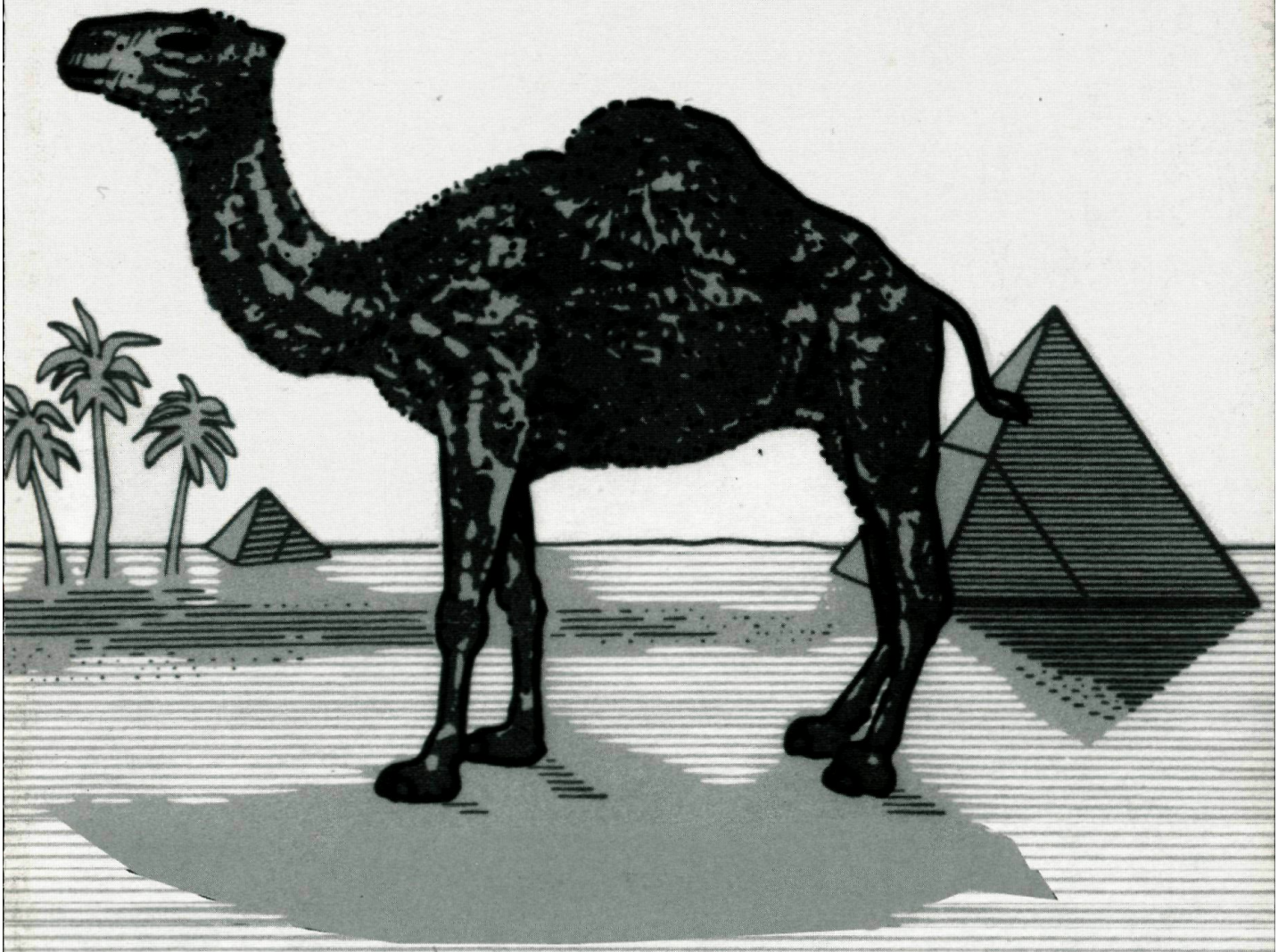
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN APRIL 2000

COLOFON

Uitgave
Pythagoras is een uitgave van
het Wiskundig Genootschap
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van september
tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail
pythagoras@wins.uva.nl

WWW
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij
Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras
gaan vergezeld van rondjes
die de moeilijkheidsgraad
aangeven.
Nul rondjes betekent:
geen enkele wiskundige
voorkennis vereist;
1 rondje ^{o}: voor iedereen van
af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je
kennis uit de vijfde of zesde
klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net
iets verder dan de middel-
bareschoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **ir. N. Bordewijk** is metagrobologist te Amsterdam. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **ir. A.A.J. Lefeber** is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT. **R. van Luijk** is student wiskunde aan de UU. **drs. W.R. Oudshoorn** is AIO algebra en meetkunde aan de UG. **ir. S.M. van Rijnswou** is OIO computeralgebra aan de TUE. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **drs. M. Vermeulen** is manager bij VNU Business Information Europe te Haarlem. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.

INHOUD

2 - 3 **Dwalertjes 2**

4 - 5 **De wobbelbol**

6 **Lettermagie**

7 - 9 **De tabel van Ackermann**

10 - 11 **Pythagoras Olympiade**

12 - 13 **3D-puzzels**

14 **3D Een puzzel van twee stukjes**

15 **3D Vier stukjes**

16-17 **3D Inpakproblemen**

18 - 19 **3D Kubuspuzzels**

20 **Uitslag prijsvraag nr. 1**
Oplossingen Dwalertjes 2

21 -23 **Een pyramide van Pascal**

24 **Problemen**

25 **Oplossingen nr. 3**

26 - 27 **Beeld en Bedrog**

28 **De post**

29 **Boeken: Code**

30 - 31 **De cycloïde**

32 **Agenda**

Dwalertjes 2

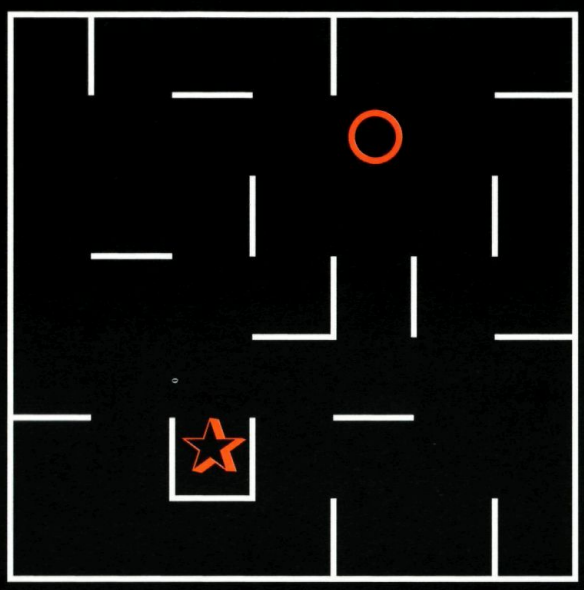
Weer drie labyrinten. Bij elk van de labyrinten is er steeds een bijzondere regel die je vertelt hoe je er doorheen mag lopen. De oplossingen staan op pagina 20.

Getallenlabyrint
Vertrek vanuit het vakje linksboven.
Je mag alleen horizontaal of vertikaal door het labyrint bewegen, en precies zóveel vakje als het hokje aangeeft waar je op staat. Kun je op deze manier bij het doel uitkomen?

6	3	2	4	6	2	5
3	5	2	4	4	4	1
3	3	2	3	3	4	2
3	4	1	2	2	5	3
4	4	4	2	3	2	4
2	5	4	2	3	2	5
3	5	2	1	4	4	doel

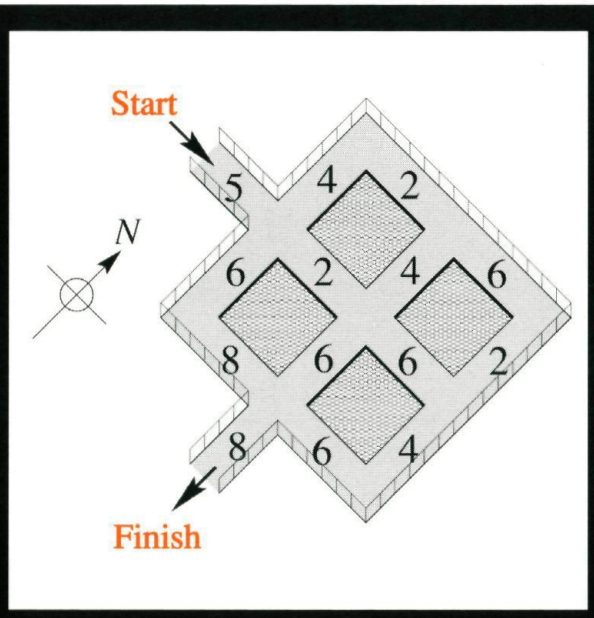
Knikkerlabyrint

Op het bord hieronder stelt de cirkel een knikker voor. Het bord kun je alleen in het noorden, zuiden, oosten of westen optillen of laten zakken.
In het zuidoosten optillen gaat bijvoorbeeld niet. Op een schuin bord gaat de knikker rollen totdat-ie een hindernis tegenkomt. Tijdens het rollen kan de knikker op geen enkele manier gestopt worden. Het doel is de knikker zo te laten rollen dat je bij de ster uitkomt.
Een voorbeeld. Je laat eerst de westkant zakken. Dan rolt de knikker naar de westrand van het bord. Bij de volgende stap laat je bijvoorbeeld de zuidkant zakken. Dan rolt de knikker naar beneden tot de eerste hindernis. Laat je dan de oostkant zakken, dan rolt de knikker helemaal naar de oostelijke overzijde. Enzovoort.



Priempark

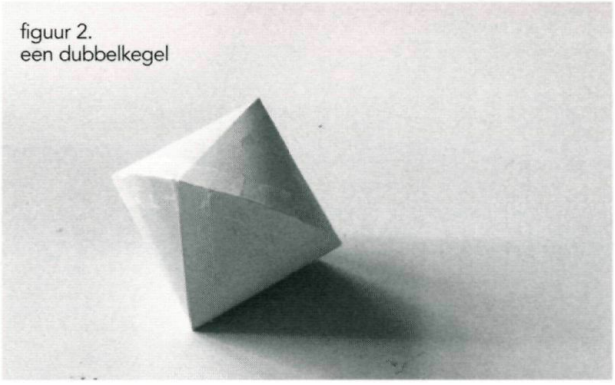
In de figuur zie je de plattegrond van een parkje. Ga het park bij Start naar binnen. Tel de getallen die je tegenkomt bij elkaar op. Elk tussentotaal moet steeds een priemgetal zijn.
Bijvoorbeeld: Na Start heb je 5.
Daarna kun je niet naar het noorden ($5 + 4 = 9$, niet priem), maar wel naar het oosten ($5 + 2 = 7$, priem) of het zuiden ($5 + 6 = 11$, priem). Je mag een plek meerdere keren bezoeken, maar omkeren (een bocht van 180 graden maken) mag niet.
Kun je het park verlaten met een eindtotaal van 31? Moeilijker: een eindtotaal van 61? Nog moeilijker: een totaal 97?
N.B. Een getal >1 is een priemgetal als het alleen deelbaar is door 1 of zichzelf.
De eerste tien priemgetallen zijn:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 en 29.



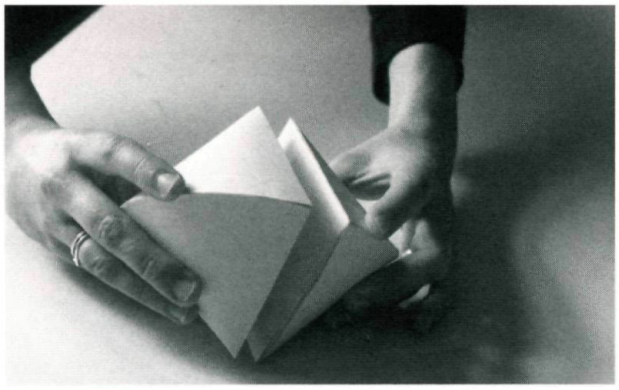
Bron
Robert Abbott, *Supermazes & Mad Mazes*
http://www.logicmazes.com/

