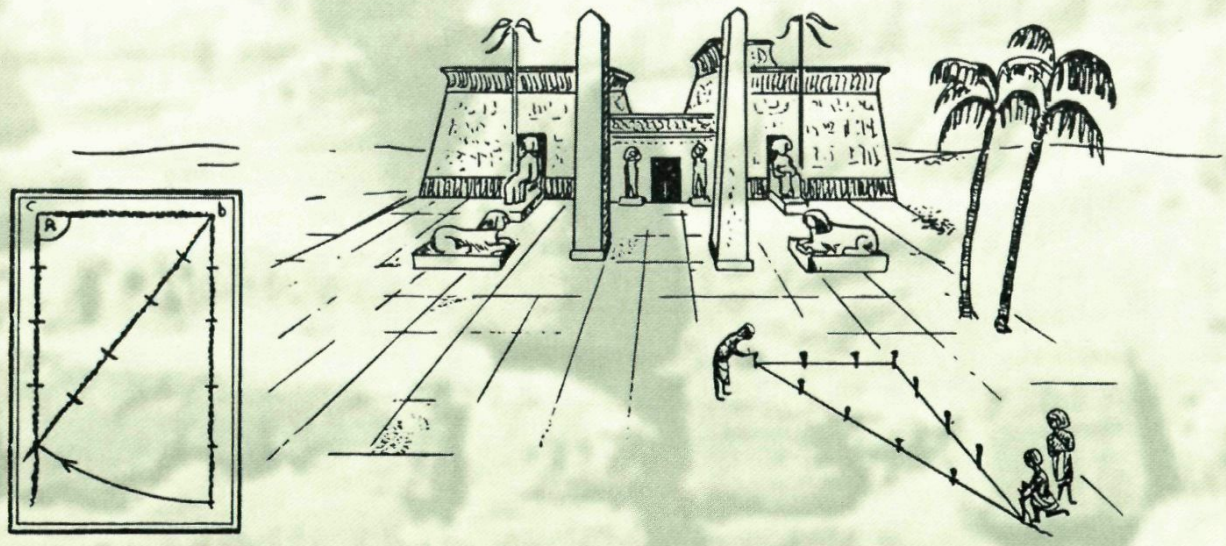
Moritz Cantor was een bekende wiskundehistoricus die in een publicatie uit 1900 veronderstelde dat ze daarvoor lange touwen gebruikten met lengten van 3, 4 en 5 eenheden en daarvan een driehoek maakten. Dan zouden de Egyptenaren de stelling van Pythagoras gekend hebben en zelfs de bijzondere eigenschap dat een driehoek met zijden van 3, 4 en 5 rechthoekig is.

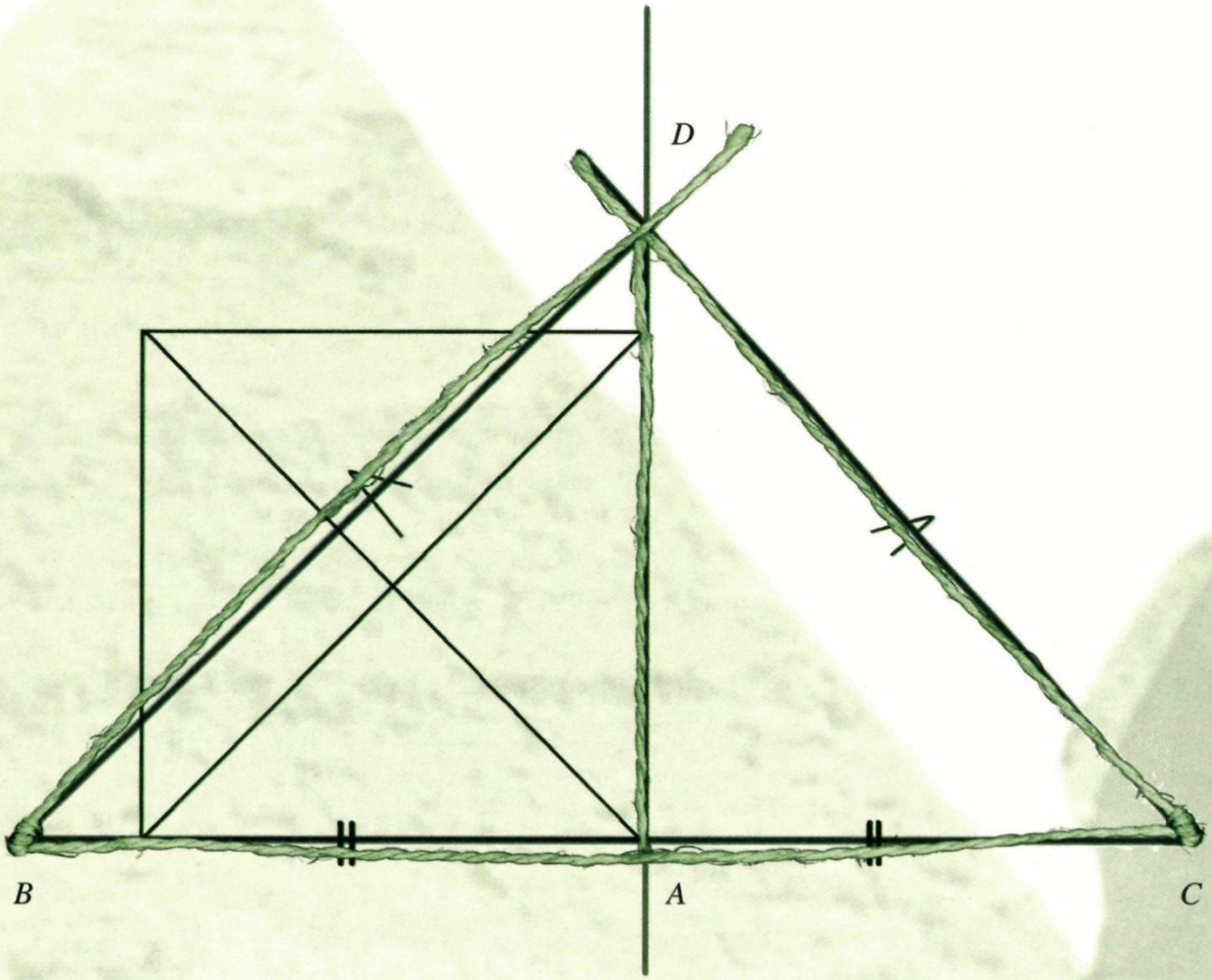
De 3-4-5-steek

De door Cantor aan de Egyptenaren toegeschreven methode om rechte hoeken te maken wordt tegenwoordig door stratenmakers gebruikt. Langs de stoeprand wordt 3 meter afgepast. Vanuit het ene uiteinde A wordt een cirkelboogje met straal 4 meter getekent en vanuit het andere uiteinde B een cirkelboogje met straal 5 meter; het snijpunt wordt C. De lijn AC staat dan loodrecht op de stoeprand. Stratenmakers noemen dit de 3-4-5-steek.

Zonder Pythagoras

De veronderstelling van Moritz Cantor dat de Egyptenaren de 3-4-5-steek gebruikten





berust alleen op de wetenschap dat de Egyptenaren touwen gebruikten bij het uitzetten van een grondplan voor een tempel. Verder is er geen enkele aanwijzing voor. Toch is dit verhaal een eigen leven gaan leiden, waarbij niet meer vermeld wordt dat het hier een *veronderstelling* betreft.
Maar waarom maakte Moritz Cantor de vrij onwaarschijnlijke sprong van het werken met touwen naar een rechthoekige driehoek met zijden van 3, 4 en 5? Het kan natuurlijk veel eenvoudiger.
Stel dat we in A een rechte hoek moeten uitzetten. Neem een touw en trek het strak over A, zie de figuur hierboven. Pas op het touw twee gelijke stukken AB en AC af. Neem nu twee touwen van gelijke lengte, bevestig die in B en C en trek ze naar elkaar toe; ze komen bij elkaar in D. Als we nu een touw tussen A en D spannen ontstaan bij A twee rechte hoeken. Zo'n procedure kan men gemakkelijk bedenken zonder enige kennis van meetkunde.

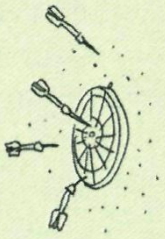
Maar ... het is ook slechts een veronderstelling dat de Egyptenaren zo te werk gingen, maar een die misschien wat voor de hand liggender is dan het werken met een driehoek met zijden 3, 4 en 5. Wellicht kan deze fabel die van Cantor vervangen.

Aandelenkoersen gaan op en neer; iedereen die regelmatig in de krant of naar het journaal kijkt weet dat. Als je de koers van morgen zou kunnen voorspellen, dan kun je daar miljoenen mee verdienen. Maar kan dat wel? Of zijn aandeelkoersen niet te voorspellen?

Beurskoersen en toeval

Peter Spreij & Robin de Vilder

De *Wall Street Journal* is een financieel dagblad. Elke maand staat in deze krant een rubriek getiteld *Investment Dartboard*. Daarin selecteren beursanalisten aandelen waarvan zij verwachten dat de koers de komende maand gaat stijgen. Vervolgens kiezen journalisten van de krant willekeurig aandelen, door met dartpijltjes naar de financiële pagina's te gooien. Zes maanden later worden de rendementen van de aandelen gekozen door de experts en de dartpijltjes met elkaar vergeleken. Op 13 januari 1999 was de stand 63 tegen 40 in het voordeel van de experts. Of je je laat adviseren door beleggingsexperts of door het toeval, veel verschil lijkt het niet te maken!



Toeval

In 1953 ontdekte de statisticus Maurice Kendall dat er geen verband lijkt te bestaan tussen de koersveranderingen uit het verleden en die van de toekomst: "Elke reeks heeft een wisselvallig patroon, bijna alsof elke week de Duivel van het Toeval een willekeurig getal trekt." Uit dit soort onderzoek is de theorie ontstaan die zegt dat beurskoersen wel veranderen, maar dat de veranderingen onvoorspelbaar zijn, alsof iedere dag met een munt gegooid wordt.

De Efficiënte Markt hypothese

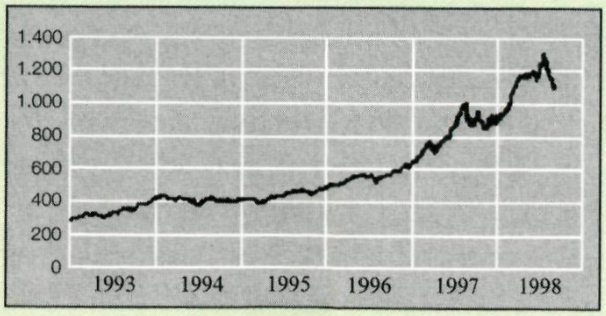
De theorie dat beurskoersen volstrekt willekeurig en daardoor onvoorspelbaar zouden zijn, is op het eerste gezicht verrassend. Want de beurskoers van elk aandeel komt tot stand door vraag en aanbod op aandelenmarkten, en elke stijging of daling van een koers kan meestal wel verklaard worden. Maar verklaringen komen altijd *achteraf*. Dat je toekomstige koersen niet kunt voorspellen berust op de hypothese dat *alle publiekelijk beschikbare informatie volledig en meteen gereflecteerd wordt in de aandelenprijzen*. Deze veronderstelling heet de Efficiënte Markt Hypothese (EMH).

We geven een voorbeeld. Stel dat je in de krant leest dat Johan Cruijff de nieuwe trainer van Ajax wordt. Omdat je verwacht dat de koers van het aandeel door dit nieuws zal gaan stijgen, besluit je op dat moment om aandelen Ajax te kopen. Helaas ben je volgens de EMH dan al te

laat: voordat de informatie jou bereikt heeft, hebben al zoveel mensen hetzelfde nieuws gehoord, dat de koers van het aandeel Ajax zich meteen bij het bekendmaken van het nieuws zal hebben aangepast. De aandelenmarkt reageert dus efficiënt op alle informatie: dit is de Efficiënte Markt Hypothese.

Een wiskundig model

Als we de EMH aannemen, is een goede wiskundige beschrijving van beurskoersen mogelijk. In dit model is het toeval een belangrijke factor, en met dit model kunnen we beurskoersen dus niet *voorspellen*. We krijgen alleen grafieken die dezelfde structuur hebben als grafieken van aandeelkoersen. Als voorbeeld bekijken we de grafiek van de AEX-index in figuur 1. De AEX-index is een samenstelling van de koersen van de 26 belangrijkste fondsen die aan de Amsterdamse beurs genoteerd staan. We hebben hier te maken hebben met een gemiddelde van 26 verschillende fondsen. De grafiek van de AEX vertoont een grilligheid die kenmerkend is voor de koersgrafiek van alle fondsen, of je ze over een dag, een maand of een aantal jaren bekijkt.



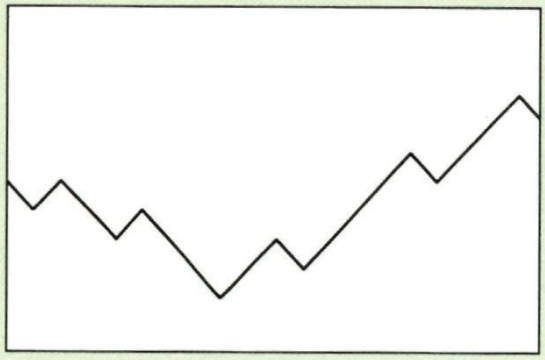
Figuur 1. De AEX-index van januari 1993 tot en met september 1998

Dronkemanswandeling

Wat is de eenvoudigste manier om een willekeurig koersverloop wiskundig te modelleren? Als uitgangspunt nemen we het opgooien van een dobbelsteen, waarbij een even aantal ogen met kans $\frac{1}{2}$ een gulden winst oplevert, en een oneven aantal ogen met kans $\frac{1}{2}$ een gulden verlies oplevert. Elke keer gooien levert dus een getal op dat +1 is of −1, en een aantal keren gooien achter elkaar levert een rijtje

$$-1, +1, -1, -1, +1, -1, -1, \ldots$$

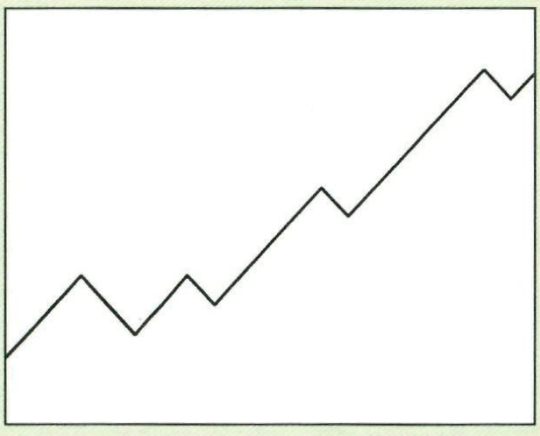
We tellen nu deze getallen achtereenvolgens bij elkaar op, te beginnen bij het eerste. Het eerste getal −1, daar tellen we het tweede getal bij op (uitkomst 0), dan het derde getal erbij (uitkomst −1), dan het vierde (uitkomst −2), enzovoort. De rij uitkomsten die je krijgt kun je uitzetten in een grafiek, zie figuur 2.



Figuur 2. Een stochastische wandeling van 20 stapjes.

