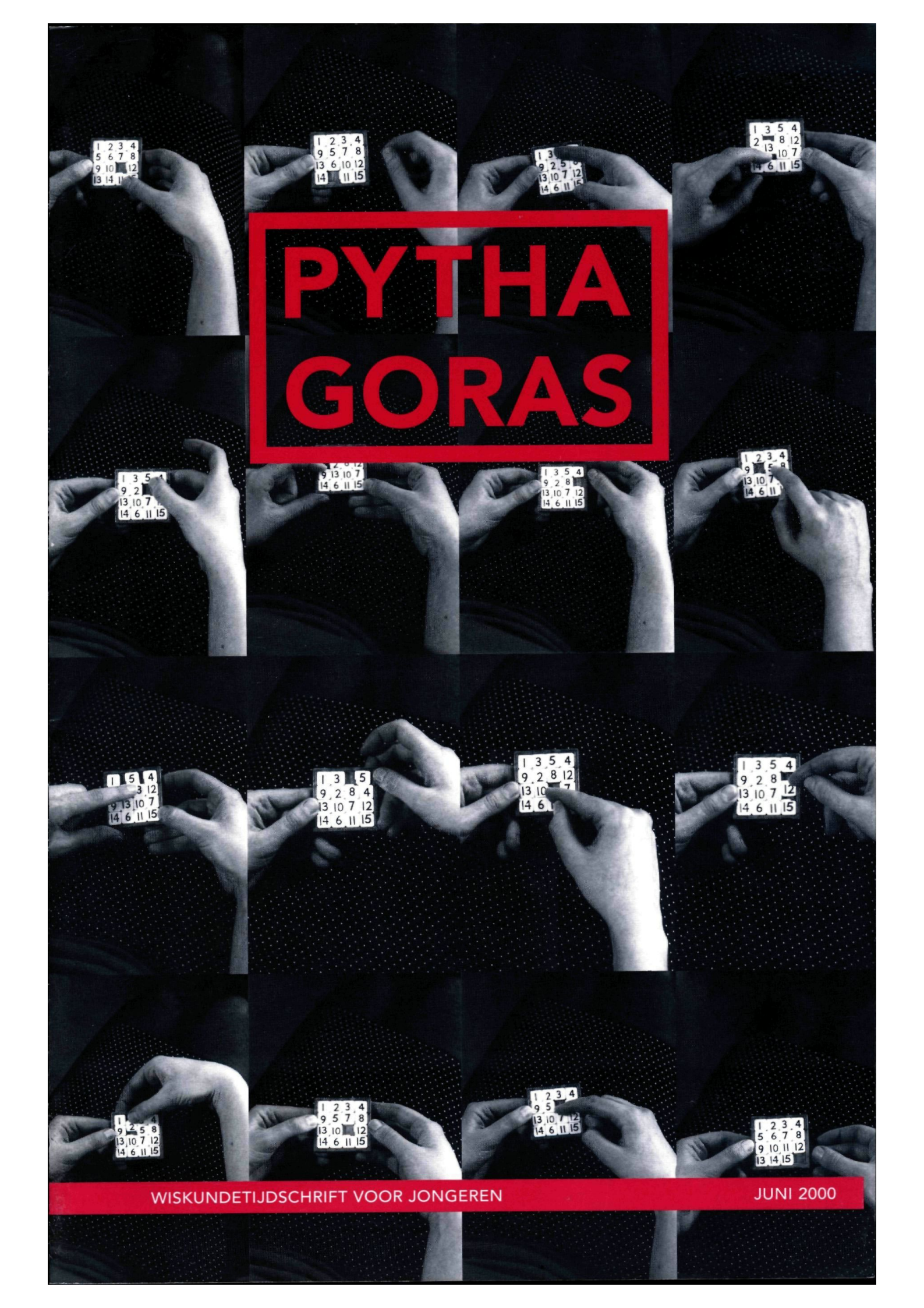




PYTHA GORAS

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

WWW

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist; 1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen; 2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig; 3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbareschoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. dr. L.A.M. van den Broek is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. ir. N. Bordewijk is metagebrouwer te Amsterdam. dr. E. Coplakova is docent wiskunde aan de TU Delft. Bruno Ernst is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. drs. J.H. de Geus is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. D.C. Gijswijt is student wiskunde aan de UvA. dr. K.P. Hart is docent topologie aan de TU Delft. ir. A.A.J. Lefeber is AIO systeem- en besturingstheorie aan de UT. R. van Luijk is student wiskunde aan de UU. drs. W.R. Oudshoorn is AIO algebra en meetkunde aan de UG. ir. S.M. van Rijnsouw is OIO computeralgebra aan de TUE. drs. Th. Smits is natuurkundige aan de KUN. dr. ir. R.F. Swarttouw is docent wiskunde aan de VU. ir. J.W. van der Vaart is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. drs. C.G. Zaal is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.



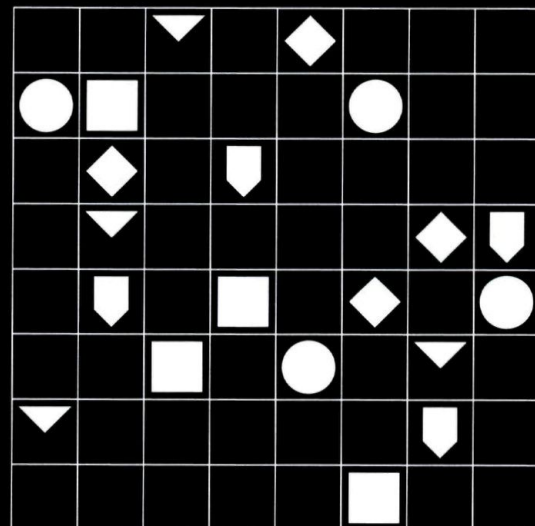
INHOUD

2 - 3	Zoekertjes	22	Problemen
4 - 5	Sangaku uit polderland	23	Oplossingen nr. 4
6 - 7	Pythagoras Olympiade	24 - 25	Pi in de pieterskerk
8	Scheuren	26 - 27	Beeld en Bedrog
9 - 11	Onvoorstelbaar lange woorden	28	De tube
12 - 13	Pythagoras schuift!	29	Een magische optelsom
14 - 15	De 15-puzzel	30	De post
16 - 19	Maak je eigen schuifpuzzels	31	Oplossingen zoekertjes
20 - 21	De limaçon	32	Agenda

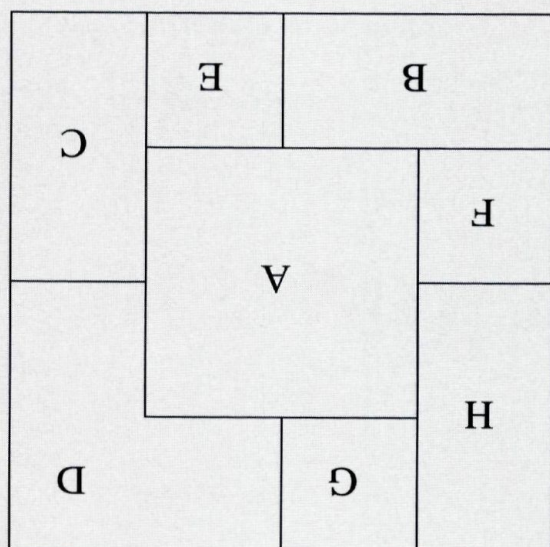
Deze keer een aantal puzzels die al opgelost zijn. Een probleem: de afzonderlijke stukjes zijn onherkenbaar. Aan jou de opdracht de afzonderlijke puzzelstukjes op te sporen. De oplossingen staan op pagina 31.

Z
O

Verdeel de taart
Verdeel het vierkant in vier gelijke delen. Elk segment moet vijf verschillende symbolen bevatten één van elk



2

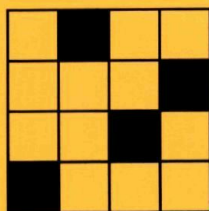


Origami
Acht vierkante velletjes origami-papier, allemaal even groot, worden één voor één op elkaar gelegd, elkaar steeds gedeeltelijk overlappend. Het resultaat – één groot vierkant – zie je in de figuur. Kun je de velletjes papier in de correcte volgorde opnoemen, van het bovenste tot en met het onderste vel papier?