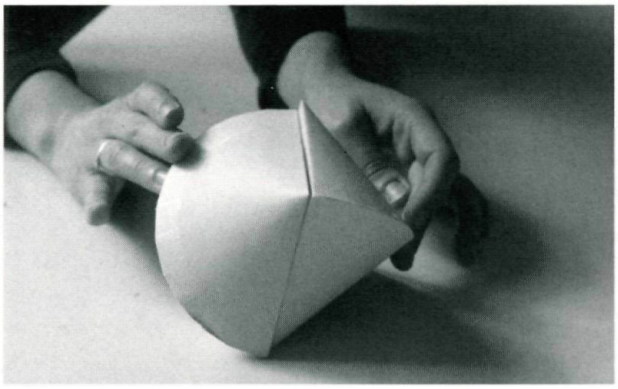
De wobbelbol

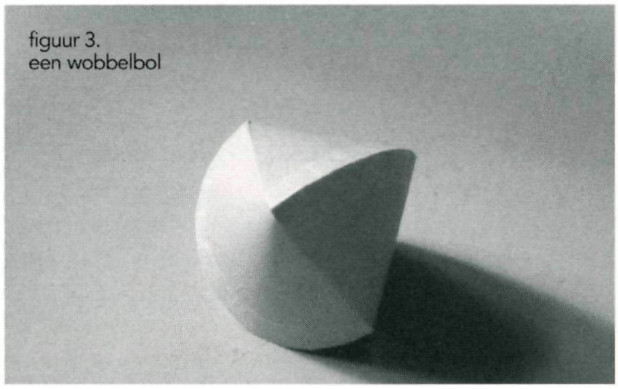
Bruno Ernst



figuur 2.
een dubbelkegel





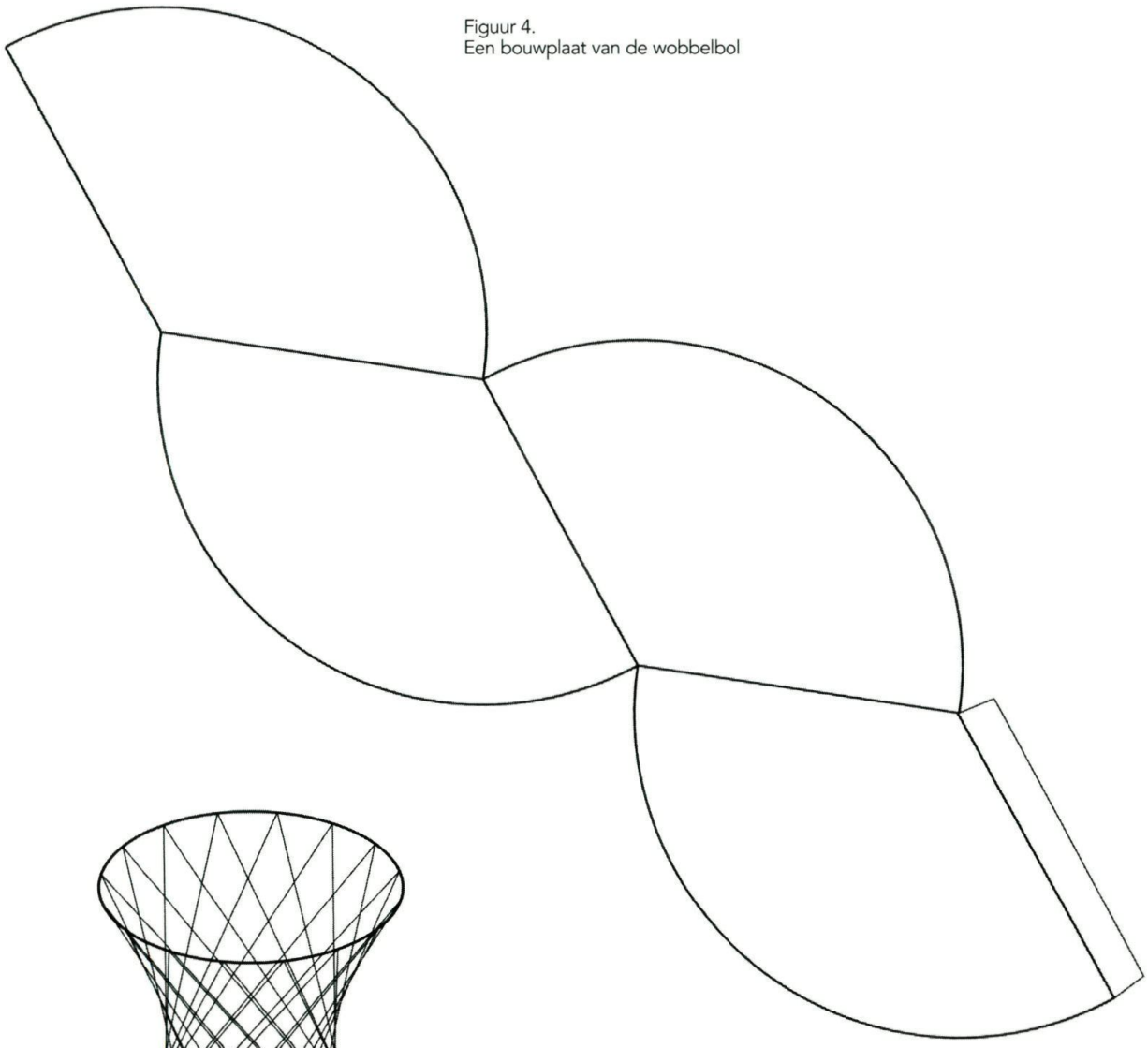


figuur 3.
een wobbelbol

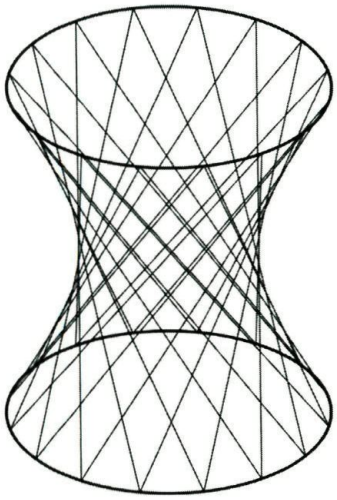
Koeltorens in het landschap zijn fraaie wiskundige lichamen. De vertikale doorsnede door de as in een hyperbool; daarom wordt het lichaam een hyperboloïde genoemde. Wie naar zo'n hyperboloïde kijkt kan zich waarschijnlijk moeilijk voorstellen dat het in twee richtingen gekromde buitenoppervlak helemaal uit rechte lijnen kan worden opgebouwd. In figuur 1 is dat aanschouwelijk voorgesteld. De bovenste en de onderste cirkel zijn door vertikale draden met elkaar verbonden en daarna is de bovenste cirkel wat gedraaid ten opzichte van de onderste. Architekten maken graag gebruik van gebogen vlakken die uit rechte lijnen opgebouwd kunnen worden. Ze worden regelvlakken genoemd, waarbij het woord regel slaat op rechte lijn. Ze bieden voordeel, zowel bij het ontwerp als bij de uitvoering. De kegel is een regelvlak dat iedereen kent. Deze is het uitgangspunt van een ander interessant voorwerp dat vorig jaar beschreven werd in *Scientific American* (oktober 1999).

Een wobbelding

De wobbelbol kunnen we uit de dubbelkegel met een tophoek van 90° afleiden (fig. 2).



Figuur 4.
Een bouwplaat van de wobbelbol

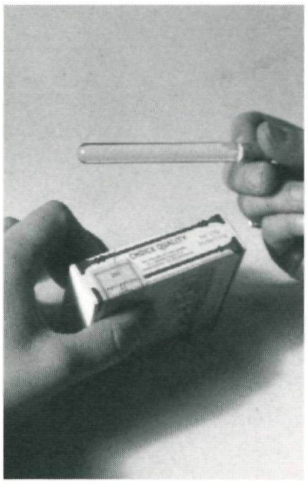


figuur 1.
een hyperboloïde

Als we deze vertikaal doorsnijden en daarna het rechterstuk 90° draaien, dan ontstaat de wobbelbol (figuur 3). Het is moeilijk om deze zó te tekenen of te fotograferen, dat een goede indruk ontstaat van het ruimtelijke voorwerp. Maar het is makkelijk van papier of briefkaartkarton te maken, met behulp van de uitslag die in figuur 4 is getekend. Maak er al of niet vergroot een fotokopie van en lijm het lipje rechts tegen de rand aan de linkerkant. De ronde randen kunnen met plakband aan elkaar bevestigd worden. De wobbelbol rolt op een hellend vlak in een rechte lijn naar beneden en wiebelt daarbij naar links en rechts. Eigenlijk is de gevolgde baan geen rechte lijn maar een aaneenschakeling van cirkelbogen. Dit is een gevolg van zijn constructie: in elke stand rust de wobbelbol op een rechte lijn van een kegelmantel. Hij rolt dan als een kegel een cirkelvormig stukje en als de ene kegelhelft vloeiend overgaat in de andere wordt de kegelmantel in tegengestelde richting afgewikkeld. Men kan aan de wobbelbol allerlei wiskunde bedrijven. Wat is de oppervlakte? Wat is de inhoud? Deze vragen laten we over aan de lezer van dit artikeltje, dat alleen maar een interessant voorwerp wil voorstellen.

Lettermagie

Chris Zaal



Roken is slecht voor de gezondheid. Maar met een pakje Camel kun je – zonder een sigaret te roken – een verrassende truc uithalen.

Met de verpakking van Camel sigaretten is van alles aan de hand. Zo is het dier op de voorkant geen kameel maar een dromedaris – een kameel heeft twee bulten, een dromedaris maar één. Op de zijkant van een Camel-pakje lees je de woorden `CHOICE QUALITY', hetgeen zoveel betekent als `topkwaliteit'. Met deze twee woorden is ook wat aan de hand.

Magie

Voor de volgende truc heb je nodig: een reageerbuis met een passende kurk. Een pakje Camel is niet eens nodig. Schrijf de woorden CHOICE en QUALITY netjes naast elkaar op in blokletters:

CHOICE QUALITY

Vul de reageerbuis helemaal met water en sluit deze af met een kurk. In de buis mogen geen luchtbellen achterblijven (dit lukt met een kurk beter dan met een rubberen stop). Houd nu de reageerbuis horizontaal boven de tekst die je opgeschreven hebt en lees wat er staat: Iedereen die dit voor het eerst ziet zal verbaasd opkijken. Het CHOICE woord is onveranderd, maar het andere woord staat op zijn kop. Ra, ra, hoe kan dit?

Oplossing

De oplossing van dit raadsel is helemaal niet moeilijk en kun je zelf verzinnen. Probeer maar eens wat er gebeurt met woorden als **KOEIEKOOKBOEK** of **PAASGARNAAL.**

De tabel van Ackermann

Dion Gijswijt

In figuur 1 zie je een tabel. De tabel is in twee richtingen oneindig. Op iedere plaats in de tabel hoort een getal te staan en het is jouw taak uit te vinden welke getallen dat zijn. De getallen in de eerste rij krijg je cadeau, het zijn de getallen 2, 3, 4, 5, enzovoort. Om de getallen op de andere plaatsen uit te vinden, zijn er twee spelregels.

Spelregel 1. Het eerste getal in een rij (behalve dat van de eerste rij), is gelijk aan het tweede getal uit de rij erboven. Zie de pijlen in figuur 1.

Spelregel 2. Om een getal te vinden dat niet in de eerste rij of kolom zit, moet je het volgende doen. Kijk naar het getal in het linker buurvakje en ga naar de corresponderende positie in de rij erboven. Het getal dat op deze plek staat is het gezochte getal. Zie figuur 2.

Formules

Laten we het k-de getal in rij r een naam geven: $A(r,k)$. Omdat de getallen uit de eerste rij gegeven zijn weten we dat $A(r,k) = k + 1$ voor iedere k. De spelregels kunnen we dan samenvatten door:

1. $A(r,1) = A(r-1,2) \qquad (r > 1)$

2. $A(r,k) = A(r-1, A(r,k-1)) \quad (r,k > 1)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8		
3	4	6						
4								
5								
6								

Figuur 1.
De tabel van Ackermann en de eerste spelregel

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8		
3	4	6						
4								
5								
6								

Figuur 2.
De tweede spelregel

OPGAVE. Ga na dat deze formules precies de twee spelregels uitdrukken.

Met deze twee spelregels kun je alle getallen in de tabel vinden. De getallen in de eerste rij zijn al gegeven. Het eerste getal uit de tweede rij is volgens regel 1 gelijk aan $A(1,2) = 3$. Het tweede getal uit de tweede rij is volgens regel 2 gelijk aan $A(1,A(2,1)) = A(1,3) = 4$. Het derde getal in de rij is gelijk aan $A(1,A(2,2)) = A(1,4) = 5$. Op deze manier kun je alle getallen uit de tweede rij berekenen. Van de derde rij kun je het eerste getal met behulp van regel 1 vinden en daarna gebruik je regel 2 om steeds het volgende getal in de rij te berekenen.

OPGAVE. Neem de tabel over en vul de eerste 8 getallen van rij 2, 3 en 4 in.

Regelmaat

De eerste drie rijen van de tabel vertonen een regelmaat. Deze regelmaat kan je heel wat rekenwerk besparen. Voor de getallen in de eerste rij hadden we de handige formule $A(1,k) = 1 + k$. Ook voor de getallen in de tweede rij bestaat een formule, namelijk $A(2,k) = 2 + k$. Hoewel dit 'duidelijk' is, gaan we het toch bewijzen.

Inductie

Voor het bewijs maken we gebruik van inductie. Dat gaat als volgt. Eerst bewijzen we dat de formule klopt voor het basisgeval $k = 1$. Vervolgens bewijzen we dat als de formule klopt voor een getal k, de formule ook klopt voor het volgende getal $k + 1$. Dit heet de inductiestap. Als je dit hebt laten zien, dan is de formule waar voor $k = 1$, voor het volgende getal $k = 2$, en dus ook voor $k = 3, 4, 5$, enzovoort. Dus is de formule correct voor elk getal k. We bewijzen nu met inductie dat $A(2,k) = 2 + k$. Voor $k = 1$ krijgen we $A(2,1) = A(1,2) = 3$ en dit is inderdaad gelijk aan $2 + k$, dus dat klopt. Nu de inductiestap.
Stel dat de formule klopt voor een zeker getal k. We berekenen:

$$\begin{aligned} A(2,k+1) &= A(1, A(2,k)) \\ &= 1 + A(2,k) \\ &= 1 + (2 + k) = 2 + (k + 1). \end{aligned}$$

Dus klopt de formule ook voor het volgende getal $k + 1$. Hiermee is het bewijs geleverd voor alle getallen k.
Het patroon in de derde rij getallen is ook duidelijk. Het zijn precies de tweevouden, te beginnen bij 4.

OPGAVE.
Laat zien dat voor de getallen uit de derde rij de formule $A(3,k) = 2k + 2$ geldt. Bewijs deze formule door het basisgeval $k = 1$ te controleren en vervolgens de inductiestap te maken.

OPGAVE.
Controleer dat voor de getallen in de vierde rij geldt dat $A(4,k) = 4 \times 2^k - 2$. Bewijs deze formule met inductie.