De rij van uitkomsten is een toevalsproces. Het wordt een *stochastische wandeling* genoemd (in het Engels: random walk). Onafhankelijk van voorgaande stappen wordt er een stapje vooruit dan wel een stapje achteruit gemaakt, dat wil zeggen, in elk

stapje gaat de grafiek willekeurig 1 omhoog of 1 omlaag. De stochastische wandeling heet daarom ook wel dronkemanswandeling. Je kunt bij het gooien van de dobbelsteen ook afspreken dat je bij 1 of 4 ogen een gulden verliest, en bij 2, 3, 5 of 6 ogen een gulden wint. Net zoals hierboven kun je een aantal keren gooien en van de rij uitkomsten een stochastische wandeling maken. Je krijgt dan een grafiek, die, anders dan de vorige grafiek, gemiddeld gezien omhoog loopt. Dat komt omdat de kans dat je wint groter is dan de kans dat je verliest. In dit geval is de kans dat je 1 omhoog gaat $\frac{2}{3}$, tegenover een kans van $\frac{1}{3}$ op 1 naar beneden. De verwachtingswaarde bij een keer gooien is daarom $\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Gemiddeld verwacht je dus na k stapjes rond de lijn $y = \frac{1}{3}k$ uit te komen. Dit noemen we een stochastische wandeling met een trend (of drift). In figuur 3 zie je een voorbeeld.



Figuur 3. Een stochastische wandeling met drift.

Een continu model

De stochastische wandeling verloopt in stapjes; stap voor stap wordt er een willekeurig sprongetje gemaakt. Als je met een stochastische wandeling een beurskoers wil beschrijven, dan moet je vantevoren kiezen hoeveel stapjes je neemt per tijdseenheid. Dit is niet altijd geschikt. Eigenlijk willen we modellen hebben, waarin de sprongetjes vervangen gaan worden door een continu proces.

De Brownse beweging

Als model voor een continu proces gebruiken we een natuurkundig model: de zogenaamde Brownse beweging. Het model dankt zijn naam aan de Engelse botanicus Robert Brown, die kleine deeltjes in een vloeistof observeerde en in 1827 vaststelde dat deze in voortdurende onregelmatige beweging waren. Als je het aantal stapjes in de stochastische wandeling steeds groter maakt, dan krijg je iets dat steeds meer op een continu proces begint te lijken. Dat is precies hoe je de Brownse beweging kan krijgen: door het aantal stapjes zo groot te maken, dat het resultaat niet meer van een continu proces valt te onderscheiden. We bekijken dus de *limiet* van de stochastische wandeling als het aantal stapjes naar oneindig gaat (zie inzet op pagina 12).

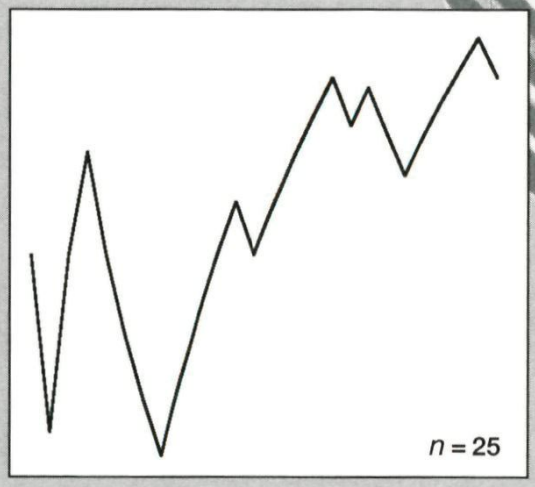
Deze limiet is een toevalsproces. Als de standaarddeviatie (de afwijking ten opzichte van het gemiddelde) van het limietproces gelijk aan 1 is, dan heet de limiet de *standaard Brownse beweging*. Dit proces geven we aan met de letter B. Voor elk tijdstip t is de waarde $B(t)$ afhankelijk van het toeval. Daarom zal de grafiek van B er steeds anders uitzien als we het proces opnieuw uitvoeren, net zoals het opnieuw een aantal keren gooien van een dobbelsteen een ander rijtje uitkomsten zal opleveren. Echter, het wiebelige gedrag van de functies zoals we die in bovenstaande plaatjes kunnen zien, blijft altijd gehandhaafd.

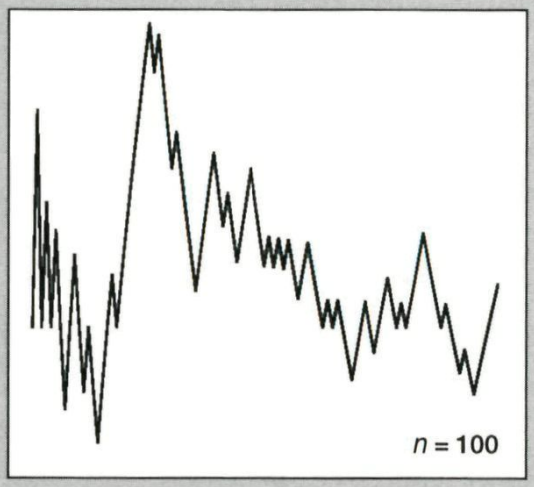
De Brownse Beweging

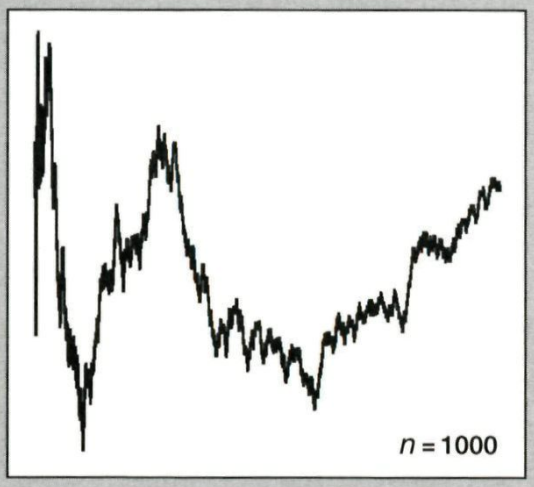
Hoe ontstaat de Brownse beweging uit de stochastische wandeling? We beginnen met een stochastische wandeling die ontstaat uit een aantal onafhankelijke toevalsexperimenten $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (de worpen met de dobbelsteen). Door deze waarden een voor een bij elkaar op te tellen, ontstaan de waarden van de stochastische wandeling:

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1, \\ S_2 &= X_1 + X_2, \\ S_3 &= X_1 + X_2 + X_3, \end{aligned}$$

enzovoort. Als $X_1, X_2, X_3, \ldots$ allemaal verwachtingswaarde 0 hebben en standaarddeviatie σ (de afwijking van het gemiddelde) hebben, dan heeft de som van k stappen standaarddeviatie $\sigma\sqrt{k}$.
Hiermee maken we de grafiek van de Brownse beweging. Daartoe kiezen een vast tijdsinterval, bijvoorbeeld [0,1], en we kiezen een (groot) getal n, dat het aantal tijdstapjes aangeeft. Zo betekent n=1000 dat we het interval [0,1] in duizend gelijke stukjes van lengte $\frac{1}{n}$ =1/1000 verdelen.
We maken nu een stochastische wandeling van duizend stapjes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{1000}$. Bij het k^e stapje hoort een punt op de grafiek van de Brownse beweging: de x-coördinaat is k/1000, de y-coördinaat $\frac{1}{\sqrt{n}} S_k$. Opeenvolgende punten verbinden we door rechte lijntjes. Dit geeft op het interval [0,1] een functie $B(t)$ die een be-nadering is van de grafiek van de Brownse beweging. We delen hier S_k door $\sqrt{n}$ om de standaarddeviatie van de Brownse beweging te beperken. Immers, de standaarddeviatie van de stochastische wandeling na n stapjes is $\sigma\sqrt{n}$
Als gevolg van de zogenaamde 'centrale limietstelling' is de waarde van het toevalsproces op tijdstip t = 1 normaal verdeeld met standaarddeviatie σ. In de figuren op deze bladzijde hebben we dit proces drie keer uitgevoerd, voor achtereenvolgens n = 25, n = 100 en n = 1000; je ziet een steeds grilliger grafiek ontstaan. Voor voldoende grote n is het resultaat de Brownse beweging. Probeer het zelf eens op je computer!







Een voorlopig model

In de Brownse beweging valt eenvoudig een trend of drift in te bouwen. Bij de waarde van de Brownse beweging op tijdstip t tellen we de waarde $m \cdot t$ op. In figuur 4 hebben we dat gedaan voor $m = 3$; je ziet dat de grafiek een stijgende tendens vertoont, terwijl de schommelingen gehandhaafd blijven. In dit geval vinden de schommelingen rond de trend $y = mt$ plaats.

Zodoende krijgen we een eerste model voor beurskoersen. Als we een driftparameter m en een standaarddeviatie σ willen hebben rond de trend, dan stellen we:

$$S_1(t) = mt + \sigma B(t). \qquad (1)$$

Al in 1900 werd dit model voorgesteld door Louis Bachelier in zijn *Théorie de la spéculation*.

Figuur 4. De Brownse beweging met drift.

Meetkundige Brownse beweging

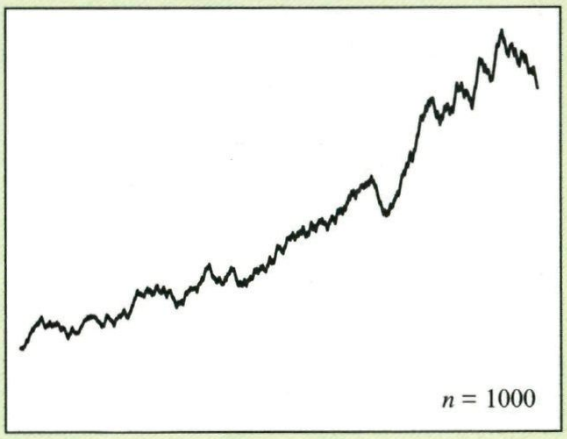
Aandeelkoersen zijn altijd positief. Maar als we aandeelkoersen modelleren met de Brownse beweging (met drift), dan kunnen ook negatieve prijzen voorkomen. Immers, de waarden van de Brownse beweging zijn normaal verdeeld (zie de inzet op pagina 12), en dat betekent dat er altijd een kans is dat een aandeelprijs negatief is.

Ons voorlopige model is dus niet goed, want negatieve aandeelprijzen komen in het echt niet voor. Er bestaat echter een eenvoudige remedie, voor het eerst gesuggereerd door P.A. Samuelson in 1965 en later overgenomen door de Nobelprijswinnaars Scholes en Merton in hun model voor optiekoersen.

De truc is over te gaan op e-machten. Immers, e-machten zijn altijd positief, en als we aandeelkoersen modelleren met de e-macht van een toevalsproces, dan weten we zeker dat de prijzen altijd positief zullen zijn. Het model voor de beurskoersen in (1) passen we daarom iets aan. We wijzigen de formule van de koers van een aandeel op tijdstip t als volgt:

$$S_2(t) = e^{mt + \sigma B(t).} \qquad (2)$$

In dit model is de 'aandeelkoers' $S_2(t)$ altijd positief. In de figuur 5 zie je een voorbeeld, waarbij we de parameters m en σ afgeleid hebben uit de grafiek van de AEX-index op pagina 10.



Figuur 5. De meetkundige Brownse beweging.

Is het tweede model nu beter dan het eerste? De ervaring leert inderdaad dat het tweede model realistischer is, en niet alleen omdat negatieve beurskoersen in dit model onmogelijk zijn, maar ook omdat beurskoersen in een markt vaak een exponentiële trend hebben. De meetkundige Brownse beweging levert een bruikbaar model voor aandeelkoersen op. Banken gebruiken rekenmodellen gebaseerd op dit principe, en de meetkundige Brownse beweging wordt ook gebruikt in het Black-Scholes model voor optiekoersen, dat in het volgende nummer van Pythagoras behandeld wordt.

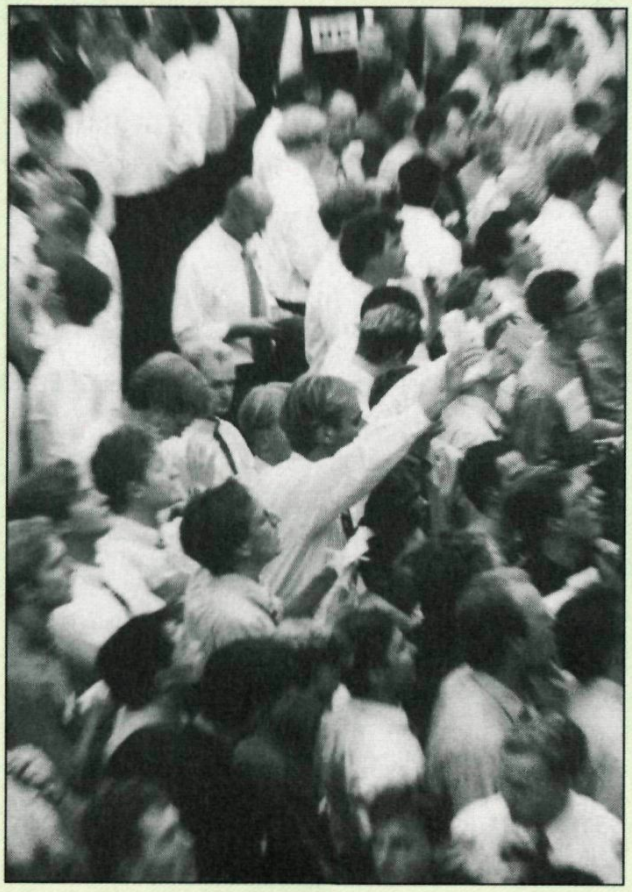


foto: © AEX

Duizend gulden

Het hierboven beschreven statistische model voor beurskoersen voldoet aan de eis dat de verkregen koersen absoluut onvoorspelbaar zijn. De vraag is natuurlijk of dat inderdaad zo is.

De op toeval gebaseerde modellen en de Efficiënte Markt Hypothese vormen samen de bouwstenen van veel moderne beleggingstheoriëen en in de praktijk werken die uitstekend. Maar de EMH geet niet in alle gevallen op. Dit wordt goed geïllustreerd in de volgende grap:

Twee beursanalisten lopen over straat. De een ziet een briefje van duizend gulden op straat liggen, en bukt zich om het geld op te rapen. Daarop zegt de andere: "Bespaar je de moeite van het bukken. Die duizend gulden kan daar helemaal niet liggen, want als die er wel gelegen had, had iemand anders die al lang opgeraapt."

Dit voorbeeld is natuurlijk een beetje overdreven, maar het geeft aan dat alleen maar werken met de EMH misschien te eenzijdig is. Het onderzoek naar het gedrag van beurskoersen gaat door. Men onderzoekt beurskoersen met behulp van chaostheorie en fraktals, en tegenwoordig zelfs met zogenaamde neurale netwerken. Meer daarover in het volgende nummer van Pythagoras. ◢

Met dank aan Nam Kyoo Boots voor het fabriceren van de figuren.

Detail: Klasseninzending SMC,Zaandam

Op 7 november 1998 zijn tijdens de Ars et Mathesisdag te Baarn de prijzen uitgereikt van de Escherprijsvraag georganiseerd door de stichting Ars et Mathesis en Pythagoras. In dit nummer presenteren we de prijswinnaars.

Escherprijsvraag Uitslag

In april 1998 werd in het Eschernummer van Pythagoras de Escherprijsvraag uitgeschreven. De resultaten waren overweldigend: 126 inzendingen bestaande uit meer dan vijfhonderd werkstukken. Kleine enveloppen, grote enveloppen, tekeningen met enorme formaten, doosjes met 3D-kunstwerken, van alles werd in oktober 1998 bezorgd bij Erjen Lefeber in Enschede, tot aan een screensaver toe.