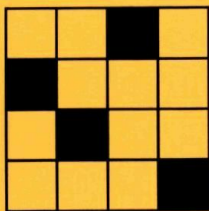
E
K

E R T

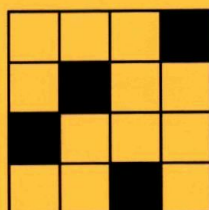
A



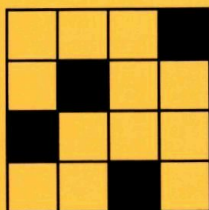
B



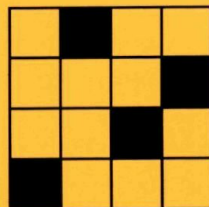
C



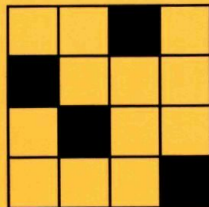
D



E



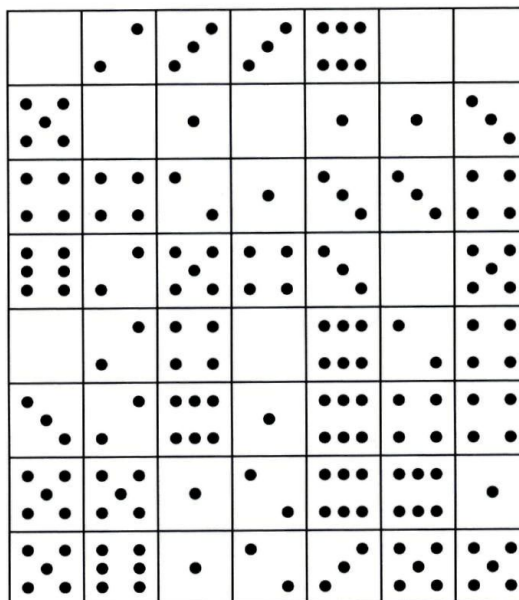
F



Vreemde eend

Dit schema bevat zes patroontjes van 4 bij 4. Eén van die zes stukjes hoort er niet thuis. Welke is het?

J E S



3

Domino's

Uit de 28 domino's van een complete domino-set is een 7 bij 8 rechthoek samengesteld. Probeer in het grid de 28 domino's terug te vinden.

Bijvoorbeeld, de 0-0-domino kun je makkelijk terugvinden, want daarvoor is maar één mogelijkheid (rechts-boven). De 28 domino's in een complete set zijn:

0-0

0-1 1-1

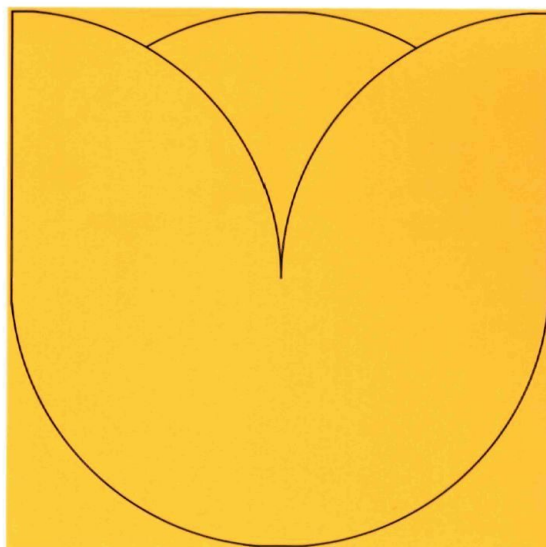
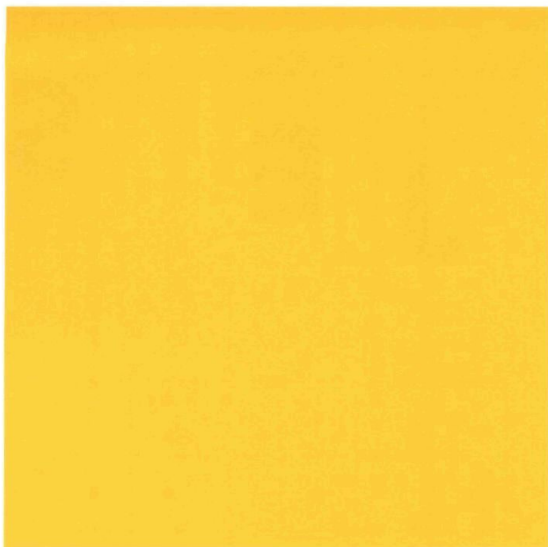
0-2 1-2 2-2

0-3 1-3 2-3 3-3

0-4 1-4 2-4 3-4 4-4

0-5 1-5 2-5 3-5 4-5 5-5

0-6 1-6 2-6 3-6 4-6 5-6 6-6



SANGAKU

Bruno Ernst

4

Een sangaku is een Japanse traditie: een wiskundig probleem in de vorm van een tekening op een houten plankje, dat opgehangen werd aan de daken van Japanse tempels om de Goden te eren (zie Pythagoras juni 1999). Het 400-jarig bestaan van de betrekkingen Nederland – Japan is aanleiding voor een nieuwe sangaku: de Tulipa Mathematica.

Het hangen van wiskundige puzzels aan tempelgevels was een typisch Japans gebruik en ons land is beroemd om zijn tulpen. De tulp als onderwerp voor een sangaku is eigenlijk een mooie combinatie om de langdurige relatie tussen Nederland en Japan te symboliseren.

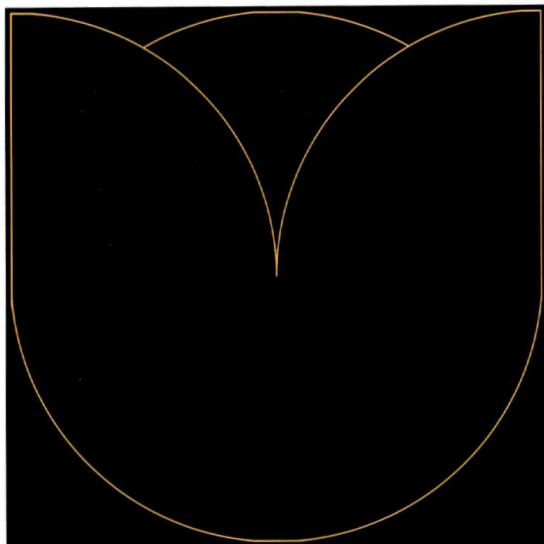
Een wiskundige tulp

De gestileerde tulp (figuur 1) is opgebouwd uit cirkelbogen met dezelfde straal. In figuur 2 is dit duidelijker te zien: de onderste helft en het kopje bovenaan zijn cirkelbogen van dezelfde cirkel met

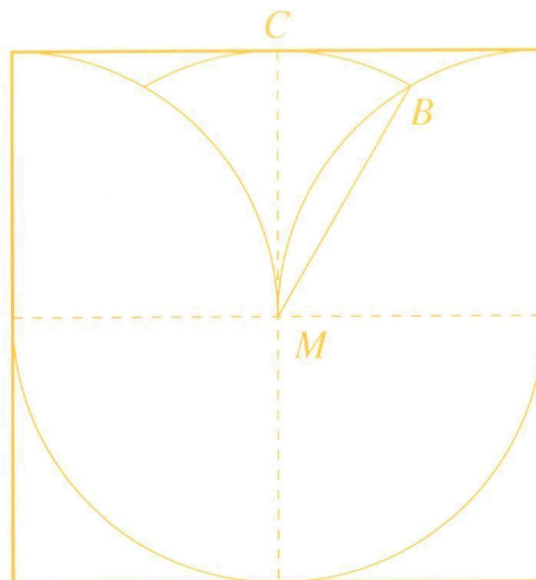
het centrum van het vierkant als middelpunt. Verder vinden we nog twee kwartcirkels met hun middelpunten op de middens van de verticale zijden van het vierkant. De vraag is: *hoe groot is de oppervlakte van de bloem op de tekening?* Wie graag puzzelt moet nu niet verder lezen en het probleem zelf oplossen. Wie alleen maar wil weten hoe je de oplossing vindt kan gewoon doorlezen.

De oppervlakte

De zijde van het vierkant is gelijk aan de middellijn van de ingeschreven cirkel, dus $2r$. De onderste helft van de bloem is een halve cirkel met oppervlakte $\frac{1}{2} \pi r^2$. Daarbij moet nog opgeteld worden de oppervlakte van de beide kwartcirkels links en rechts. Die zijn samen ook $\frac{1}{2} \pi r^2$. Nu moeten we nog de oppervlakte van het middelste bloemblaadje bovenaan zien te vinden en dat is minder eenvoudig. De helft van dit bloemblaadje heeft een oppervlakte gelijk aan de cirkelsector $CMB \left(\frac{1}{12} \pi r^2 \right)$ min het gearceerde cirkel-



Figuur 1



Figuur 2

uit Polderland

segment op de koorde MB . Voor de berekening van dit segment gebruiken we figuur 3, die het kleine vierkant rechtsboven weergeeft. Driehoek MAB is gelijkzijdig met zijde r .

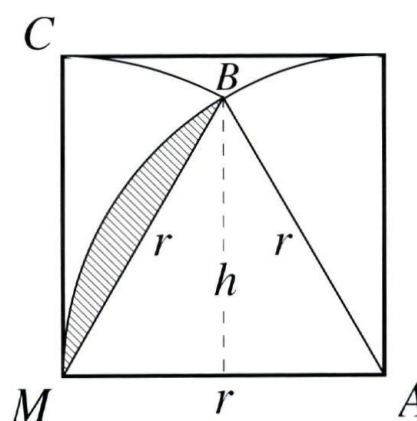
De hoogtelijn is $\frac{1}{2} r\sqrt{3}$, zodat de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek $\frac{1}{4} r^2\sqrt{3}$ is. De cirkelsector MAB is $\frac{1}{6} \pi r^2$. Als we daarvan de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek aftrekken krijgen we de oppervlakte van het cirkelsegment op de koorde MB en die zochten we.

