PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN DECEMBER 1999

COLOFON

Uitgave
Pythagoras is een uitgave van
het Wiskundig Genootschap
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van septem-
ber tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail
pythagoras@wins.uva.nl

WWW
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij
Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras
gaan vergezeld van rondjes
die de moeilijkheidsgraad
aangeven.
Nul rondjes betekent:
geen enkele wiskundige
voorkennis vereist;
1 rondje ^{o}: voor iedereen van
af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je
kennis uit de vijfde of zesde
klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net
iets verder dan de middel-
bareschoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **prof. J.P. Buhler** is hoogleraar getaltheorie aan Reed College, Portland, Oregon,USA. **prof. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **ir. A.A.J. Lefeber** is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT. **R. van Luijk** is student wiskunde aan de UU. **drs. W.R. Oudshoorn** is AIO algebra en meetkunde aan de UG. **ir. S.M. van Rijnswou** is OIO computeralgebra aan de TUE. **ir. H.A.J. Smits** is docent wiskunde aan de J.S.G. Maimonides te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Weyzig** is studente informatica aan de UT. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.

Inhoud

2 - 3 Knippertjes

4 - 5 Het andere millenniumprobleem

6 Eerste ronde NWO

7 Tips

8 - 10 Pythagoras Olympiade

11 Wiskundige magie

12 - 13 Het schaakbord van koning Shirham

14 -15 Set

16-17 Set zelf maken

18 - 19 Set De spelregels

20 Set De bewijsregel

21 Set Annick's Grote Set tabel

22 - 23 Set Game, Set & Math

24 Problemen

25 Oplossingen nr. 1

26 - 27 Beeld & Bedrog

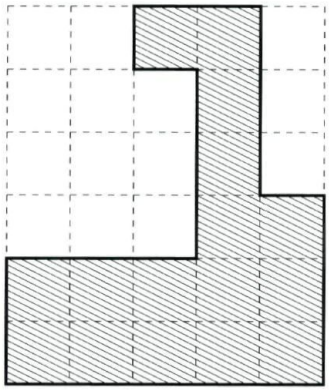
28 - 29 De kettinglijn

30 Poster

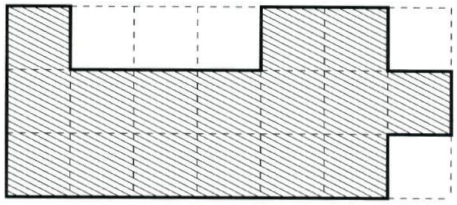
31 Oplossingen: Knippertjes
Uitslag prijsvraag
Erratum nr. 6

32 Agenda

Knip 1
Verdeel het gearceerde gebied in twee delen, die elkaars spiegelbeeld zijn.

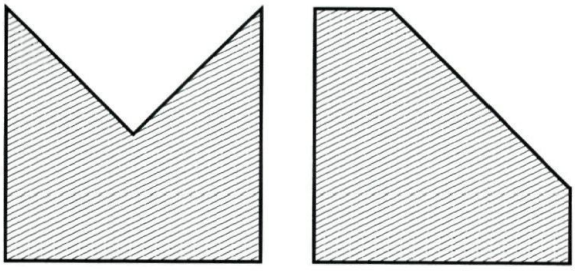


Knip 2
Verdeel het gearceerde gebied in vier gelijke delen.



Knippertjes

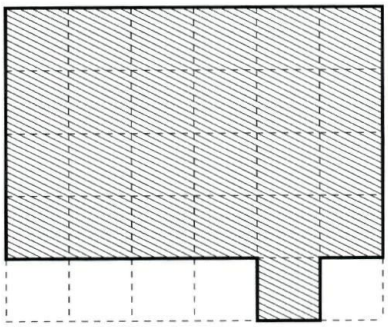
Knippertjes zijn eenvoudige vraagstukken die door iedereen opgelost kunnen worden, zonder enige wiskundige voorkennis. De oplossingen staan op pagina 31.

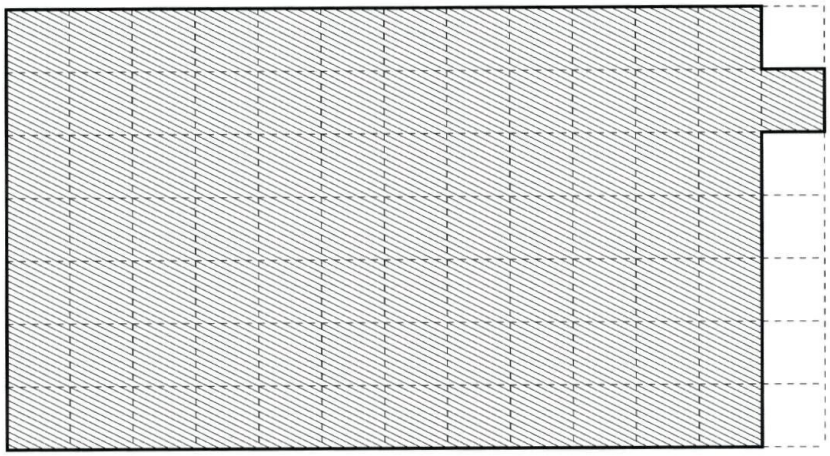


Knip 4
Verdeel de eerste figuur in twee delen, die op een andere manier samengevoegd de tweede figuur opleveren.

Knip 3

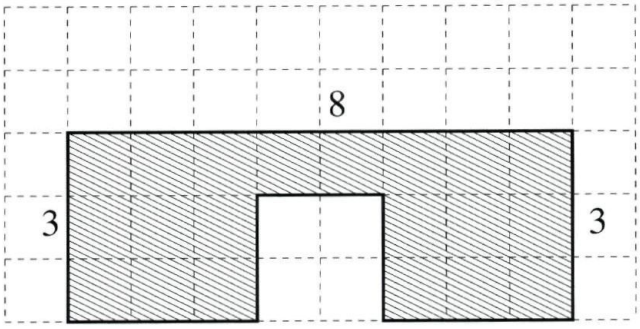
Een bepaalde tegelvorm kan gebruikt worden om elk van de twee volgende figuren te betegelen, zonder overlappingen te krijgen en zonder dat er gaten ontstaan.
Welke vorm heeft deze tegel?
N.B. De tegel mag worden omgedraaid.

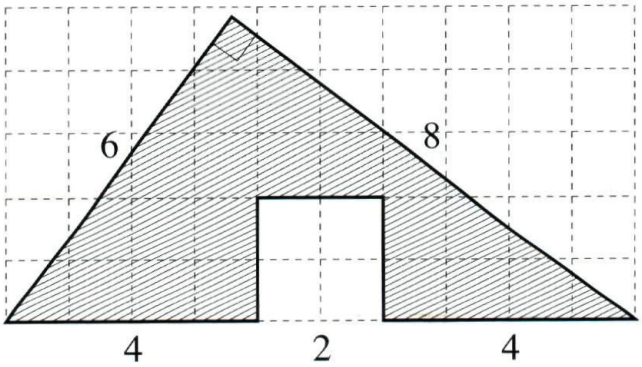




ooo Knipperdeknap

Bekijk de twee hiernaast afgebeelde figuren.
Verdeel de eerste in drie delen, en pas deze op een andere manier aan elkaar met de tweede figuur als resultaat.
(Met dank aan Michiel Vermeulen)





Het andere millenniumprobleem

Bruno Ernst

Vele computerprogramma's zijn niet geschikt om de jaartallen na 1999 gewoon door te tellen. Een kwestie van knoeiwerk van programmeurs, waar we nu een mouw aan moeten passen. Omdat we ons zo afhankelijk hebben gemaakt van de computer is dat een probleem.
Er is echter nog een ander millenniumprobleem, dat gelukkig geen consequenties heeft voor ons dagelijks leven. Het is de kwestie of op 1 januari 2000 het derde millennium begint. Wie zich wat verder verdiept in onze jaartelling zal tot de conclusie komen, dat het derde millennium pas begint op 1 januari 2001.

Het begin van onze jaartelling

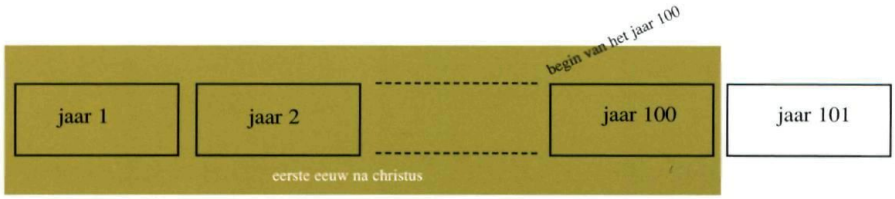
Als begin van onze jaartelling is de geboorte van Christus genomen. Dat is pas gebeurd in de zesde eeuw door Dionysos Exiguus (= de kleine).
Door in opdracht van de paus alle beschikbare archiefstukken te vergelijken kon hij het aantal jaren berekenen dat was verlopen sinds de geboorte van Christus. Later heeft men vastgesteld dat hij circa 5 jaar te weinig heeft geteld, maar dat doet er hier niet toe. Belangrijk voor ons probleem is, dat hij het geboortejaar van Christus het jaar 1 noemde.

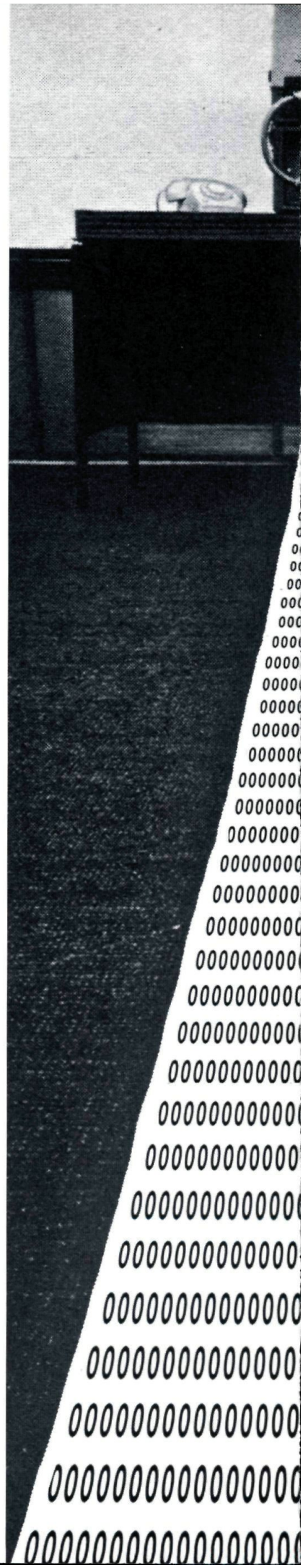
De jaartelling loopt daarom niet gelijk op met de leeftijd van Christus. Wij tellen leeftijden vanaf 0 jaar. Als een kind 1 jaar geleefd heeft zeggen wij dat het 1 jaar is. Toen Christus 1 jaar werd, begon het jaar 2 van onze jaartelling. En als Christus op aarde verder geleefd had, zou zijn 1999ste verjaardag dus vallen in het jaar 2000. Als we verder vaststellen dat een millennium een periode van precies 1000 jaar is, dan zou Christus in het jaar 2001 precies twee millennia oud zijn.

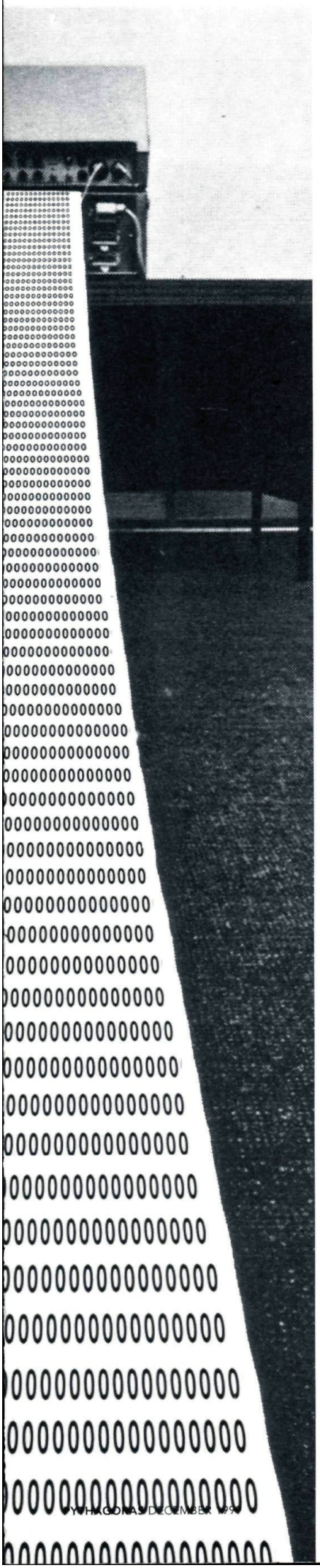
In de figuur onderaan deze pagina's wordt de jaartelling weergegeven zoals die sedert de zesde eeuw vastgelegd is. Hieruit is duidelijk, dat het derde millennium begint op 1 januari 2001. Kort samengevat berust dat op twee gegevens: (a) de afspraak dat onze jaartelling begint bij het jaar 1, (b) dat een millennium een periode is van precies 1000 jaar.

Uren, dagen en maanden

Uit ervaring weet ik dat het beginnen van onze jaartelling met het jaar 1 velen vreemd voorkomt. Toch is deze telling helemaal niet zo ongewoon.
Bij het benoemen van de dagen van de maanden beginnen we ook met een 1.