Juryverslag

Op maandag 26 oktober kwam de jury bijeen in het bestuurgebouw van de Universiteit van Utrecht. De juryleden waren Jos de Mey, Joke Mestdagh, Zsofia Ruttkay, Fred van der Blij, Eduard Looijenga en Hans van Lint (juryvoorzitter). De jury was onder de indruk van de kwaliteit van het vele werk — in alle vier de wedstrijdcategorieën zijn bijzonder mooie en originele werkstukken ingezonden. Alle werken werden uitvoerig bestudeerd en eensgezind kwam de jury tot een verdeling van de prijzen.

De beoordeling

Bij de beoordeling is gelet op de wiskundige en de esthetische kanten van ieder werk. Originaliteit was van groot belang; inzendingen die sterk leken op reeds bestaande werken van Escher werden daarom ter zijde gelegd. De juryleden nomineerden eerst een aantal kunstwerken die in een volgende ronde konden meedingen naar de prijzen. Van alle genomineerde inzendingen wordt op de volgende pagina's de naam van de maker(s) vermeldt. Wegens de beperkte ruimte kunnen we in dit nummer alleen van de uiteindelijke winnaars het werk tonen.

Virtuele tentoonstelling

Alle genomineerde werken worden permanent tentoongesteld op de homepage van Pythagoras.

Poster

De hoofdprijs in de openleeftijdscategorie werd gewonnen door een zeer sprankelende inzending (zie pagina 21). Hiervan wordt volgend schooljaar een Pythagoras-poster gemaakt.

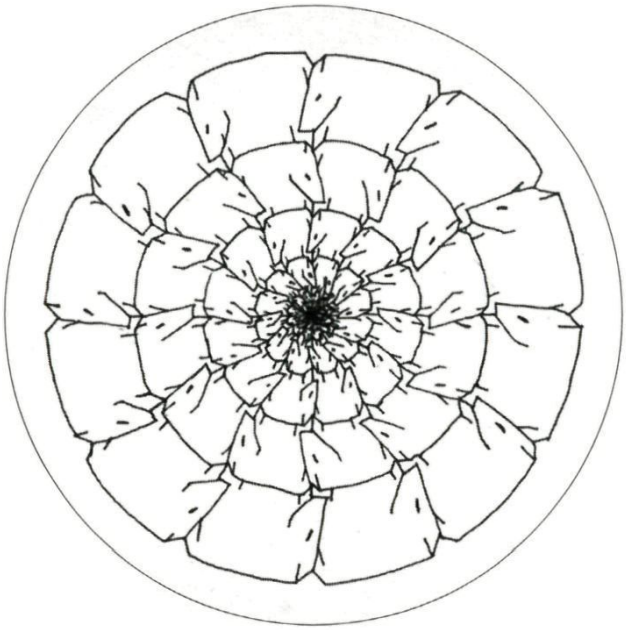
Sponsors

De organisatie van de prijsvraag is mogelijk gemaakt door een subsidie van Stichting Weten. Uit deze subsidie zijn ook de kunstwerken betaald die de winnaars, naast een geldbedrag, hebben ontvangen. De geldprijzen (4300 gulden in totaal) zijn per leeftijdsgroep ter beschikking gesteld door verschillende sponsors.

Copyright. Het beeldrecht van alle ingezonden werken berust bij Pythagoras en bij de individuele makers.

Prijzen in de categorie

Tot en met 14 jaar



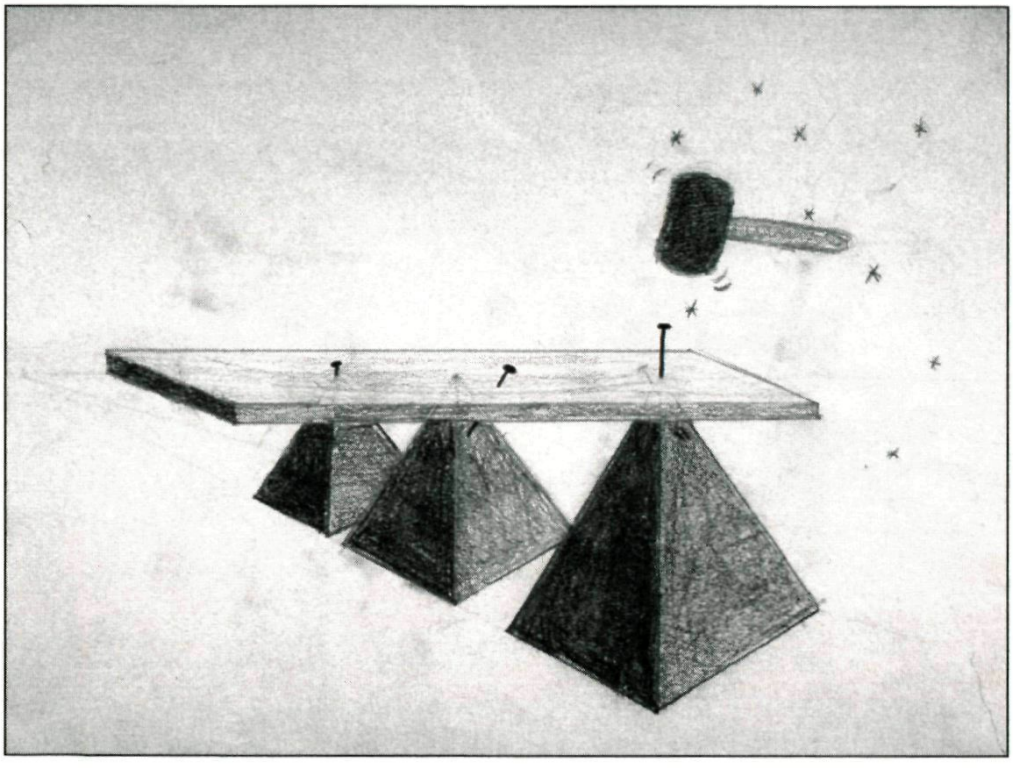
Joris Brakkee, derde prijs (diameter 11 cm, inkttekening)

Derde prijs

Joris Brakkee (13 jaar) uit Amsterdam won de derde prijs met een heel knap getekende cirkellimiet met diertjes.

Tweede prijs

De tweede prijs was voor Ciry Boon (14 jaar) uit Maassluis, voor een tekening waarmee ze in 1998 ook op televisie te zien was, als jeugdige Escher-enthousiast bij Nova.

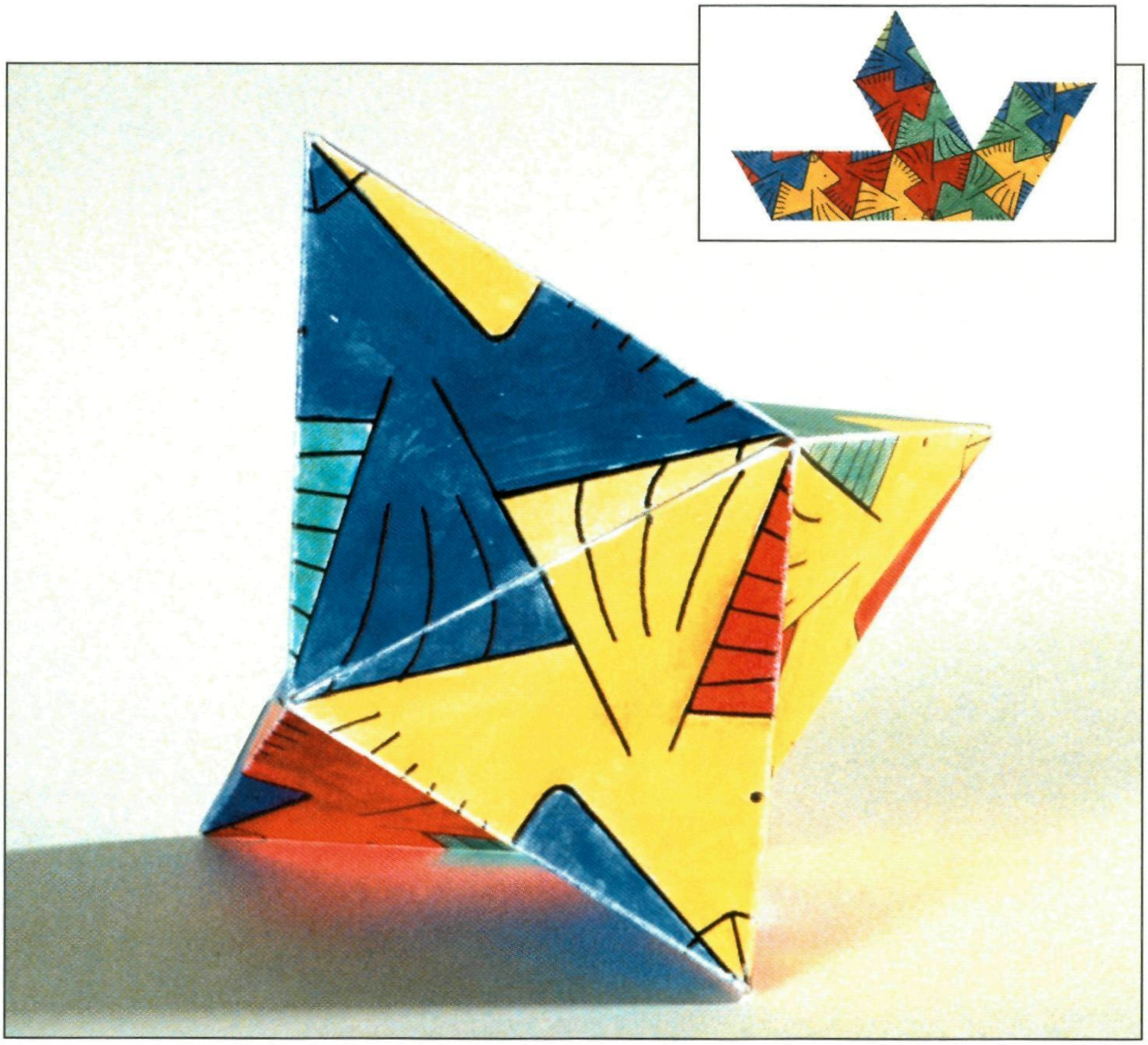


Ciry Boon, tweede prijs (32 cm × 25 cm, potloodtekening)

In de jongste leeftijdscategorie ontvingen we de meeste inzendingen (46). Naast de winnende inzendingen heeft de jury in deze leeftijdsgroep de inzendingen genomineerd van: Karen Kerkhof uit Bunnik, Olivier de Graaf uit Naarden, Jola van Dijk en Wieke de Keizer uit Beuningen, Geoffrey Valkenburg van de O.S.G. Willem Blaeu te Alkmaar, Floor Schrijvers uit Ermelo, Batya Bennekers uit Amsterdam, A.E.M. Calon uit Eindhoven, Suzanne Steens uit Schiedam en Wouter Duisters uit IJsselstein. De geldprijzen zijn ter beschikking gesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Eerste prijs

De eerste prijs ging naar Daan Juttman (11 jaar) uit Haarlem voor zijn Vogelster.
De bouwplaat van de ster stond reeds op de kerstkaart die meegezonden is met het decembernummer.



Vogelster, Daan Juttman, eerste prijs (12 cm van punt naar punt, kleurkopie)

Prijzen in de categorie

Tot en met 17 jaar

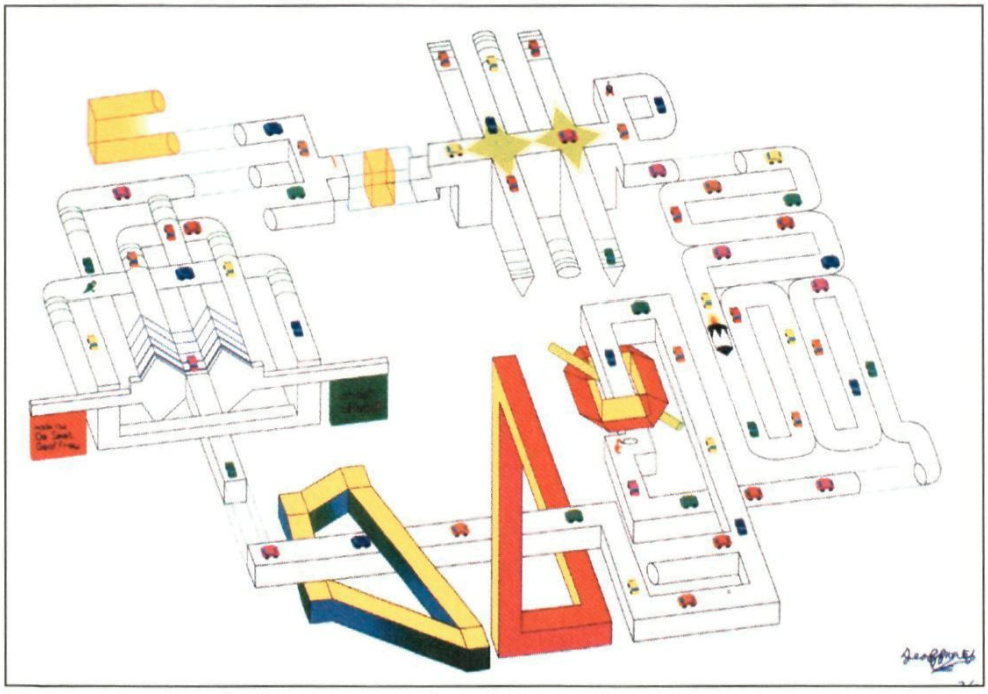
Chateau de Peyrepersouse, Daan de Jong, derde prijs (41 cm × 29 cm, aquarel)

Derde prijs

Daan de Jong (16 jaar) uit Utrecht won de derde prijs. Zijn knap geschilderde landschap is geïnspireerd op de Corbières in Frankrijk, waar hij in de zomervakantie van 1998 vier weken gefietst heeft. De kasteelruïne op de voorgrond bevat een aantal subtiele onmogelijkheden.

Tweede prijs

Geoffrey de Smet (16 jaar) uit Oostakker (Gent), Belgie won de tweede prijs. Zijn met behulp van GraphicWorks 3.0 gemaakte computertekening bevat veel onmogelijke effecten.