Googol en googolplex

De vijfde rij begint met 14. Je kunt narekenen dat het tweede getal 65534 is, en het derde getal $2^{65536} - 2$. Dit getal heeft maar liefst 19729 cijfers en is stukken groter dan aantal deeltjes in het heelal (hooguit een *googol* ofwel 10^{100}, een 1 gevolgd door honderd nullen. Het vierde getal is al bijna zo groot als een *googolplex* ofwel 10^{googol}, een 1 gevolgd door een googol nullen.
De functie $A(r,k)$, of eigenlijk een kleine variant, is vernoemd naar de bedenker ervan, de wiskundige Ackermann, en wordt vaak gebruikt in wiskundige bewijzen waar zeer grote getallen een rol spelen, als een maatstaf voor de grootte van die getallen.

Herhaald herhalen

Zoals je weet is vermenigvuldigen niets anders dan herhaald optellen: $a \times b$ is

een afkorting voor $a + a + \ldots + a$ (b keer). Als je herhaald vermenigvuldigt ben je aan het machtsverheffen: $a \times a \times a \ldots \times a$ (b maal) kun je afkorten tot a^b. Overigens wordt dit in computerteksten, zoals bijvoorbeeld webpagina's, vaak geschreven als $a \uparrow b$. Soms moet je herhaald machtsverheffen, zoals in dit torentje van achten: $8^{8^8} = 8 \uparrow 8 \uparrow 8$.
De wiskundige D.E. Knuth bedacht ook hiervoor een afkorting, namelijk $8 \uparrow \uparrow 3$.
In het algemeen schreef hij $a \uparrow \uparrow b$ in plaats van $a \uparrow a \uparrow \ldots \uparrow a$ (b keer een a).
Zo is bijvoorbeeld $2 \uparrow \uparrow 4$ gelijk aan $2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2 \uparrow 2 \uparrow 4 = 2 \uparrow 16 = 65536$.
Je ziet dat je gebruik kunt maken van twee rekenregels. Ten eerste is $a \uparrow \uparrow 1 = a$. Ten tweede geldt dat $a \uparrow \uparrow (b + 1) = a \uparrow (a \uparrow \uparrow b)$. Met deze rekenregels kun je torentjes van getallen uitrekenen.

OPGAVE.
Bereken $2 \uparrow \uparrow 3$, $2 \uparrow \uparrow 4$ en $2 \uparrow \uparrow 5$.

OPGAVE.
Bereken $2 \uparrow \uparrow (2 \uparrow \uparrow 2)$ en $(2 \uparrow \uparrow 2) \uparrow \uparrow 2$.

Natuurlijk wil je ook herhaald '$\uparrow \uparrow$' kunnen toepassen: $a \uparrow \uparrow a \uparrow \uparrow \ldots \uparrow \uparrow a$ (met b a's) kortte Knuth af tot $a \uparrow \uparrow \uparrow b$. Zo is bijvoorbeeld $3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \uparrow 3$ gelijk aan $3 \uparrow \uparrow \uparrow 4$. Nu heb je de rekenregels $a \uparrow \uparrow \uparrow 1 = a$ en $a \uparrow \uparrow (b + 1) = a \uparrow \uparrow (a \uparrow \uparrow \uparrow b)$. Zo kun je doorgaan, met zoveel pijlen als je wilt.

OPGAVE. Bereken
$2 \uparrow \uparrow \uparrow 2$, $2 \uparrow \uparrow \uparrow 3$ en $2 \uparrow \uparrow \uparrow 4$.

OPGAVE. Als je $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3$ als torentje van 3-en zou schrijven, hoe hoog wordt deze toren dan?

OPGAVE. Wat is groter, $2 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$ of $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 2$?

OPGAVE. Kun je bewijzen dat $2 \uparrow \uparrow \ldots \uparrow 2$, gelijk is aan 4, hoeveel pijlen er ook staan?

Hogere regelmaat
Door de formules voor de getallen in de rijen 2, 3 en 4 van de Ackermanntabel iets anders op te schrijven, kun je een regelmaat ontdekken die de formules voor de rijen verbindt:

$$A(2, k) = 2 + (k + 2) - 2$$
$$A(3, k) = 2 \times (k + 2) - 2$$
$$A(4, k) = 2 \uparrow (k + 2) - 2$$

Als je de getallen in de vijfde rij gaat uitrekenen, dan zul je ontdekken dat

$$A(5, k) = 2 \uparrow \uparrow (k + 2) - 2.$$

OPGAVE.
Bewijs de formule voor $A(5, k)$.

OPGAVE.
Wat is de formule voor $A(6, k)$?
En voor $A(7, k)$? Kun je dit bewijzen?

°Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 57
Een spel voor twee spelers gaat als volgt. Er liggen 2000 lucifers op tafel. Om beurten moet je een aantal lucifers weghalen. Het aantal dat je weghaalt moet een tweemacht zijn (1, 2, 4, 8, ...). Degene die de laatste lucifer moet pakken heeft verloren. Kan de eerste speler altijd winnen? Kan de tweede speler altijd winnen?

Opgave 58
De hoekpunten van een kubus zijn gemerkt met getallen: zeven maal een 0 en eenmaal een 1. Het is toegestaan om bij de getallen die aan weerszijden van een zijde staan 1 op te tellen. Kan je er voor zorgen dat alle hoekpunten van de kubus deelbaar zijn door 3?

Erratum
Opgave 55 bevatte een fout. De juiste formulering volgt hieronder. De inzendtermijn van deze opgave is verlengd tot en met 15 mei 2000.

Opgave 55
Beantwoord de volgende twee vragen voor de positieve reële getallen x, y en z.
Als $x + y + z \geq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ £ } 3?$$

Als $x + y + z \leq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3?$$

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 mei 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt! Hiernaast volgen de oplossingen van de opgaven uit het juninummer.

Veel succes!
Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.

Opgave 53

We definiëren een rij als volgt: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$ en

$$A_n = \frac{A_{n-2} \cdot A_{n-1}}{A_{n-1} + A_{n-2}}.$$

Bepaal A_{12}.

Oplossing. Om te beginnen is het makkelijk in te zien dat geen A_n ooit nul wordt. Als A_n namelijk nul zou zijn dan zou of A_{n-1} of A_{n-2} nul moeten zijn. Op die manier verder terugredenerend zou uiteindelijk A_1 of A_2 nul moeten zijn, maar die zijn 1. We kunnen dus zonder problemen een nieuwe reeks invoeren $B_i = 1/A_i$. Uit de recurrente betrekking voor A_i volgt door herschrijven ook de volgende betrekking:

$$\frac{1}{A_n} = \frac{1}{A_{n-1}} + \frac{1}{A_{n-2}}.$$

Oftewel $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$, met $B_1 = 1$ en $B_2 = 1$. Met wat rekenwerk vind je nu makkelijk dat $B_{12} = 144$, zodat $A_{12} = 1/144$. Je had dat natuurlijk ook rechtstreeks kunnen vinden, mits je geen fouten maakt in het rekenen met de breuken. Een antwoord als 0.00694 werd niet goed gerekend.

Deze opgave werd opgelost door: Martijn van der Schans, **Farel College** te Ridderkerk, Jim Kasteel te Arnhem, Peter Deleu te Hulste, Jan Maas, **Aloysius College** te Den Haag, Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Tim Wouters, **VKO Opwijk**, Ties Brands, **Commanderij College** te Gemert, Walco Verbiest, **Mollerlyceum** te Bergen op Zoom, René Pannekoek, H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Walco Verbiest.

Opgave 54

Veronderstel dat de natuurlijke getallen $x, y, z, n \geq 1$ voldoen aan:

$$x^n + y^n = z^n.$$

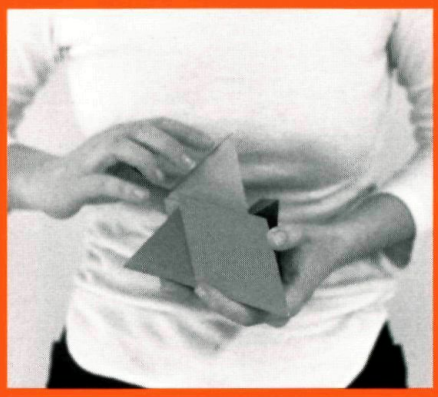
Toon aan dat $x, y, z > n$.

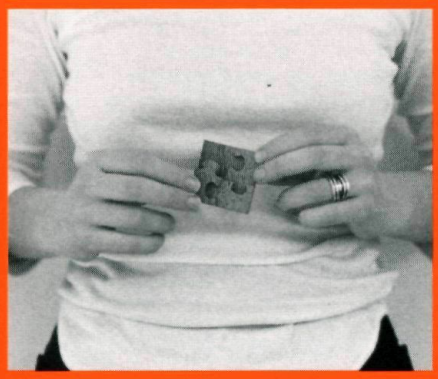
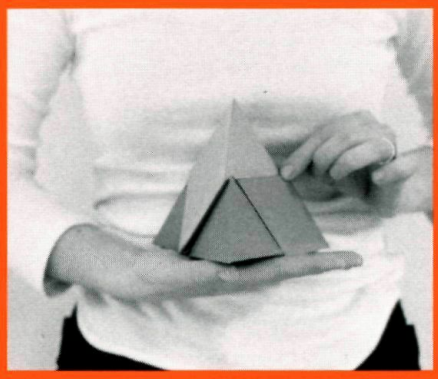
Oplossing. We mogen veronderstellen dat $x \leq y$. Dan is ook $y < z$. Hieruit volgt bovendien $x^n + y^n = z^n \geq (y+1)^n$. Dus:

$$\begin{aligned} x^n &\geq (y+1)^n - y^n \\ &= \binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \dots + 1 \\ &> ny^{n-1}. \end{aligned}$$

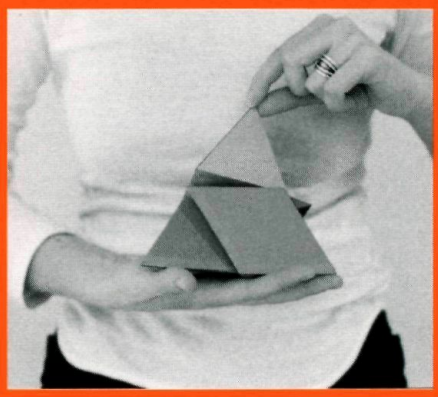
Nu is $x^n > xy^{n-1} \geq nx^{n-1}$, zodat $x > n$. Verder is ook $z > y \geq x > n$. Overigens had de opgave $x,y,z,n > 1$ moeten eisen in plaats van $x,y,z,n \geq 1$. Probeer maar na te gaan waar het anders fout gaat. Oplossingen die de laatste stelling van Fermat gebruiken zijn fout gerekend.
De Pythagoras Olympiade-redactie begrijpt het bewijs van Wiles namelijk niet zo goed – stuur ons gerust een emailtje met wat verheldering.

Deze opgave werd opgelost door:Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen en René Pannekoek.
De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

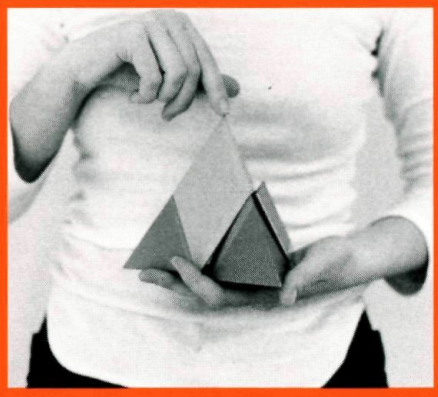


Dit nummer van Pythagoras gaat over drie-dimensionale wiskundige legpuzzels. De stukjes zijn samengesteld uit simpele vormen zoals kubussen of tetraëders en de puzzel is van de stukjes één ruimtelijke figuur te maken. Dit is minder makkelijk dan je denkt: probeer maar eens de puzzel van twee stukjes op pagina 14.

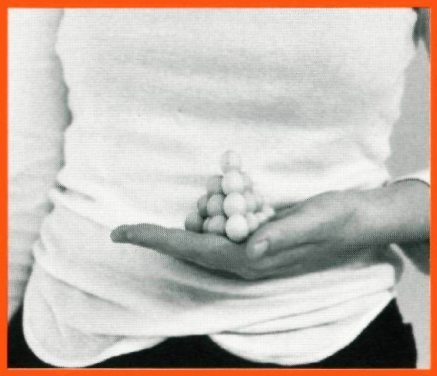
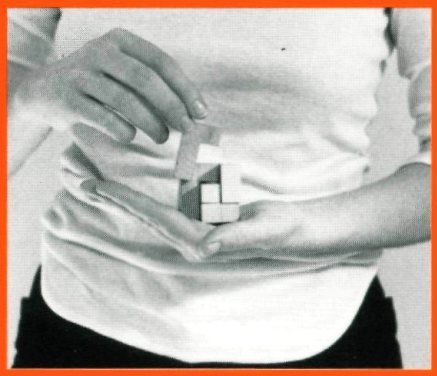


3D puzzels



3D-pentomino's
Pentomino's zijn we in het vorige nummer van Pythagoras tegengekomen. De twaalf pentomino-stukjes zijn precies alle vormen die je kunt maken van vijf vierkantjes. Deze stukjes kun je ook drie-dimensionaal uitvoeren: in plaats van vierkantjes ga je uit van kubusjes.

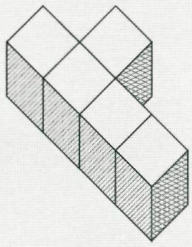
Bij de twaalf 3D-stukjes die je zo krijgt, zijn weer eindeloos veel opdrachten te bedenken. Bijvoorbeeld: maak een blok van 3 bij 4 bij 5.
Lukt dit, probeer dan eens een 2 bij 5 bij 6 blok of een 2 bij 3 bij 10 blok.