Als het bijvoorbeeld 31 augustus, 00.00 uur is geweest, begint meteen 1 september. Daar gebruiken we precies hetzelfde telsysteem als bij de jaartelling. We zijn er ook helemaal aan gewend om beide telsytemen door elkaar te gebruiken. In de zin: 'Op 1 september werd ik om 8.30 uur wakker' begint de tijdschaal met een 1 en die van de uren met 0.
0 September bestaat niet, maar 0.00 uur wel. Zo is er per definitie nooit een jaar 0 geweest.

Heilig Jaar 2000

Gek genoeg worden eeuwfeesten altijd gevierd bij het begin van de jaren die eindigen op 00. Zelfs in de katholieke kerk, de bakermat van onze jaartelling, heeft men dat altijd gedaan. Daar wordt een nieuwe eeuw ingeluid door een Heilig Jaar. De oudste vermelding daarvan vinden we in een rondschrijven van paus Bonifacius VIII gedateerd Anno Domini 1300. In dat document wordt ook gesproken over een 'eeuwenoude traditie'. Wij zullen ook overstroomd worden met evenementen op en rond 1 januari 2000. Dat is zo'n 'mooi' getal. Het echte begin van het derde millennium op 1 januari 2001 zal ongemerkt voorbij gaan.

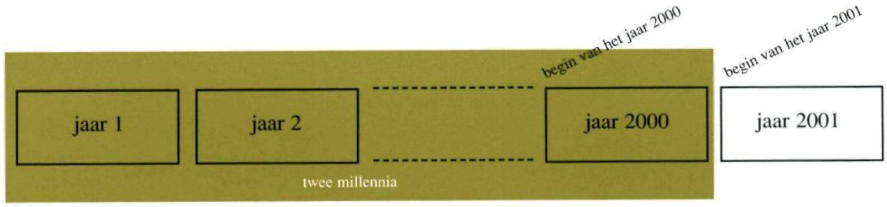
Het millenniumprobleem

Van alle kanten wordt ons voorgehouden dat het jaartal 2000 in computersystemen problemen schept. Nooit wordt duidelijk waar het probleem nu eigenlijk zit. Het millenniumplatform biedt duidelijkheid:

1. Het millenniumprobleem treedt op als een automatiseringssysteem (of chip) een jaaraanduiding heeft in twee cijfers in plaats van vier en de '00' voor het systeem niet herkenbaar is als '2000'. Daardoor kunnen storingen optreden, maar ook hele systemen vastlopen.
Niet alleen administratieve, financiele en logistieke processen kunnen hierdoor ontregeld raken, ook productieprocessen, pc's en huishoudelijke apparaten kunnen in de war raken.

2. Het millenniumprobleem doet zich ook voor als de programma's geen rekening houden met het jaar 2000 als schrikkeljaar. Eens per vier eeuwen is het eerste jaar van de nieuwe eeuw een schrikkeljaar. Niet in alle systemen en chips is de 29ste februari 2000 meegeprogrammeerd.

3. Een derde probleem kan ontstaan bij het oneigenlijk gebruik van datumvelden. Dat doet zich voor als de programmeur of de gebruiker een andere betekenis heeft toegekend aan de notatie '99', '0', '1999' of '2000'. Dat kan bijvoorbeeld gebeurd zijn om bestanden op te schonen, of als code om bijzondere programmainstructies te geven.



Deelname aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade staat open voor iedereen. Veel wiskunde hoef je daarvoor niet te kennen; met behulp van je gezonde verstand zijn alle opgaven goed te maken.

Eerste ronde NWO

Dion Gijswijt

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Er zijn twee ronden: de eerste ronde wordt op school georganiseerd. De beste leerlingen gaan door naar de tweede ronde, die medio september in Eindhoven gehouden wordt. Uit de winnaars van de tweede ronde wordt een team van zes leerlingen gekozen dat Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade mag vertegenwoordigen (zie het oktobernummer).

Eerste ronde

Met ingang van het jaar 2000 vindt de eerste ronde plaats op een andere datum dan tot op heden gebruikelijk is; de eerste ronde wordt verplaatst naar eind januari. De belangrijkste reden daarvoor is het feit dat de Kangoeroe wedstrijd (die in Europees verband eind maart wordt georganiseerd) en de eerste ronde van de Olympiade een tussenruimte van slechts enkele weken hadden. De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade zal daarom plaatsvinden op: **vrijdag 21 januari 2000.**
De eerste ronde heeft opgaven in drie verschillende niveaus (A, B en C).
Op deze pagina's zie je van elk niveau een voorbeeld.

Meer informatie

De secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Fred Bosman, kan verdere inlichtingen verstrekken. Telefoon: 026 3521294, fax: 026 3521356, email: fred.bosman@cito.nl.

A - opgave

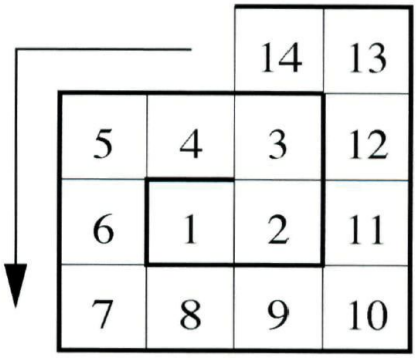
**Op een dobbelsteen staat de 6 tegenover de 1, de 5 tegenover de 2 en de 4 tegenover de 3.
Altijd is er een hoekpunt waar de ogentallen 1, 2 en 3 samenkomen.
De som van de drie ogentallen rond een hoekpunt is minimaal 6 (1 + 2 + 3) en maximaal 15 (4 + 5 + 6).
Welke gehele getallen tussen 6 en 15 komen niet voor als som van drie ogentallen bij een hoekpunt van een dobbelsteen?**

C - opgave

**Van een trap met 15 treden wordt elke trede blauw of geel geverfd, waarbij geen twee opeenvolgende treden beide blauw mogen zijn.
Op hoeveel manieren kan de trap geverfd worden?**

B - opgave

De tegels van een grote tegelvloer worden genummerd volgens een spiraalfiguur zoals in de tekening hieronder is aangegeven. De zijde van elke tegel is 1. Wat is de afstand van het midden van tegel nummer 1 tot het midden van tegel nummer 1999?



TIPS

Hoe kun je zorgen dat je hoog scoort bij de Wiskunde Olympiade?

Hier volgen 7 tips van de echte die-hards op dit gebied: Fokko van der Bult en Maxim Hendriks. Beiden hebben meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade.

TIP 1 Vul altijd iets in. Je krijgt geen strafpunten voor een fout antwoord.

TIP 2 Vorm met klasgenoten een team. Vraag je leraar om de opgaven van vorige jaren en start samen een training.

TIP 3 Laat je niet intimideren. Soms zijn de 'moeilijke' opgaven makkelijk en de 'makkelijke' juist moeilijk

TIP 4 Wie niet slim is....moet gewoon harder werken. Veel opgaven kun je oplossen door ijverig alle mogelijkheden af te gaan. Natuurlijk is er ook altijd een slimme, snelle manier.

TIP 5 Geef niet op. Als je er niet uitkomt neem dan gewoon even pauze en eet of drink wat. Goeie ideeën komen vaak pas als je aan iets anders denkt.

TIP 6 Concentreer je op wat je al wel weet in plaats van wat je nog niet weet. Maak een lijstje met daarin alles dat bij een opgave van pas kan komen.

TIP 7 Trek je niets aan van de volgorde van de vragen. Kies je eigen weg en maak eerst de opgaven die je aanspreken.

Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden en op de jaarlijkse prijzen van 250, 200 en 150 gulden.

Opgave 53
We definiëren een rij als volgt:
$A_1 = 1, A_2 = 1$ en voor n ≥ 3:

$$A_n = \frac{A_{n-2} \cdot A_{n-1}}{A_{n-1} + A_{n-2}}.$$

Bepaal A_{12}.

Opgave 54
Veronderstel dat de positieve, gehele getallen x, y, z en n $(n \geq 1)$ voldoen aan:

$$x^n + y^n = z^n.$$

Toon aan dat $x \geq n$, $y \geq n$ en $z \geq n$.

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 januari 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt! Hiernaast volgen de oplossingen van de opgaven uit het juninummer.

Veel succes!
Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.

Opgave 49
Het spel Hex wordt gespeeld op een driehoekig rooster van $n \times n$ punten in de vorm van een ruit. Om beurten leggen speler A en speler B een steen van hun eigen kleur op één van de nog lege punten. Beide spelers krijgen van tevoren twee tegenover elkaar liggende zijden van de ruit toegewezen. Een speler wint door een aaneengesloten pad van zijn eigen kleur te vormen dat zijn twee zijden verbindt.
In de volgende spelsituatie speelt speler A verticaal met rood en speler B horizontaal met zwart. Speler B is aan zet. Bewijs dat hij kan winnen.

```
      1 2 3 4 5 6 7
    A . . . . . . .
   B . . r . . . .
  C . . . . z . .
 D . . . r . . .
E . . r z r . .
F . . . . . . .
G . . . . . z .
```

Oplossing. We zullen laten zien dat speler B kan winnen door een zwarte steen op F4 te zetten. In de oplossing van opgave 47 hebben we al gezien dat het voldoende is om aan te tonen dat B een zwarte verbinding tussen de linker- en de rechterkant kan afdwingen. Hiertoe verdelen we het bord in drie delen, namelijk I: de punten F5 en G5, het deel II: de kolommen 1, 2, 3 en 4 en de rest, deel III. Als rood een steen in deel I zet, kan zwart een steen op het andere punt van I zetten, zodat de stenen F4 en G6 verbonden worden. We zullen nu laten zien dat binnen deel II zwart op rode zetten zó kan reageren dat de stenen E4 en F4 verbonden worden met de linkerkant. Stel dat rood niet op A1, B1, B2, C1, C2, C3, D1, D2 of D3 speelt. Dan speelt zwart *z*:D3 en hebben we een deelsituatie die we al gezien hebben in opgave 47. Dus kan D3 verbonden worden met de linkerkant. Als rood niet speelt op D1, E1, E2, F1, F2, F3, G1, G2 of G3, dan speelt zwart *z*:F3 die op dezelfde manier verbonden kan worden met de linkerkant. De enige eventuele redding voor rood is dus een punt dat voorkomt in beide genoemde series, dus *r*:D1. Zwart speelt nu z:C2, wat *r*:D3 afdwingt, en daarna z:F3. Als rood nu niet speelt op E1, E2 of F2, dwingt zwart een verbinding af door *z*:E1. Speelt rood niet op F1, F2, G1, G2 of *G3*, dan dwingt zwart een verbinding af door *z*:G2. De enige eventuele redding voor rood is dus weer een punt in beide series, dus *r*:F2, waarna zwart met de afgedwongen reeks *z*:E2, *r*:E1, *z*:D2, *r*:C1, *z*:B1 toch nog een verbinding maakt.Tenslotte laten we zien dat binnen deel III zwart op rode zetten zo kan reageren dat G6 verbonden wordt met rechterkant. Als rood niet op G7 speelt, dan doet zwart dat en klaar. Zo dwingt zwart de reeks *r*:G7, *z*:F6, *r*:F7, *z*:E6, *r*:E7 af. Door nu te spelen z:C6 verzekert zwart zich van een verbinding doordat hij altijd een van de punten D5 en D6 kan bezetten en ook een van de punten C7 en D7. Aangezien de delen I, II en III elkaar niet overlappen, kan zwart een verbinding afdwingen tussen de linker- en de rechterkant door op elke rode zet met een zet in hetzelfde deel te reageren op de zojuist beschreven manier. Hiermee zal de linkerkant verbonden worden met F4, die verbonden wordt met G6, welke verbonden wordt met de rechterkant.

Deze opgave werd opgelost door: Peter Bruin, **Groene Hart Lyceum** te Alphen a/d Rijn, Gerben Kok te Rijswijk en Herbert Beltman te Markelo. De boekenbon gaat naar Peter Bruin.

Opgave 50
Laat zien dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2$$
$$=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Oplossing. We kunnen de eerste term – een beetje omslachtig – uitschrijven als

$$1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^2$$
$$+2\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$$

Op dezelfde manier behandelen we de tweede term:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right).$$

Als we dit voor alle termen doen en de resultaten bij elkaar optellen, dan krijgen we:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$+2\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Tenslotte kunnen we de eerste term tweemaal bij de tweede stoppen. Dat geeft:

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$+2\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

en dit is precies gelijk aan de gevraagde uitdrukking

$$2n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

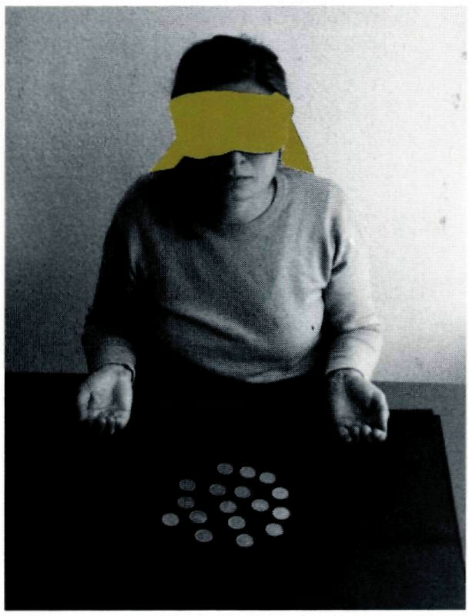
Deze opgave werd opgelost door: Jim Kasteel te Arnhem, Tim Wouters van de **VKO Opwijk**, Peter Deleu te Hulste (België), Herbert Beltman te Markelo en H. Verdonk te 's Gravenhage. De boekenbon gaat naar Tim Wouters.