Deze is dus gelijk aan:

$$\frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}.$$

Zo, nu hebben we alle stukjes van de puzzel bij elkaar. De oppervlakte van de bloem is de oppervlakte van de halve cirkel + de oppervlakte van twee kwartcirkels + tweemaal de oppervlakte van het halve middelste bloemblaadje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi r^2 + \left(\frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} \right) \\ = \frac{1}{6} r^2 (5\pi + 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$



Figuur 3

°Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 59

Hoeveel priemgetallen zijn er die, geschreven in het tientallig stelsel, alleen bestaan uit nullen en enen die elkaar steeds afwisselen. Dergelijke getallen zien er dus uit als 101010....

Opgave 60

Een rechthoek $HMFV$ heeft zijden $HM = 23$ en $MF = 7$. Een driehoek ABC heeft H als hoogtepunt, M als middelpunt van de omgeschreven cirkel, F als midden van BC en V als voetpunt van de hoogtelijn uit A . Wat is de lengte van BC ?

Erratum

Het erratum op opgave 55 in het vorige nummer bevatte nog steeds fouten. De juiste formulering volgt hieronder. De inzendtermijn van deze opgave wordt nogmaals verlengd, tot en met 15 juli 2000.

Opgave 55

Beantwoord de volgende twee vragen voor de positieve reële getallen x , y en z . Als $x + y + z \geq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3?$$

Als $x + y + z \leq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3?$$

Stuur je oplossing naar:

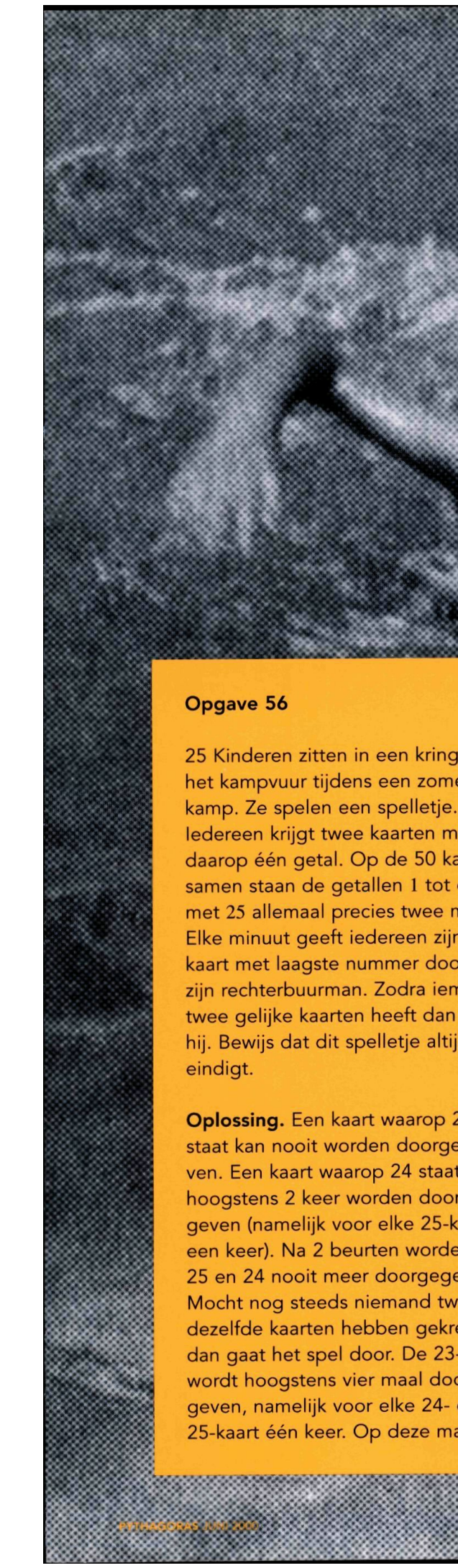
Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 juli 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftientig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt! Hiernaast volgt de oplossing van opgave 56 uit het februarinum-mer.

Veel succes!

Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn
en Sander van Rijnsouw.



Opgave 56

25 Kinderen zitten in een kring rond het kampvuur tijdens een zomerkamp. Ze spelen een spelletje. Iedereen krijgt twee kaarten met daarop één getal. Op de 50 kaarten samen staan de getallen 1 tot en met 25 allemaal precies twee maal. Elke minuut geeft iedereen zijn kaart met laagste nummer door aan zijn rechterbuurman. Zodra iemand twee gelijke kaarten heeft dan wint hij. Bewijs dat dit spelletje altijd eindigt.

Oplossing. Een kaart waarop 25 staat kan nooit worden doorgegeven. Een kaart waarop 24 staat kan hoogstens 2 keer worden doorgegeven (namelijk voor elke 25-kaart een keer). Na 2 beurten worden de 25 en 24 nooit meer doorgegeven. Mocht nog steeds niemand twee dezelfde kaarten hebben gekregen, dan gaat het spel door. De 23-kaart wordt hoogstens vier maal doorgegeven, namelijk voor elke 24- en 25-kaart één keer. Op deze manier

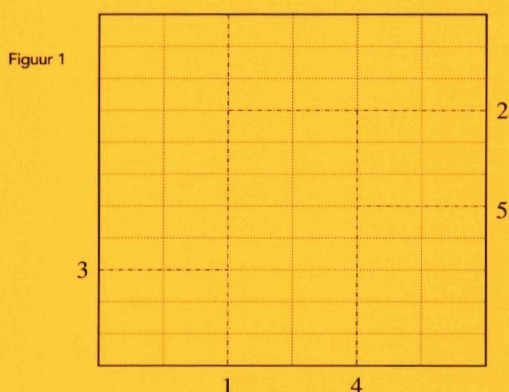
komen steeds meer kaarten vast te liggen. Uiteindelijk worden de kaarten 25 tot en met 14 niet meer doorgegeven, dat zijn 24 kaarten. Dus 24 kinderen houden nu een kaart vast en geven steeds de andere door. Op een gegeven moment komt een 13-kaart terecht bij het kind dat nog geen kaart vasthoudt. Hij gaat dan die 13-kaart vasthouden, want alle hogere kaarten zitten vast. Er ligt nu één 13-kaart vast en één 13-kaart is nog in beweging. Op een gegeven moment komen die twee kaarten bij elkaar en is het spel afgelopen. Het is natuurlijk mogelijk dat het spel eerder is afgelopen. Zoals je ziet is het belangrijk dat 25 oneven is. Als je dit spel met 24 kinderen en 48 kaarten zou doen, dan zou het spel oneindig lang door kunnen gaan.

Deze opgave is opgelost door: Michiel van Dam te Alphen aan de Rijn, Martin van der Schans van **het Farel College** te Ridderkerk, Peter Deleu te Hulste, Jan Maas, **Aloysius College** te Den Haag en Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen. De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Scheuren

Leon van den Broek

Je hebt een vel postzegels, zeg van 6 bij 11.
Je wilt de postzegels allemaal los hebben.
Telkens als je scheurt, doe je dat over de hele
lengte van de scheurlijn. Een voorbeeld voor de
eerste vijf keer scheuren is aangegeven in fig.1.



1. Hoe vaak moet je minstens scheuren om alle
66 postzegels los te hebben?

Het vel hoeft niet rechthoekig te zijn.
Dan krijg je de volgende vragen.

2. Hoe vaak moet je minstens scheuren bij het
gehavende vel in figuur 2?

3. Hoe zit dat in het algemeen?

4. Kun je dat ook bewijzen?

Een andere manier

Het wordt anders als je stukken die je al van
elkaar hebt gescheurd, op elkaar mag leggen.
Zodoende kun je het effect van één keer scheu-
ren vervelvoudigen. (In de praktijk zal het niet
meevallen een dik pak papier van bijvoorbeeld

tien lagen te scheuren. We trekken ons hier niets
aan van zulke praktische problemen.)

5. Hoe vaak moet je scheuren voor het vel van 6
bij 11?

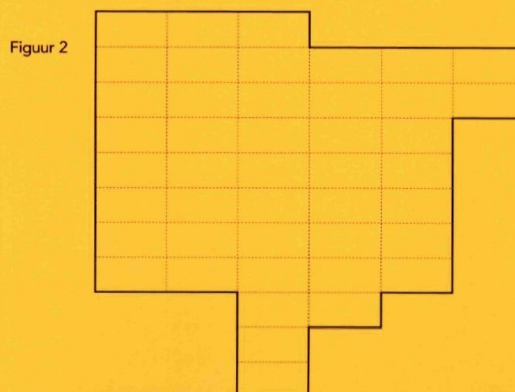
6. Hoe zit het in het algemeen bij een vel van n
bij m postzegels?

Nog anders

Als je eerst mag vouwen, wordt het nog anders.
Dan kun je meerdere lagen in één keer scheuren.
De stukken die je krijgt, mag je op elkaar leggen,
je mag het pakje weer vouwen, enzovoort.
En we trekken ons weer niets van aan dat het
scheuren in de praktijk misschien niet echt uit-
voerbaar is.

7. Wat kun je zeggen over het aantal keer scheu-
ren dat je nu nodig hebt?

De antwoorden op de vragen staan in de volgen-
de Pythagoras.



Onvoorstelbaar lange woorden

Dion Gijswijt

Dit is het laatste stukje in een serie over grote getallen. Het gaat over zogenaamde 'speciale woorden'. Het langste speciale woord met één letter is drie letters lang. Het langste speciale woord met twee letters is elf letters lang. Hoe lang het langste speciale woord met drie letters is? Dat weet niemand!