Een kralenpuzzel
Om deze piramidepuzzel zelf te maken heb je nodig: twintig houten kralen, een aantal staafjes die zo nauwkeurig mogelijk passen in de gaten van de kralen (bijvoorbeeld pitriet, coctailprikker of metaaldraad), en lijm. Maak twee staafjes zó lang, dat er precies vier kralen op passen. Lijm de kralen op de staafjes aan elkaar vast. Maak op dezelfde manier vier rijtjes van drie kralen lang. Laat de lijm goed drogen. De opdracht is van deze zes stukjes een regelmatig viervlak te maken (een piramide met een driehoekig grondvlak).

De Y-puzzel
Met vijf Y-pentomino's kun je geen 5 bij 5 vierkant vullen, maar met 25 drie-dimensionale Y-pentomino's wel een 5 bij 5 bij 5 kubus. Er zijn 236 verschillende oplossingen, maar ze zijn geen van alle makkelijk te vinden. Eenvoudiger is het wellicht 12 Y-pentomino's te plaatsen in een 3 bij 4 bij 5 blok, of 16 Y-pentomino's in een 4 bij 4 bij 5 blok, of 20 Y's in een 4 bij 5 bij 5 blok.
De 25 Y-puzzel werd ontdekt door David Klarner en door hem en C.J. Bouwkamp in 1970 gepubliceerd in de Journal of Recreational Mathematics.

Een drie-dimensionale Y-pentomino



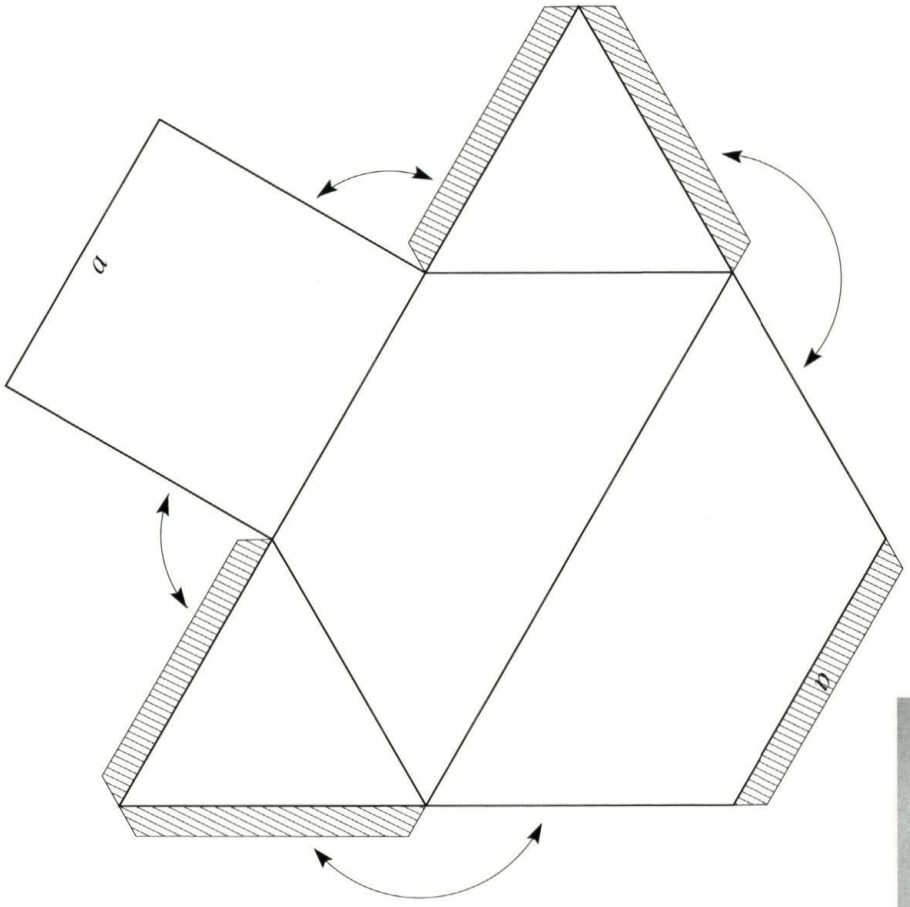
Meer informatie
http://johnrausch.com/PuzzleWorld
http://johnrausch.com/PuzzlingWorld
(prachtig boek van Stewart Coffin, helemaal online)

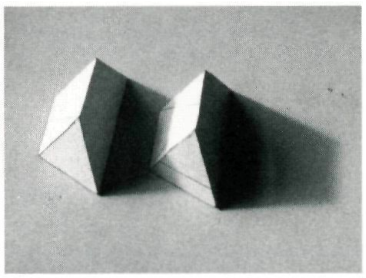
2 Een puzzel van twee stukjes

Deze eerste pyramidepuzzel bestaat uit twee gelijke stukken. Op het eerste gezicht lijkt hij te gemakkelijk om serieus genomen te worden, maar niets is minder waar. Deze zo schijnbaar eenvoudige puzzel heeft menigeen voor onoverkomelijke prolemen gesteld. Een bouwplaat voor één stukje zie je hieronder.

Neem de bouwplaat tweemaal over op dun karton (gebruik een kopieermachine), plak de stukjes zoals aangegeven in elkaar.

Opdracht: voeg beide stukjes aaneen tot een regelmatig viervlak (een pyramide met driehoekig grondvlak).

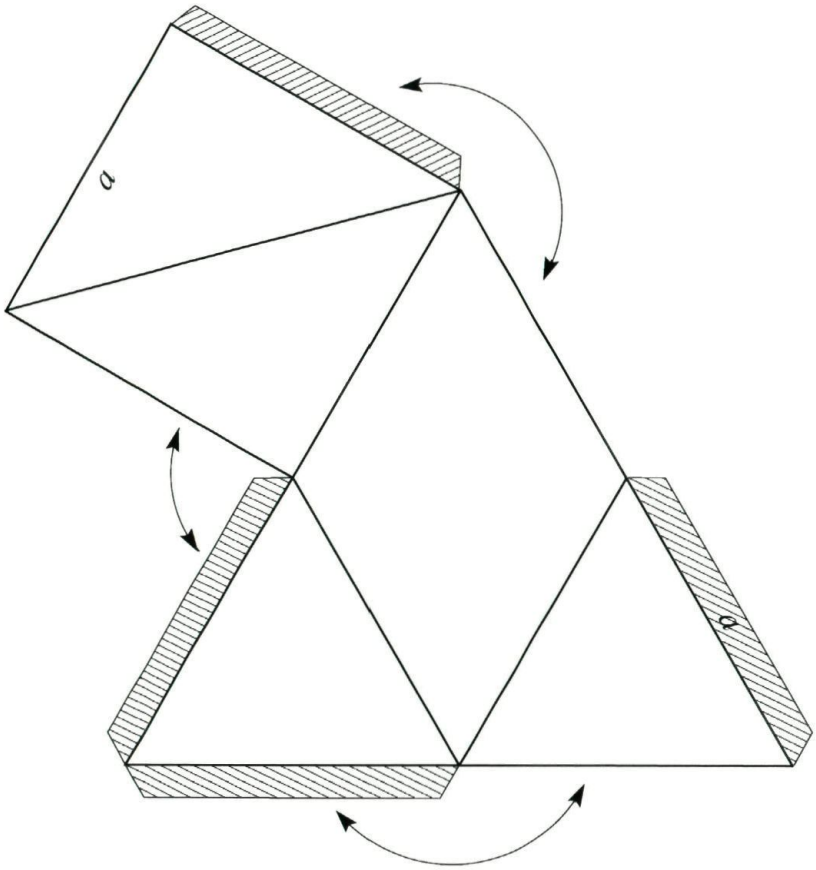




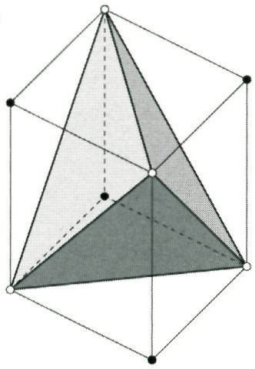
Vermenigvuldig de bouwplaat twee keer. Plak de stukjes in elkaar en maak daarmee een pyramide.

4 Vier stukjes

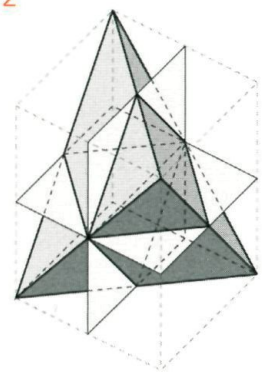
Als je de puzzel met twee stukjes opgelost hebt, ben je klaar voor een pyramidepuzzel met vier stukjes. We gaan uit van een kubus. Kleur de hoekpunten van de kubus langs de ribben om en om zwart en wit. Verbind met behulp van de diagonalen in de zijvlakken de witte hoekpunten (zie de figuur 1). Je krijgt dan een regelmatig viervlak of tetraëder, een ruimtelijke figuur opgebouwd uit vier gelijkzijdige driehoeken. We gaan deze tetraëder in vier stukken verdelen. We zagen eerst de kubus evenwijdig aan een van de zijvlakken doormidden. Dit herhalen we nog een keer, maar nu in een andere richting. Nu is de tetraëder in vier gelijke stukken verdeeld (zie figuur 2). Van deze stukjes kun je ook een bouwplaat maken. Vermenigvuldig de hieronder afgebeelde bouwplaat vier keer en zet de stukjes in elkaar. Je hebt dan een puzzel die moeilijker is dan je zou denken, zelfs al staat de oplossing aangegeven in de figuur.



Figuur

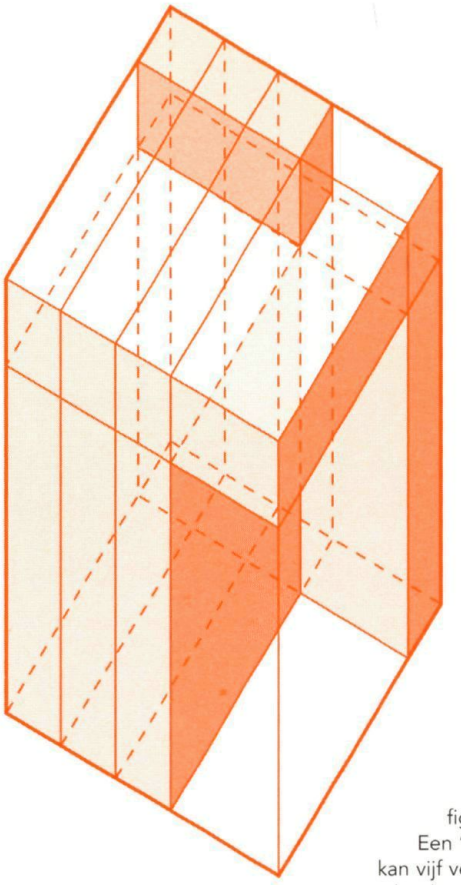


Figuur 2



Vermenigvuldig de bouwplaat vier keer. Plak de stukjes in elkaar en maak daarmee een piramide.

Inpak-proble-men



figuur 1.
Een 'stokje' kan vijf verschillende plakken oneven maken

Als je op vakantie gaat, past vaak niet alles wat je wilt meenemen in je koffer. Dan helpt het om de koffer leeg te maken en je spullen opnieuw in te pakken. Inpakpuzzels zijn op hetzelfde principe gebaseerd: de stukjes passen alleen als je ze op de goede manier inpakt.

Inpakpuzzels bestaan uit een aantal losse stukjes, die je in een omhulsel moet zien te pakken. Zelfs al zijn alle stukjes rechthoekig van vorm, dan nog kunnen deze puzzels erg lastig zijn.

Bob Norton

De volgende puzzel kregen we van Bob Norton uit Madison, Wisconsin, U.S.A. Gegeven zijn een aantal doosvormige stukjes.

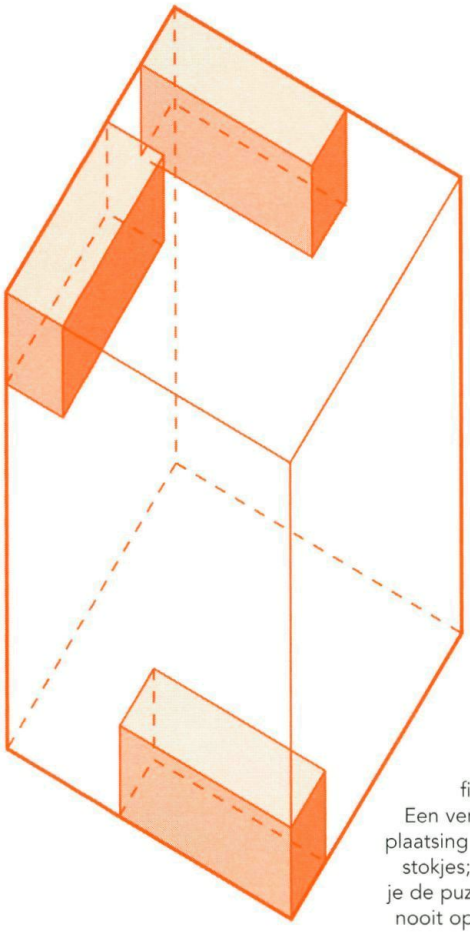
Inpakpuzzel (19 stukjes)

aantal	*afmeting*	*vorm*
3	3 x 1 x 1	'stokje'
1	2 x 2 x 2	'kubus'
3	2 x 2 x 1	'vierkant'
12	2 x 4 x 1	'baksteen'

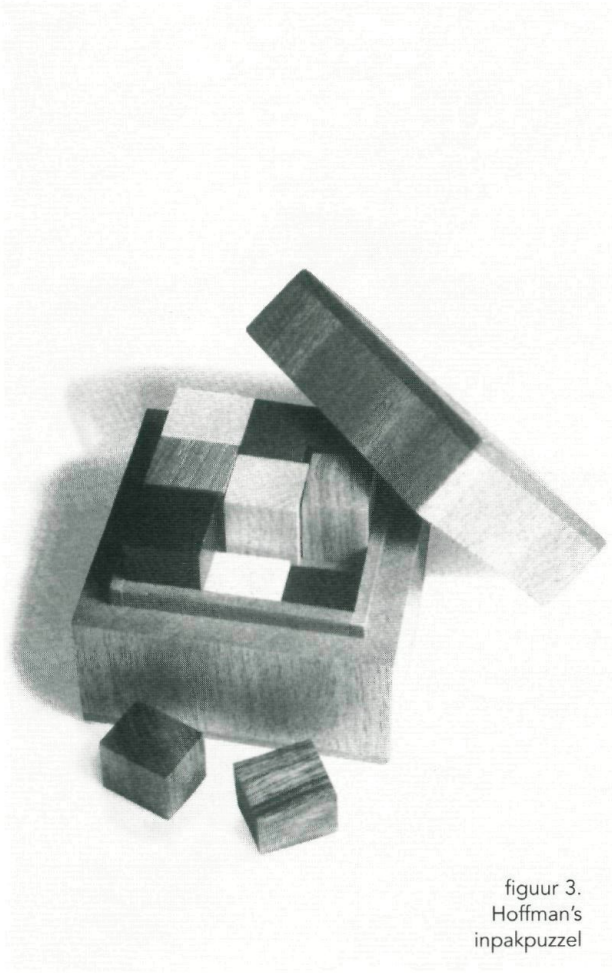
Je berekent gemakkelijk het totale volume van alle stukjes bij elkaar: 125. Dit is precies het volume van een 5 bij 5 bij 5 kubus en dus passen de stukjes samen precies in een kubus. Dat is de opdracht van deze puzzel! Als je dit gewoon gaat proberen, zal dit je niet zo snel lukken, maar er is een wiskundige truc.