Winnaars laddercompetitie
De eindstand van de laddercompetitie van jaargang 1998-1999 is bekend. We vermelden hier de winnaars. De volledige eindstand kun je vinden op de homepage.
Op een gedeelde eerste plaats eindigden Gertjan Kok van het **Sint-Maartenscollege** te Voorburg, Herbert Beltman van **De Waerdenborg** te Holten en Jan Tuitman van het **Preadinus Gymnasium** te Groningen (allemaal 10 opgaven goed). Zij ontvangen boekenbonnen ter waarde van 200 gulden. Alle winnaars hartelijk gefeliciteerd!

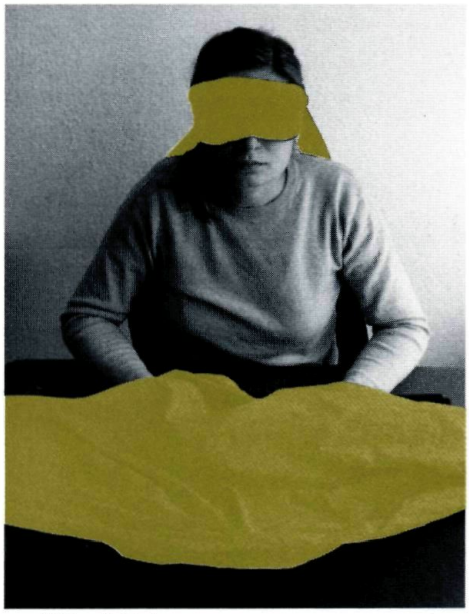
Wiskundige magie

Harry Smits

Op het podium staat geblinddoekt een wiskundige magiër. Naast hem een tafel met daarop flink wat muntstukken. Alles door elkaar, kwartjes, guldens, stuivers en dubbeltjes (het aantal doet er niet toe). Iemand uit het publiek komt naar voren, husselt de munten door elkaar en telt het aantal geldstukken dat met kop boven ligt. Dat blijken er bijvoorbeeld zeven te zijn. 'Zeven kop, de rest munt,' krijgt de magiër te horen.



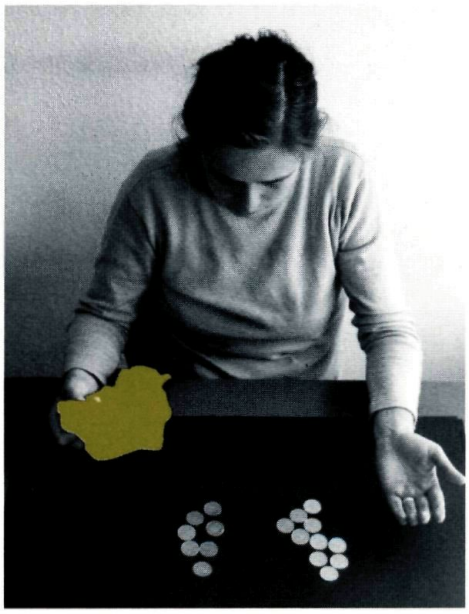
1: Er liggen17 munten waarvan 7 met kop boven



2: 'Sim sala bim'

Vervolgens drapeert een charmante assistente een zijden doek over de tafel met geld. Nog steeds geblinddoekt zet de magiër zich achter de tafel. Hij kondigt aan dat hij twee stapeltjes zal maken, één links, één rechts, met in elke stapel precies evenveel munten met kop boven. Hij gaat met zijn armen onder de doek, mompelt magische formules en frutselt aan het geld.

Na enige tijd trekt hij zijn handen terug en kondigt aan dat het gelukt is. De doek wordt weggehaald en de koppen worden geteld. Wonder o wonder ... links en rechts liggen inderdaad precies evenveel koppen!
De vraag is: Kun jij dit ook? Weet jij hoe een wiskundige magiër dit zou doen? N.B. Bij deze truc worden de munten niet bevoeld – je kunt de truc uitvoeren zonder van elke munt te weten of kop of munt boven ligt. De oplossing van dit raadsel staat op de homepage van Pythagoras.



3: twee stapels, links en rechts 5 koppen

Het schaakbord van

Dion Gijswijt

De Indiase koning Shirham wilde volgens een oud verhaal de uitvinder van het schaakbord, Sissa ben Dahir, rijkelijk belonen voor zijn uitzonderlijke prestatie. Op de vraag van de koning welke beloning hij voor zijn uitvinding zou wensen, antwoordde de slimme Sissa: ''Majesteit, geef me één graankorrel om op het eerste vakje te leggen, twee om op het tweede vakje te leggen, vier om op het derde vakje te leggen, acht om op het vierde vakje te leggen, en laat mij zo, O koning, elk van de vierenzestig vakjes van het schaakbord bedekken." De koning was stomverbaasd over zo'n bescheiden verzoek, niet meer dan een handvol rijst voor deze geweldige uitvinding!

Wat is de beloning?
Was Sissa echt zo bescheiden als de koning verkondigde? Als de koning zijn hofwiskundige er bij zou hebben gehaald, zou hij waarschijnlijk niet meer zo blij zijn geweest met het voorstel van Sissa.
Laten we eens nagaan om hoeveel rijst Sissa vroeg. Op het eerste vakje ligt slechts één rijstkorrel. Het aantal rijstkorrels op elk volgende vakje is steeds het dubbele van het aantal op het vorige vakje. In totaal vraagt Sissa om $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$ korrels rijst. Je mag zelf nagaan dat dit gelijk is aan $2^{64} - 1$, of uitgeschreven: 18.446.744.073.709.551.615 rijstkorrels. Om een idee van deze hoeveelheid rijst te krijgen, nemen we aan dat er 50 rijstkorrels in een kubieke centimeter gaan. We hebben dus te maken met een berg van meer dan 3×10^{17} kubieke centimeter, ofwel driehonderdmiljard kubieke meter rijst. Hiermee zouden we heel België en Nederland met een meters dikke laag rijst kunnen bedekken. Misschien was Sissa toch niet zo bescheiden.

Opgave 1
Als Sissa alleen rijst zou hebben gevraagd voor de zwarte velden van het schaakbord: 1 rijstkorrel voor het eerste zwarte veld, 2 voor het tweede zwarte veld, 4 voor het derde en zo verder, zou hij dan een redelijke beloning hebben geëist? Is het aantal rijstkorrels dan meer of minder dan het aantal seconden in een mensenleven (ongeveer 75,2 jaar)?

Opgave 2
Pak een flink vel papier. Vouw het papier dubbel en herhaal dat in totaal tien keer. Probeer eventueel een groter of een dunner vel papier. Kun je je resultaten verklaren?

Machtsverheffen
In het verhaal van Sissa verdubbelt het aantal korrels rijst bij ieder volgende vakje van het schaakbord en je hebt gezien dat de aantallen op die manier razend snel groeien. Al gauw wordt het ondoenlijk om de getallen voluit op te schrijven. Veel handiger is het om de getallen als macht te noteren:
$2 \times 2 \times 2 \times 2$ wordt afgekort tot 2^4 en
$2 \times 2 \times ... \times 2$ (64 keer) tot 2^{64}.

koning Shirham

Rekenregels
Zoals je weet, kun je met machten rekenen door de volgende drie rekenregels te gebruiken:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $a^n \times b^n = (ab)^n$

Deze regels kun je bijvoorbeeld gebruiken om te berekenen welk van de twee getallen groter is, 3^{800} of 8^{300}.
Schrijf het eerste getal maar als $3^{2 \times 400} = (3^2)^{400} = 9^{400}$. Dit is groter dan 9^{300} en dat is weer groter dan 8^{300}.
Dus het eerste getal is de grootste van de twee.

Opgave 3
Wat is groter, 2^{30} of 3^{20}?

Opgave 4
Zet de volgende zes getallen op volgorde van klein naar groot:
$2^{(3^4)}$, $2^{(4^3)}$, $3^{(2^4)}$, $3^{(4^2)}$, $4^{(2^3)}$, $4^{(3^2)}$.

Haakjes zetten
Het is je misschien wel opgevallen dat het bij torentjes getallen, zoals die uit opgave 4, veel uitmaakt waar je de haakjes zet. Zo is $2^{(3^4)}$ gelijk aan 2^{81}, maar $(2^3)^4$ is gelijk aan 2^{12}. Als er in zo'n torentje geen haakjes worden gezet, wordt daar altijd mee bedoeld dat je van rechts naar links werkt, dus
$a^{b^{c^d}} = a^{(b^{(c^d)})}$.

Opgave 5
Zet de volgende getallen op volgorde van groot naar klein:
$((3^3)^3)^3$, $(3^3)^{(3^3)}$, $(3^{(3^3)})^3$, $3^{((3^3)^3)}$, $3^{(3^{(3^3)})}$.

Opgave 6
Wat is het grootste getal dat je met negen negens kunt maken als je mag optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen en haakjes zetten?

o Het aantal cijfers
Als je de getallen uit opgave 5 probeert uit te rekenen, dan zal je merken dat je deze vaak niet meer voluit kunt opschrijven. Toch kun je soms nog wel uitrekenen hoeveel cijfers zo'n getal heeft en wat de eerste cijfers van dat getal zijn. Als voorbeeld nemen we het getal 7^{7^7}, een torentje van drie zevens. We berekenen hiervan de logaritme:

$$\begin{aligned}\log(7^{7^7}) &= 7^7 \times \log(7) \\ &= 695974{,}5752...\end{aligned}$$

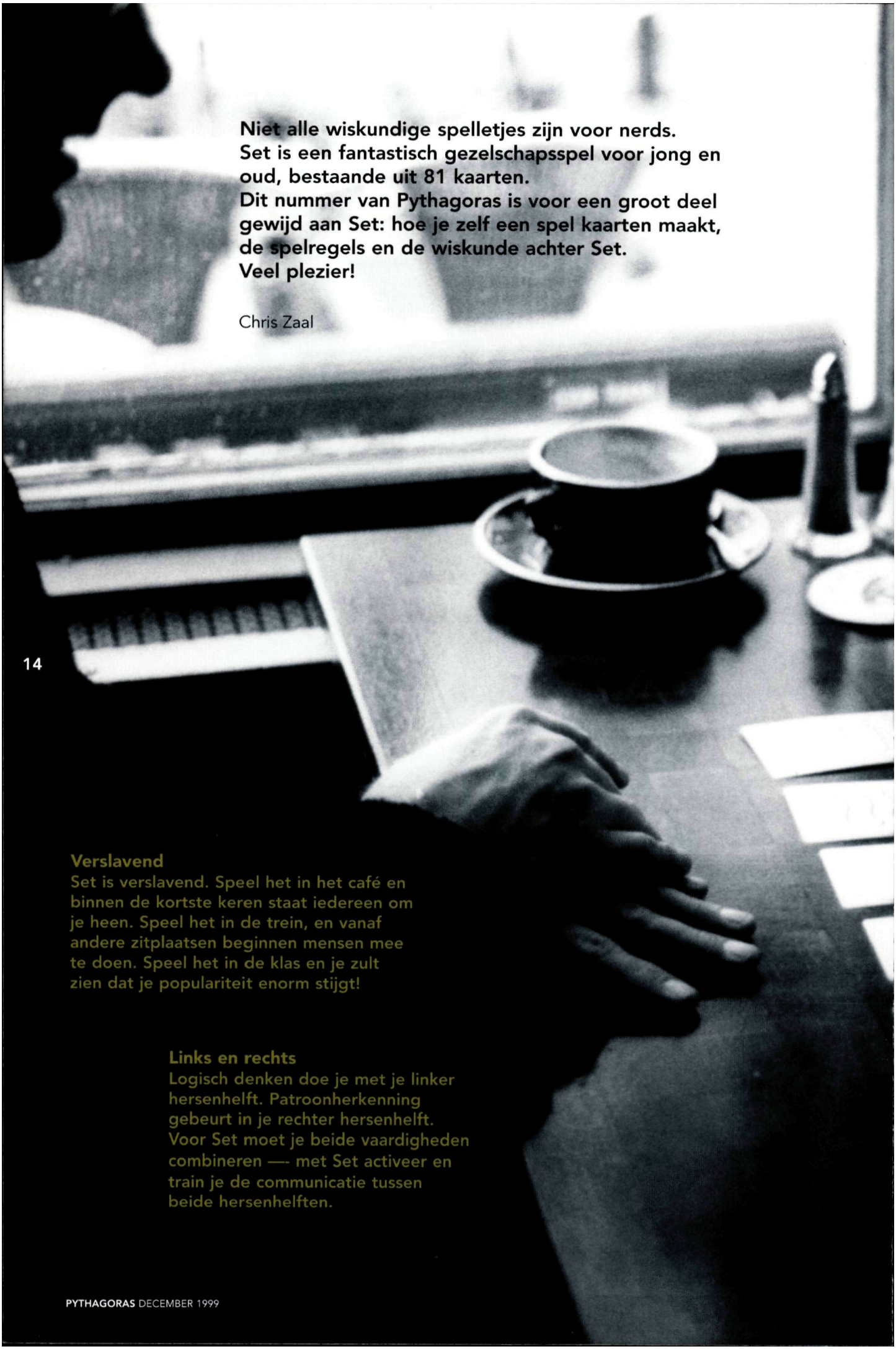
We weten nu dat

$$\begin{aligned}7^{7^7} &= 10^{695.974{,}5752...} \\ &= 10^{695.974} \times 10^{0{,}5752...} \\ &= 10^{695.974} \times 3{,}76...\end{aligned}$$

Het getal heeft dus 695.975 cijfers en de eerste twee cijfers zijn 3 en 7.