Dit stukje gaat over woorden. Normaal gesproken moeten woorden een betekenis hebben, maar onze woorden mogen van alles zijn. Ieder rijtje letters noemen we een woord. Als we bijvoorbeeld alleen de letters 'a' en 'b' willen gebruiken, dan is het volgende een prima voorbeeld van een woord:

abaababa.

Blokken

We gaan van dit soort woorden stukken bekijken die we blokken zullen noemen. De eerste twee letters van een woord vormen het eerste blok, letter 2 tot en met 4 vormen het tweede blok, letter 3 tot en met 6 vormen het derde blok, letter 4 tot en met 8 het vierde blok, enzovoort. Het woord $W = \text{abaababa}$ heeft de volgende vier blokken:

$W(1) = ab$
 $W(2) = baa$
 $W(3) = aaba$
 $W(4) = ababa$

Er bestaat geen vijfde blok $W(5)$, want W heeft maar 9 letters.

Een blok in een blok

Als je goed kijkt, dan zie je dat het tweede blok een deel is van het vierde blok: de tweede, derde en vijfde letter van $W(4)$ vormen samen het blok $W(2)$. Anders gezegd: als je de eerste en de vierde letter van het vierde blok wegstreept, dan hou je precies het tweede blok over.

baa (tweede blok)
↑
~~a~~ba~~b~~a (vierde blok)

In het algemeen zeggen we dat een blok een deel is van een ander blok, als je het krijgt door van dat andere blok een aantal letters te verwijderen. Zo is $W(1)$ een deel van $W(3)$ en $W(4)$, maar niet van $W(2)$.

Opgave. Ga van de blokken $W(2)$ en $W(3)$ na of ze een deel zijn van een ander blok.

Opgave. De woorden U en V zijn gegeven door: $U = ababab$ en $V = aabbba$. Ga na dat van elk tweetal blokken van U de grootste een deel is van de kleinere. Hoeveel blokken van V zijn een deel van een ander blok van V ?

Speciale woorden

We hebben gezien dat je bij een gegeven woord blokken kunt maken en dat zo'n blok soms een deel van een ander blok kan zijn. Het woord $V = aabbba$ in de vorige opgave had de bijzondere eigenschap dat geen enkel blok een deel van een ander blok was. Een dergelijk woord noemen we *speciaal*. Zijn er nog meer van deze speciale woorden? Ja, bijvoorbeeld het woord $aabba$. Als je zo'n speciaal woord hebt, dan vormen de eerste zoveel letters van dat woord natuurlijk ook een speciaal woord. Woorden van lengte 3 zijn altijd speciaal (waarom?). Korte speciale woorden zijn dus makkelijk te vinden, maar lange speciale woorden zijn veel zeldzamer. De vraag die wij ons hier stellen is: *Wat is het langste speciale woord?*

Een voorbeeld

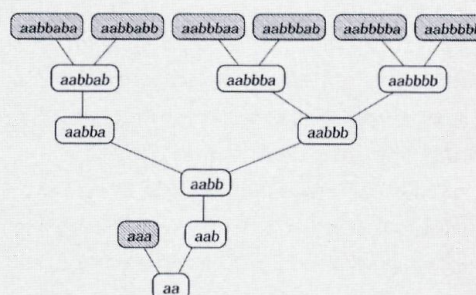
We beginnen met het woord $W = aabba$. Dit is een speciaal woord van lengte 5 met twee blokken:

$$W(1) = aa$$

$$W(2) = abb$$

Laten we proberen of we dit woord kunnen uitbreiden tot een langer speciaal woord. Als we achter W nog een a plakken, dan ontstaat een woord van lengte 6, en daarmee ook een nieuw blok: $W(3) = bbaa$. Maar nu is het eerste blok aa een deel van dit derde blok en dat willen we niet. Als we W echter met een b uitbreiden, dan gaat het wel goed: het derde blok wordt dan $bbab$ en noch aa noch abb is hier een deel van. We hebben nu dus een speciaal woord $U = aabbab$ van lengte 6. Nu kunnen we U met een a uitbreiden zodat we $aabbaba$ krijgen. Dit gaat goed, want er komt geen nieuw blok bij omdat de lengte nu oneven is. Dus $V = aabbaba$ is een speciaal woord van lengte 7. Als we nu V met een a of

een b uitbreiden, dan komt er een vierde blok bij, dat in het eerste geval $babaa$ is en in het tweede geval $babab$. In beide gevallen is het eerste blok aa een deel van dit vierde blok. Het woord V kunnen we dus niet verder uitbreiden. We zijn op een dood spoor gekomen. Misschien hadden we door geen a maar een b aan U vast te plakken meer geluk gehad. In de volgende figuur zie je een hele boom van alle mogelijke speciale woorden die beginnen met aa .



Opgave. Het langste speciale woord dat begint met aa heeft volgens het schema lengte 7. Wat is de lengte van het langste speciale woord dat begint met bb ?

Het langste woord met 2 letters

Na de vorige opgave hoeft je om het langste speciale woord te vinden alleen nog de woorden te onderzoeken die beginnen met ab . Het maken van een boom voor de speciale woorden die met ab beginnen laten we aan de lezer over. In plaats van met de hand kun je dit probleem ook met de computer oplossen. Je vindt dan het volgende resultaat.

Stelling. Elk speciaal woord bestaande uit twee letters heeft hoogstens lengte 11.

Een voorbeeld van een speciaal woord van lengte 11 is $abbbbaaaaaa$. De blokken van dit woord zijn ab , bbb , $bbaa$,

baaaa en *aaaaaa*. Zoals je ziet is geen enkel blok een deel van een ander blok. Als je nog een extra letter zou toevoegen, dan ontstaat er een zesde blok *aaaaaa** en is het vijfde blok een deel van het zesde blok. Het woord is dus niet verder uit te breiden.

Drie of meer letters

Als je drie of zelfs meer letters mag gebruiken, dan kun je veel langere speciale woorden maken, bijvoorbeeld *abbbaaaaaaccccccccc*, een woord van lengte 20. Als je eventjes probeert, of de computer aan het werk zet, dan zul je merken dat je echt enorm lange speciale woorden kunt maken. Je kunt je afvragen of er misschien willekeurig lange speciale woorden zijn, zodat er misschien wel geen langste woord bestaat. Of nog erger, misschien is er wel een oneindig lang speciaal woord, met oneindig veel blokken waarvan geen enkel blok een deel is van een andere! De wiskundige en logicus Harvey Friedman heeft echter bewezen dat dit niet het geval is.

Stelling. *Voor elk aantal letters bestaat er een speciaal woord van maximale lengte.*

In het geval van drie letters bestaat er dus ook een langste speciaal woord. De lengte van dit woord is echter enorm. Niet alleen is het onmogelijk om zo'n langste woord met de hand te vinden, het is zelfs onmogelijk om het met de grootste supercomputer te doen. Deze maximale lengte is zó groot dat het onmogelijk is om het getal op te schrijven, want dit getal heeft meer cijfers dan er atomen in het heelal zijn!

De functie van Ackermann

Wie de 'Tabel van Ackermann' in de vorige Pythagoras heeft gelezen, herinnert zich dat de getallen uit de tweede rij niet zo snel groeiden, de getallen uit

de derde rij al behoorlijk snel groot werden, en het derde getal van de vierde rij al duizenden cijfers had. Volgens Friedman is zelfs het getal in de zeven-duizendste rij op de honderdduizendste plaats in de tabel van Ackermann nog veel en veel kleiner dan de lengte van het langste speciale woord met drie letters. Voor vier letters is de lengte van het langste woord zo enorm dat zelfs de tabel van Ackermann tekort schiet. Als n_1 het miljoenste getal van de miljoenste kolom uit de Ackermann tabel is, en n_2 het n_1 -de getal uit de n_1 -de rij, en n_3 het n_2 -de getal uit de n_2 -de rij enzovoorts, dan komt het miljoenste getal uit deze rij, $n_{1000000}$, nog lang niet in de buurt van de lengte van het langste speciale woord van vier letters. Het langste speciale woord met 26 letters? Dat woord is pas écht onvoorstelbaar groot!

Informatie over Harvey Friedman

<http://www.math.ohio-state.edu/foundations/>

Pythagoras

- Puzzels waarbij je volgens bepaalde regels een aantal stappen of zetten moet doen om een bepaald doel te bereiken heten sequentiële puzzels. Voorbeelden hiervan zijn: Solitaire, de toren van Hanoi, Rubiks kubus, labirintpuzzels en schuifpuzzels. Wat schuifpuzzels precies zijn, legt Edward Hordern uit in zijn boek *Sliding Block Puzzles* (Cambridge University Press, 1986).



12

- **15-puzzel**

De meest bekende schuifpuzzel is de 15-puzzel (zie pagina 14). Deze puzzel kom je nog wel tegen als reclameobject. In de winkel zijn varianten met meer stukjes te koop, maar deze zijn niet moeilijker of makkelijker dan de oorspronkelijke 15-puzzel.