Even en oneven

We stellen ons voor dat de puzzel al opgelost is. De kubus kun je van boven naar beneden in vijf verschillende plakken doorzagen, van links naar rechts in vijf plakken en van voor naar achter ook in vijf plakken. Elk van die plakken meet vijf bij vijf en bestaat dus uit een *oneven* aantal kubusjes. In zo'n plak kom je een aantal doorgesneden puzzelstukjes tegen. De enige stukjes die kunnen bijdragen in het oneven zijn van de plak zijn de stokjes. Want hoe je de andere stukjes ook doorsnijdt, altijd bestaat de doorsnede daarvan uit een *even* aantal kubusjes. Elk stokje kan hooguit vijf plakken 'bedienen': met de 1 bij 1 doorsnede drie plakken, en twee plakken met de 3 bij 1 doorsnede. Samen kunnen de



figuur 2.
Een verkeerde plaatsing van de stokjes; zó kun je de puzzel dus nooit oplossen.



figuur 3.
Hoffman's inpakpuzzel

drie stokjes 15 plakken oneven maken. Dit is precies genoeg is om de puzzel op te lossen, want in de 5 bij 5 bij 5 kubus hebben we 15 verschillende plakken geteld.
Je kunt de puzzel dus alleen maar oplossen wanneer elk van de 15 plakken precies één stokje bevat. De truc is dus eerst de drie stokjes zó over de kubus te verdelen, dat elk van de 15 plakken precies één stokje bevat. Dan pas voeg je de andere stukjes toe. Nu is het oplossen van de puzzel een stuk eenvoudiger geworden.

Leo Hordijk
Van Leo Hordijk uit Delft kregen we een variant van deze inpakpuzzel. Als je het bovenstaande begrepen hebt, is ook deze puzzel niet moeilijk meer.

Inpakpuzzel (17 stukjes)

aantal	*afmeting*	*vorm*
5	1 x 1 x 1	'kubus'
6	2 x 2 x 3	'blok'
6	1 x 2 x 4	'baksteen'

Weer is het totale volume gelijk aan 125. De opdracht is van de 17 stukjes een 5 bij 5 bij 5 kubus te maken.

De suikerklontjespuzzel
In 1978 stelde Dean Hoffman tijdens een college aan de universiteit van Miami de vraag hoe je 27 blokken van afmeting $A \times B \times C$ in een kubusvormige doos met ribbe $A + B + C$ kan pakken, waarbij A, B en C verschillend zijn en de kleinste afmeting groter is dan $(A + B + C) / 4$. Bij de houten puzzel uit figuur 3 is elk blok $18 \times 20 \times 22$ mm. De 27 blokken moeten in een doos gepakt worden van $60 \times 60 \times 60$ mm. Dit is een fascinerende puzzel die nog makkelijk te maken is ook: alle stukjes zijn hetzelfde! Het meeste werk is het maken van de doos. Je kunt narekenen dat er zelfs 2160 mm^3 overblijft; je houdt dus ruimte over. Toch is het geen makkelijke puzzel!

Hoffmann's inpakpuzzel (27 stukjes)

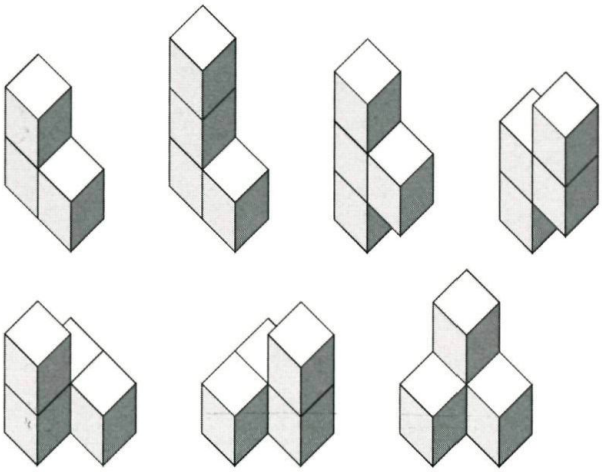
aantal	*afmeting*	*vorm*
27	18 x 20 x 22	'blok'

Kubus Puzzels

Via Internet kun je tegenwoordig talloze (gratis) versies van het klassieke computerspel Tetris downloaden, waaronder ook 3D-Tetris. Voor de drie-dimensionale versie van Tetris moet je je goed kunnen oriënteren in de ruimte. Hetzelfde geldt voor de Soma-kubus, die het voordeel heeft dat je hem in je handen kunt nemen.

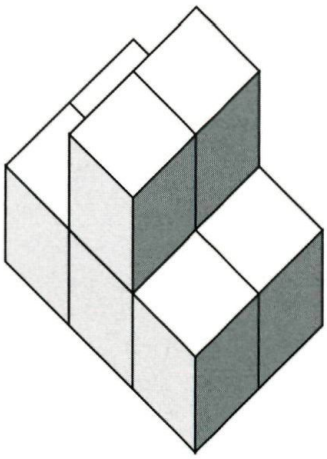
Soma

De Soma-kubus is een van de meest bekende drie-dimensionale wiskundige legpuzzels, een van de weinige puzzels waarover een tijdschrift is verschenen. Soma werd in 1936 ontworpen door de Deense dichter Piet Hein, tijdens een college over quantum-mechanica door Werner Heisenberg. Terwijl de Duitse fysicus sprak over een ruimte opgedeeld in kubussen, bedacht Hein dat, als je rechte lijnen uitsluit, je van drie of vier kubussen precies zeven vormen kunt maken. Bovendien bedacht hij dat deze vormen precies passen in een 3 bij 3 bij 3 kubus. Na afloop van het colege bouwde Hein uit 27 kubussen meteen de zeven Soma-vormen en controleerde hij zijn berekeningen.



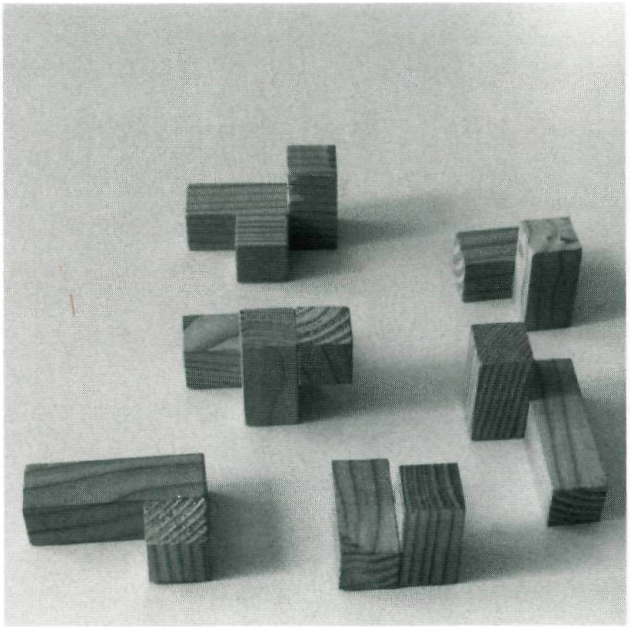
De zeven Soma-stukjes.
Opdracht: maak een kubus.

De Soma-puzzel kun je zoals Hein uit je hoofd oplossen, maar makkelijker is het zelf een Soma-kubus te maken. De puzzel uit figuur 2 is een opwarmertje.

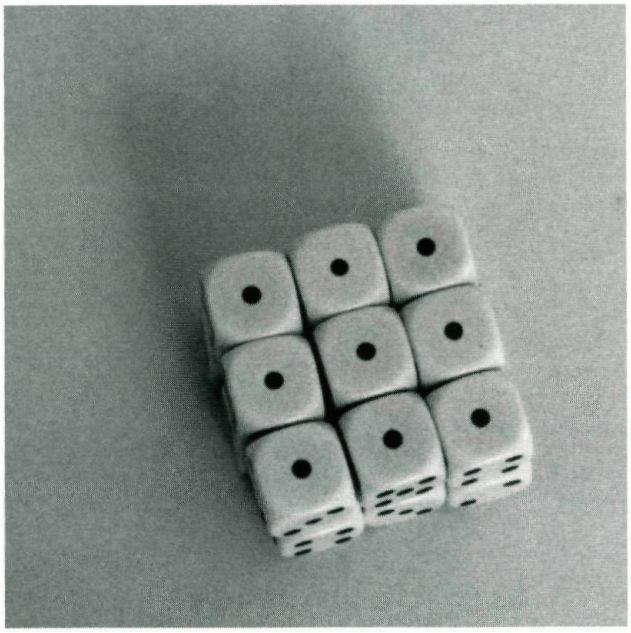


Figuur 2. Uit welke twee Soma-stukjes is deze vorm gemaakt?

De Soma-stukjes passen op 240 verschillende manieren in een 3 bij 3 bij 3 kubus. Maar dat is niet de enige vorm die je kunt krijgen; uit deze zeven simpele stukjes kunnen duizend- en andere mooie meetkundige figuren gevormd worden.
De naam 'Soma' is ontleend aan de drug uit Aldous Huxley's *Brave New World*. Deze drug brengt de gebruiker in een droomwereld, dus weet waar je aan begint.



Figuur 3. De T.I.D-puzzel.
Opdracht: maak een kubus.



Boven: Diabolische dobbelstenen.

De T.I.D-puzzel

Odette de Meulemeester zond ons een variant van Soma, gemaakt door leerlingen van het Technisch Instituut Depoorter uit Ronse (België). De puzzel heeft zes stukjes in plaats van zeven en is afgebeeld in figuur 3.

Diabolische dobbelstenen

De diabolische dobbelsteen-puzzel is een uitvinding van Wil Strijbos, een Nederlandse puzzelmaker. Hij is opgebouwd uit negen L-vormige stukjes die elk bestaan uit drie dobbelstenen. Alles wat je dus nodig hebt voor deze puzzel zijn 27 dobbelstenen en een tube superlijm (pas op je vingers!).
Door de dobbelstenen naar eigen ontwerp aan elkaar lijmen kun je de puzzel zo moeilijk maken als je wilt. Je kunt bijvoorbeeld de zijden van de grote kubus laten bestaan uit 6 enen, 6 tweeën, 6 drieën, enzovoort.
Of je zorgt ervoor dat op alle zes zijden van de grote kubus evenveel ogen staan.

Zelf maken

De beschreven puzzels kun je allemaal maken uit losse kubusjes die je aan elkaar lijmt.
Je kunt proberen zelf kubussen te zagen uit een houten lat met een vierkante doorsnede. Maar daarvoor heb je eigenlijk meubelmakersgereedschap nodig, want anders wordt de zaagsnede te ruw of niet helemaal haaks. Waar koop je kubussen? Bijvoorbeeld in een kralenwinkel (vierkanten kralen) of een speelgoedwinkel (houten bouwblokken of dobbelstenen). Bij het ABC-Schuimplastichuis in Amsterdam kochten we voor fl. 0,25 schuimplastic kubussen van 5 bij 5 bij 5 centimeter, aan elkaar te lijmen met Bisontix.
Voor fl. 6,75 heb je zo een eigen Soma-kubus van 15 bij 15 bij 15 centimeter.

Gebruikte bronnen

Jack Botermans en Jerry Slocum,
Puzzels zelf maken en oplossen,
Hema, 1986.
Jack Botermans en Jerry Slocum,
Puzzels klassiek en modern,
Zomer & Keuning, 1992.
Martin Gardner,
More mathematical puzzles and diversions,
Penguin, 1961.

Elk getal is bijzonder

Uitslag prijsvraag nr.1

René Swarttouw

Wist je dat 7 het kleinste getal is dat te schrijven is als verschil van twee derdemachten? En dat 19 het kleinste getal is dat gelijk is aan de som van zijn cijfers plus het produkt van zijn cijfers?

In de prijsvraag van het oktobernummer vroegen we de lezers om een zo groot mogelijke lijst van 'bijzondere getallen' van 1 tot en met 100 te maken. Dat we ze hiermee voor een ongelofelijk grote klus hadden gezet, hebben we eerlijk gezegd een beetje onderschat. Uiteindelijk kregen we drie lijsten binnen waarin alle getallen van 1 tot en met 100 werden beschreven. De inzenders zijn tevens de prijswinnaars van een boekenbon van f 100,-.