Opgave 7
Bereken het aantal cijfers van het grootste bekende priemgetal:
$2^{6972593} - 1$.
Bereken ook het eerste cijfer.
Kun je ook het laatste cijfer bepalen?

Meer informatie
David Wells, Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen, Bert Bakker, ISBN 90351 05273.
http://www.nrob.com/largenum.html
http://www.mersenne.org/prime.htm



Niet alle wiskundige spelletjes zijn voor nerds. Set is een fantastisch gezelschapsspel voor jong en oud, bestaande uit 81 kaarten. Dit nummer van Pythagoras is voor een groot deel gewijd aan Set: hoe je zelf een spel kaarten maakt, de spelregels en de wiskunde achter Set. Veel plezier!

Chris Zaal

Verslavend

Set is verslavend. Speel het in het café en binnen de kortste keren staat iedereen om je heen. Speel het in de trein, en vanaf andere zitplaatsen beginnen mensen mee te doen. Speel het in de klas en je zult zien dat je populariteit enorm stijgt!

Links en rechts

Logisch denken doe je met je linker hersenhelft. Patroonherkenning gebeurt in je rechter hersenhelft. Voor Set moet je beide vaardigheden combineren — met Set activeer en train je de communicatie tussen beide hersenhelften.

Set

Meisjes zijn beter
Als je Set speelt, valt op dat meisjes vaak beter zijn dan jongens. Dat is bijzonder voor een spel dat een sterk wiskundig karakter heeft. Onderzoek dit zelf en laat ons weten of dit klopt.
We zijn benieuwd.

Internet
www.setgame.com
is de homepage van Set. Daar vind je (in het Engels) achtergrondinformatie over het spel: de spelregels, de historie, interactieve puzzels. Set bestellen kan daar niet.

Meer informatie
www.setgame.com/set/
(alles over Set)
www.setgame.com/stores/thelist.htm
(lijst van winkels in Amerika)
www.setgame.com/puzzle/set.htm
(interactieve Set-puzzel)
www.setgame.com/company/productshirt.htm(Set T-shirt)
www.nevergrowup.com (bestellen via Internet)
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/Set/
(Set-ontwerpen om in te kleuren of te kopiëren)

Set zelf maken

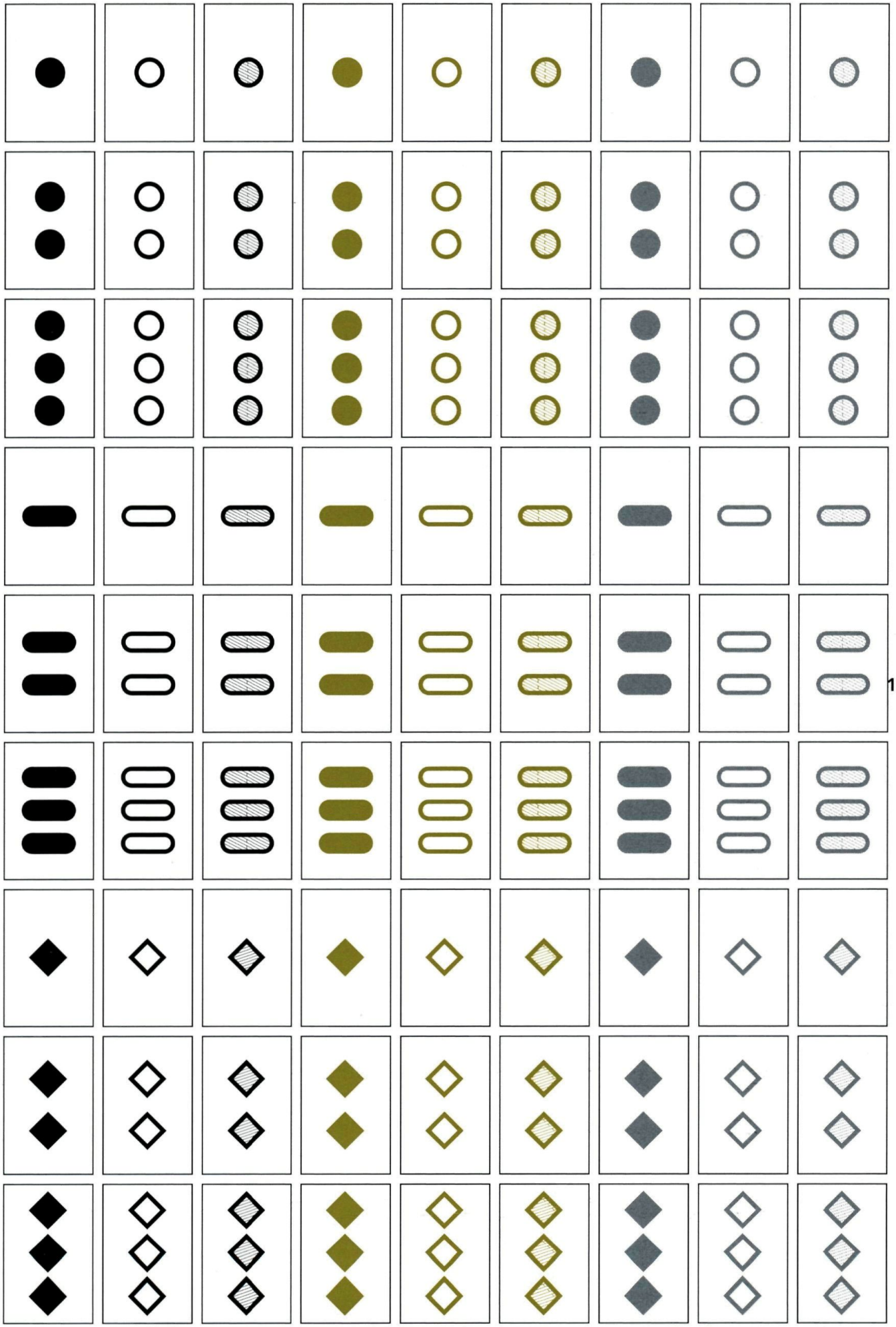
Set is een kaartspel afkomstig uit de Verenigde Staten. In Nederland is het niet te koop. Hoe kom je nu aan een spel kaarten? Je kunt Set bijvoorbeeld laten meenemen door iemand die naar de U.S.A. gaat (zie www.setgame.com voor een lijst met winkels). Via Internet kun je Set rechtstreeks bestellen (www.nevergrowup.com). Maar een spel kaarten is ook makkelijk zelf te fabriceren.

Zelf een spel Set-kaarten maken kan op verschillende manieren: met de hand, met de computer of met behulp van een kopieermachine. We gaan uitleggen hoe dat in zijn werk gaat.
Op de pagina hiernaast zie je een compleet spel kaarten, dat we zelf ontworpen hebben. In de patroontjes op de kaart kun je vier eigenschappen herkennen: aantal, kleur, vorm en invulling.
Elk van de eigenschappen komt voor in drie soorten. Er zijn drie aantallen (1, 2 en 3), drie kleuren (hier: zwart, groen en grijs), drie vormen (hier: rond, langwerpig en ruit) en drie invullingen: dicht, open en gestreept. Alle mogelijke combinaties komen voor. Vandaar het aantal kaarten: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ stuks.

Zelf ontwerpen
De afgebeelde kaarten zijn op een systematische manier geordend.
We maken hiervan zelf een spel door 3×3 kaarten te plaatsen op 1 vel A4-papier. Je hebt dan negen vellen papier nodig van een wat zwaardere kwaliteit. Papier met een gekleurde achterkant is heel mooi. Voor je eigen ontwerp bedenk je drie verschillende vormen. Een voorbeeld zie je rechts. Je ontwerp teken je volgens het schema op de vellen papier. Dat kan met hand, met een mal of met een tekenprogramma op de computer.
Ook een kopieermachine kan handig zijn: dan hoef je maar één ontwerp te maken dat je een aantal keer kopieert. Vervolgens breng je de kleuren aan, rekening houdend met de drie invullingen (open, dicht, gestreept).
Dat kan met de hand (gebruik dikke viltstiften), met de computer of met een kleurenkopieermachine (kopieer één ontwerp in drie verschillende kleuren).
Nu ben je klaar: snij de negen vellen twee keer in drieën. Je krijgt 81 kaarten waarmee je Set kunt spelen.
Hoe dat moet lees je op de volgende bladzijden.

Lezersservice
Op de homepage van Pythagoras staat een kant-en-klaar ontwerp: drie A4-tjes om met de hand in te kleuren, drie andere A4-tjes om in drie verschillende kleuren te kopiëren. Heb je geen Internet, stuur dan even een briefje naar het redactiesecretariaat met je voorkeur.

Waar koop ik Set?
In Nederland is Set niet te koop.
Het spel is ook niet te koop op de homepage van de makers: www.setgame.com. Wel kun je op deze homepage een lijst van Internetshops vinden waar je Set kunt bestellen. Een goed adres is: **www.nevergrowup.com**
Om via Internet te bestellen heb een credit-cardnummer nodig. De prijs is 12 dollar, exclusief BTW en verzendkosten. Dat lijkt veel, maar iedereen die met Set kennis gemaakt heeft, heeft dat bedrag er graag voor over!



De spelregels

Goed, je hebt je eigen spel Set-kaarten, 81 stuks. Hoe gaat nu het spel in zijn werk?

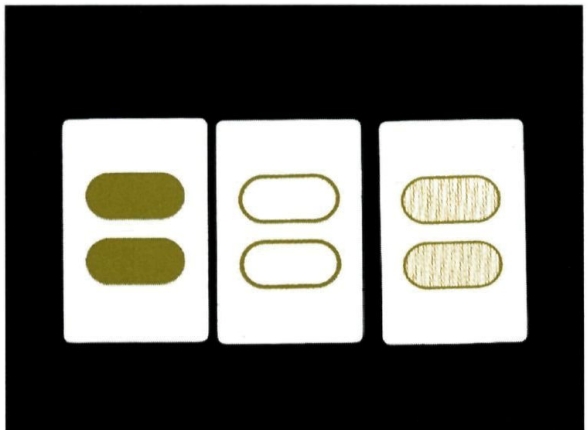


foto 2: een Set met 1 eigenschap verschillend, 3 gelijk

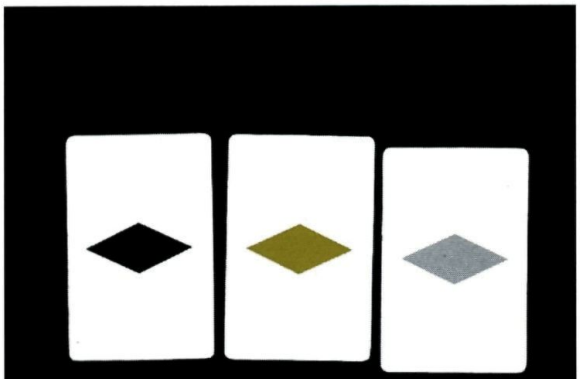


foto 1: een voorbeeld van een 'Set'

Om Set te kunnen spelen, moet je eerst weten wat een Set is. Een 'Set' is een groepje van drie kaarten die bij elkaar horen. Daarvoor is er een hele precieze regel die nogal ingewikkeld klinkt als je hem voor het eerst hoort. Daarom geven we eerst een voorbeeld. Wanneer horen drie kaarten bij elkaar? Als de patronen overeenkomen. Bijvoorbeeld foto 1. We zien op elke kaart één en dezelfde vorm, vol ingekleurd. Alleen de kleuren verschillen, en álle kleuren komen voor. Dit is een voorbeeld van een Set.

De definitie

In het voorbeeld op foto 1 zijn drie eigenschappen hetzelfde (aantal, vorm en invulling) en één eigenschap (kleur) komt voor in alle drie mogelijkheden. Dus: drie eigenschappen zijn gelijk, één eigenschap compleet verschillend. Wat hebben alle eigenschappen nu gemeen? Ze zijn mooi (symmetrisch) over de drie kaarten verdeeld. Dit is ook de officiële definitie:

Drie kaarten vormen een 'Set' als elke eigenschap symmetrisch verdeeld is over de drie kaarten: elke eigenschap is op de drie kaarten óf hetzelfde, óf compleet verschillend.

De symmetrie-regel moet je voor elk van de vier eigenschappen afzonderlijk controleren. **Een Set kan drie, twee, één of nul eigenschappen gelijk hebben. Zie foto 2 t/m 5.**

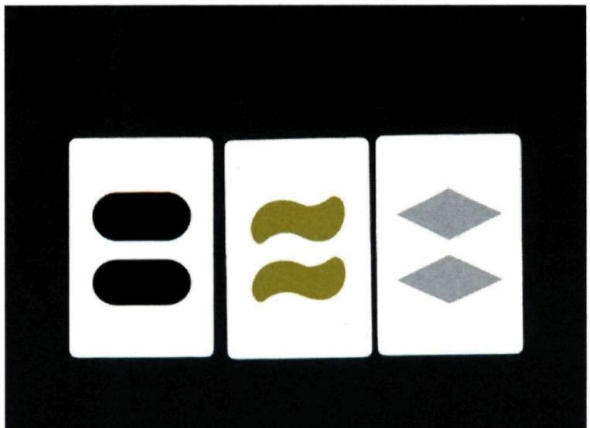


foto 3: een Set met twee eigenschappen verschillend

Aan de slag
Set spelen is het leukst met meerdere personen. Verzamel daarom een paar mensen rond een tafel, het aantal doet er niet toe. Er is één spelleider, die iedereen uitlegt wat een Set is. Daarna kan het spel beginnen. De spelleider schudt het pak kaarten grondig en legt twaalf kaarten neer in een rechthoek van drie bij vier kaarten. Zie foto 6.
De bedoeling van het spel is het aanwijzen van drie kaarten die samen een Set vormen. Iemand die een Set aanwijst, mag deze kaarten houden. Deze drie kaarten worden weggehaald en daarvoor in de plaats komen drie nieuwe kaarten. Zo gaat het spel door. Uitgebreidere spelregels vind je hieronder. Veel plezier!