- **Schuiven op Internet**

Het maken van een 'virtuele' schuifpuzzel is een eenvoudige programmeeropdracht. Op Internet zijn duizenden Java-applets te vinden waarin je zelf kan klikken en schuiven. Zoek op 'sliding puzzle' of 'sliding block puzzle'. De meeste die je vindt zijn versies van de 15-puzzel.

schuift!

● www.antonypr.pair.com/games.html

Op deze site kun je B-puzzle downloaden, een Windows-programma om zelf schuifpuzzels te maken



● www.johnrausch.com/SlidingBlockPuzzles

Een geweldige site, met tientallen schuifpuzzels in de vorm van Java-applets (met geluid!). Pas op: de meeste puzzels zijn behalve moeilijk ook verslavend. Java-applets kun je, eenmaal gedownload, off-line spelen – verbreek daarom de verbinding met je provider als je op zo'n interactieve schuifpuzzel je krachten wilt beproeven.

● **Benchmark**

De computer schuifpuzzels laten oplossen is moeilijk. Zo moeilijk zelfs, dat schuifpuzzels worden gebruikt als testproblemen ('benchmarks'), waarop computerprogrammeurs hun tanden kunnen stukbijten. Zie: www.ajballan.demon.co.uk/Eights/eights.html

DE 15 PUZZEL

Figuur 1

De 14-15-puzzel van Sam Loyd

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

start

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

finish

Figuur 2

Drie oplosbare 15-puzzels

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

start

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

finish 1

	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

finish 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

finish 3

Rond 1970 vond de rage plaats rondom de Rubiks kubus. Honderd jaar eerder was de 14-15-puzzel manie. Velen probeerden deze puzzel op te lossen. De meest fantastische verhalen werden verteld, over winkeliers die hun winkel niet meer openden, over een bekende dominee die een hele winterse vriesnacht onder een lantaarnpaal stond, in een poging zich een eerder gevonden oplossing te herinneren. Tevergeefs, want de puzzel is onoplosbaar.

De 14-15-puzzel bestaat uit vijftien genummerde blokjes in een vierkante doos. In de beginsituatie liggen alle blokjes op volgorde, op de 14 en 15 na, die zijn verwisseld. Het is de bedoeling de blokjes heen en weer te schuiven totdat de blokjes op volgorde liggen, met het lege vakje rechtsonder.

Duizend dollar

Rond 1870 loofde puzzelmaker Sam Loyd een beloning van duizend dollar uit voor degene die de oplossing zou vinden van de 14-15-puzzel.

Deze puzzel dreef heel wat mensen tot wanhoop, want hoe makkelijk de opdracht ook leek, niemand kon een oplossing vinden. Sam Loyd wist echter dat de puzzel onoplosbaar was en kon dus rustig een prijs van \$1000 uitloven.

Even-oneven

Hoe kon Sam Loyd inzien dat de 14-15-puzzel onoplosbaar is? Daarvoor heb je een beetje wiskunde nodig, zie pagina 15, 'Pariteit'.

In het kort komt het hier op neer:

1. Elke stand van de puzzel is even óf oneven. De beginstand is oneven, de eindstand even.
2. Eén keer schuiven met een stukje verandert een even stand in een oneven stand en vice versa.

Om het lege vakje op het eind weer rechtsonder te krijgen, is een even aantal keren schuiven nodig. Maar de beginstand is oneven. Volgens (2) levert een even aantal keren schuiven weer een oneven stand op. Elke stand met het lege vakje rechtsonder is dus oneven. Conclusie: van-

Figuur 3

Deze versie van de 14-15-puzzel is wél oplosbaar!

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	L	A	

start

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	A	L	

finish

Figuur 4

Het verschil tussen voor en na is een misplaatsing meer, namelijk (16,7).

	7	16	

voor

	16	7	

na

Figuur 5

Het verschil tussen voor en na: de misplaatsingen (16,4), (16,2), (16,11) en (16,7) verdwijnen, evenals (11,7). De misplaatsingen (7,4) en (7,2) komen erbij.

		16	4
2	11	7	

voor

		7	4
2	11	16	

na

uit de (oneven) startpositie is de gevraagde (even) finishpositie niet door schuiven te bereiken!

Oplosbare 15-puzzels

Er bestaan een heleboel varianten van de 14-15-puzzel, die wel oplosbaar zijn. Daarvan zijn begin- en eindpositie steeds beide oneven. In figuur 2 zie je een paar voorbeelden. Een andere versie van de 15-puzzel is de puzzel uit figuur 3. Deze lijkt sprekend op de 14-15-puzzel uit figuur 1. Je zou dus denken dat deze puzzel onoplosbaar is. Maar door beide A's te verwisselen, zijn begin- en eindpositie beide even óf beide oneven, en dat maakt deze puzzel oplosbaar!

Pariteit^{oo}

Als in een gegeven stand van de puzzel twee blokjes niet op volgorde liggen, dan noemen we dat een *misplaatsing*. Het lege vakje doet ook mee; dat geven we nummer 16. De startpositie van de puzzel bevat dus maar één misplaatsing, en in de opgeloste stand zijn er geen misplaatsingen. Voor elke stand van de schuifpuzzel tel je het aantal misplaatsingen en je

onthoudt of deze even of oneven is. Dit heet de *pariteit* van die stand.

Stelling. *Eén keer schuiven met een blokje verandert de pariteit van even in oneven en vice versa.*

Bewijs. Door te schuiven met één blokje, verwisselt dat blokje van plaats met het lege blokje 16. Schuiven kan horizontaal of vertikaal. Als je horizontaal schuift, verandert alleen de volgorde van blokje 16 (het lege vakje) met het verschoven blokje. Dit levert precies één misplaatsing meer of minder op. Zie figuur 4. Nu gaan we vertikaal schuiven (zie figuur 5). 'Tussen' twee onder elkaar gelegen blokjes zitten drie blokjes. Door de verticale verwisseling van 16 en 7 verandert de volgorde van de drie blokjes met zowel 16 als 7: dat zijn zes veranderingen. Omdat 16 en 7 zelf ook van volgorde veranderen, zijn er in totaal zeven veranderingen. Het aantal misplaatsingen verandert daardoor een oneven aantal keer. Einde bewijs.

Maak je eigen

SCHUIFPUZ ZEL

De 15-puzzel is niet de enige schuifpuzzel, er bestaan honderden andere schuifpuzzels. Op deze pagina's laten we zien hoe je met een beetje moeite zelf attractieve schuifpuzzels kunt maken.

Een schuifpuzzel is in een mum van tijd gemaakt. De verschillende blokken snij je met een scherp mes uit karton (gebruik contrasterende kleuren). Snij uit hetzelfde karton een kaderrand uit en plak die op op een passend stuk dik karton. Klaar is Kees!

Jewel box

De zo gemaakte schuifpuzzels hebben nadelen: de puzzels schuiven niet echt lekker en je raakt de stukjes gauw kwijt. Daarom beschrijven we een andere methode, die een iets duurzamer puzzel oplevert. Deze puzzels bestaan uit twee onderdelen: het doosje en de blokjes. Als doosje gebruiken we zogenaamde 'jewel boxes', de bekende cd-doosjes van doorzichtig plastic. Te koop in cd-winkels voor 1 gulden per stuk. Het plastic binnenwerk bedoeld voor cd's heb je niet nodig.

De blokjes

De blokjes van de schuifpuzzel zijn het moeilijkst. Goed materiaal is dik karton, linoleum, plastic of hout. Dikte: 4 millimeter. Het probleem hierbij is de hoeken precies haaks te krijgen. Zonder speciaal gereedschap zoals een verstekbak of een machine-

zaag is dit erg moeilijk. Roep daarvoor de hulp in van een handenarbeiddocent of een handige klusjesman. Voor de schuifpuzzels uit deze Pythagoras heb je maar een paar vormen nodig: vierkanten, rechthoeken en twee L-vormige stukjes. Maak alle stukjes een halve millimeter kleiner dan op de tekening aangegeven is, dat is voldoende om de stukjes goed te laten schuiven. De zij-kanten glad schuren en de hoeken afronden met een vijl. Geef de verschillende stukjes contrasterende kleuren.

Cd-hoesjes

Op de volgende pagina's staan een aantal ontwerpen voor schuifpuzzels. Alle ontwerpen zijn zo gemaakt, dat ze precies in het doosje passen. Alleen voor 'Soap' heb je een vulstukje nodig. Kopieer het ontwerp en vergroot dit 200%, dan past alles precies en heb je meteen een cd-hoesje. Op de homepage van Pythagoras vind je complete ontwerpen om te downloaden.

Meer informatie

L.E. Hordern, Sliding block puzzles, Cambridge University Press, 1986.

<http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/>
(kijk bij het juninummer)

<http://www.johnrausch.com/SlidingBlockPuzzles/>
(Sliding Block Home Page)

Moving puzzle

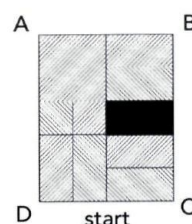
Deze puzzel werd in Amerika gebruikt als reclame-object voor een verhuisbedrijf, maar is ook onder andere namen bekend, zoals: 'the Teaser puzzle' of 'Dad's puzzler'. Het doel is de piano te verhuizen naar de hoek linksonder. Dat kan in 59 stappen.