27 A4-tjes

De eerste inzender is oud-leraar wiskunde **Toon Huybrechts** uit Puurs in België, die de redactie een pak van maar liefst 27 A4-tjes bezorgde! Daarin noemt hij van ieder getal een bijzondere eigenschap, hoewel deze vaak niet het getal uniek vastlegt. Zo benoemt hij 28 als perfect getal: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Dat is inderdaad een bijzondere eigenschap van 28, maar dat legt 28 niet uniek vast, omdat er veel meer perfecte getallen zijn.

Toch vonden we deze inzending zo indrukwekkend, dat de prijs meer dan verdiend is. De tweede prijswinnaar is **Herbert Beltman** uit Markelo. Hij wist voor alle getallen van 1 tot 100 een originele en unieke eigenschap te verzinnen. Bij geen enkele omschrijving maakte hij gebruik van andere getallen. Zijn complete lijst inclusief een verklarende tekst kun je vinden op de homepage van Pythagoras. Tenslotte viel **Tim Wouters** van het Vrij Katholiek Onderwijs Opwijk in België in de prijzen. Hij produceerde een complete lijst met unieke omschrijvingen voor alle getallen van 1 tot 100, maar had daar wel vaak de hulp bij nodig van andere getallen.

Bijzondere getallen

20 is het grootst mogelijke aantal vlakken van een regelmatig veelvlak;
31 is het kleinste priemgetal waarbij het omgekeerde getal een kleiner priemgetal is;
37 is het kleinste priemgetal dat zowel het verschil van twee derde machten als de som van twee kwadraten is;
64 is het kleinste even getal dat zowel een kwadraat als een derde macht is;
88 is het kleinste meercijferige getal waarbij de som van de cijfers een kwadraat is en het product van de cijfers een ander kwadraat.

Oplossingen

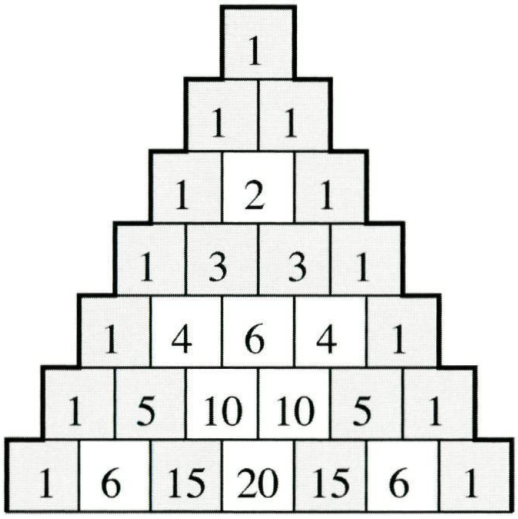
Knikkerlabyrint
OZW - ZWN - WZW - NON - ONW - ZOZ
Getallenlabyrint
ZOW - NNZ - WZO - NWZ - OWO - ZWO
Priemladder
5 - 2 - 6 - 4 - 6 - 8 $\mapsto$ 31
5 - 2 - 4 - 2 - 4 - 6 - 8- 6 - 4 - 6 - 6- 8 $\mapsto$ 61
5 - 2 - 4 - 2 - 4 - 6 - 8 - 6 - 4 - 2 - 4 - 6 - 8 - 6 - 4 - 2 - 6 - 4 - 6 - 8 $\mapsto$ 97

Dwalertjes 2

DE DRIEHOEK VAN PASCAL

Dion Gijswijt

De driehoek van Pascal is een van de mooiste en verrassendste getalpatronen in de wiskunde. De driehoek is zó eenvoudig dat iedereen hem zonder moeite kan opschrijven. Het getallenpatroon bezit veel merkwaardige eigenschappen. Hoewel de driehoek duizend jaar geleden al bekend was aan Chinese en Indiase wiskundigen, is de driehoek vernoemd naar de 17-de eeuwse Franse wiskundige Blaise Pascal, die een boek over deze 'rekendriehoek' schreef.



Figuur 1.
De eerste zeven rijen van de driehoek van Pascal

Het recept
In figuur 1 zie je de eerste rijen van de driehoek van Pascal. Bovenaan staat het getal 1. Alle andere getallen zijn daaruit afgeleid volgens een eenvoudig recept: *elk van deze getallen is gelijk aan de som van de twee getallen erboven.*
Voor de enen op de rand moet je aannemen dat buiten de driehoek nullen staan.

Opgave. Neem de driehoek over en bereken de getallen in rij 8 tot en met 10.

Opgave. Het aantal getallen in de eerste rij is 1. Het aantal getallen in de eerste twee rijen is gelijk aan 3. Tel ook het aantal getallen in de eerste 3, 4 en 5 rijen. De uitkomsten zijn de eerste vijf driehoeksgetallen. Zoek de driehoeksgetallen op in de driehoek van Pascal. Bereken het totaal aantal getallen in de eerste acht rijen van de driehoek.

Opgave. Bereken de som van de getallen uit rij 1 en doe dat ook voor rij 2, 3, 4 en 5. Kun je de verdubbelingen verklaren?

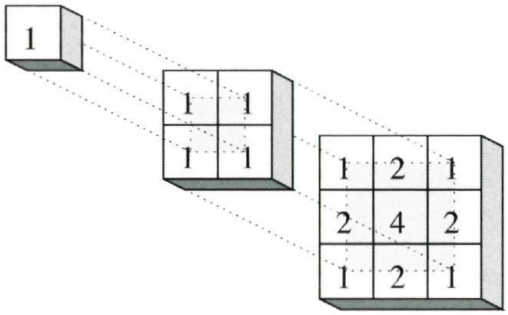
Opgave. Kleur de oneven getallen in de driehoek. Zie je het patroon? Een getal in de driehoek is oneven als precies één van de twee getallen erboven oneven is. Met deze truc kun je, zonder te rekenen, snel nieuwe rijen kleuren.

Een pyramide
"Mijnheer, kunnen we niet een *pyramide* bouwen, met net zulke eigenschappen als de driehoek van Pascal?" Een idee van Peter, leerling van het vijfde jaar industriële wetenschappen, campus Glorieux. Het idee is gelanceerd, de zoektocht is gestart. Twee uur intensief rekenwerk ▶

EEN PYRAMIDE VAN PASCAL

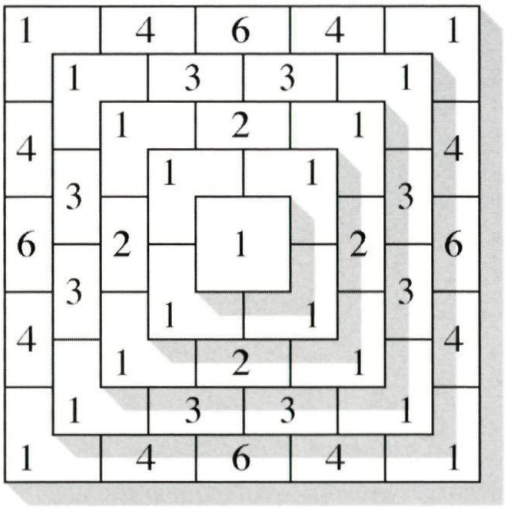
leveren resultaat op. De pyramide komt niet alleen op papier, maar wordt ook in werkelijkheid gebouwd.
Twee houten torens prijken in de wiskundeklas van Jo Verstraete en de leerlingen van klas 5 IW. Zodra het bedenken van de driedimensionale uitbreiding van de driehoek van Pascal begonnen is, rijst meteen de vraag: "Hoeveel zijden moet de pyramide krijgen? Drie, vier, zes?" Welke pyramide het makkelijkst werkt of de mooiste eigenschappen bezit is niet meteen duidelijk. Uiteindelijk bijt Peter zich vast in de driezijdige pyramide en werkt Stijn aan een vierzijdige variant. Kristof, Stefaan, Wesley, Lesley en Kristof springen in waar nodig, schrijven bewerkingen uit, testen hypothesen en doen rekenwerk, met een prachtig resultaat.

Een vierzijdige pyramide
De pyramide van Stijn is opgebouwd uit vierkante lagen. De toplaag bestaat uit een enkel blokje met het getal 1.
De tweede laag bestaat uit vier blokjes, de derde uit negen, de vierde uit zestien, en zo verder. Het getal op een blokje wordt berekend door de getallen op de vier blokjes erboven op te tellen.
Blokjes in de zijvlakken van de pyramide hebben minder dan vier bovenburen, dus tellen we de ontbrekende blokjes als 0.
Zo bestaat de tweede laag uit 4 enen, want elk blokje heeft maar één bovenbuur. De derde laag wordt al iets interessanter. Zie figuur 2.

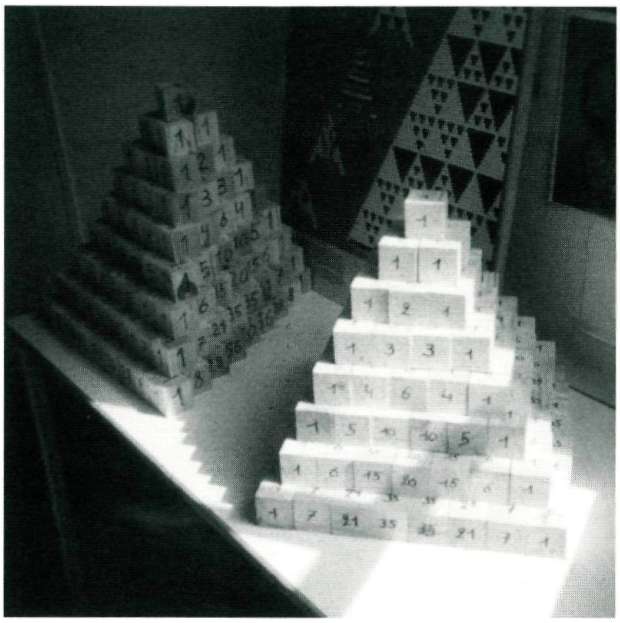


Figuur 2. De eerste drie lagen van de pyramide van Pascal

Reken je nog meer lagen uit, dan is er iets dat meteen in het oog springt: op de zijvlakken komt de driehoek van Pascal weer tevoorschijn! Zie figuur 3.



Figuur 3. Vijf lagen van de pyramide van Pascal.



Een tweede verrassende eigenschap openbaart zich als we de vijfde laag wat beter bekijken. Zie figuur 4.

Elk getal is precies gelijk aan het product van de bijbehorende getallen op twee zijden. Dit blijkt ook te gelden voor alle getallen in alle andere lagen van de pyramide. Om de getallen binnenin de pyramide te weten te komen hoef je dus enkel de juiste twee getallen op de zijvlakken met elkaar te vermenigvuldigen.

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Figuur 4. De vijfde laag.

Opgave. Elk van de randen van de pyramide bestaat uit enkel enen. Hoe ziet de rij daaronder er uit?

Opgave. Bereken de som van de getallen in de tweede laag en doe hetzelfde voor de getallen in de derde laag en die in de vierde laag. Kun je verklaren waarom de som van de getallen in de opeenvolgende lagen steeds met een factor 4 groeit?

Een driezijdige pyramide

Peters pyramide bestaat uit driehoekige lagen (zie foto). Het getal in de top is weer 1. Om het getal van een ander blokje te berekenen tel je de getallen van zijn directe bovenburen bij elkaar op. Elk blokje (dat niet in een zijvlak ligt) heeft nu precies 3 bovenburen. Ook deze pyramide heeft bijzondere eigenschappen.

Opgave. De som van de getallen in de eerste laag is 1. De som van de getallen in de tweede laag is 3. De derde laag geeft als som 9, daarna 27, 81, enzovoorts. Waarom verdrievoudigt de som van de achtereenvolgende lagen telkens?

Opgave. Tel het aantal blokjes in de eerste 1, 2, 3 en 4 lagen. Je vindt dan de eerste vier pyramide-getallen: 1, 4, 10, 20. Zoek de pyramide-getallen op in de driehoek van Pascal en bepaal het aantal kubusjes in de driezijdige pyramide op de foto.

Meer informatie

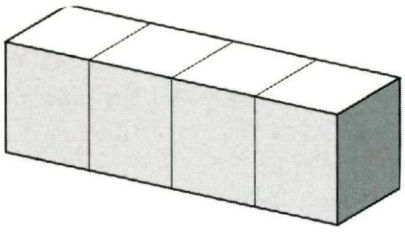
Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, Penguin, ISBN 0-14-013507-3

http://members.tripod.com/~absolutebow/ptri2.html

°Problemen

Dion Gijswijt

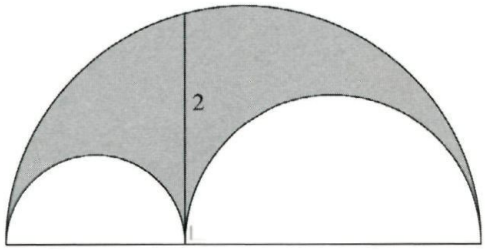
Kubuspuzzel
Stel dat je een onuitputtelijke voorraad blokjes hebt met afmetingen 1 bij 1 bij 4. Natuurlijk kun je met deze blokjes een kubus van 4 bij 4 bij 4 maken.
Je hebt dan 16 blokjes nodig. Kun je met deze blokjes ook een kubus van 6 bij 6 bij 6 maken? Voor welke getallen n je een kubus met zijde n maken?



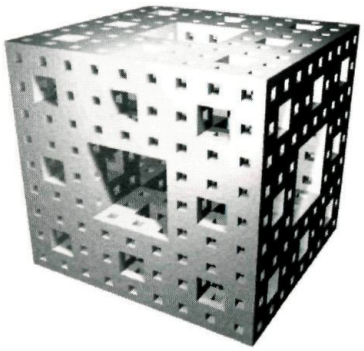
Bomen planten
Is het mogelijk om tien bomen zó te planten, dat je vijf rijen van vier bomen krijgt?