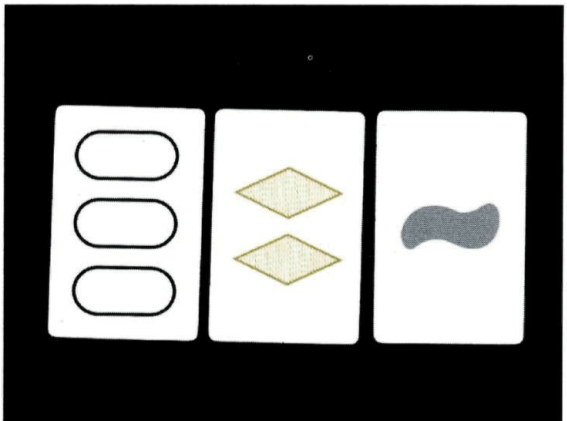


foto 5: een Set met vier eigenschappen verschillend

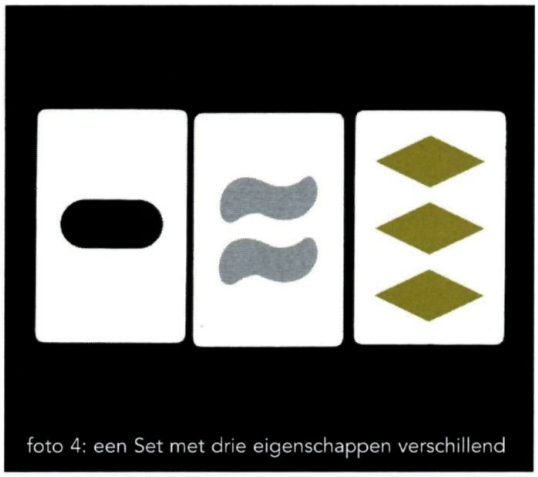


foto 4: een Set met drie eigenschappen verschillend

5. Als in de kaarten op tafel niemand een Set ziet, vult de spelleider de kaarten aan tot twaalf. Valt er in twaalf kaarten geen Set te ontdekken, dan legt de spelleider drie extra kaarten neer, enzovoort.
6. Het spel is afgelopen als alle kaarten op zijn en er in de kaarten op tafel geen Set meer zit. Winnaar is degene met de meeste kaarten.
7. (naar keuze) Voor een bewijs dat er in twaalf of meer kaarten geen Set zit kunnen bonuspunten verdiend worden (1 punt = 3 kaarten). Zie ook pagina 20.

Spelregels
1. De spelleider legt 12 kaarten op tafel.
2. Iemand die een Set ziet, roept "Set!"
3. De spelleider bepaalt wie als eerste geroepen heeft. Deze speler mag dan de drie kaarten aanwijzen die volgens hem of haar een Set vormen.
4. De overige spelers controleren of deze drie kaarten inderdaad een Set vormen. Pas als dit zo is, mogen de drie kaarten weggehaald worden. Het spel gaat verder met de overgebleven kaarten. Vormen de aangewezen kaarten geen Set, dan blijven de kaarten liggen en moet de speler een beurt overslaan.

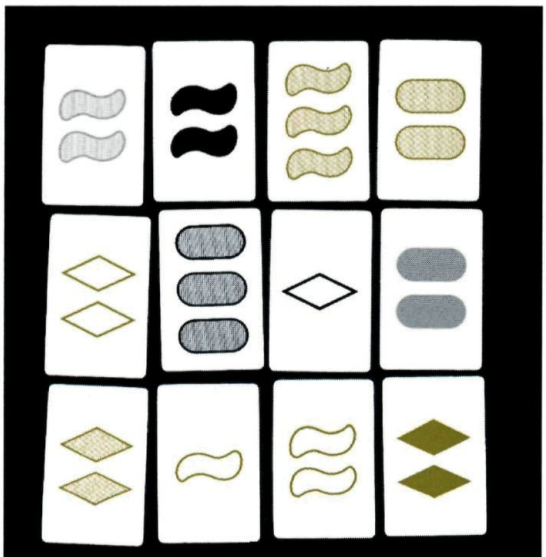


foto 6: twaalf kaarten met maar liefst zes sets. Zie jij ze?

De bewijsregel

Als je al wat langer Set speelt, weet je dat er in twaalf kaarten bijna altijd een Set zit. De kans daarop is gelijk aan 33/34. Gemiddeld genomen bevindt zich dus in 33 van de 34 gevallen in twaalf kaarten een Set. Als twaalf kaarten geen Set bevatten, dan kun je met de extra bewijsregel daar punten voor krijgen. Maar hoe toon je zoiets aan?

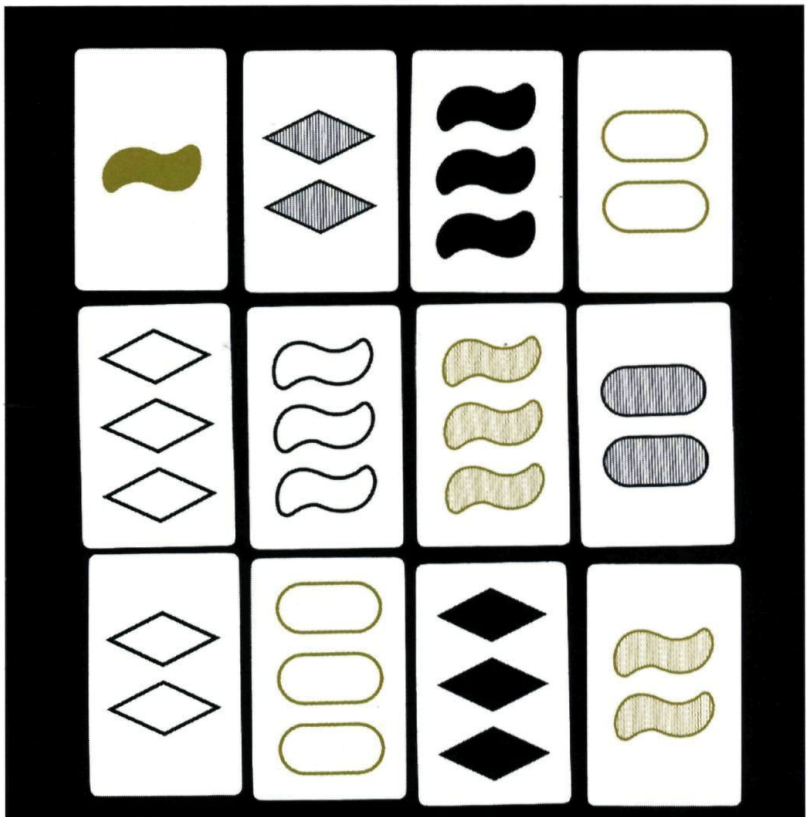


foto 6: twaalf kaarten zonder een Set. Kun jij dit bewijzen?

Hoe weet je nu zeker dat er in twaalf kaarten geen 'Set' voorkomt? Dat kan door dat te bewijzen, met behulp van een sluitende logische redenering. Eén manier om te bewijzen dat er in twaalf kaarten geen Set zit, is het nagaan van alle mogelijkheden. Je kunt bijvoorbeeld alle drietallen opsommen die in twaalf kaarten voorkomen. Elk drietal controleer je dan afzonderlijk. Maar in twaalf kaarten zijn er erg veel drietallen, namelijk $\binom{12}{3} = 220$. Je wint tijd door iets op te merken dat elke ervaren Set-speler weet. Namelijk dat bij elk tweetal kaarten één unieke derde kaart hoort, die samen met dat tweetal een Set vormt. Om alle 'Sets' in twaalf kaarten te vinden, is het daarom voldoende alle tweetallen te controleren. Dat zijn er nog steeds veel, namelijk $\binom{12}{2} = 66$.

Korter

Vaak is er een kortere manier om te bewijzen dat er geen Set is, met name als er met de twaalf kaarten iets bijzonders aan de hand is. We geven een voorbeeld. Bekijk de twaalf kaarten hierboven. Met een van de eigenschappen is iets bijzonders aan de hand: er zijn namelijk geen grijze kaarten. Dat betekent dat de drie kaarten van een Set allemaal zwart moeten zijn, óf allemaal groen. Als er dus een Set zou zijn, dan bevindt die zich in de zwarte kaarten, óf in de groene. Er zijn zeven zwarte kaarten. Daarin zit geen Set (kijk naar de aantallen). De vijf andere kaarten zijn groen. Ook daarin bevindt zich geen Set (kijk naar de vormen). Conclusie: we hebben bewezen dat er in de afgebeelde twaalf kaarten geen Set voorkomt.

Annick's Grote Set Tabel

Twee jaar geleden maakte Annick Weyzig kennis met Set. Haar broer kwam uit het buitenland terug met enthousiaste verhalen over dit kaartspel. Al gauw had hij haar aangestoken met dit spel dat eigenlijk heel eenvoudig is, maar dat heel wat wiskundige mysteries bevat.

Tijdens het spelen van Set kun je je allerlei dingen gaan afvragen, bijvoorbeeld hoeveel kaarten je maximaal op tafel kunt leggen zonder dat er een 'Set' in zit, of hoe groot de kans is dat er in twaalf kaarten geen 'Set' zit. Als je genoeg hebt van alle middelbareschool kansrekening met dobbelstenen, fruitautomaten en knikkers in vazen, kun je hier zeker nog even mee verder.

° De Grote Set Tabel

In haar eindexamenjaar begon Annick Weyzig tijdens de wiskundeles met de hand een lijst te maken met voor alle mogelijke aantallen kaarten (1 t/m 81) het minimale en maximale aantal Sets. Helaas werd dit in het midden van de lijst te moeilijk.Deze lijst is dus niet af. Ook weet Annick niet zeker of de gevonden getallen kloppen. Maar goed, ze is een eind gekomen. Wie kan Annick's resutaten verifiëren?

krt	min	max
1	0	0
2	0	0
3	0	1
4	0	1
5	0	2
6	0	3
7	0	5
8	0	8
9	0	12
10	0	12
11	0	13
12	0	14
13	0	16
14	0	19
15	0	23
16	0	26
17	0	30
18	0	36
19	0	41
20	0	47
21	3	54
22	6	62
23	9	71
24	12	81
25	15	92
26	18	104
27	21	117
28	24	117
29		118
30		119
31		121
32		124
33		128
34		131
35		134
36		140
37		146
38		152
39		159
40		167

krt	min	max
41		176
42		186
43		197
44		209
45		222
46		231
47		241
48		252
49		264
50		276
51	196	289
52	208	303
53	221	318
54	234	334
55	261	351
56	288	369
57	315	388
58	342	406
59	369	425
60	396	447
61	423	470
62	450	491
63	477	513
64	506	536
65	534	560
66	562	585
67	592	611
68	622	638
69	652	666
70	682	695
71	713	725
72	744	756
73	780	788
74	816	821
75	852	855
76	888	890
77	925	926
78	962	963
79	1001	1001
80	1040	1040
81	1080	1080

Ik zie nog geen

heb al twee kaa

Game, Set & Math

Chris Zaal

Set is niet alleen een leuk spel, de 81 kaarten herbergen ook tal van wiskundige raadsels. We bespreken hier slechts een van de vele vragen: hoeveel Sets zitten er in het complete spel. Om dit te bereke-nen, moeten we iets gebruiken dat iedere ervaren Set-speler weet:

Opmerking 1. *Bij ieder tweetal kaarten is er precies één andere kaart, die samen met deze twee een Set vormt.*

Ga maar na: als twee kaarten hetzelfde aantal hebben, moet de derde kaart – wil deze met de eerste twee een Set vormen – ook dit aantal hebben; hebben de twee kaarten een verschillend aantal (bijvoor-beeld 1 en 2), dan heeft de derde kaart het overgebleven aantal (in dit geval 3). Deze redenering kun je ook ophangen voor elk van de andere eigenschappen. Zodoende zie je dat je uitgaande van elke twee kaarten alle eigenschappen kunt 'berekenen' van één unieke derde kaart, die met de eerste twee een Set vormt.

Eén kaart vast

Neem nu één kaart vast, bijvoorbeeld de kaart met één groene, dichte ruit. Hoeveel verschillende Sets zijn er met deze kaart er in? Uit de overige 80 kaarten pakken we een willekeurige tweede kaart. Volgens opmerking 1 is er dan precies één derde kaart, die de drie kaarten tot een Set maakt. Bovendien zegt opmerking 1 ook dat deze tweede kaart de kaart is die bij de derde kaart hoort. In de overige 80 kaarten heb je dus steeds groepjes van twee kaarten, die samen met de vast gekozen kaart een Set vormen. Er zijn daarom $80/2 = 40$ verschillende Sets die de vaste kaart bevatten. We concluderen:

Opmerking 2. *Elke kaart behoort tot pre-cies 40 verschillende sets.*

Alle Sets

Nu is het niet moeilijk meer om de Sets in een volledig kaartspel te tellen. Zoals we gezien hebben, behoort elke kaart tot 40 sets. Er zijn in totaal 81 kaarten, hetgeen 81×40 Sets oplevert. Maar deze Sets zijn niet allemaal verschillend. Omdat elke Set drie kaarten bevat, krijgen we zo elke Set drie keer. Er zijn dus in totaal $\frac{81 \times 40}{3} = 1080$ Sets.