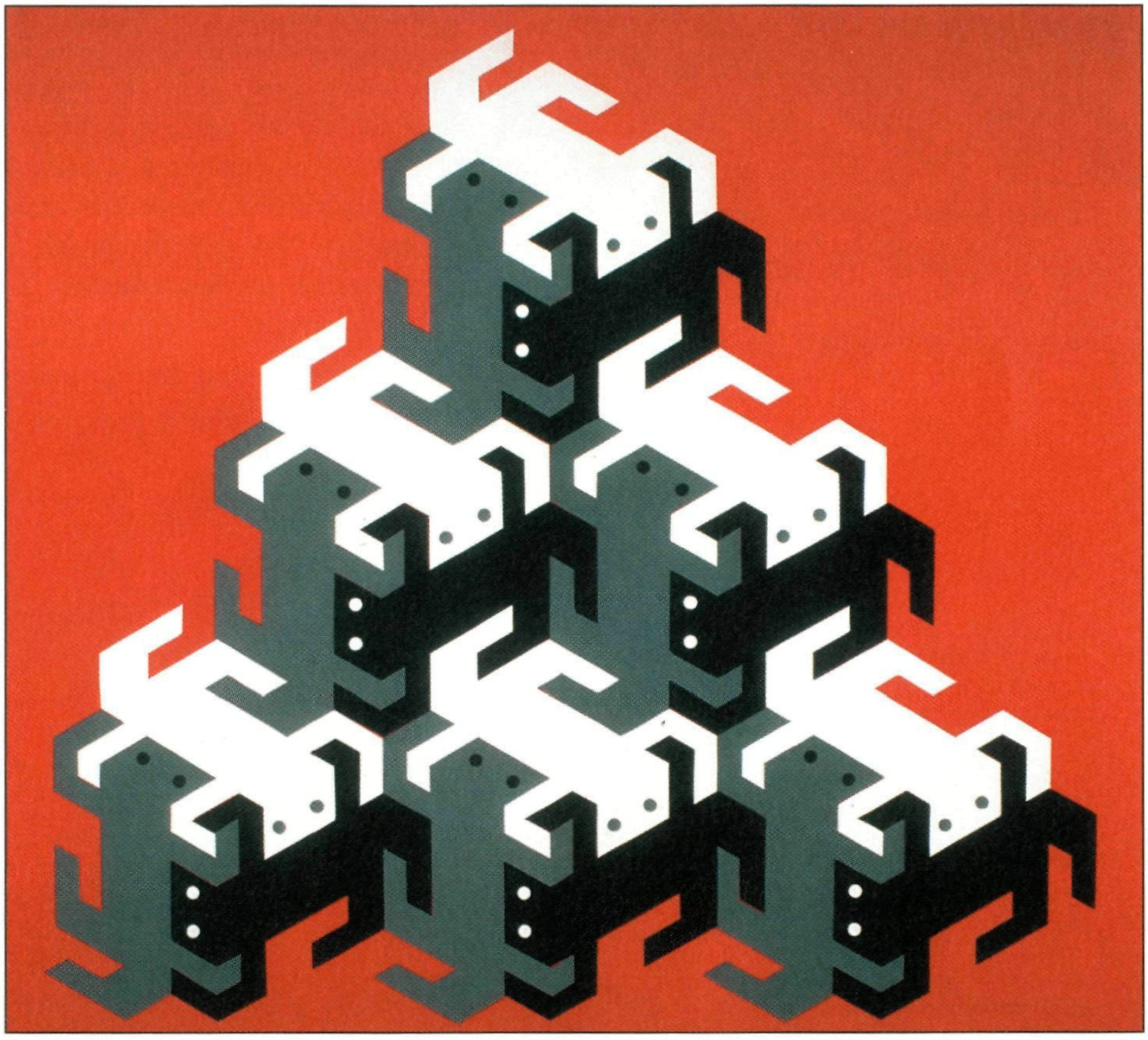


E.T. phone home, Geoffrey de Smet, tweede prijs (42 cm × 29.5 cm, computertekening)

Deze leeftijdsgroep leverde het minste aantal inzendingen op (17). De jury nomineerde de inzendingen van de prijswinnaars en verder van: Puck-Anoen v.d. Bovenkamp uit Hengelo, Maurice Joerse uit Koog aan de Zaan, Erik Roerdink uit Haren, Steven van der Veen uit Hattern, Karen Sam uit Voorschoten en Xander van Vliet (3 werken) uit Overdinkel. De geldprijzen zijn ter beschikking gesteld door het Freudenthal Instituut.

Eerste prijs

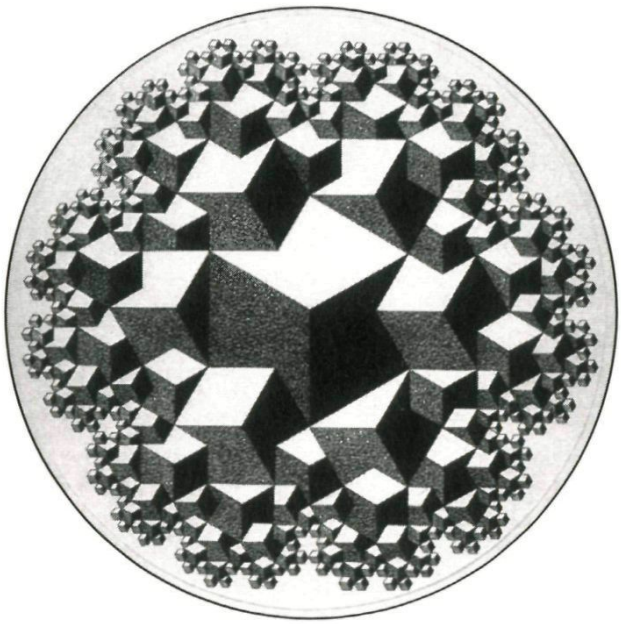
De eerste prijs ging naar Toni Jonkers (16 jaar) uit Zoetermeer, voor een mooi gepresenteerde betegeling met 3D-effect.



Katten, Toni Jonkers, eerste prijs (48.5 × 43.5 cm, gekleurd papier)

Prijzen in de categorie

Alle leeftijden



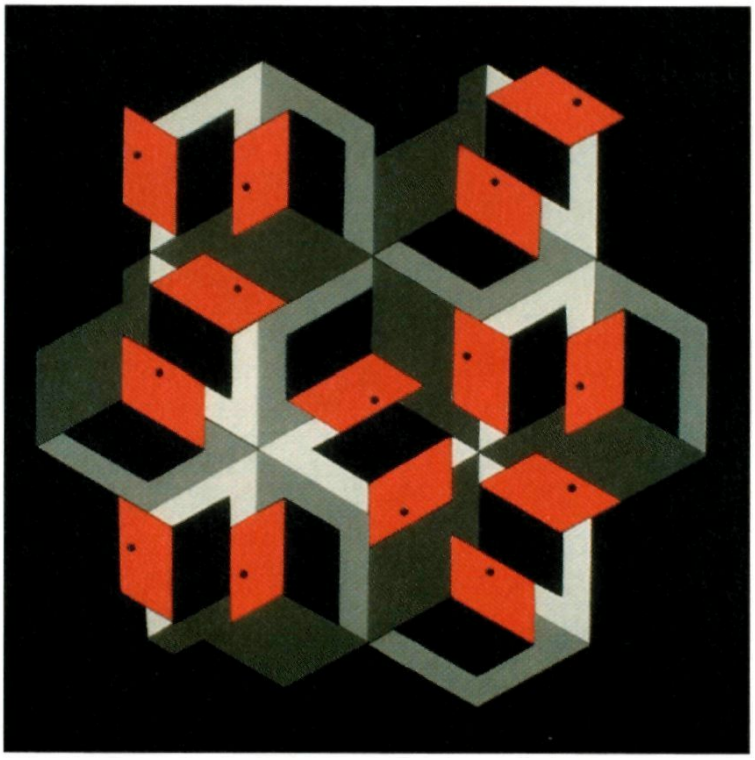
C. van der Stelt, derde prijs (diameter 19 cm, inkttekening)

Derde prijs

De derde prijs was voor C. van der Stelt uit Bloemendaal, voor zijn cirkellimiet met kubussen.

Tweede prijs

Ton Schotten uit Heerhugowaard won de tweede prijs met een mooi uitgevoerde vlakvulling, die op het eerste gezicht niet zo spectaculair oogt. Pas bij nadere beschouwing valt op dat de rode vlakjes kunnen 'bewegen': het zijn deuren die in verschillende richtingen openklappen.

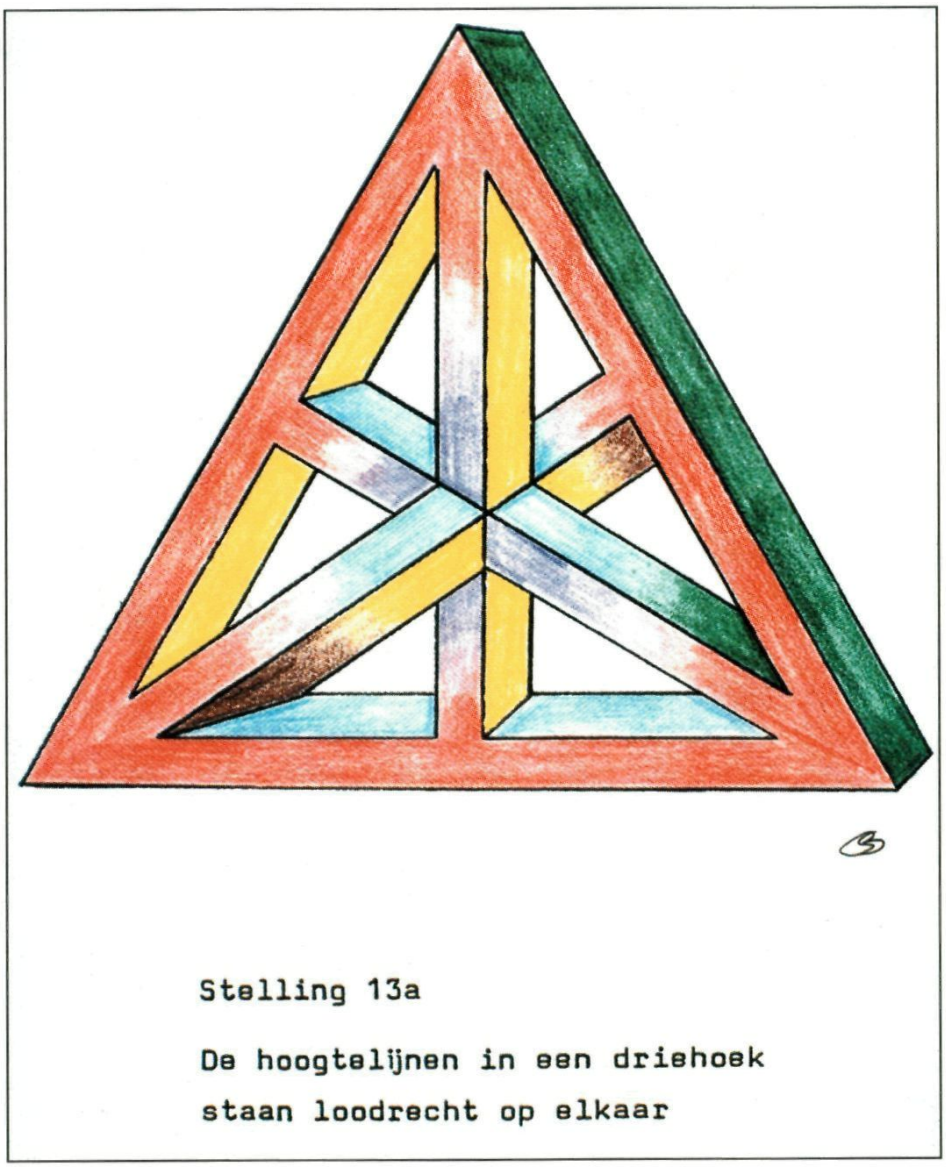


Open deuren, Ton Schotten, tweede prijs (49 cm × 49 cm, gelakt figuurzaagwerk)

In deze 'open groep' ontvingen we ook veel inzendingen (45). Naast de winnende werken waren genomineerd de inzendingen van: Wolter Nuis uit Delft, Ton Schotten uit Heerhugowaard (2 werken), Weia Reinboud uit Utrecht, C. van der Stelt uit Bloemendaal (1 werk), H. Swakhoven uit Landgraaf (3 werken), Rozemarijn van der Horst uit Hawaii (U.S.A.), W.M. Nimmo uit Den Bosch, A. Roos uit Arnhem, Beppie Alewijnse uit Zoetermeer, Lieven Vanholme uit St. Amandsberg (België) en van Hans Kuiper uit Bunnik (2 werken). De geldprijzen zijn ter beschikking gesteld door het wiskundetijdschrift Pythagoras, via een subsidie van de Stichting de Wageningse Methode.

Eerste prijs

De eerste prijs ging naar Simon Biesheuvel uit Weesp voor een onmogelijke stelling. Zijn tekening is een variatie op een bekend thema, maar door het onderschift krijgt de tekening een sprankelend en origineel karakter.

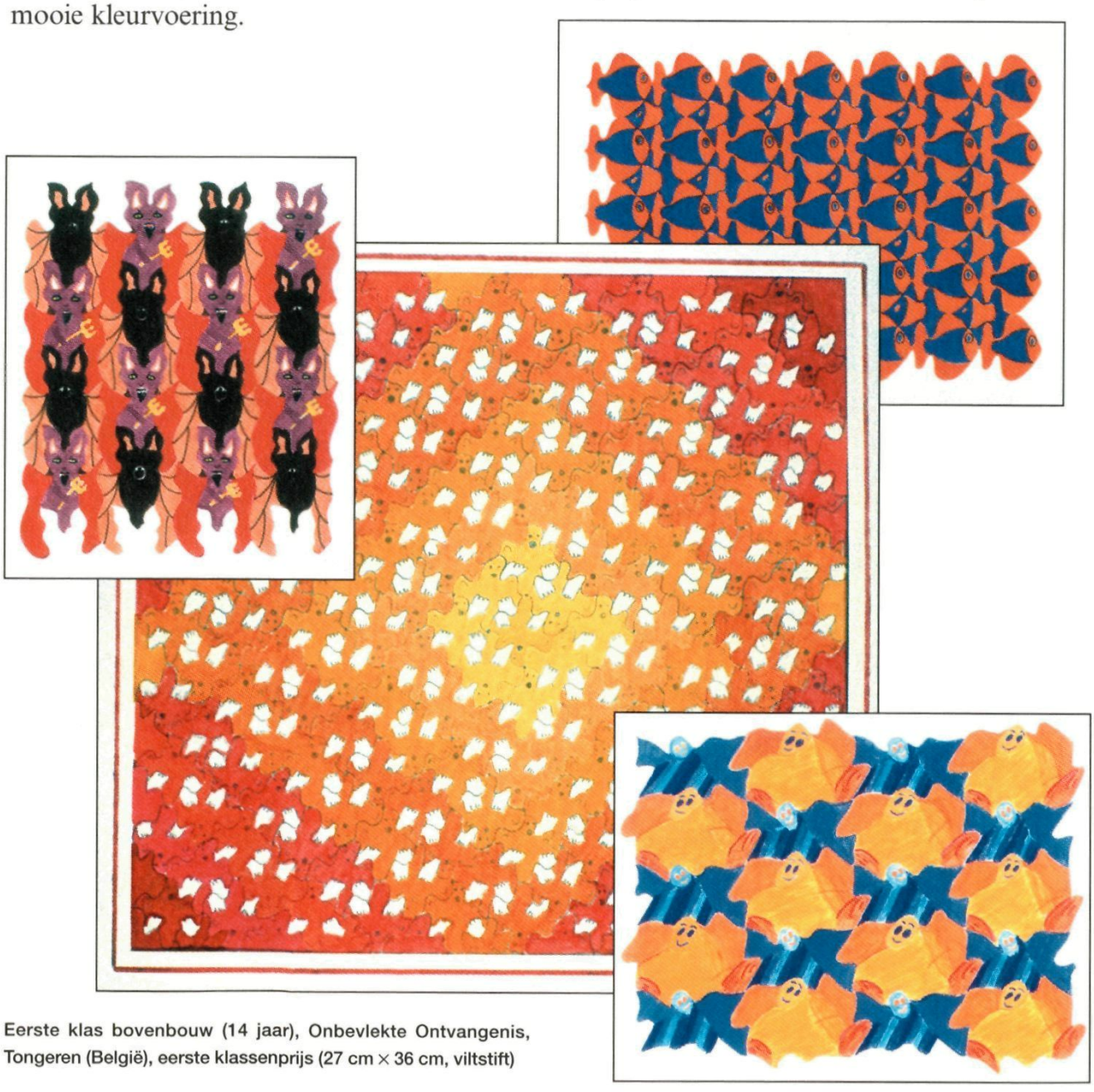


Simon Biesheuvel, eerste prijs
(21 cm × 29.5 cm,
inkt en kleurpotlood)

De klassenprijzen

Eerste prijs

De eerste prijs ging naar de 1e klas bovenbouw (14 jaar) van de Onbevlekte Ontvangenis te Tongeren (België), voor zestien werken van een hoge gemiddelde kwaliteit en een bijzonder mooie kleurvoering.