Vier getallen
Ik heb vier getallen in gedachten. Van elk tweetal van deze vier getallen kan ik de som berekenen. Als ik dat doe, dan krijg ik de volgende zes getallen: 5, 7, 10, 10, 13 en 15. Welke 4 getallen heb ik in gedachten?

Sikkel
Bereken de oppervlakte van het sikkelvormige, grijze gebied.



Menger
Neem een kubus met zijden 1. Verdeel de kubus in zevenentwintig even grote kubusjes en verwijder het middelste kubusje en de zes kubusjes die eraan grenzen. Op de resterende twintig kubusjes kun je hetzelfde recept toepassen en met de kleine kubusjes die dan ontstaan kun je dit nog eens doen. Bereken het volume van het restant.
N.B. Als je dit proces oneindig herhaalt, krijg je de zogenaamde 'spons van Menger'.

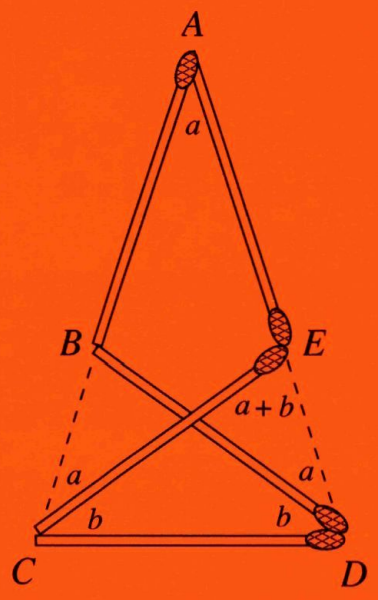


°Oplossingen nr.3

Dion Gijswijt

Lucifers

Hoek AEC is gelijk aan $180 - (a+b)$ en aan $180 - 2a$, dus $a = b$.
Omdat $3a + 2b = 180$ is $a = 36$.



Set

Neem voor de eerste kaart van de Set een willekeurige kaart, daarvoor zijn er 81 mogelijkheden. Kies hier een tweede kaart bij. Hiervoor zijn er per eigenschap twee mogelijkheden, dus voor de tweede kaart zijn er in totaal $2^4 = 16$ mogelijkheden. De derde kaart van de Set ligt nu vast. Zo krijg je $81 \times 16 = 1296$ Sets. Elke gevonden Set tel je zo $3 \times 2 = 6$ keer, dus er zijn 216 verschillende Sets met vier eigenschappen verschillend.

Kaas

Kijk naar de middelste kubus. Voor elk zijvlak hiervan moet je een keer snijden. De kubus heeft 6 zijvlakken, dus je moet minstens 6 maal snijden, hoe je de brokstukken tussen het snijden rangschikt. Je mag zelf nagaan dat het ook echt in zes keer kan.

Voetbal

Elke vijfhoek levert 5 ribben op en elke zeshoek 6, dus in totaal tel je dan $5 \times 12 + 6 \times 20$ ribben, dus 180 ribben. Op deze manier tel je echter elke ribbe tweemaal, want elke ribbe ligt in twee zijvlakken. Het aantal ribben is dus $180 / 2 = 90$.

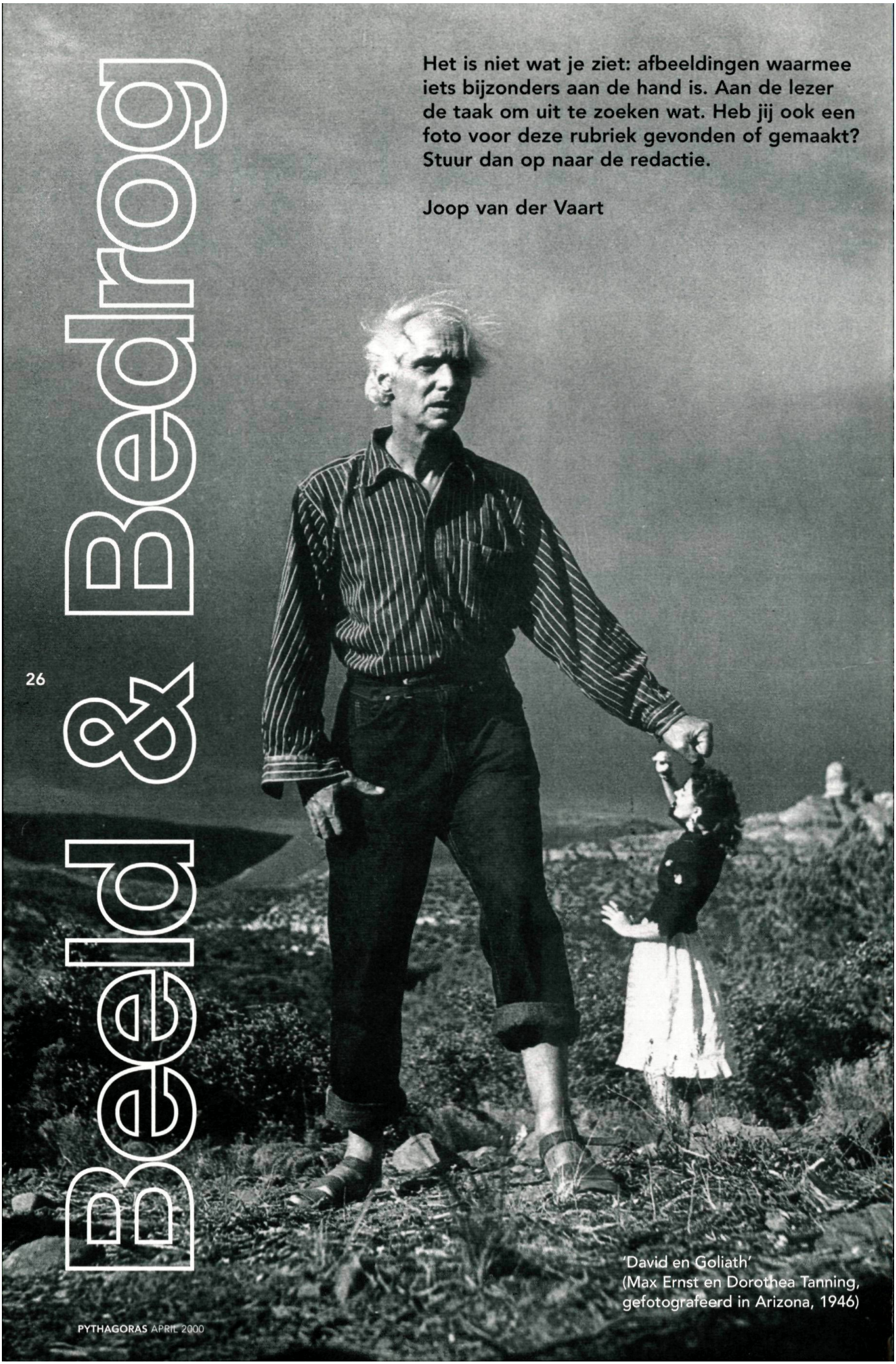
Moderne kunst

6	10	16	20	12
15	25	40	50	30
18	30	48	60	36
12	20	32	40	24
21	35	56	70	42

Beeld & Bedrog

Het is niet wat je ziet: afbeeldingen waarmee iets bijzonders aan de hand is. Aan de lezer de taak om uit te zoeken wat. Heb jij ook een foto voor deze rubriek gevonden of gemaakt? Stuur dan op naar de redactie.

Joop van der Vaart



'David en Goliath'
(Max Ernst en Dorothea Tanning, gefotografeerd in Arizona, 1946)

'Upstairs downstairs' (1978)

De post

Iedereen kent Rubik's kubus: elk zijvlak is verdeeld in negen vierkantjes, waarvan de kleur per zijvlak verschilt.
Na een paar keer draaien zitten de kleuren hopeloos door elkaar en is het de puzzel om de vlakjes weer op de juiste plaats te draaien. Voor wie hier zelf niet uit kan komen is het computerprogramma van **Johan de Ruiter** een uitkomst. Geef op het scherm aan welke kleur de vlakjes op je (verdraaide) kubus hebben en het programma leidt je stap voor stap naar de oplossing. Een heel handig programma dat te vinden is op zijn homepage.
Een andere goede reden om zijn site te bezoeken is zijn prachtige pagina opgedragen aan het getal π. Wist je bijvoorbeeld dat het wereldrecord decimalen van π uit je hoofd kennen staat op naam van Hiroyuki Goto? Deze Japanner kon binnen 9 uur maar liefst 41 duizend decimalen van π opdreunen. Het adres is:
http://home-5.worldonline.nl/~jdrsoft

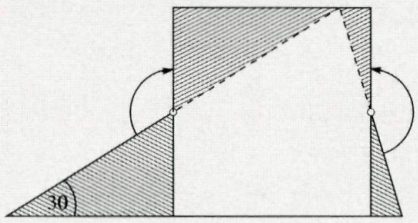
Set
Op zijn webpagina legt **Hubert Massin** uit hoe je zelf Escher-achtige betegelingen kunt maken. Daarnaast kun je er nog veel meer leuke wiskunde vinden, zoals allerlei informatie over het spel **Set** (zie decembernummer).
Dit is het adres:
http://www.mathekiste.de.

Geen priemgetal
"Vind 10 opeenvolgende niet-priemgetallen", was de opdracht uit de probleemrubriek van december 1999. **Martijn van Steenbergen** (14) schreef een computerprogramma om dit probleem op te lossen. "De eerste rij van tien of meer opeenvolgende niet-priem-getallen is 114 tot en met 126: een rij van maar liefst 13 getallen in plaats van 10", schrijft Martijn.
Behalve (niet-)priemgetallen zoeken kan z'n programma ook de delers van een getal berekenen. Zijn homepage is: http://Martijn.van.Steenbergen.nl

Een mooie verdeling
Op pagina 22 van het Februari-nummer stond de volgende puzzel.

Gegeven is een gelijkbenige driehoek met tophoek 30 graden. Beide lange zijden zijn 2. De oppervlakte van de driehoek is 1. Verdeel de driehoek en voeg de stukken aaneen tot een vierkant met zijde 1.

Bij de gegeven oplossing werden 4 stukken gebruikt, maar **Anton Hanegraaf** stuurde een elegantere oplossing op. Hij heeft maar drie stukjes nodig, die je bovendien scharnierend aan elkaar vast kunt maken:



Boeken

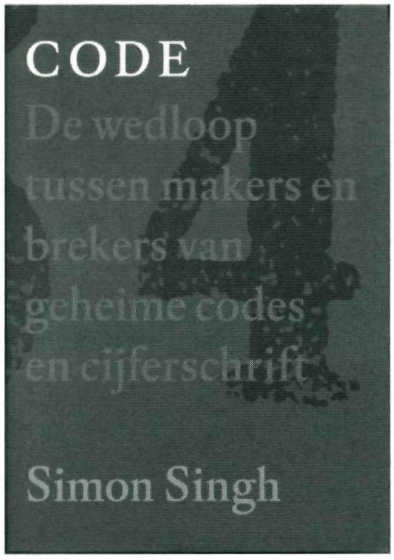
Code

Michiel Vermeulen

Eind vorig jaar is er een spannend boek verschenen over cryptografie of geheimschriften. Het boek heet *Code* en is geschreven door Simon Singh. Het behandelt de geschiedenis van de cryptografie vanaf de Oudheid tot nu. In jaargang 1997-1998 van Pythagoras is er ook ruim aandacht aan cryptografie besteed en dit boek is hier een mooie aanvulling op. Iedereen die geïnteresseerd is in geheimschriften kan dit boek makkelijk lezen, er is eigenlijk geen wiskundige kennis voor nodig.

Cryptografie komt reeds voor bij de oude Grieken, Romeinen, Arabieren en Perzen. Bekend is het eenvoudige geheimschrift van Julius Caesar: Elke letter werd drie plaatsen opgeschoven, dus Veni, Vidi, Vici werd YHQL, YLGL, YLFL. Behalve dit eenvoudige geheimschrift worden in *Code* vele andere geheimschriften behandeld. Bijvoorbeeld dat van Mary, 'Queen of Scots', dat echter ontcijferd werd waardoor ze uiteindelijk op het schavot belandde — een geheimschrift kan dus een kwestie van leven of dood zijn.
Geheimschriften werden oorspronkelijk alleen gebruikt in het diplomatieke verkeer en in oorlogen om het vijandelijke staten en legers moeilijk te maken geheime berichten te ontcijferen. Het breken van de Duitse Enigma-code in de tweede wereldoorlog door de Engelsen is waarschijnlijk van doorslaggevende betekenis geweest om de oorlog te bekorten. Het resultaat ervan was dat de geheime routes van Duitse U-boten bij de geallieerden bekend werden.Tegenwoordig wordt cryptografie veel gebruikt door banken om geldtransacties te versleutelen, zodat ze niet door 'digitale bankrovers' onderschept kunnen worden.
Ook gewone e-mail wordt tegenwoordig vaak versleuteld om de privacy van zender en ontvanger te beschermen. Dit gebeurt met wiskundige cryptografische technieken zoals RSA dat in jaargang 1997-1998 van Pythagoras uitgelegd wordt.
Code is een veelzijdig en spannend boek dat ik zeer de moeite waard vind voor iedereen die in de geschiedenis van cryptografie geïnteresseerd is. In het boek is een prijsvraag opgenomen bestaande uit tien te ontcijferen geheimschriften.
Degene die als eerste alle geheimschriften heeft ontcijferd kan 10.000 pond verdienen. Zie:
www.4thestate.co.uk/cipherchallenge

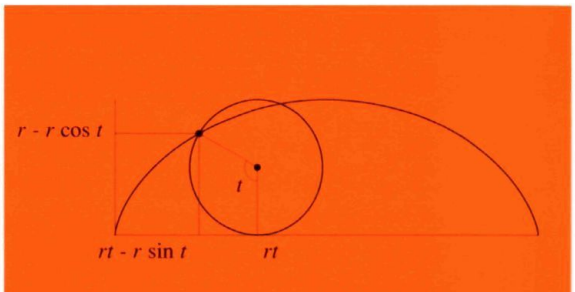
Simon Singh, *Code, de wedloop tussen makers en brekers van geheime codes en cijferschrift*, Arbeiderspers, 1999, Amsterdam.
ISBN: 90-295-3743-4



De cycloïde

Klaas Pieter Hart

De vorm van skateboardhellingen kun je afleiden uit de naam 'half pipe': een halve cilinder. Maar is een halve cirkel wel de ideale doorsnede? Een cycloïde zou veel logischer zijn: met die kromme kun je een perfect regelmatig ritme aanhouden. Maar pas op: de cycloïde geeft ook de kortste 'slingertijd'.