Annick's tabel

We hebben nu één getal gecontroleerd uit de Grote Set Tabel van Annick (zie pagina 21): het minimale en maximale aantal Sets in 81 kaarten is 1080. We kunnen zelfs één stapje verder gaan. Als we uit 81 kaarten één kaart weglaten, houden we 80 kaarten over, en door het weglaten van deze ene kaart verdwijnen er 40 van de 1080 Sets. Immers, er zijn precies 40 Sets met deze ene kaart er in. Zodoende houden we

Set, maar ik rten □□□

(Annick Weyzig)

1040 Sets over. Dus 1040 is het minimale en maximale aantal Sets in 80 kaarten. De berekening van het aantal Sets in 79 kaarten laten we over aan de lezer. Op de homepage van Pythagoras kun je meer informatie vinden, onder ander een uitleg van Annick Weyzig over haar berekeningsmethoden.

Vragen en opdrachten

Set bevat tal van andere vragen, meer dan we hier in Pythagoras kunnen behandelen. Vandaar dat we hier alleen een paar vragen opsommen, zonder antwoorden te geven. Voor meer informatie, zie de Internet-links.

1. Wat is de kans dat drie willekeurige kaarten een Set vormen?
2. Trek blind een willekeurige Set-kaart en gok hoe de kaart er uit ziet. Wat is de kans dat je alle vier eigenschappen goed hebt? Zelfde vraag voor drie, twee, één, nul eigenschappen.
3. Vind negen kaarten zonder een Set.
4. Vind negen kaarten met 1, 2, 3, ... Sets.
5. Wat is het maximale aantal Sets in negen kaarten?
6. Vind 12 kaarten zonder Set. Zelfde vraag voor 16, 17 18, 19 en 20 kaarten.

Andere dimensies

De 81 kaarten in Set ontstaan door vier eigenschappen (aantal, kleur, vorm en invulling) onafhankelijk van elkaar te laten variëren over drie mogelijkheden. Noemen we dit 4-dimensionaal Set, dan krijgen we variaties op Set door meer of minder dimensies toe te laten. 3-dimensionaal Set, bijvoorbeeld. De kaarten in dit spel hebben drie eigenschappen (bijvoorbeeld aantal, kleur en vorm). Dit spel krijg je door uit een compleet Set-spel alle open en gesteepte kaarten weg te laten. Je houdt dan $3^3 = 27$ kaarten over. De vragen die je voor 4-dimensionaal Set kunt stellen, kun je ook stellen voor 3-dimensionaal Set en zijn hopelijk makkelijker te beantwoorden. Wie maakt bijvoorbeeld een Set Tabel voor 3-dimensionaal Set?

5-dimensionaal Set

Vind je dit te eenvoudig, dan kun je nadenken over 5-dimensionaal Set. Dit spel heeft $3^5 = 243$ kaarten. Hiervan is niet eens bekend wat het kleinste aantal kaarten is dat gegarandeerd een Set bevat. Op de homepage van Pythagoras vind je een artikel van Joe Buhler, dat dieper ingaat op de wiskunde achter deze vragen.

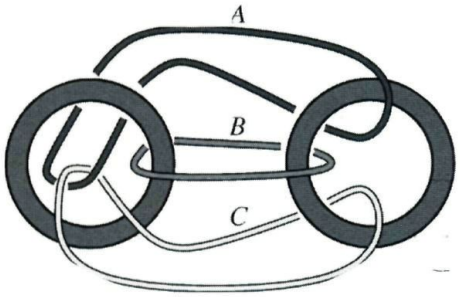
Meer informatie

www.omino.com/
it.ncsa.uiuc.edu/~mag/Set/FunStuff.html
www.setgame.com/set/mathtricks.htm
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/Set/

°Problemen

Dion Gijswijt

Twee ringen
Twee houten ringen zijn met drie lussen van touw aan elkaar vastgemaakt, en wel op een heel speciale manier.
Als je namelijk een willekeurige lus doorknipt, dan zitten de twee ringen nog steeds met de resterende twee lussen aan elkaar vast, maar knip je een willekeurige tweede lus door, dan zijn de ringen los. Kun jij uitvinden hoe de lussen kunnen zitten? De oplossing in de figuur is niet goed, want als je touw *A* en *C* doorknipt, zitten de ringen nog steeds vast met touw *B*.



Geen priem
Vind tien opeenvolgende getallen die geen priemgetal zijn.

Stapelen
Neem 45 speelkaarten en splits die in een willekeurig aantal stapeltjes. Pak nu van elk stapeltje een kaart en leg deze samen als een nieuw stapeltje neer. Herhaal nu telkens deze laatste stap. Je zult merken dat de aantallen kaarten in de stapeltjes na een tijdje steeds hetzelfde blijven! Hoeveel stapeltjes kaarten heb je nu? Werkt deze 'truc' ook als je met een ander aantal kaarten begint, en zo ja, met welke aantallen?

Hieronder zie je een voorbeeld met tien kaarten:

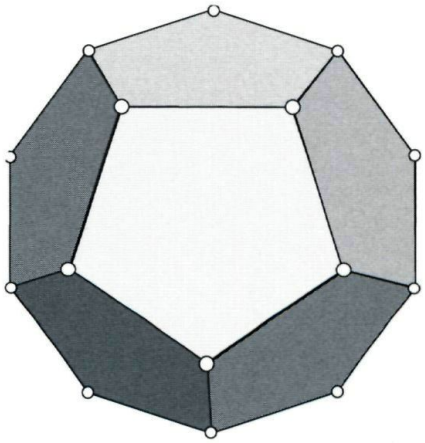
$$\begin{aligned}
(1\,1\,5\,2\,1) &\mapsto (4\,1\,5) \mapsto (3\,4\,3) \mapsto \\
(2\,3\,2\,3) &\mapsto (1\,2\,1\,2\,4) \mapsto (1\,1\,3\,5) \mapsto \\
(2\,4\,4) &\mapsto (1\,3\,3\,3) \mapsto (2\,2\,2\,4) \mapsto \\
(1\,1\,1\,3\,4) &\mapsto (2\,3\,5) \mapsto (1\,2\,4\,3) \mapsto
\end{aligned}$$

Nu veranderen de aantallen in de stapeltjes niet meer:

$$(1\,2\,4\,3) \mapsto (1\,3\,2\,4) \mapsto \ldots$$

Tien op een rij
Bestaat er een rij van tien gehele getallen met de eigenschap dat elk drietal opeenvolgende getallen uit die rij een negatieve som heeft, maar de som van alle getallen uit die rij positief is?

Dodecaëder
Hier zie je een regelmatig twaalfvlak. Is het mogelijk om de getallen 1 tot en met 20 op de twintig hoekpunten te zetten volgens deze spelregel: de som van de getallen op de hoekpunten van elk zijvlak moet hetzelfde zijn?



°Oplossingen nr.1

Dion Gijswijt

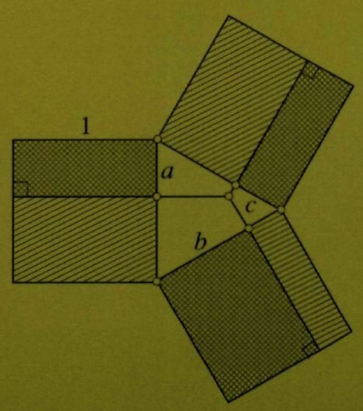
Puzzelen
Er zijn 35 stukjes, dus meet de puzzel 5 bij 7. De aantallen stukjes van type A t/m E noemen we a t/m e. Het enige hoekstukje is A, dus $a = 4$. Omdat de randstukjes in elkaar passen, zijn er evenveel kuiltjes als bobbeltjes, dus $2a + b = b + 2c$ en $c = 4$.
Het aantal randstukjes is gelijk aan $a + b + c = 20$, zodat $b = 12$.
Het totaal aantal kuiltjes is gelijk aan het totaal aantal bobbeltjes, dus $2a + b + c + 3d + 2e = 2b + 2c + d + 2e$, dus $d = 4$.
In totaal zijn er $35 = a + b + c + d + e$ stukjes, zodat $e = 12$.

Leugenaars
De vijf vrienden zijn verdeeld over twee kampen: leugenaars en waarheidssprekers. Alice zegt dat Eva liegt, dus behoren Alice en Eva tot verschillende kampen. Alice zegt ook dat David de waarheid spreekt, dus behoren David en Alice tot hetzelfde kamp. Uit Christels uitspraken kun je afleiden dat Alice en David tot het ene kamp behoren en Bas, Christel en Eva tot het andere. Omdat de meerderheid liegt spreken alleen Alice en David de waarheid.

Laatste cijfer
Bekijk de laatste cijfers van de machten $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ Dan zie je dat deze zich elke vier cijfers herhalen:
$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$. Het laatste cijfer van $3^{3^3} = 3^{27}$ is daarom gelijk aan het laatste cijfer van $3^{27-6\times4} = 3^3$. Het laatste cijfer is dus een zeven.

Twee Zetten Schaak
Stel dat zwart wél een winnende strategie heeft. In dat geval zou wit bij de eerste beurt willen 'passen', zodat nog steeds de beginstelling op het bord staat, maar nu met zwart aan zet.
De rollen zouden dan zijn omgedraaid en wit zou een winnende strategie hebben. Passen is niet toegestaan, maar wit kan de stelling ook onveranderd laten door op de eerste zet een van de paarden te spelen en op de tweede zet van dezelfde beurt dat paard weer terug te zetten. Wit en zwart hebben dus allebei een winnende strategie. Maar dat is onmogelijk. De aanname dat zwart een winnende strategie heeft, leidt tot een tegenspraak en dus is deze aanname fout.

Molen
De bewering is dat het geruite gebied en het gestreepte gebied dezelfde oppervlakte hebben. Om dit te bewijzen mag je aannemen dat de zijde van het vierkant lengte 1 heeft. Gebruik nu 'Pythagoras voor een gewone driehoek' uit het oktobernummer en je krijgt:
$a^2 + b^2 + c^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2$.
Vereenvoudig dit en je krijgt
$0 = 3 - 2a - 2b - 2c$, en dus
$a + b + c = (1 - a) + (1 - b) + (1 - c)$.
Het linkerlid is gelijk aan de oppervlakte van het geruite gebied en het rechterlid is gelijk aan het gestreepte gebied.



Beeld & Bedrog

Deze persoon staat gewoon op de grond. Hoe zit dat?

Het is niet wat je ziet: afbeeldingen waarmee iets bijzonders aan de hand is. Aan de lezer de taak om uit te zoeken wat. Heb jij ook een foto voor deze rubriek gevonden of gemaakt? Stuur dan op naar de redactie.

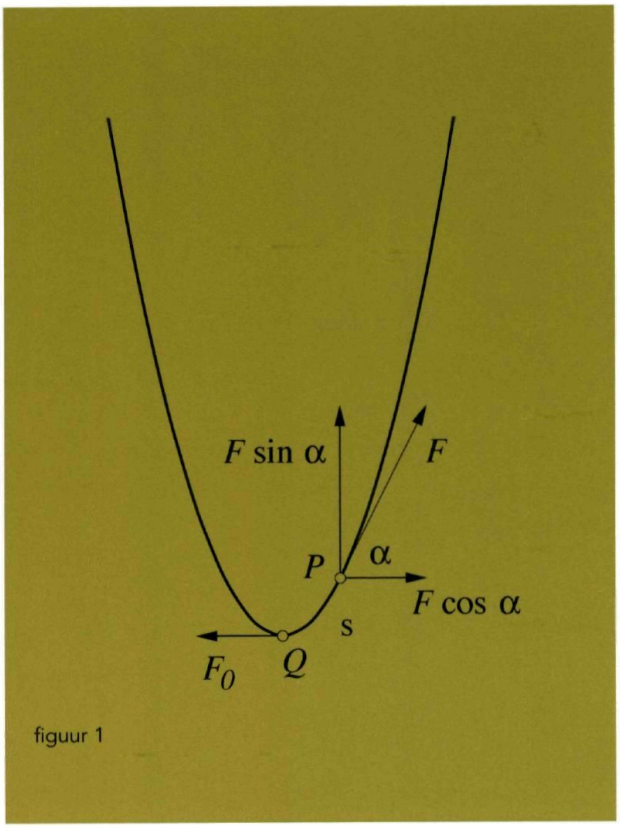
Joop van der Vaart

En hoe zit dit?

De kettinglijn

Klaas Pieter Hart

De kettinglijn zie je overal waar een touw of kabel vrij is opgehangen tussen twee punten. Galileo dacht dat de kettinglijn een parabool moest zijn. De jonge Christiaan Huygens zag in dat dat niet klopte. Wat is de vergelijking dan wel?



figuur 1

Neem een stuk touw en hang het tussen twee even hoge punten aan de muur. Vraag: wat voor kromme hangt daar? In wiskundige termen: welke functie heeft een grafiek die precies op het touw past? We gaan er van uit dat het touw een homogene massaverdeling heeft, dat wil zeggen, overal even zwaar is. Galileo Galilei dacht dat de kromme een parabool moest zijn, maar Christiaan Huygens ontdekte op 16-jarige leeftijd dat dat niet kon kloppen.