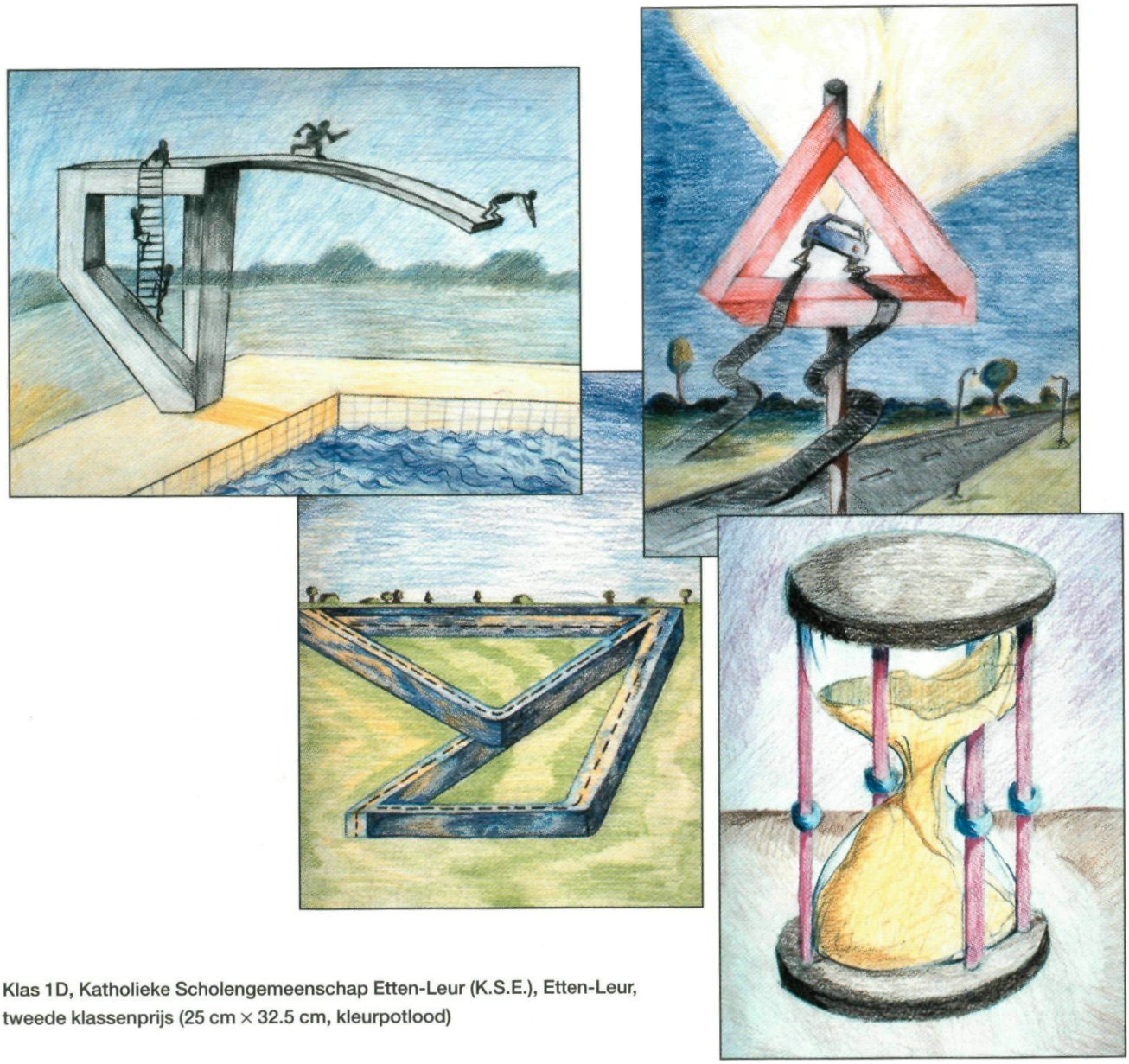


Eerste klas bovenbouw (14 jaar), Onbevlekte Ontvangenis, Tongeren (België), eerste klassenprijs (27 cm × 36 cm, viltstift)

Het klassenwerk was van een verbazend hoge kwaliteit. Wellicht kwam dat door het prijzengeld: twintig klassen dongen mee naar de hoofdprijs van duizend gulden. Tot onze spijt kunnen hier niet alle inzendingen van de winnnende klassen tonen; wegens de beperkt beschikbare ruimte hebben we hier een keuze moeten maken.

Tweede prijs

Klas 1A van de Katholieke Scholengemeen-schap Etten-Leur maakte 26 tekeningen met als onderwerp 'Onmogelijke figuren'. Het zichtbare enthousiasme waarmee de leerlingen gewerkt hebben, deed de jury veel genoegen.



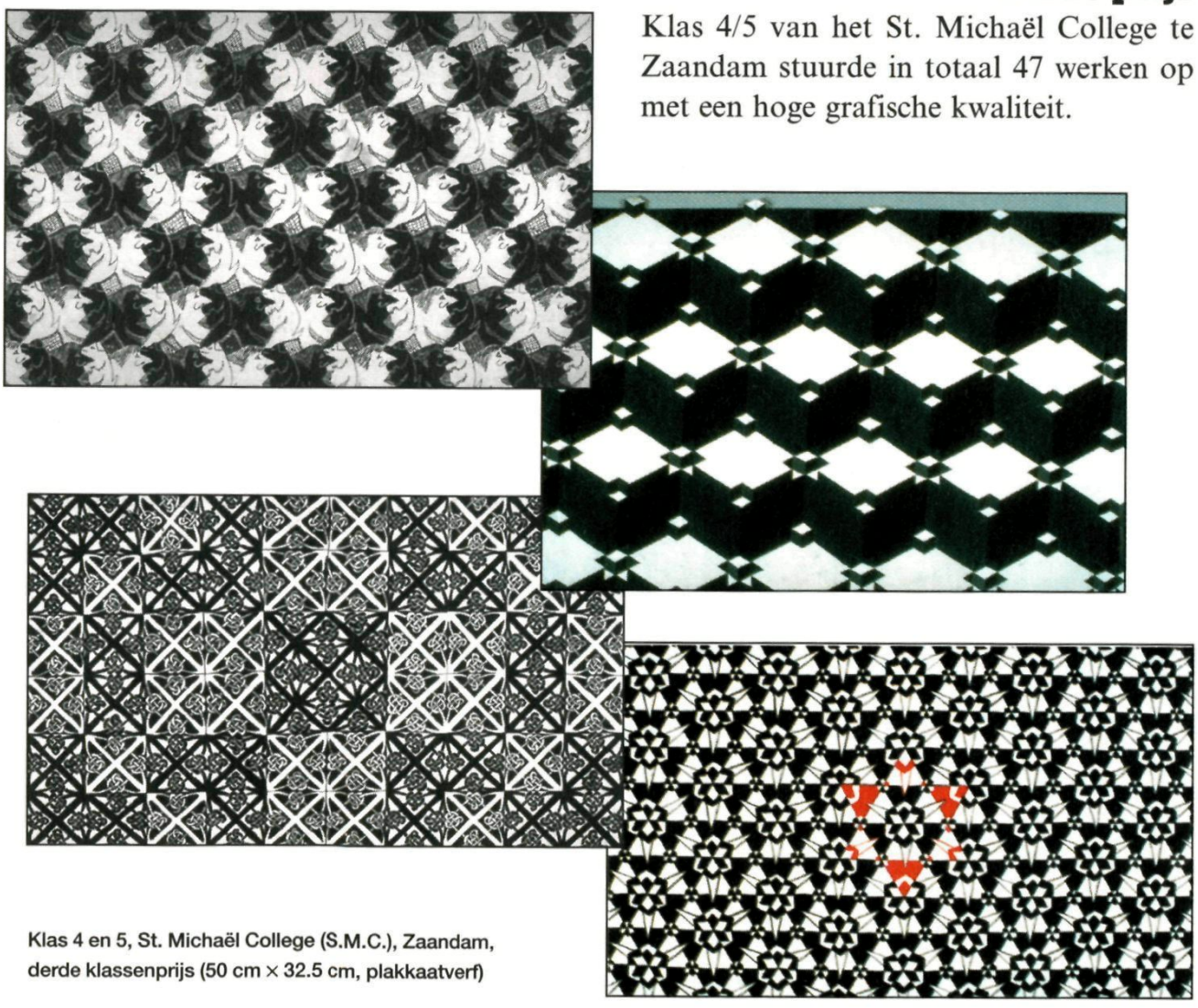
Klas 1D, Katholieke Scholengemeenschap Etten-Leur (K.S.E.), Etten-Leur, tweede klassenprijs (25 cm × 32.5 cm, kleurpotlood)

De klasseninzendingen

De winnende klasseninzendingen zijn tot stand gekomen in de tekenlessen — de docent wiskunde heeft de docent tekenen op de hoogte gebracht van de Escherprijsvraag.
Mevrouw Christiaans van de Onbevlekte Ontvangenis uit Tongeren heeft haar leerlingen laten werken volgens het artikel van Anrina Kolkman en Monique Pijls uit het Eschernummer. De leerlingen van de Katholieke Scholengemeenschap Etten-Leur hebben zelf naar materiaal gezocht over onmogelijke figuren op Internet, volgens gerichte opdrachten van hun tekenleraar Sjaak Jansen. Dit heeft zeer inspirerend gewerkt. Bij het SMC te Zaandam heeft de tekenleraar Ruth Pos de leerlingen enorm gestimuleerd, met zichtbaar resultaat!

Derde prijs

Klas 4/5 van het St. Michaël College te Zaandam stuurde in totaal 47 werken op met een hoge grafische kwaliteit.



Klas 4 en 5, St. Michaël College (S.M.C.), Zaandam, derde klassenprijs (50 cm × 32.5 cm, plakkaatverf)

De schatzoekersprijsvraag

Veel lezers hebben oplossingen ingestuurd van de prijsvraag 'De schat'. Deze lezers weten inmiddels waar de schat ligt en in de meeste gevallen konden zij dat ook bewijzen. U ook?

Dion Gijswijt

In het oktobernummer van vorig jaar werd een zeeman door de instructies op een oude schatkaart naar een eenzaam eilandje in de Stille Oceaan geleid. De instructies op zijn kaart waren:

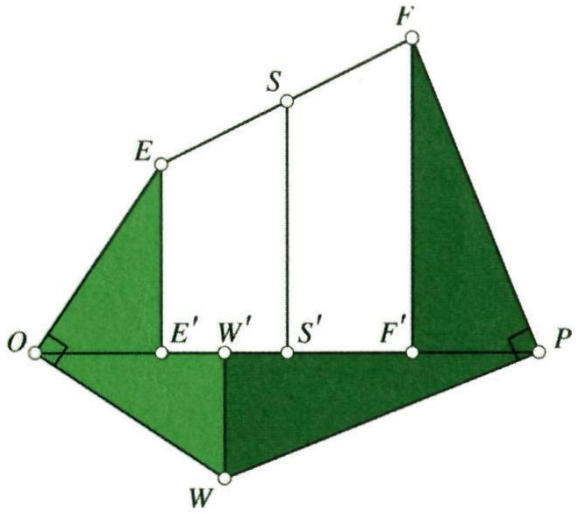
"Ga naar de waterput en loop vandaar naar de oude olm, bepaal de afstand, ga rechtsaf en loop dezelfde afstand. Ga opnieuw naar de waterput en loop vandaar naar de pijnboom, bepaal de afstand, ga linksaf en loop dezelfde afstand. Verbindt de twee eindpunten en je zult de schat vinden op het midden van de verbindingslijn."

Na zijn lange, barre tocht over de oceanen was de zeeman geschokt toen hij zag dat de oude olm en de pijnboom er nog steeds stonden, maar de waterput was verdwenen. Nu kon hij de kostbare schat nooit meer vinden.

Veel lezers van Pythagoras konden dat wel, zoals blijkt uit de talrijke goede inzendingen. Ze konden namelijk laten zien dat waar de waterput zich ook bevindt, de instructies op de schatkaart je altijd naar dezelfde plek voeren. De zeeman had een willekeurige plek als waterput kunnen nemen, de instructies op de kaart kunnen opvolgen en zo de schat kunnen vinden.

Het eerste bewijs

Hoe bewijs je nu dat de plaats van de waterput er niets toe doet? Hier volgt de oplossing die veel lezers hebben bedacht.



In de figuur zijn de olm O, de pijnboom P en de waterput W getekend. De instructies op de kaart geven nu de twee eindpunten E en F. Precies tussen E en F ligt de schat S. Verder zijn de punten W', S', E' en F' de voetpunten van de loodlijnen uit W, S, E en F op lijn OP. We zullen nu bewijzen dat de plaats van S niet afhangt van W.

Omdat de driehoeken $OW'W$ en $EE'O$ congruent zijn, volgt dat $\overline{OW'} = \overline{EE'}$ en $\overline{W'W} = \overline{E'O}$. Ook driehoeken $PW'W$ en $FF'P$ zijn congruent, zodat $\overline{PW'} = \overline{FF'}$ en $\overline{W'W} = \overline{F'P}$. Aangezien S het midden van EF is, is S' het midden van $E'F'$ en dus ook het midden van OP. Ook is $\overline{SS'}$ het gemiddelde van $\overline{EE'}$ en $\overline{FF'}$, zodat:

$$\overline{SS'} = \tfrac{1}{2}(\overline{EE'} + \overline{FF'}) = \tfrac{1}{2}(\overline{OW'} + \overline{PW'}) = \tfrac{1}{2}\overline{OP}.$$

De positie van S is dus alleen afhankelijk van O en P en niet van W.

Toch is dit bewijs niet helemaal waterdicht. Wie het stukje *Een stompe hoek van 90°* uit het decembernummer heeft gelezen, zal het misschien zijn opgevallen dat er iets vreemds gebeurt als W aan de andere kant van OP ligt, of als W heel ver naar links of rechts ligt. In dat geval klopt het plaatje niet meer.

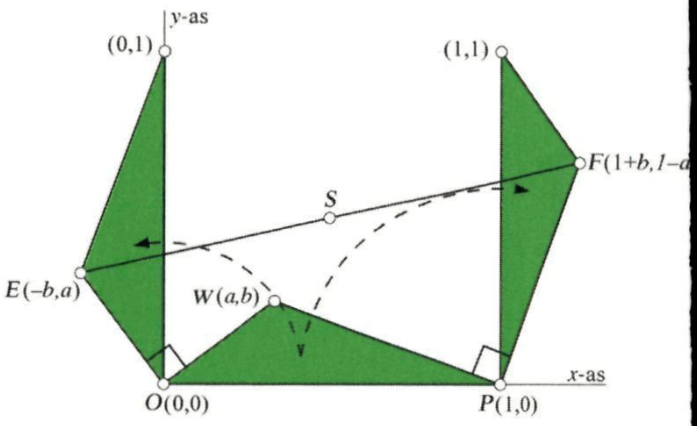
Hoewel het niet moeilijk is om het bewijs kloppend te maken, is het leuker om het probleem op een andere manier te benaderen. Het bewijs wordt dan ook eenvoudiger. Dat is precies hoe veel andere inzenders het vraagstuk aanpakten.