PYTHAGORAS

Moving puzzle

Verhuispuzzel

Opdracht: verhuis de piano van
A naar B
Moeilijker: van A naar C
Nog moeilijker: van A naar D



17

piano		kast
		lamp
mat	mat	
bank	tafel	kast
		lamp

KOPIËREN & 200% VERGROTEN

Boven: het hoesje & de opdracht.
Dubbelvouwen en insteken
in de jewelbox.

Links: Ontwerp voor de blokjes
(zie blz. 16).

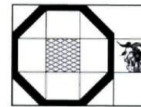
get my Goat

Deze puzzel werd in 1914 gepatenteerd in Amerika. De bedoeling is de geit in het hok te krijgen. Bij veel latere versies werd dit idee overgenomen, maar men realiseerde zich niet dat het blokje rechtsboven een rechthoek is.

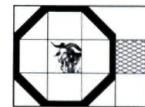
PYTHAGORAS

Vang de geit

Opdracht: probeer de geit binnen de omheining te krijgen.

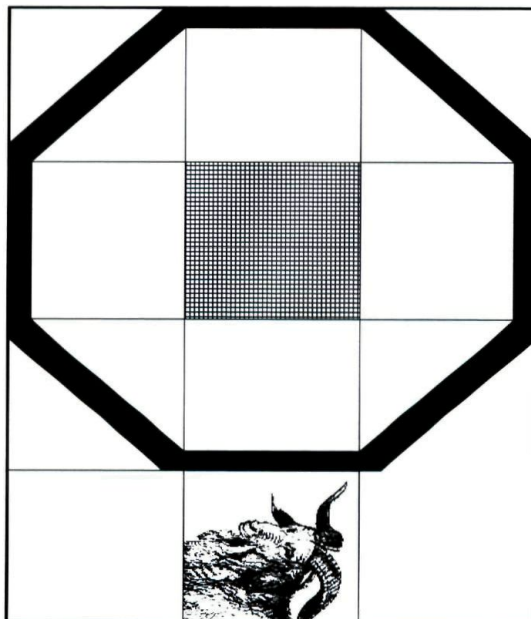


start



finish

get my Goat



KOPIËREN & 200% VERGROTEN

Boven: het hoesje & de opdracht.
Dubbelvouwen en insteken
in de jewelbox.

Links: Ontwerp voor de blokjes
(zie blz. 16).

float the Soap

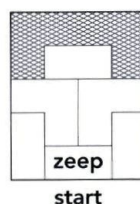
Deze puzzel is ontworpen door Ed Pegg Jr., onder andere bekend van de Internet-site: www.mathpuzzle.com. Op de Sliding Block Home Page vind je deze zeep-puzzel als Java-applet. Er is een oplossing in 43 stappen.

PYTHAGORAS

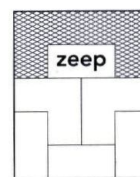
float the Soap

Zeep

Opdracht: zorg dat het stukje zeep boven komt.

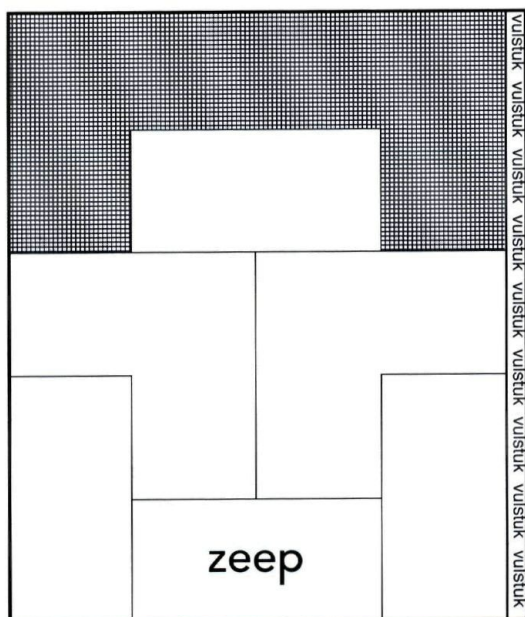


start



finish

19



KOPIËREN & 200% VERGROTEN

Boven: het hoesje & de opdracht.
Dubbelvouwen en insteken in de jewelbox.

Links: Ontwerp voor de blokjes (zie blz. 16).

Eva Coplakova

Al in het begin van de zeventiende eeuw ontdekte Kepler aan de hand van observaties dat de banen van planeten ellipsen zijn. Als we echter vanaf de Aarde Mars bekijken zien we een rode planeet die in ongeveer twee jaar een baan beschrijft die in het geheel niet op een ellips lijkt; er zit zelfs een lus in. Hoe kan dat? En kunnen we die baan met een mooie formule beschrijven? Zie figuur 1 rechts.

Gezichtsbedrog

Het antwoord op de eerste vraag is dat de baan van Mars om de zon wel degelijk een ellips is. Maar de banen van de Aarde en Mars liggen dicht bij elkaar, waardoor we de baan van Mars vervormd waarnemen.

Gereken

Met wat rekenwerk kunnen we zelfs een mooie beschrijving van de relatieve baan van Mars ten opzichte van de Aarde vinden. We doen even alsof de beide banen cirkels zijn. De straal van de baan van Mars is ongeveer anderhalf keer zo groot als die van de baan van de Aarde en de omlooptijd van Mars is ongeveer twee jaar (687 dagen). We kunnen beide banen dan als volgt parametriseren:

$$\begin{cases} x_A(t) = 2 \cos 2\pi t \\ y_A(t) = 2 \sin 2\pi t \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} x_M(t) = 3 \cos \pi t \\ y_M(t) = 3 \sin \pi t. \end{cases}$$

Het gaat ons om wat we vanaf de aarde zien, en daarvoor moeten we die twee parametriseringen van elkaar aftrekken:

$$\begin{cases} x_{M-A}(t) = 3 \cos \pi t - 2 \cos 2\pi t \\ y_{M-A}(t) = 3 \sin \pi t - 2 \sin 2\pi t. \end{cases}$$

Welke baan beschrijft de planeet Mars aan de hemel? Het is geen ellips, maar de limaçon!



Met behulp van de gonioformules

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \text{ en}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ vinden we}$$

$$\begin{cases} x_{M-A}(t) = (3 - 4 \cos \pi t) \cos \pi t + 2 \\ y_{M-A}(t) = (3 - 4 \cos \pi t) \sin \pi t. \end{cases}$$

Als we deze formules gebruiken om de baan van Mars te plotten, dan krijgen we figuur 2 rechts. De baan gaat twee keer door hetzelfde punt (2,0), namelijk als

$$\cos \pi t = \frac{3}{4}.$$

De formules worden mooier als we de oorsprong naar dat punt verplaatsen. We krijgen dan

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \pi t \\ y(t) = r \sin \pi t, \end{cases}$$

met $r = 3 - 4 \cos \pi t$.

De laatste vergelijking beschrijft onze kromme in *poolcoördinaten*, die we al in een vorig nummer van Pythagoras tegengekomen zijn. Er geldt $x = r \cos \alpha$ en $y = r \sin \alpha$ (en in ons geval $\alpha = \pi t$). Zie figuur 3 rechts.

Uit de vergelijking $r = 3 - 4 \cos \alpha$ kunnen we een vergelijking in x en y maken:

$$x^2 + y^2 = 3 \sqrt{x^2 + y^2} - 4x$$

of na wat omwerken (doe dit zelf)

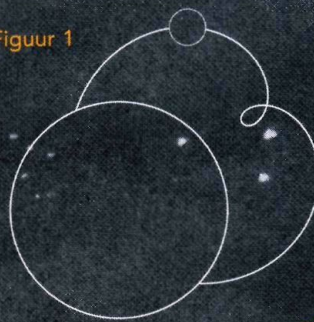
$$(x^2 + y^2 + 4x)^2 = 9(x^2 + y^2).$$

Slak

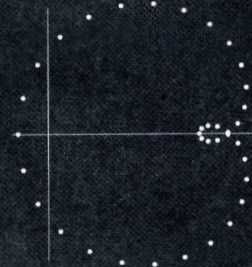
Deze kromme werd ontdekt door Étienne Pascal, de vader van de beroemde Blaise Pascal. In 1650 gaf de wiskundige Roberval de kromme de naam *limaçon van Pascal*. Limaçon komt van het Latijnse limax, dat 'slak' betekent. We hebben niet kunnen ontdekken waarom Roberval juist deze naam gekozen heeft.

Als iemand het wel weet, dan horen wij dat graag.

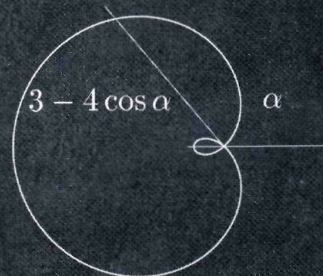
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

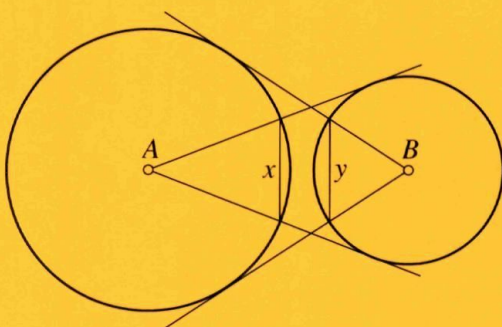


Problemen

Dion Gijswijt

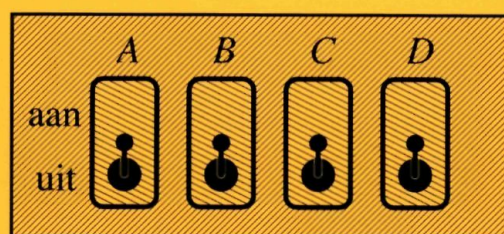
Oogbalstelling

Vanuit de middelpunten A en B van twee cirkels, zijn raaklijnen getrokken aan de andere cirkel (zie figuur). Kun je bewijzen dat de lijnstukken x en y even lang zijn?