Geen parabool

Dat het touw geen parabool beschrijft volgt uit een karakteristieke eigenschap van de vorm van het touw en een karakteristieke eigenschap van de parabool. Eerst het touw (zie figuur 1). We nemen een punt P ergens op het touw en bekijken de kracht F die naar rechtsboven trekt. De horizontale component van die kracht is gelijk aan de horizontale kracht F_0 die in het laagste punt Q naar links trekt – omdat het touw niet beweegt wordt er blijkbaar in Q en P even hard getrokken. Dit geeft de vergelijking

$$F_0 = F\cos\alpha$$

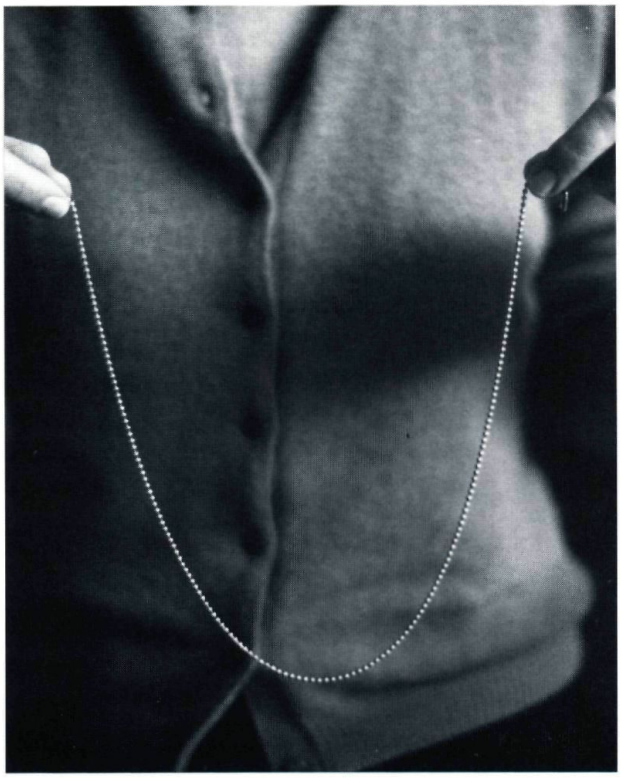
Vertikaal moet de kracht het stuk touw tussen Q en P ophouden en dat vergt as; hierin is s de lengte van het stuk touw en a een constante waar de soortelijke massa en de zwaartekracht in verwerkt zijn. We krijgen dus als tweede vergelijking:

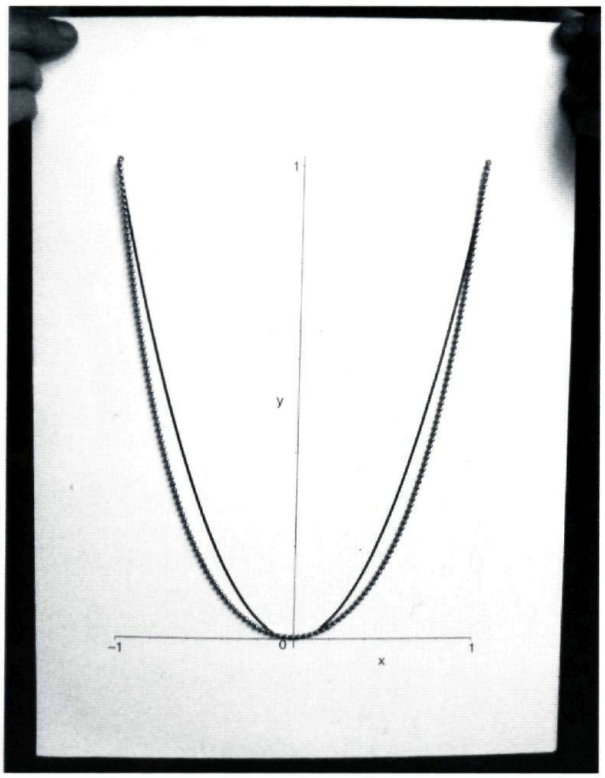
$$as = F\cos\alpha$$

Als we deze vergelijkingen op elkaar delen krijgen we:

$$\tan\alpha = ks$$

waarbij we $k = a/F_0$ stellen.





Wat dan wel?
In 1690 stelde Jacob Bernoulli het probleem van de juiste beschrijving van de vorm van het touw aan de muur weer aan de orde. Een jaar later werd het probleem opgelost door Leibniz, Huygens en Johann Bernoulli. Leibniz en Huygens gaven de kromme de naam *catena*, wat Latijn voor ketting is; in het Nederlands noemen we de kromme dan ook kettinglijn. Met wat meer wiskunde blijkt dat de kromme de grafiek is van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{1}{k}\,\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}.$$

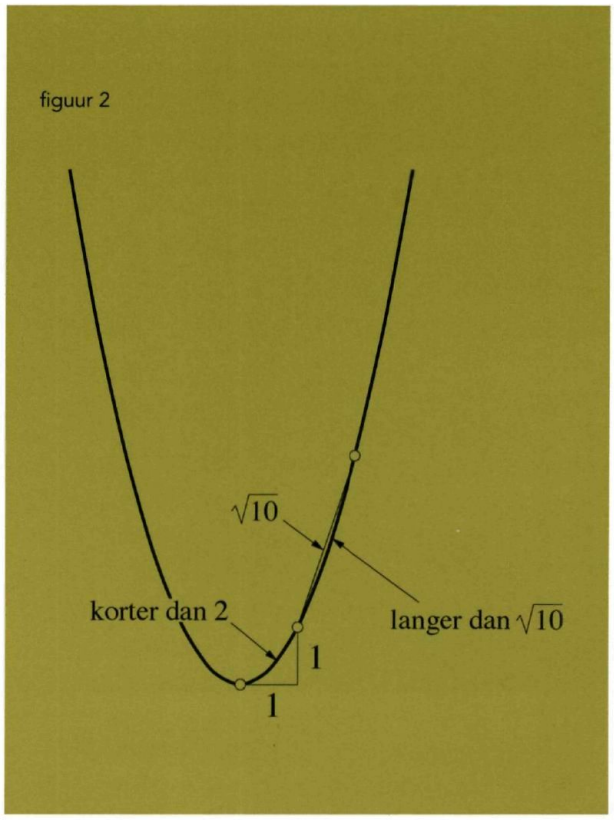
Dit was in die dagen iets nieuws: een eenvoudig mechanisch/statisch probleem dat in de oplossing e-machten nodig had!

Wat dit betekent is dat de helling van de raaklijn in een punt aan de kromme recht evenredig is met de lengte van het stuk tussen dat punt en het laagste punt.
Nu kijken we naar een parabool van de vorm $y = px^2$. We weten dat in een punt $P = (x,px^2)$ op de parabool de helling van de raaklijn gelijk is aan $2px$, met andere woorden $\tan\alpha = 2px$. Als ons touw een parabool zou beschrijven, dan zou in elk punt de betrekking

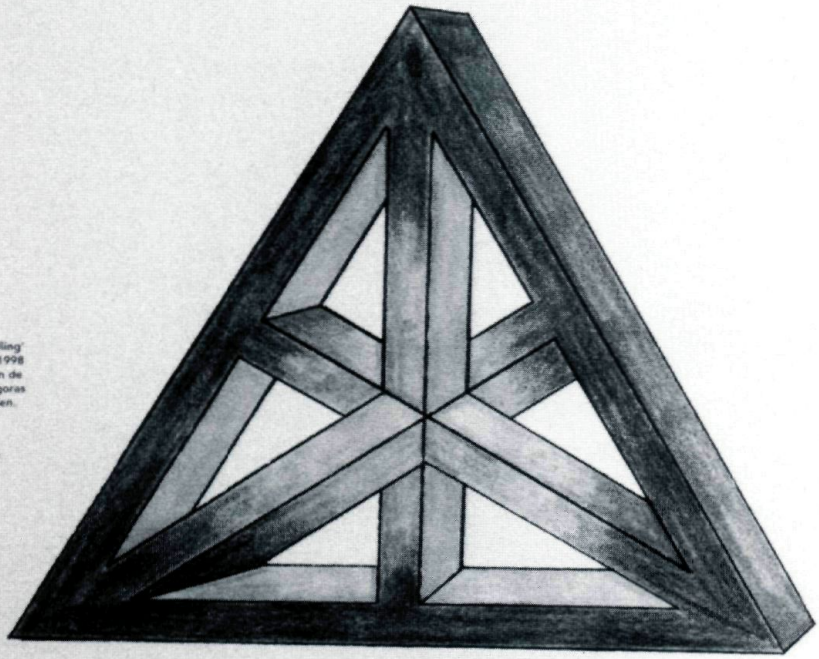
$$ks = \tan\alpha = 2px$$

moeten gelden; met andere woorden: de booglengte is recht evenredig met de x-coördinaat. In het bijzonder zouden de booglengten van $x = 0$ tot $x = 1$ en die van $x = 1$ tot $x = 2$ even lang moeten zijn. Maar voor de parabool $y = x^2$ kan dat duidelijk niet: het eerste stuk is korter dan 2; het tweede stuk is langer dan $\sqrt{10}$. Zie figuur 2. Je kunt zelfs bewijzen dat een kromme waarvan de booglengte recht evenredig is met de x-coördinaat een rechte lijn moet zijn.

figuur 2



pythagoras
wiskundetijdschrift
voor jongeren
abonnementen
tel: 0522 855175
fax: 0522 855176



Met deze 'onmogelijke stelling' heeft Simon Biesheuvel in 1998 de eerste prijs gewonnen in de Escherwedstrijd van Pythagoras in de categorie alle leeftijden.

Voor informatie:
http://www.wins.uva.nl/
misc/pythagoras/Escher98/

Stelling 13 a
De hoogtelijnen in een driehoek staan loodrecht op elkaar

internet:
http://www.wins.uva.nl/
misc/pythagoras/

e-mail:
pythagoras@wins.uva.nl

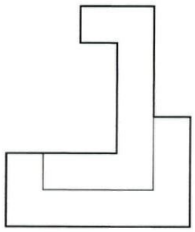
Oplossingen Knippertjes

Uitslag QJN-prijsvraag
De QJN-prijsvraag uit het december-nummer van 1998 leverde naast een enthousiaste reactie van Ton Groeneveld uit Friesland slechts één inzending op, van Peter Deleu uit Hulste (België). Hieronder zie je drie van de door hem ingestuurde 3D-fraktals. Hiermee wint hij een boekenbon van 100 gulden.

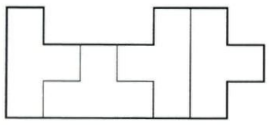
Erratum nr. 6
In het augustusnummer is op pagina 13 een verkeerde foto afgebeeld: het afgebeelde portret is van C.P. Ramanujan, niet van Srinivasa Ramanujan. Van Srinivasa Ramanujan is slechts één potret bekend, dat we hier afbeelden.

Poster
Na de succesvolle priemgetallenposter van twee jaar geleden brengt Pythagoras nu een nieuwe poster uit. Onderwerp: een 'Onmogelijke stelling' gemaakt door Simon Biesheuvel uit Weesp, een inzending van de Escherprijsvraag van vorig jaar.
Hij won daarmee de hoofdprijs in de categorie alle leeftijden.
De hiernaast afgebeelde poster is full colour, heeft formaat A1 en kost fl. 7,50 exclusief verzendkosten in koker.
De poster kunt u bestellen bij de abonnee-administratie in Meppel (zie colofon). Bestellen via de homepage kan ook.

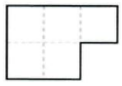
Knip 1



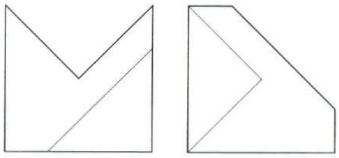
Knip 2



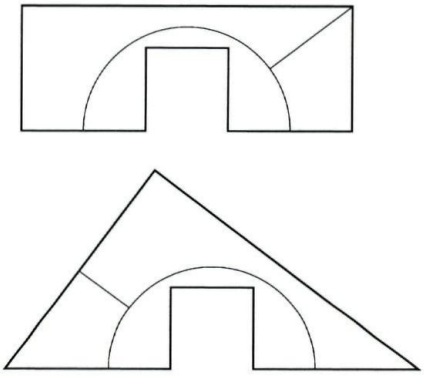
Knip 3



Knip 4



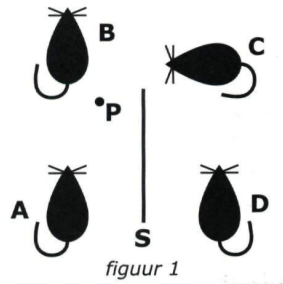
Knipperdeknap



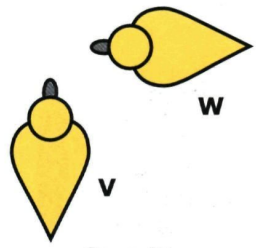
Agenda

vrijdag 10 december 1999	Mastercourse **Vreemde symmetrieën** Universiteit van Amsterdam. 020 5255074 kattie@wins.uva.nl
vr 10 en 17 december 1999	**Cursus Maple** voor wiskundedocenten Universiteit Leiden. 071 5277121 hfinkeln@math.leidenuniv.nl
zaterdag 8 januari 2000	**Optimalisatie** Wintersymposium WG, Amersfoort. 076 5273267 (overdag) 076 5419757 ('s avonds)
vrijdag 21 januari 2000	**Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade** 026 3521294 fred.bosman@cito.nl
vr 4 en za 5 februari 2000	**Nationale Wiskunde Dagen** Noordwijkerhout. 030 2611611 www.fi.uu.nl/nwd/
do 2 en vr 3 maart 2000 do 9 en vr 10 maart 2000	**Masterclass coderingstheorie voor 5/6 vwo** Universiteit Leiden. 071 5277121 hfinkeln@math.leidenuniv.nl
vrijdag 17 maart 2000	**Kangoeroewedstrijd** 026 3521561
vr 31 en za 1 april 2000	**Finale Wiskunde Alympiade** 030 2611611 www.fi.uu.nl/Alympiade/
vrijdag 7 april 2000	Mastercourse **Financiële wiskunde** Universiteit van Amsterdam. 020 5255074 kattie@wins.uva.nl