Het tweede bewijs

Kies een assenstelsel zó, dat de oude olm in de oorsprong $O=(0,0)$ ligt en de pijnboom op de x-as, $P = (1,0)$. Zie figuur hieronder. De positie van de waterput weten we niet, dus nemen we $W = (a,b)$ met a en b onbekend. Het eindpunt $E = (-b, a)$ vind je door W over 90° om O te roteren, en het eindpunt $F = (1 + b, 1 - a)$ ontstaat door rotatie om P over – 90°. De schat S bevindt zich in het midden tussen E en F, dus

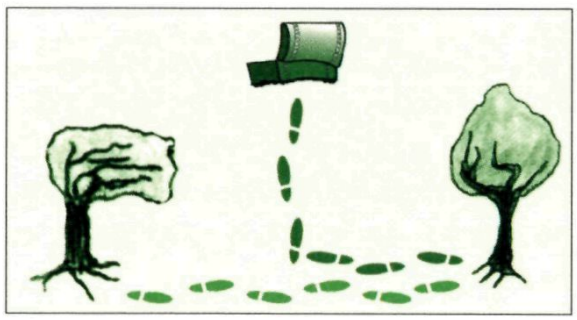
$$S=\left(\tfrac{1}{2}(-b+1+b), \tfrac{1}{2}(a+1-a)\right)=\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

De plaats van de schat is dus onafhankelijk van de plaats van de waterput.



Hoe vind je de schat?

Loop van de olm naar de pijnboom en tel het aantal stappen. Loop de helft van het aantal stappen terug, ga rechtsaf en loop nogmaals zoveel stappen. Daar vind je de schat.



Winnaars

De winnaar in de categorie leerlingen tot en met 14 jaar is Jonathan de Block uit Gent. Bij de leerlingen tot en met 17 jaar is Loes Wagenaar van het **Mozaïekcollege** in Arnhem in de prijzen gevallen.
Tenslotte heeft in de categorie overige lezers

Lucas van der Wiel uit Veldhoven gewonnen. Hartelijk gefeliciteerd, jullie krijgen alle drie de boekenbon van honderd gulden zo snel mogelijk opgestuurd.

Natuurlijk waren er naast deze drie winnaars nog veel meer goede inzenders. Dit zijn ze allemaal:

Jonathan de Block (10) uit Gent, Jasper E. Hendriks (12) uit Zwolle, Kirsten v.d. Bruele (13) uit Haarlem, Christian Tjahjadi (13) uit Zoetermeer, Brigit van Dalen (14), **Vlaardingse Openbare Scholengemeenschap**, Sebastiaan van Denderen (14) uit Overveen, Marie-Emilie Ingen Hausz (14) uit Naarden, Renate Knooihuizen (14) uit Uithuizermeeden, Adriaan Louwerse (15), **Calvijn College** te Goes, Johan de Ruiter (15) uit Rijsoord, Gerard van den Akker (16) uit Amsterdam, Koen van Hees (16) uit Barendrecht, mLoes Wagenaar (16), **Mozaïekcollege**, Gertjan Kok (17), **Sint-Maartenscollege** te Voorburg, Annick Weyzig (17), O.R.S Lek en Linge, Edwin van Vliet (18), **Groene Hart Lyceum** te Alphen a.d. Rijn, J. Belle uit Velp, S. Biesheuvel uit Weesp, Wilma den Boer uit Gouda, Daan Buisman uit Haren, Elias Buissant des Amorie uit Castricum, Fokko v.d. Bult uit Oegstgeest, L. Christaens uit Tongeren, Henk van Engen uit Assen, W.K. Goodijk uit Groningen, Job van de Groep uit Vianen, O. van Hees uit Barendrecht, Arie Heikoop uit Kampen, Huib Henrichs uit Haarlem, Ernst van de Kerkhof uit Sittard, Kees Nagtegaal uit Dordrecht, Philip Post & Mark Dingemanse uit Breukelen, H. Verdonk uit den Haag, Han Verhulst uit Gouda, J.J. Versluys uit Utrecht, Lukas van de Wiel uit Veldhoven, J.H. de Zoete uit Enkhuizen. ◢

Oplossing p.1

Cijfers verwisselen

Neem twee cijfers: a en b; zeg dat $a > b$. Daar kunnen we twee getallen mee maken: ab en ba. Het eerste getal heeft a tientallen en b eenheden, het tweede getal heeft b tientallen en a eenheden. Ze verschillen dus:

$$\begin{aligned}(a-b) \cdot 10 + (b-a) \cdot 1 &= (a-b) \cdot 10 - (a-b) \cdot 1 \\ &= (a-b) \cdot 9.\end{aligned}$$

De richtingen ab en ba op de gradenboog verschillen dus $a-b$ keer 90°. Als $a-b=2$ of $a-b=6$ verschillen de richtingen 180° en zijn ze dus tegengesteld. Als $a-b=1$, 3, 5, 7 of 9 staan de richtingen loodrecht op elkaar (ze verschillen dan 90° of 270°). Als $a-b=4$ of 8 zijn de richtingen hetzelfde. Controleer maar in de gradenboog. ◢

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden!

Pythagoras

Opgave 43

Je krijgt twaalf stokken met een lengte van 13 centimeter. Je moet die stokken zodanig zagen dat je stokjes krijgt van 3 cm, 4 cm of 5 cm. We willen dertien afzonderlijke driehoeken maken met zijden 3, 4, 5. Hoe moet je die stokken verdelen?

Opgave 44

Welke positieve gehele getallen kunnen geschreven worden als de som van twee of meer opeenvolgende positieve getallen? Zo is bijvoorbeeld $9 = 2 + 3 + 4$, maar 1 en 2 kunnen niet zo geschreven worden.

Stuur je oplossing naar:
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 maart 1999. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt!

Op de volgende pagina's staan de oplossingen van de opgaven uit het oktobernummer.

Veel succes!
Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.

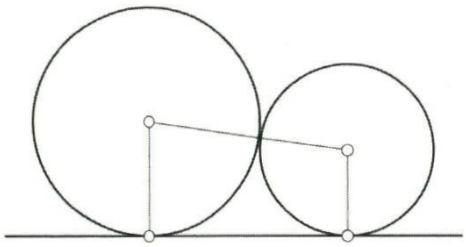
Olympiade

Opgave 39

In het vlak liggen drie cirkels: A, B en C, met stralen a, b en c. Elke cirkel raakt uitwendig aan beide andere. Cirkel C is de kleinste van de drie. Bovendien is er een lijn ℓ, die alle drie de cirkels raakt. Bewijs dat geldt:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

OPLOSSING. Om deze opgave te kunnen maken moet je weten dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal van de cirkel door dat raakpunt.



We kijken eerst eens wat we kunnen zeggen over twee cirkels A en B die elkaar raken en een gemeenschappelijke raaklijn ℓ hebben. Laten we zeggen dat ze stralen a en b hebben met $a \geq b$. Noem de raakpunten van ℓ aan de cirkels A en B, respectievelijk X en Y. We geven de afstand tussen X en Y gewoon aan met XY. Volgens de stelling van Pythagoras geldt:

$$XY^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2.$$

Oftewel $XY = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$.

Deze opmerking kunnen we in de gegeven situatie drie maal toepassen: op elk paar cirkels eenmaal. We krijgen dan ook drie afstanden. Echter de grootste afstand is gelijk aan de som van de twee kleinere. In formules:

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}.$$

Links en rechts delen door $2\sqrt{abc}$ geeft de gevraagde formule.

Deze opgave werd opgelost door: Ka-Wing Lam van het **Hondsrug College** te Emmen, Jan Tuitman van het **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Kawang Choi van het **Aloysius College** te 's Gravenhage, Peter Bruin van het **Groene Hart Lyceum** te Alphen aan de Rijn, Herbert Beltman van **de Waerdenborch** te Holten, Edwin van Vliet van het **Groene Hart Lyceum** te Alphen aan de Rijn, Peter Deleu te Hulste, Gertjan Kok van het **Sint-Maartenscollege** te Voorburg, Bart Vandewoestijne te Zwevegem, H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Gertjan Kok.

Opgave 40

Een *dubbelrijtje* is een rijtje van $2n$ getallen, waarin elk van de getallen 1 tot en met n tweemaal voorkomt en waarin tussen de getallen k en k precies k getallen staan. Bijvoorbeeld, een dubbelrijtje voor $n=3$ is 3, 1, 2, 1, 3, 2. En 4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2 is een dubbelrijtje voor $n=4$. Bewijs dat geen dubbelrijtjes bestaan waarvoor n een viervoud plus 1 of een viervoud plus 2 is.

Pythagoras Olympiade

OPLOSSING. Nummer de plaatsen van 1 tot en met $2n$. We kijken naar een getal k uit de getallen 1 tot en met n. Gegeven is dat k op twee plaatsen terecht komt. Als de laagste plaats nummer a heeft, dan heeft de hoogste plaats nummer $a + k + 1$, want tussen a en $a + k + 1$ zitten precies k plaatsen. De belangrijke opmerking die je moet maken is de volgende: als k even is dan komt één k terecht op een even positie en één k op een oneven positie. Als k oneven is dan komen de k's beide op een even positie terecht of beide op een oneven positie.

Wat volgt daar nu uit? De even k's bezetten samen precies even veel oneven als even vakjes. Bovendien zijn er in totaal even veel even als oneven vakjes. Dus de oneven k's bezetten samen ook even veel even als oneven vakjes. Hieruit volgt dat er een *even aantal* oneven getallen k moet zijn dat kleiner of gelijk is aan n.

Voor welke n is dat het geval? We bekijken dat eerst voor kleine n. Als $n = 1$ dan werkt het niet, want er is een oneven aantal oneven getallen kleiner of gelijk 1 (namelijk 1 zelf). Als $n = 2$ dan werkt het ook niet, want opnieuw is er een oneven aantal oneven getallen dat kleiner of gelijk is aan 2. Het getal $n = 3$ kunnen we niet uitsluiten want er zijn twee oneven getallen kleiner of gelijk aan 3 (namelijk 1 en 3). Tenslotte $n = 4$ kunnen we ook niet uitsluiten want ook dan zijn er twee oneven getallen kleiner dan 4.

We kunnen uit deze gegevens afleiden hoe het verder gaat met grotere n. Veronderstel dat ik weet dat er een even aantal oneven getallen kleiner dan n zijn. Dan zijn er ook een oneven aantal getallen kleiner dan $n + 4$, er zijn er immers precies 2 bijgekomen. Aan de andere kant als er een oneven aantal oneven getallen kleiner dan n is dan zijn er ook een oneven aantal oneven getallen kleiner dan $n + 4$. We concluderen hieruit dat er geen dubbelrijtjes bestaan waarvan de lengte een viervoud plus 1 of een viervoud plus 2 is.

Merk overigens op dat bewijs alleen nog maar aantoont dat voor bepaalde n geen dubbelrijtjes bestaan. Het toont niet aan dat er voor de overige n wel dubbelrijtjes zijn.

Deze opgave is opgelost door: Bart Vandewoestijne te Zwevegem, Herbert Beltman, **De Waerdenborch** te Holten, Gertjan Kok, **Sint-Maartenscollege** te Voorburg en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Hertbert Beltman.

Woorden als sinus en cosinus komen uit het Latijn. Het woord 'sinus' komt niet alleen in de wiskunde voor. Je huisarts kent het ook, maar in een heel andere betekenis.

Ptjsltn

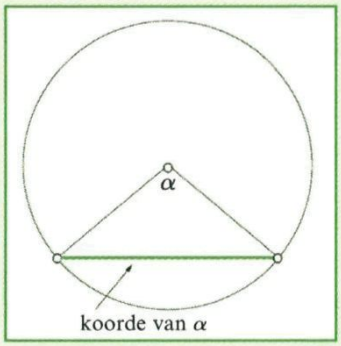
Klaas Pieter Hart

Omdat je al lang verkouden bent ga je naar de huisarts. Na een kort onderzoek zegt de arts: "Ik zie het al, het ligt aan je sinussen". Je vraagt je af wat je gezondheid nu te maken heeft met de gonio die je op school onderwezen krijgt. Je dokter legt uit dat je verkoudheid daar niets mee te maken heeft, maar dat 'sinus' het Latijnse woord voor 'holte' is en dat je last hebt van je voorhoofdsholten.

Hoe kan het woord 'sinus' twee zo verschillende dingen betekenen? Dat gaan we nu uitleggen. We zullen zien dat het woord 'sinus' langs een flinke omweg ontstaan is, en zijn bestaan in de wiskunde te danken heeft aan een vertaalfout.

Driehoeksmeting

Het idee om bij hoekmeting rechte lijnen te gebruiken is al heel oud. In de tweede eeuw voor Christus rekende Hipparchus al met de koorden van hoeken in plaats van met de hoeken zelf.



Uit werken van de Griekse wiskundigen Menelaus en Ptolemaeus weten we dat de Grieken flink wat driehoeksmeetkunde hadden ontwikkeld: zo kenden ze manieren om de koorde van $\alpha + \beta$ uit die van α en β te berekenen; er bestonden ook al tabellen voor de koorden van de hoeken van 0 tot en met 180 graden (in stapjes van een halve graad).

De Grieken spraken over koorden en dat woord is door de wiskundigen in het oude India overgenomen. Gaandeweg concentreerden de Indiërs zich op 'de halve koorde van de dubbele hoek' en ze noemden die in het begin *ardhajiva* (ardha=halve, jiva=koorde) en later alleen *jiva*.

De Arabieren vertaalden dit fonetisch in *giba*. Volgens sommigen betekent dit niets en volgens anderen betekende dit echt 'koorde'. In het Arabisch worden klinkers waar mogelijk weggelaten (wnt vk bgrp j tch wl wt r stt). Men schreef daarom alleen *gb*.

Toen men rond 1100 in Europa de Arabische werken in het Latijn ging vertalen, wist men eerst niet wat *gb* betekende. Het Arabische woord dat het best leek te passen was *gaib* en dat betekent 'baai', 'holte' of 'plooi'. Het Latijnse woord 'sinus' had al deze betekenissen en was dus een logische keuze. Vandaar dat een huisarts aan iets anders denkt dan jij bij het woord 'sinus'. ◢

In China werd al aan wiskunde gedaan voor onze jaartelling begon, net als in veel andere oude beschavingen. In dit artikel laten we zien dat de omstandigheden in het oude China de ontwikkeling van de wiskunde op een bijzondere wijze beïnvloed hebben.

Made in China

Sander de Putter

Volgens legenden is de Chinese beschaving al bijna 7000 jaar oud, maar de vroegste betrouwbare bronnen gaan terug tot 1600 voor Christus. Toen beheerste de zogenaamde Shang dynastie een groot deel van China. Dat duurde tot ongeveer 1000 voor Christus. Daarna kwam de Zhou dynastie die een kort leven beschoren was en uiteen viel in elkaar bevechtende kleine staatjes. Deze situatie duurde nog voort toen in China omstreeks 600 voor Christus de ijzertijd begon, die een periode van grote intellectuele bloei inluidde.