Elektronisch slot

Een elektronisch slot opent zodra de vier aan-uit-schakelaars in de juiste stand staan. Kun je door niet meer dan 15 keer een schakelaar om te zetten het slot openen?



Pythagorasboom

Deze Pythagorasboom is opgebouwd uit vierkanten en rechthoekige driehoeken. Wat is de oppervlakte van alle gekleurde vierkanten samen als het onderste vierkant oppervlakte 1 heeft?

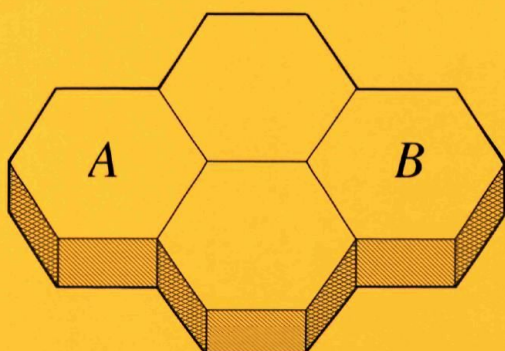


Vier cijfers

Bereken de som van alle getallen van 4 cijfers, waarvan de cijfers 1, 2, 3 of 4 zijn.

Honingbij

Een bij vliegt van cel naar cel. Daarbij gaat ze telkens van een cel naar een willekeurige aangrenzende cel, elk met gelijke kans. Zo kan ze in twee keer vliegen van cel A naar cel B komen, maar meestal doet ze daar langer over. Hoeveel vluchten heeft ze gemiddeld nodig om van A naar B te komen?



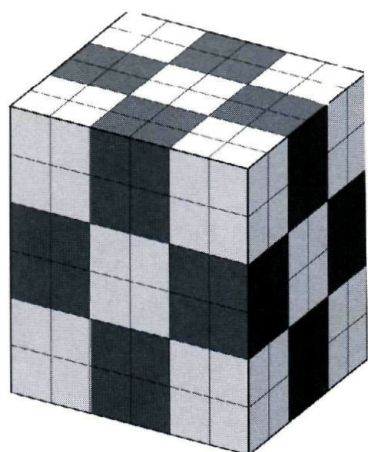
Oplossingen

nr.4

Dion Gijswijt

Kubuspuzzel

Kleur in de kubus met zijde 6 de zeven-entwintig deeltubusjes met zijde 2 volgens een schaakbordpatroon zoals in de figuur. Er zijn 14×8 lichte kubusjes en 13×8 donkere. Als je een puzzelstukje met afmetingen 1 bij 1 bij 4 in de kubus past, dan zijn van zo'n stukje precies twee kubusjes licht en twee donker. Omdat de grote kubus niet evenveel donkere als lichte kubusjes bevat, kan deze niet opgebouwd zijn uit de gegeven stukjes. Alleen voor viervouden kan een kubus met zijde n worden gevormd. Immers, n kan niet oneven zijn en volgens de schaakbordkleuring ook geen oneven veelvoud van 2. Omdat je wel een kubus met zijde 4 kunt maken, kun je elke kubus maken waarvan de zijde een viervoud is.

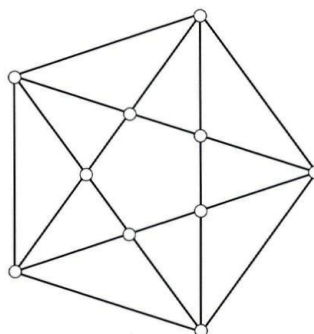


Menger

Bij elke stap wordt $7/27$ deel van de kubusjes verwijderd en blijft $20/27$ over. Na drie stappen heeft de figuur volume $(20/27)^3$, ongeveer 0,41.

N.B. Van de spons van Menger is het volume 0, terwijl de oppervlakte oneindig is.

Bomen planten



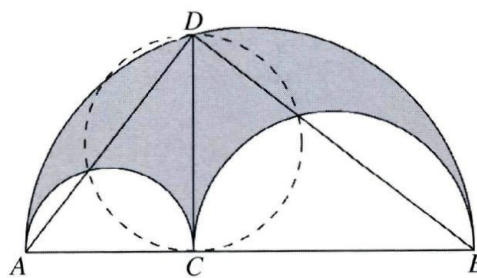
Sikkel

Merk op dat hoek ADB een rechte hoek is. Met Pythagoras vinden we dat

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AD|^2 + |BD|^2 \\ &= |AC|^2 + |CD|^2 + |BC|^2 + |CD|^2. \end{aligned}$$

De som van de oppervlakte van de halve cirkels met middellijnen AC , CD , BC en CD is dus gelijk aan de oppervlakte van de halve cirkel met middellijn AB .

De oppervlakte van het gearceerde gebied is gelijk aan die van een hele cirkel met middellijn CD , dus gelijk aan π .



Vier getallen

Noem de vier getallen a , b , c en d . Hiervan zijn er geen twee gelijk, want dan krijg je hoogstens 4 verschillende sommen. Neem daarom aan dat $a < b < c < d$. Je weet dan dat $a + b = 5$, $a + c = 7$, $c + d = 15$ en $b + d = 13$. Dus $a + d = b + c = 10$, zodat $2a = (a + b) + (a + c) - (b + c) = 2$ en $a = 1$. Nu volgt dat $b = 4$, $c = 6$ en $d = 9$.

Pi in de Pieterskerk

24

In de Leidse Pieterskerk heeft meer dan twee eeuwen een grafsteen gelegen met daarop de eerste 35 decimalen van het getal π . In de negentiende eeuw is deze grafsteen spoorloos verdwenen. Wil je weten wat op deze steen heeft gestaan? Kom dan op 5 juli naar de feestelijke onthulling van een nieuwe gedenksteen.

Op woensdag 5 juli 2000 organiseert het Wiskundig Genootschap een uniek evenement in Leiden, met als hoogtepunt de onthulling van een gedenksteen voor Ludolph van Ceulen in de Pieterskerk.

Die Ludolphsche Zahl

Ludolph van Ceulen (1540-1610) werd vooral bekend door zijn benaderingen van het getal π . Om die reden wordt π in het Duits nog steeds wel aangeduid als "die Ludolphsche Zahl". Van Ceulens boek *Van den Circkel* uit 1596 geeft 20 cijfers achter de komma. In latere geschriften worden nog meer decimalen gegeven, maar de 35 decimalen van π werden voor het eerst "gepubliceerd" op zijn grafsteen.

Leiden

In 1600 werd Van Ceulen op advies van Simon Stevin door Prins Maurits

benoemd tot hoogleraar in Leiden, samen met Symon Fransz. van Merwen. In dat jaar voegde Maurits een genieschool toe aan de universiteit, waar deze twee heren "in goeder duytsche taele" les mochten geven in "Telconsten ende Landmeten", om zo ingenieurs op te leiden die nodig waren in de oorlog tegen Spanje.

De verdwenen grafsteen

Op Van Ceulens grafsteen in de Pieterskerk werd een nauwkeurige onder- en een bovengrens voor π vermeld. Voor zover bekend is dit het enige voorbeeld ter wereld van een nieuw wetenschappelijk resultaat dat via een grafsteen wereldkundig werd gemaakt. In de eerste helft van de negentiende eeuw is deze grafsteen verdwenen, hetgeen in de internationale literatuur geldt als een blamage voor Nederland.

Een nieuwe steen

Als onderdeel van het avondprogramma zal een gedenksteen met daarop een reconstructie van de oorspronkelijke tekst van Van Ceulens grafsteen worden onthuld. Voor dit evenement bestaat veel interesse vanuit de landelijke media. De organisatie verwacht op 5 juli 2000 vele belangstellenden, met name vanuit

Bon

Ja, ik vraag gratis toegangskaarten aan voor de Pi-dag op 5 juli 2000 in Leiden:

Opsturen naar:
Wiskundig Genootschap, Postbus 800,
9700 AV Groningen
E-mail: pi-dag@math.rug.nl

Naam:

Adres:

Postcode:

Woonplaats:

Leeftijd:

Telefoonnummer:

Aantal gewenste kaarten (maximaal 2):

Code: pyth-jul2000

Bezoekt [wel/niet] het middagprogramma

de Nederlandse wiskunde. Voor deelname aan dit evenement dient men zich vooraf in te schrijven.

Programma

Op 5 juli 2000 is er een wetenschappelijk middagprogramma en een feestelijk avondprogramma. Een van de hoofdsprekers die dag is Peter Borwein, bekend van onder meer de *Pi and the AGM* en *Pi: a Source Book*. Het middagprogramma vindt plaats in de Gorlaeus Laboratoria van de Universiteit Leiden. Dit is tevens onderdeel van het Algorithmic Number Theory Symposium dat van 2 tot 7 juli in Leiden plaatsvindt. Bestemd voor een enigszins geschoold publiek (vwo wiskunde-niveau).