Schuiven, draaien en spiegelen



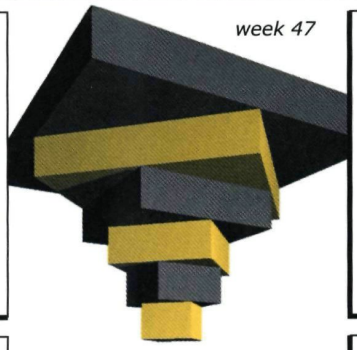
figuur 1

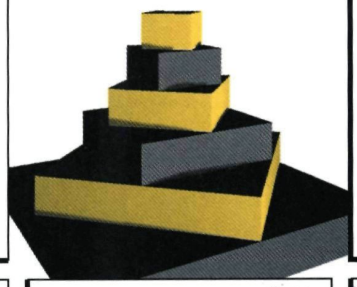


figuur 2

In figuur 1 zie je vier muisachtige vormen. Omdat de vorm steeds dezelfde is, kun je zo'n muis door een geschikte transformatie precies op de plaats van een andere brengen. Muis A kun je door een *verschuiving* naar B brengen. Als je muis A laat *draaien* om punt P, kan hij in positie C komen. En voor de transformatie A -> D heb je de spiegel S nodig.
De combinatie van een spiegeling en een verschuiving evenwijdig aan de spiegel, noemt men een *schuifspiegeling*. Met die transformatie kun je D in B overvoeren; dat zie je meteen! Maar er is ook een schuifspiegeling waarmee je D in C overvoert; het is de kunst om dan uit te vinden waar je de spiegel moet zetten! In figuur 2 zie je een eendje. Deze vorm heeft een symmetrie. Daardoor is er niet alleen een *draaiing* die V in W overvoert, maar ook een *spiegeling* en een *schuifspiegeling*.

week 47





MAANDAG 20 NOVEMBER

Teken twee keer een F, in verschillende standen. Bepaal het middelpunt van de rotatie.

DINSDAG 21

Teken twee even lange lijnstukken, in verschillende standen. Bepaal het middelpunt van de rotatie. Is er meer dan één oplossing?

WOENSDAG 22

Idem voor twee even grote vierkanten.

DONDERDAG 23

Teken een F en een gespiegelde, gedraaide F.
Bepaal de spiegel die bij de schuifspiegeling hoort.

VRIJDAG 24

Je hebt 2 spiegels.
Je spiegelt een F eerst met de ene spiegel, en dan het spiegelbeeld met de andere spiegel. Laat zien dat het totaal-resultaat een draaiing is met als middelpunt het snijpunt van de spiegels.

ZATERDAG 25

Wat kun je zeggen over de grootte van de hoek waarover wordt gedraaid in het probleem van vrijdag?

ZONDAG 26

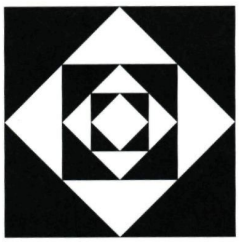
Laat zien dat een draaiing gevolgd door een spiegeling een schuifspiegeling is.

De Stichting Vierkant voor Wiskunde geeft voor 2000 weer een wiskundekalender uit. Deze werd opnieuw samengesteld door Frits Göbel en Rinus Roelofs.

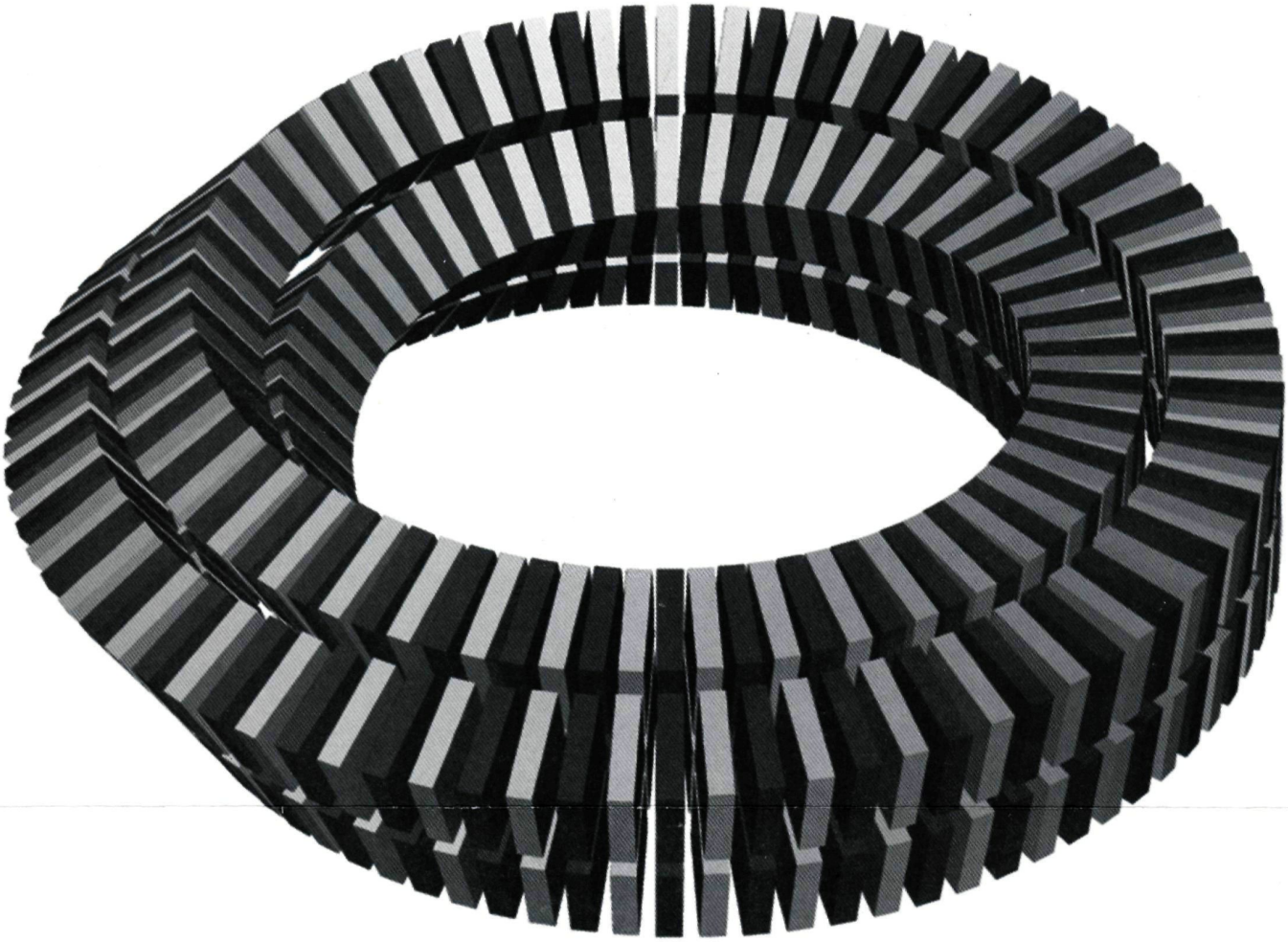
Frits Göbel is wiskundige en fanatiek puzzelaar.
Hij verzamelde de 365 opgaven. Deze opgaven zijn naar thema ingedeeld.
Elke week wordt het thema uitgelegd, de oplossingen van de opgaven verschijnen op de home page van de stichting:
http://www.cs.vu.nl/~vierkant

Rinus Roelofs is een door wiskunde geïnspireerd kunstenaar. Hij deed de vormgeving van de kalender. De illustraties met als jaarthema "ruimtelijke constructies" zijn afkomstig uit zijn eigen werk.

De kalender verschijnt begin november. Hij kost 25 gulden (108 pagina's, formaat 21 x 24 cm). De hiernaast afgebeelde pagina's zijn op 2/3 van de ware grootte afgebeeld. De kalender is verkrijgbaar bij de stichting(z.o.z.).



Vierkant voor Wiskunde
Vrije Universiteit
FEW, Divisie Wiskunde en informatica
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
tel: 020 4447776
e-mail: Vierkant@cs.vu.nl
internet:
www.cs.vu.nl/~vierkant



Vierkant voor Wiskunde - 2000

De Wiskundekalender voor het jaar 2000 is te bestellen door overmaking van ƒ 25,-- (of een veelvoud hiervan) op bankrekening 43.86.34.926 t.n.v. Stichting Vierkant te Amsterdam, onder vermelding van kalender 2000.
Na ontvangst van de betaling (vergeet niet uw naam en adres te vermelden) wordt uw bestelling toegezonden.

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universitiet Leiden.

Universiteit van Amsterdam

TU Delft

Universiteit Leiden

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855175,
per fax: 0522 855176,
via Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/
schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17,
NL- 7940 VB Meppel.

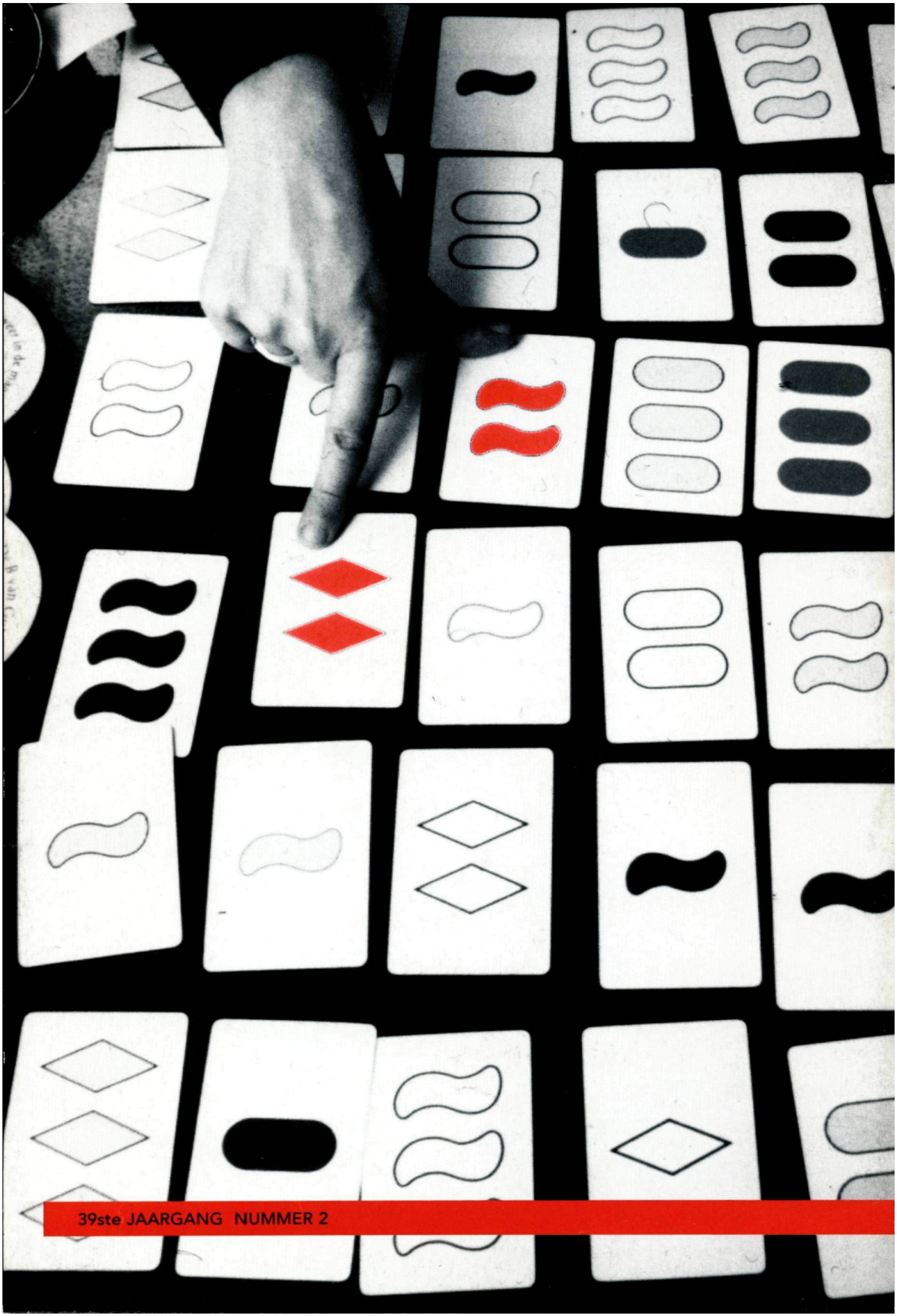
Tarieven 1999-2000
Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost ƒ 37,50. Losse nummers ƒ 8,- of BF 160.
Overige prijzen per jaar:
Pythagoras België BF 950,
Pythagoras buitenland ƒ 52,50.
Pythagoras én Archimedes ƒ 67,50,
Pythagoras én Archimedes België BF 1570,
Pythagoras én Archimedes buitenland ƒ 83,50.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:
Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen
Voor scholen zijn er bulkabonnementen.
Prijs: f 25,- / BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen. Prijs: ƒ 30,- /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37 en 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).



39ste JAARGANG NUMMER 2