De eerste keizer

De kleine staatjes werden langzamerhand opgeslokt door de grotere, zodat de weg geëffend werd voor het ontstaan van een verenigd China. Dit gebeurde in 221 voor Christus, onder keizer Qin Shi Huangdi, die China omvormde tot een bureaucratisch rijk. Er kwam een machtig rechtssysteem en er werd belasting geheven. Voorts verordende de keizer dat er gestandaardiseerde systemen moesten komen voor gewichten, maten, valuta en voor het schrift. Volgens legenden zou de keizer zelfs opdracht gegeven hebben tot het verbranden van boeken uit voorgaande perioden om te voorkomen dat er afwijkende ideeën zouden leven in zijn rijk. Het is niet mogelijk in te schatten hoeveel kennis er verloren is gegaan door deze boekverbrandingen.

Bureaucratie

De keizer overleed in 210 voor Christus en dit betekende het einde van zijn dynastie. De nieuwe machthebbers, behorende tot de Han-dynastie, zetten de bureaucratisering voort en het ambtelijke apparaat werd steeds machtiger. Om ambtenaar te kunnen worden moest je een lange opleiding volgen. Van de bewaard gebleven leerboeken die in de opleiding gebruikt werden zijn er twee wiskundig van aard. Deze boeken behoren tot de belangrijkste bronnen over de Chinese wiskunde.

Uit de inhoud van deze boeken blijkt dat de Chinezen op de hoogte waren van de stelling van Pythagoras, en dat ze deze ook konden bewijzen. Ook kende men goede benaderingen van π, en beschikte men over formules voor de oppervlakte en inhoud van meetkundige figuren. Deze opsomming is niet volledig, want de oude Chinezen hebben veel meer ontdekt dan we hier in het kort kunnen weergeven.

Ambtenarij

De wiskundige werken uit China zijn meestal gericht op het hoe en bijna nooit op het waarom. Dit past helemaal in de leer van Confucius, een beroemde filosoof die leefde rond 500 voor Christus. Voor de navolgers van Confucius was wiskunde niet meer dan een soort technologie. Er werd alleen die wiskunde onderwezen die nodig was voor ambtenaren.

Het ambtelijke systeem had een remmende werking op de ontwikkeling van de wiskunde. Omdat de overheid besliste over het aantal examens en hun inhoud, werd van bovenaf geregeld hoeveel wiskunde er gedaan mocht worden. Er zijn zelfs periodes geweest dat er helemaal geen wiskundeexamens werden afgenomen.

Ook de censuur was een remmende factor. Alleen goedgekeurde teksten kwamen in aanmerking om bewaard en gecopieerd te worden, en daardoor verdwenen geschriften die als te vooruitstrevend werden beschouwd.

De driehoek van Pascal

Om je een idee te geven van de oude Chinese wiskunde, geven we een voorbeeld. Voor het kwadraat van de som van twee getallen bestaat de volgende formule:

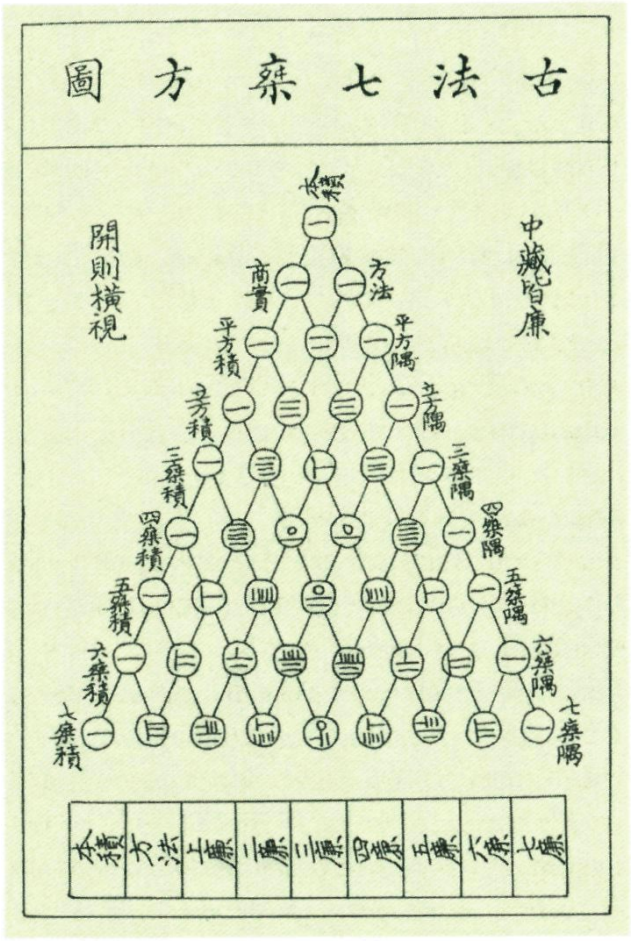
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Voor de derde macht geldt ook iets dergelijks, je kunt makkelijk inzien dat:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

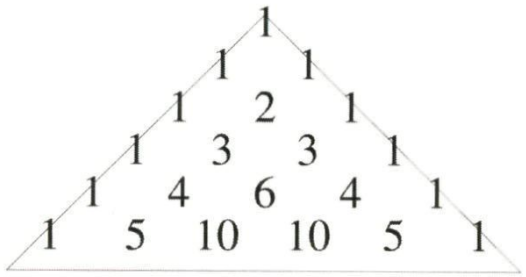
Je kunt nu gaan vermoeden dat er een algemene formule bestaat voor $(a + b)^n$, voor $n = 2, 3, 4, \ldots$ Dit is inderdaad zo, en de formule hiervoor staat bij ons bekend als het binomium van Newton.

In het oude China wist men al hoe je $(a+b)^n$ moet berekenen: in figuur 1 is een Chinees diagram uit 1303 afgebeeld waarin (in Chinese cijfers) staat aangegeven wat de coëfficienten van $(a+b)^n$ zijn. Bij ons staat dit diagram bekend als de driehoek van Pascal.



Figuur 1. Een historische afbeelding van de driehoek van Pascal in de Chinese notatie.

De driehoek ontstaat als volgt. Het getal bovenaan is een 1, vervolgens schrijf je aan weerszijden schuin onder deze 1 nog twee enen. Dit zet je voort zodat je twee schuine rijen krijgt met alleen maar enen, deze twee rijen vormen de zijden van je driehoek. De overige elementen krijg je door de volgende regel: elk getal in het inwendige van de driehoek is de som van de twee getallen schuin erboven. Zo ontstaat dus een oneindig grote driehoek. In moderne notatie zou dat er zo uit zien.

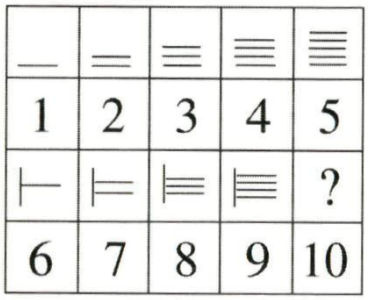


De derde regel geeft de coëfficienten in de formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, de vierde regel geeft: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Als je de coëfficiënten van $(a+b)^4$ wilt weten, hoef je alleen maar de vijfde regel van de driehoek te lezen. Je krijgt:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Chinese getallen

Door de moderne en de Chinese notatie met elkaar te vergelijken kun je zien welke getalnotatie is gebruikt. Voor het getal 1 wordt simpelweg één horizontaal streepje neergezet, voor de 2 twee horizontale streepjes, enzovoort, tot en met vijf. Voor de getallen 6 tot en met 9 worden er telkens vijf streepjes samengenomen en genoteerd met één verticaal streepje, zoals in de figuur rechts boven.



VRAAG. Kun je nu zelf ontdekken in de Chinese driehoek hoe het getal 10 werd genoteerd? En 20?

Hoewel de afbeelding uit figuur 1 uit 1303 stamt, zijn er teksten gevonden waaruit blijkt dat de driehoek in elk geval al in 1050 bekend was. Waarschijnlijk werd er al veel eerder mee gewerkt. Blaise Pascal, naar wie de driehoek van Pascal genoemd is, leefde van 1623 tot 1662. Pascal is dus zeker niet de eerste geweest die 'zijn' driehoek uitgevonden heeft; de Chinezen zijn hem vele eeuwen voor geweest! ◢

Literatuur

1. Victor J. Katz, *A History of Mathematics*, New York, Harper Collin College Publishers, 1993
2. Jean-Claude Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Berlin, Springer-Verlag, 1997

64 = 65

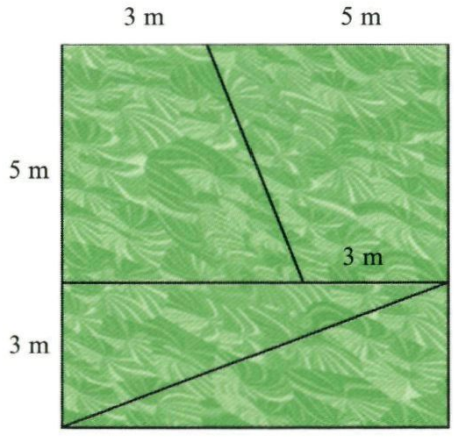
In de wiskunde moet je alles kunnen beredeneren. Maar met redeneren ga je makkelijk de mist in, want door foute redeneringen kun je dingen bewijzen die niet waar zijn. Bijvoorbeeld dat je een stuk tapijt van 64 vierkante meter kunt verknippen tot een stuk van 65 vierkante meter.

Drog redeneringen

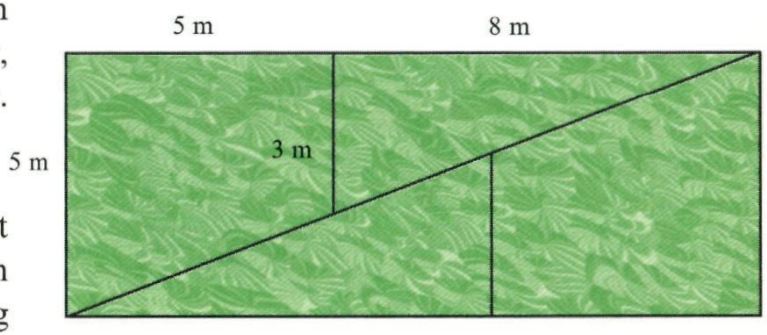
André de Boer

De woonkamer van je huis is 13 meter lang en 5 meter breed. Het wordt tijd voor een nieuwe vloerbedekking, want het tapijt is versleten. In de winkel blijkt de aanschaf van een nieuwe vloerbedekking een dure grap te worden: het tapijt dat je wilt hebben kost honderd gulden per vierkante meter, dus 6500 gulden voor de hele woonkamer. Zoveel geld heb je niet.

De tapijtverkoper ziet je beteuterde gezicht en probeert je te helpen. Hij heeft wel een oplossing. In het magazijn heeft hij nog een restant liggen van dezelfde kwaliteit dat je mag hebben voor duizend gulden. De afmetingen kloppen echter niet helemaal: 8 meter bij 8 meter. De verkoper is niet voor één gat te vangen. Hij suggereert het vierkante stuk tapijt als volgt in vier stukken te knippen:



Hij vervolgt: "Met deze vier stukken kun je de vloer van je woonkamer helemaal bedekken. Kijk maar:"



Je wilt het stuk tapijt wel kopen, want het enorme prijsvoordeel maakt je enthousiast. Toch ben je niet helemaal overtuigd. Want het stuk tapijt van duizend gulden is $8 \times 8 = 64$ vierkante meter groot, terwijl de oppervlakte van je woonkamer $5 \times 13 = 65$ vierkante meter is. Ra, ra, hoe kan dat?

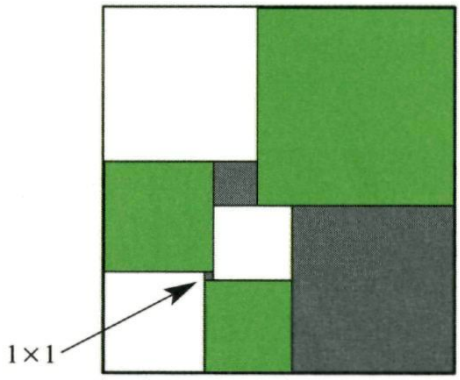
Het antwoord van dit raadsel kun je vinden op de homepage van Pythagoras (kijk bij het februarinummer). Heb je geen Internet, stuur dan even een briefje naar de redactie, dan krijg je de oplossing toegestuurd. ◢

Problemen

Dion Gijswijt

Verknipte rechthoek

In 1925 lukte het Z. Morón als eerste om een rechthoek in ongelijke vierkanten op te delen. Hieronder zie je hoe je dat kunt doen. Van het kleinste vierkant is de zijde gegeven. Kun jij de afmetingen van de rechthoek berekenen?



Eieren koken

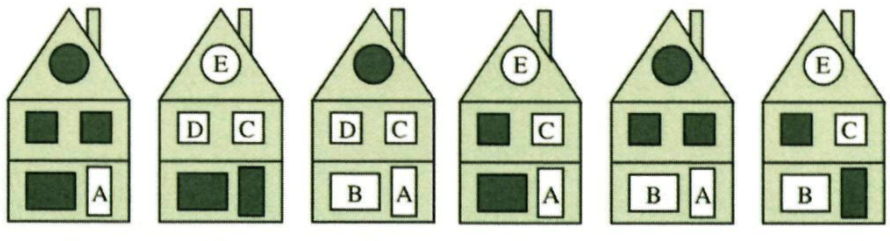
Ik wil graag een gekookt ei hebben, en jij gaat dat voor mij maken. Mijn ei moet precies 9 minuten koken. Je hebt al een pannetje met kokend water op het vuur staan. Helaas heb je geen klok, maar slechts twee zandlopers, een van 4 minuten en een van 7 minuten. Hoelang moet ik op mijn ei wachten?

Tien munten

Tien munten liggen op een rij, met de kop boven. Max draait alle munten om. Daarna draait hij iedere tweede munt om, zodat daarna de muntstukken 2, 4, 6, 8 en 10 met kop boven liggen. Vervolgens draait hij iedere derde munt om (muntstuk 3, 6 en 9), dan iedere vierde munt, enzovoort, tot hij tenslotte alleen nog de tiende munt omdraait. Welke munten liggen nu met 'munt' boven?

Vreemde verlichting

Arthur heeft een nieuw huis gekocht en alles ziet er picobello uit. Als hij 's avonds een lamp wil aandoen blijkt er wel iets vreemds aan de hand te zijn met de verlichting. Schakelaar 1 schakelt gewoon lamp *A* aan en uit, maar schakelaar 2 schakelt lamp *C*, *D* én *E* aan en uit. Schakelaar 3 is voor lamp *A*, *B*, *C* en *D* en schakelaar 4 is voor lamp *A*, *C*, en *E*. Tenslotte worden lamp *A* en *B* door schakelaar nummer 5 aan en uit geschakeld. Hoe kan Arthur alleen lamp *C* aan of uit doen?



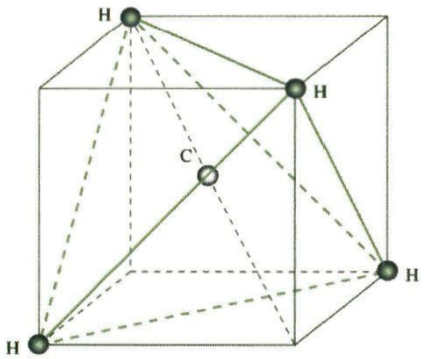
Oplossingen nr. 2

Op deze pagina worden de oplossingen van problemen uit het vorige nummer van Pythagoras besproken.