Figuur 1

In 1696 daagde Johan Bernoulli de geleerden op de hele wereld uit het volgende probleem op te lossen: Gegeven zijn twee punten aan de muur. De opdracht is de kromme te vinden waarlangs een wrijvingsloos object zo snel mogelijk van het ene naar het andere punt glijdt. Hij noemde die kromme de *brachistochroon*, van brachos (kort) en *chronos* (tijd). Toen hij een tijdje later de oplossing publiceerde schreef hij: *Geachte lezer, U zult stomverbaasd zijn te leren dat deze kromme, de brachistochroon, niets anders is dan de tautochroon van Huygens!*

Huygens

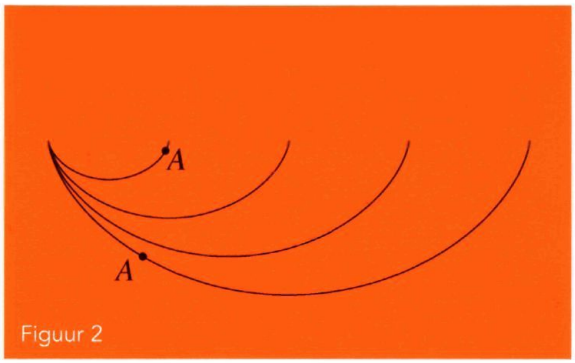
Wat was er aan de hand? Een aantal jaren eerder, in 1673, had Christiaan Huygens onderzocht hoe je een slingeruurwerk regelmatig kon laten lopen. Bij een gewone slinger — een gewicht aan een touwtje dat aan een vast punt hangt — hangt de slingertijd af van de uitwijking: bij grotere uitwijking wordt de slingertijd ook groter. Dat is niet zo handig als je een slingeruurwerk wilt maken. Huygens ontdekte dat als je het gewicht van een slinger niet langs een cirkel maar langs een cycloïde kon leiden, de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking werd. Hierom heet de cycloïde ook wel de *tautochroon*, van *tautos* (gelijk) en *chronos* (tijd).

Wielkromme

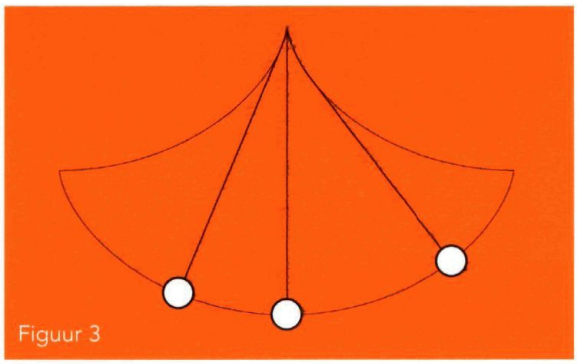
De cycloïde (wielkromme) was een in die tijd al bekende kromme. Je krijgt hem door een cirkel zonder slippen over een rechte lijn te laten rollen en dan de baan van één punt te volgen. Als je bijvoorbeeld op je fiets rijdt, beschrijft het ventiel een cycloïde. Je kunt de kromme als volgt kunt parametrizeren:

$$\begin{cases} x = rt - r\sin t \\ y = r - r\cos t, \end{cases}$$

waarbij r de straal van de rollende cirkel is. (Zie figuur 1).



Figuur 2


Figuur 3

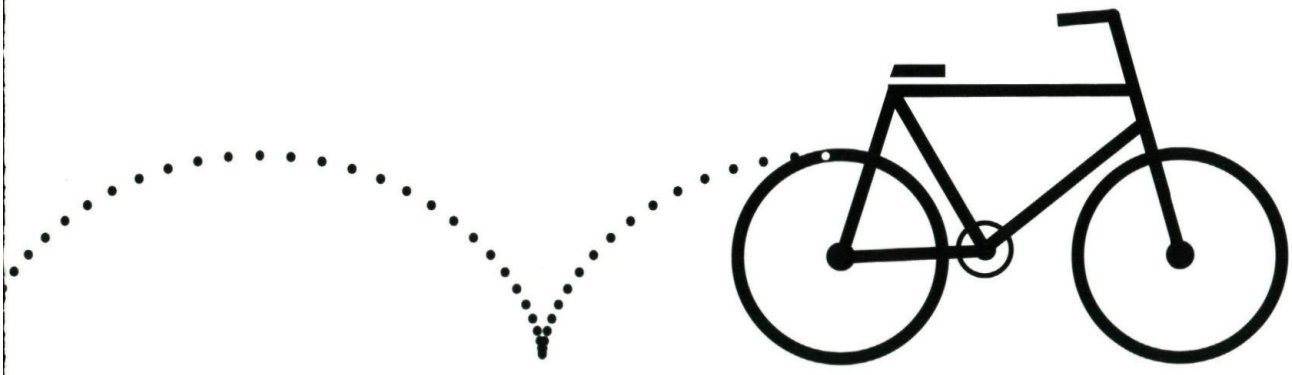
Glijbaan

Als je de cycloïde ondersteboven hangt, krijg je de eigenlijke tautochrone kromme. Deze kromme heeft opmerkelijke eigenschappen: het kan niet schelen hoe hoog (of laag) je begint: het duurt altijd even lang om (wrijvingsloos) naar het laagste punt te glijden.
In diverse wetenschapsmusea kun je zien dat een cycloïde een veel efficiëntere glijbaan oplevert dan bijvoorbeeld een rechte lijn: van twee kogeltjes die tegelijk worden losgelaten is het kogeltje langs de rechte goot merkbaar langer onderweg.
Voor elk eindpunt A is er precies één straal r zó dat de bijpassende cycloïde door A gaat (zie figuur 2). De verrassende conclusie is dat de optimale baan soms even lager dan het eindpunt loopt; de snelheid die je daarmee wint compenseert blijkbaar het verlies tijdens het omhooggaan.

De tautochrone slinger

Huygens ontdekte ook hoe je het gewicht langs een cycloïde kunt laten bewegen: neem twee evengrote cycloïden, hang ze naast elkaar en hang in hun ontmoetingspunt een gewicht aan een touw dat half zo lang is als de cycloïden zelf; omdat het touw door de cycloïden in zijn beweging wordt beperkt gaat het gewicht een derde (weer even grote) cycloïde beschrijven. (zie figuur 3)

Johann Bernoulli was niet de enige die zijn eigen probleem oploste. Vele anderen, onder wie zijn broer Jakob en Isaac Newton slaagden er in de brachistochroon te beschrijven.



Agenda

vrijdag 7 april 2000
Mastercourse Financiële wiskunde
Voor wiskundedocenten
Universiteit van Amsterdam
tel 020-59995750, email kattie@wins.uva.nl

vrijdag 14 april 2000
Symposium **Wiskunde in bedrijven**
Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
www.tem.nhl.nl/tem/exact/bwisymp

vrijdag 14 april 2000
Open Huis voor vwo-leerlingen
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
www.math.leidenuniv.nl/~voorlichting
tel 071 5277121

do 27 en vr 28 april 2000
Nederlands Wiskundig Congres 2000
Universiteit Limburg, Maastricht
www.math.unimaas.nl/events/nmc2000

di 25 en wo 26 april 2000
Voorlichtingsdagen TU Eindhoven
tel 040 247 4747

dinsdag 9 mei 2000
Daniel Bernoulli and the varieties of mechanics in the 18th century
Johann Bernoulli-lezing door I. Grattan-Guinness
Met een inleiding door Jan van Maanen
050-3637132

zaterdag 27 mei 2000
100 jaar wiskunde onderwijs
Hogeschool Domstad, Utrecht
tel 020 6121382 of 030 2611611

vrijdag 9 juni 2000
Open dag op locatie
Universiteit van Amsterdam
tel 020-59995750, email kattie@wins.uva.nl

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.

Universiteit van Amsterdam

TU Delft

Universiteit Leiden

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855175,
per fax: 0522 855176,
via Internet: www.wins.uva.nl/science/pythagoras/
schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17,
NL- 7940 VB Meppel.

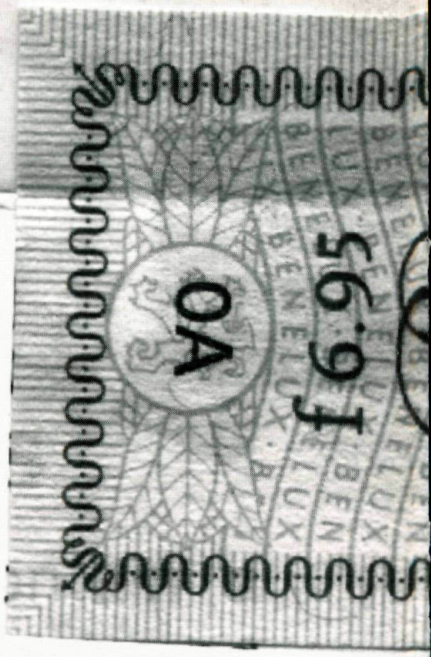
Tarieven 1999-2000
Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost ƒ 37,50. Losse nummers ƒ 8,- of BF 160.
Overige prijzen per jaar:
Pythagoras België BF 950,
Pythagoras buitenland ƒ 52,50.
Pythagoras én Archimedes ƒ 67,50,
Pythagoras én Archimedes België BF 1570,
Pythagoras én Archimedes buitenland ƒ 83,50.

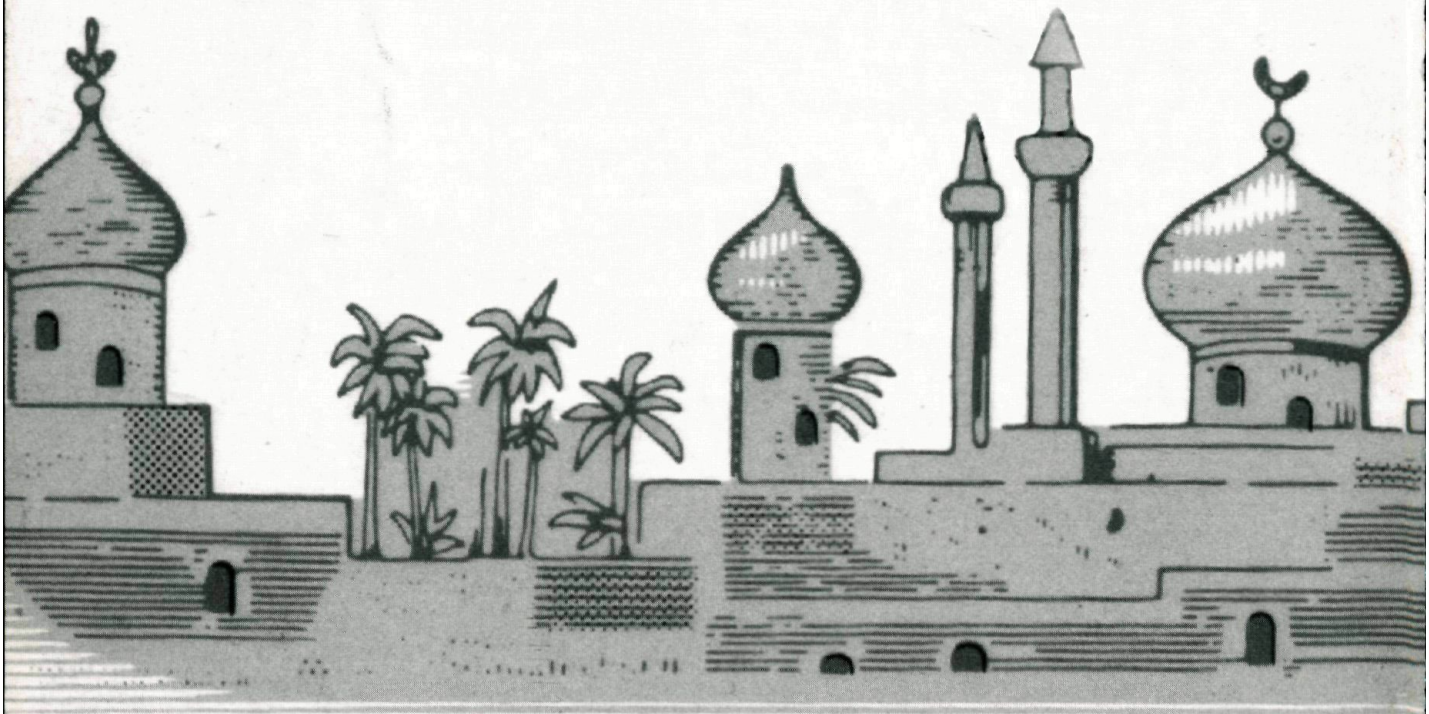
Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:
Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen
Voor scholen zijn er bulkabonnementen.
Prijs: f 25,- / BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen. Prijs: ƒ 30,- /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37 en 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).





39ste JAARGANG NUMMER 4