Dion Gijswijt

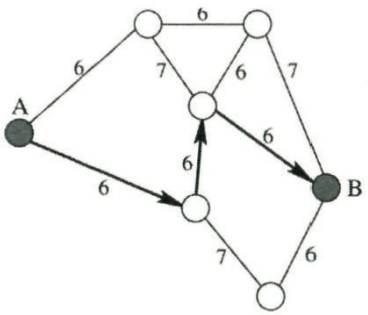
Methaan

De vier H-atomen vormen vier van de acht hoekpunten van een kubus met ribbe $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het C-atoom bevindt zich precies in het midden van de kubus. De afstand van het C-atoom tot een van de H-atomen is de helft van de lengte van de lichaamsdiagonaal van de kubus, dus gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$.



De kortste weg

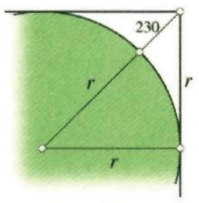
Je kunt de afstand binnen een dorpje vergeten als je de helft van deze afstand optelt bij iedere weg uit dat dorp. De kaart die je dan krijgt is een stuk eenvoudiger — de kortste weg hebben we erin aangegeven:



De ronde tafel

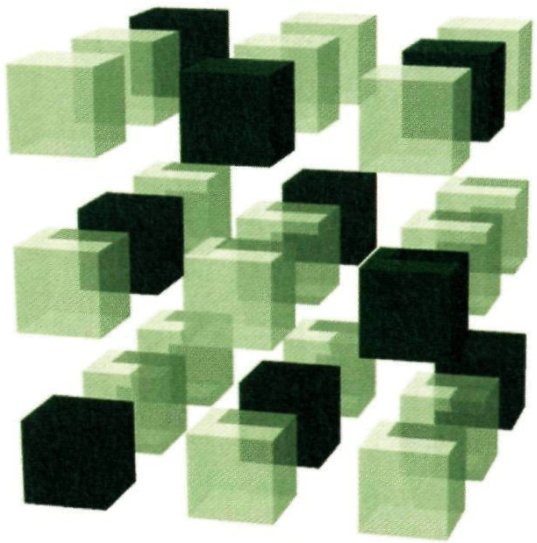
Van het middelpunt van de tafel trekken we een rechte lijn naar het hoekpunt van de kamer. Als we de straal van de tafel r noemen, dan zien we een gelijkzijdige rechthoek, waarvan de rechthoekszijden r zijn en de schuine zijde $r + 230$. De stelling van Pythagoras zegt dat $r^2 + r^2 = (r + 230)^2$. Als we dit uitwerken, dan vinden we $r^2 - 460r - 52900 = 0$. Dit levert twee oplossingen: $r = 555{,}269$ mm of $r = -95{,}269$ mm.

De negatieve oplossing kunnen we niet gebruiken en dus is de diameter van de tafel $2 \times 555 = 1110$ mm.



Ondoorzichtig

Minstens negen kleine kubusjes zijn ondoorzichtig, precies één in iedere rij van drie.



Agenda

Data voor deze agenda aanmelden bij pythagoras@wins.uva.nl

vrijdag 5, 12 en 19 februari '99
vrijdag 5, 12 en 19 maart '99
Wiskunde en de computer (020) 4447787
VU Masterclass voor 5 en 6 vwo

donderdag 11 en vrijdag 12 februari '99
Masterclass topologie (071) 5277100
RU Leiden, voor leerlingen en docenten vo

woensdag 3 maart '99: uitzending 1
maandag 15 maart '99: uitzending 2
vrijdag 19 maart '99: uitzending 3
woensdag 24 maart '99: uitzending 4
donderdag 25 maart: herhaling van alle uitzendingen
Wat en waar is wiskunde (III) http://www.omroep.nl/teleacnot/
Nieuwe serie TV-programma's bestemd voor derde klassen

zaterdag 13 maart '99
Algemene Voorlichtingsdag UvA (020) 5255333

vrijdag 19 maart '99
Kangoeroe wedstrijd 1999 (015) 2787011

vrijdag 19 maart '99
Meisjes studeren techniek (015) 2787011

vrijdag 26 en zaterdag 27 maart '99
Finale **Wiskunde A-lympiade** 030) 2611611
Garderen

donderdag 8 april: **Technische Wiskunde** (015) 2782988
zaterdag 10 april: **Algemene infomarkt** (015) 2789003
Voorjaarsvoorlichtingsdagen TU Delft (015) 2789003

donderdag 8 en vrijdag 9 april '99
Nederlands Wiskundig Congres 1999 (030) 253 14 19
Universiteit Utrecht

De post

Vincent S. Wighman is Nederlands recordhouder in de jacht op grote priemgetallen. Momenteel staat hij met het priemgetal $202 \times 2^{100459} + 1$ op plaats 101 in Chris Caldwells lijst www.utm. edu/research/primes/ op Internet. Voor de eerste Nederlander die een groter priemgetal dan het zijne op de lijst plaatst looft hij een appeltaart uit. Op deze manier hoopt hij op een smaakvolle manier de zoektocht naar grote priemgetallen te versnellen. Reacties naar: gomora@xs4all.nl.

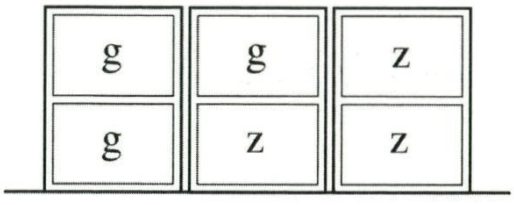
Van **Tom Brekelmans** uit Amersfoort ontvingen we een interessante uiteenzetting over *de polynoom*. Tom Brekelmans heeft onder andere gewerkt bij de afdeling ontwikkeling van de Hoogovens te IJmuiden. Daar deed zich soms het probleem voor dat van een grafiek van een functie enkel een paar punten bekend waren, maar geen functievoorschrift. In zijn brief geeft hij de formule die men bij Hoogovens gebruikte om met polynomen een functievoorschrift te bepalen.
Door twee punten (x_1,y_1) en (x_2,y_2) gaat bijvoorbeeld het eerstegraads polynoom

$$y = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2.$$

Waarom? Omdat dit een eerstegraads polynoom is en als je x_1 invult voor x is de uitkomst y_1 en als je x_2 invult is de uitkomst y_2. Voor een tweedegraadspolynoom door drie punten geeft hij een vergelijkbare formule.

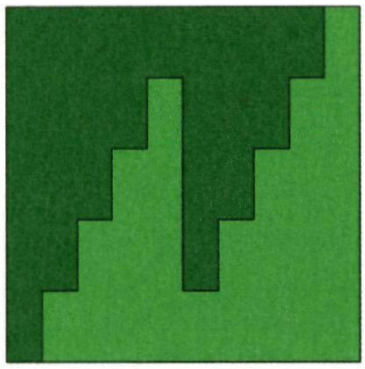
NB. Deze formule staat in de wiskunde bekend als het *interpolatiepolynoom van Lagrange*.

R. Kooistra uit Zaandam reageerde op een brief van Joris Mooij uit de postrubriek van oktober '98, waarin het volgende probleem gesteld wordt: Ruud heeft twee kinderen. Je komt erachter dat een van de twee een jongen is. Hoe groot is nu de kans dat Ruud twee jongens heeft? Joris betoogt dat de kans een half is, terwijl vóór hem een oud-redacteur al eens beredeneerd had dat de kans eenderde is. R. Kooistra betoogt daarentegen dat de kans *tweederde* is: Hij maakt een vergelijking met het zogenaamde *ladeprobleem van Bertrand*. Er zijn drie kasten met elk twee laden. In de twee laden bevinden zich respectievelijk twee gouden plakken, een gouden en een zilveren plak en twee zilveren plakken. Je trekt aselect een lade open en ziet een gouden plak. Hoe groot is nu de kans dat zich in de andere lade ook een gouden plak bevindt? Deze kans is gelijk aan tweederde.
R. Kooistra meent nu dat voor het probleem van Joris Mooij hetzelfde model geldt. Er zijn voor Ruuds gezin drie mogelijkheden: jj, jm of mm. Als je deze drie gevallen verdeelt over de drie kasten van Bertrand, dan zie je dat de kans dat Ruud twee jongens heeft gelijk is aan tweederde! ◢



Oplossingen

Verknipt



Knippen

Eén keer!

Klokkijken

1 minuut voor 10 (9:59 uur)

T-shirt

Het wasetiket zit aan de buitenkant van de linker mouw.

Ra, ra, hoe zit dat?

Als je met het doosje met het etiket ZW begint, kun je het al na eerste doosje weten! In dit doosje zitten namelijk twee witte of twee zwarte knikkers. Trek je bijvoorbeeld een witte, dan weet je dat er in ZW *twee* witte knikkers zitten. De twee zwarte knikkers zitten niet in ZZ, dus die zitten dan in WW en in ZZ zitten de zwarte en de witte knikker.

Versleten banden

De auto heeft vier wielen, die in totaal $4 \times 24.000 = 96.000$ km hebben afgelegd. Deze afstand moet je verdelen over zes banden. Elke band heeft dus $96.000 : 6 = 16.000$ km afgelegd.

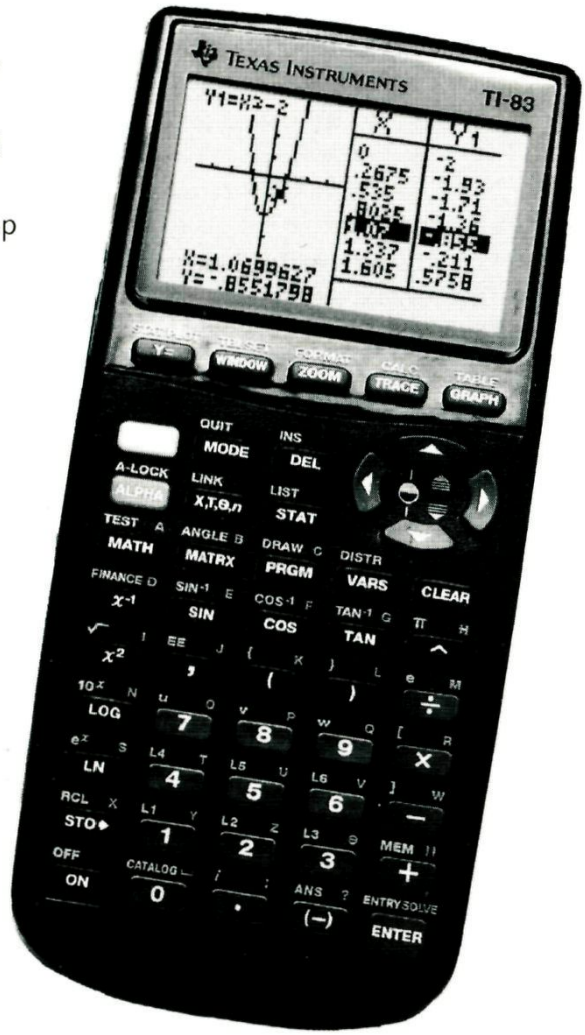
Over de medewerkers

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam
dr. L.A.M. van den Broek is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen
prof.dr. J. van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA
Bruno Ernst is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren
D.C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA
dr. K.P. Hart is docent topologie aan de TU Delft
dr. J. Hogendijk is docent wiskunde aan de UU
dr. J.K. Hoogland is onderzoeker Financiële Wiskunde aan het CWI
B. de Jongste is recreatief wiskundige te Den Haag
dr. ir. T. Koetsier is docent geschiedenis van de wiskunde aan de VU
ir. A.A.J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT
R. van Luijk is student wiskunde aan de UU
drs. W.R. Oudshoorn is AIO algebra en meetkunde aan de RUG
S. de Putter is student wiskunde aan de UU
ir. S.M. van Rijnswou is OIO computeralgebra aan de TUE
R. Roelofs is beeldend kunstenaar te Hengelo
prof.dr. J.M. Schumacher is onderzoeker bij het CWI en deeltijdhoogleraar wiskunde aan de KUB
dr. P.J.C. Spreij is docent wiskunde aan de faculteit der economische wetenschappen en econometrie van de VU
dr. ir. R.F. Swarttouw is docent wiskunde aan de VU
dr.ir. M.H. Vellekoop is docent Toegepaste Wiskunde aan de UT
dr. R. de Vilder is docent financiële wiskunde en dynamische systemen aan de UvA en verbonden aan het CNRS te Parijs
drs. C.G. Zaal is docent wiskunde aan de TU Delft

TI-83: veelzijdig en krachtig

De TI-83 is een veelzijdige grafische rekenmachine voor de tweede fase van het voortgezet onderwijs. Terecht is deze machine door het Freudenthal instituut gekozen als 'standaard' in het experiment voor de nieuwe bovenbouwprogramma's wiskunde (PROFI).

Ervaringen met de bekende TI-82 zijn in de TI-83 verwerkt; een eigentijdse machine dus! Zo is de **interface** sterk verbeterd en kan er volop worden gewerkt met **matrices.**
Ook de **grafische presentaties** en de mogelijkheden om **vergelijkingen** op te lossen zijn uitgebreid. Daarnaast kunnen uw leerlingen **gegevens uitwisselen** via de I/O-poort terwijl met TI-graph-link-software **aansluiting op een PC** mogelijk is.



Met name de veelzijdigheid van de TI-83 maakt, dat deze machine naast **wiskunde**, ook voor diverse andere vakken zeer geschikt is. Doordat de machine gekoppeld kan worden aan de CBL en CBR is hij uitermate geschikt voor **natuurkunde**.
Door de financiële functies is de machine een uitkomst bij **financiële** en **economische vakken**, maar ook bij vakken als **aardrijkskunde**, **biologie** en **informatica** kan de TI-83 zeer behulpzaam zijn.

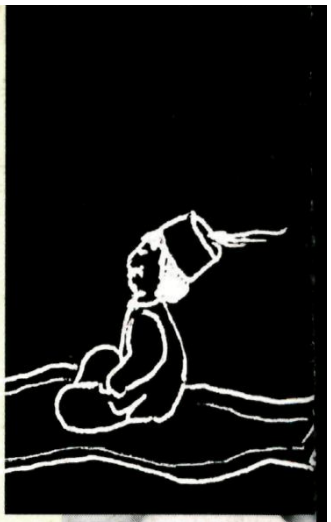
Als extra service naar scholen, is er persoonlijke begeleiding beschikbaar. Een ervaren wiskunde leraar komt desgewenst bij U langs op school. U kunt een afspraak met hem maken. Zijn telefoonnummer is: 026-33 90 383. Zijn E-mail adres is: pietersc@bart.nl

Wiskunde dichterbij

TI-83: dé machine voor de tweede fase!

Texas Instruments Nederland, Rutherfordweg 102, 3542 CG Utrecht, tel. 030-2417417

TEXAS INSTRUMENTS



Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras verschijnt zes keer per jaar en stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

- telefonisch: 0522-855175, • per fax: 0522-855176,
- via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/
- schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

Tarieven '98-'99

Een jaarabonnement op Pythagoras kost *f* 37,50. Losse nummers *f* 8,- of BF 160. Overige prijzen per jaar: Pythagoras België BF 950, Pythagoras buitenland *f* 52,50. Pythagoras/Archimedes *f* 67,50, Pythagoras/Archimedes België BF 1570, Pythagoras/Archimedes buitenland *f* 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen *(gewijzigd met ingang van 1-12-1998)*

Voor scholen zijn er *bulkabonnementen*. Prijs: f 25,- per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522-855175.

Leerlingabonnementen *(nieuw)*

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot en met 18 jaar) zijn er *leerlingabonnementen*. Prijs: *f* 30,- per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een *doorlopend* abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522-855175

Uitgever

Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

TU Delft

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam en de Technische Universiteit Delft.