14:30-15:00 Ontvangst met koffie en thee

15:00-15:50 Frits Beukers (Utrecht),

A rational approach to π

16:10-17:00 Peter Borwein (Burnaby, Canada), *The 40 trillionth binary digit of π*

Het avondprogramma vindt plaats in de Pieterskerk te Leiden en is bestemd voor iedereen met belangstelling voor wiskunde.

19:30-20:00 Ontvangst met koffie en thee

20:05-20:35 Peter Borwein, *The amazing number π*

20:45-21:15 Henk Bos (Utrecht), *Ludolph van Ceulen*

21:15-21:30 Onthulling van de gedenksteen voor Ludolph van Ceulen

21:30-22:30 Receptie (champagne)

MY2K

Pi in de Pieterskerk is een van de Nederlandse activiteiten in het kader van het Wereld Wiskundig Jaar 2000 (MY2K). Op 6 mei 1992 verklaarde de International Mathematical Union in Rio de Janeiro het jaar 2000 tot Wereld Wiskundig Jaar. Andere Nederlandse activiteiten in dit kader zijn "Van Dantzig 2000" (een symposium in september ter nagedachtenis aan de mathematisch statisticus David van Dantzig) en "De Nationale Doorsnee" (een grootschalig statistiekproject in oktober).

Meer informatie

<http://www.math.rug.nl/~top/pi-dag/5juli.html>

Toegang

Het middagprogramma is vrij toegankelijk, het avondprogramma niet. Speciaal voor de lezers van Pythagoras is een beperkt aantal toegangskaarten gereserveerd. Gratis toegangskaarten kunnen met bovenstaande bon worden aangevraagd.

Beeld & Bedrog



26

De auto in de straat is een vertrouwd beeld. Zo vertrouwd, dat deze geschilderde auto's bijna niet meer opvallen.

Heb jij ook een foto voor deze rubriek gevonden of gemaakt? Stuur dan op naar de redactie.

Joop van der Vaart

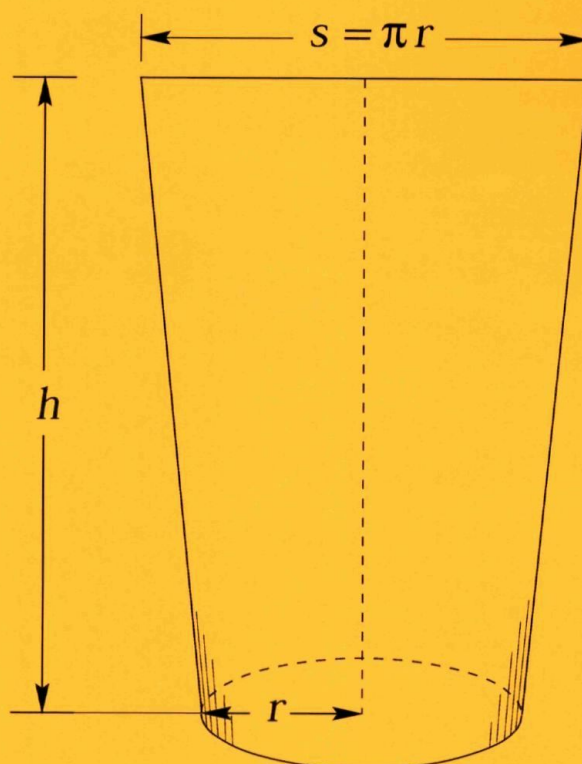


27



De tube

Theo Smits



28

Tandpasta-fabrikanten stoppen hun product in een tube. Zo'n tube ontstaat door een cilinder van plastic aan één kant dicht te knijpen. De tube is eigenlijk een soort kegel, maar dan niet met één toppunt, maar met een toprechte. De tube kan gekarakteriseerd worden met twee waarden: de straal r van de grondcirkel, en de hoogte h van de 'kegel'. Zie figuur 1. Ga zelf na dat voor s geldt: $s = \pi r$.

Het volume

De vraag is nu: hoeveel kan er in zo'n tube. Met andere woorden, wat is het volume? Interessant is ook wat het volume van de tube is in vergelijking met een cilinder met hoogte h en straal r . In Pythagoras 30(2) van maart 1991 vonden we een artikel over de wig van Wallis. Deze wig is een speciaal geval van een kegel met een toprechte, namelijk: $s = h = 2r$. In dat artikel werd op elegante wijze een formule afgeleid voor het volume van een kegel met toprechte s . Deze formule luidt:

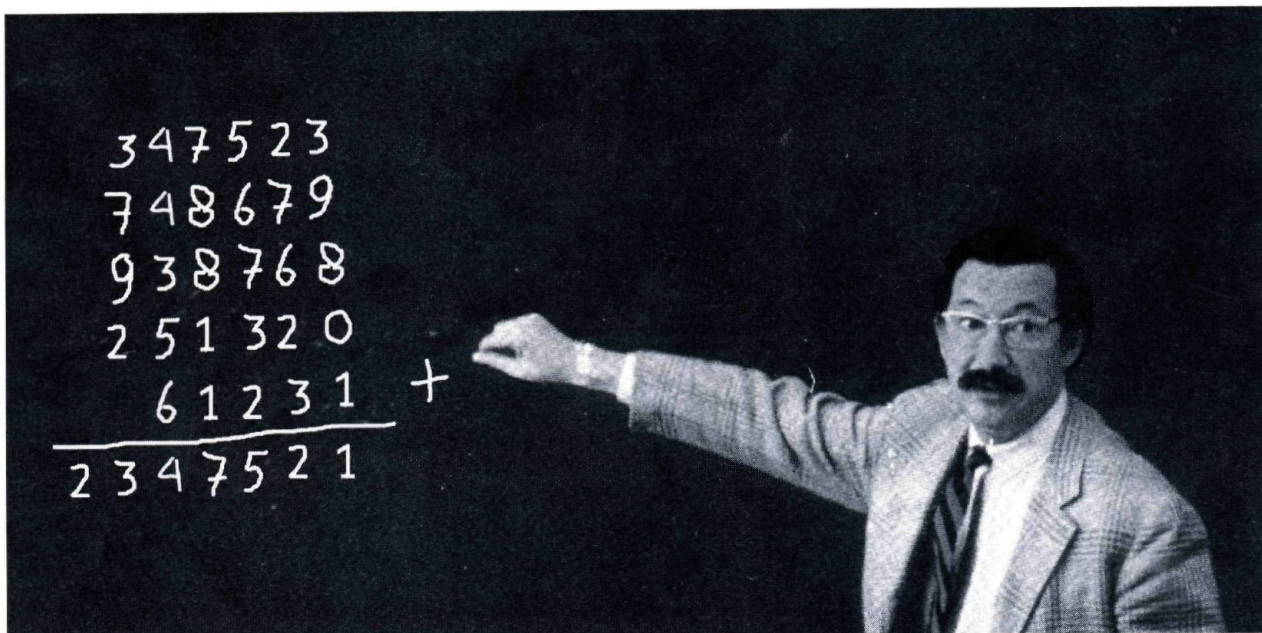
$$V = \frac{1}{3} \pi r h \left(r + \frac{s}{\pi} \right).$$

Voor onze tube betekent dat ($s = \pi r$):

$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$. Aangezien het volume van de cilinder gelijk is aan $V = \pi r^2 h$ is dus het volume van de tube tweederde van het volume van de cilinder. Ter controle: een tube Elmex bevat volgens de fabrikant 75 ml tandpasta. Nameten van de afmeting van de tube levert de volgende waarden: $r = 1,65$ cm en $h = 12,5$ cm. Vullen we dat in, dan komt er een volume uit van 71 cm³. Dat komt aardig overeen met wat de fabrikant opgeeft.

De oppervlakte

Er blijft nog een interessant vraag over: wat is de oppervlakte van de tube? Deze is niet gelijk aan het oppervlak van de cilinder-mantel ($2\pi r^2 h$), maar komt er wel in de buurt. Wellicht weet je een algemene formule voor alle kegels met een toprechte. Stuur je oplossing naar Pythagoras.



Een magische optelsom

Wie wil nu niet de indruk wekken een rekenwonder te zijn? De volgende opteltruc vertelt je hoe je zonder te rekenen razendsnel kunt optellen.

Op vrijdag 3 maart hield de Engelse wiskundige Robin Wilson in Amsterdam een lezing over Lewis Carroll. Lewis Carroll is een pseudoniem van C.L. Dodgson, die behalve wiskundige, logicus, fotograaf en dichter ook de schrijver van *Alice in Wonderland* was.

Tijdens deze lezing werd een rekentruc van Lewis Carroll gedemonstreerd. Eerst schreef de spreker zelf een getal van zes cijfers op. Daarna vroeg hij vier mensen uit de zaal elk ook een getal van maximaal zes cijfers te noemen. Met enige aarzeling reageerden een paar toehoorders. Er werden vier getallen genoemd, die een voor een onder het eerste getal werden geschreven. Zonder ook maar één seconde na te denken werd daaronder de som van de vijf getallen opgeschreven, zie bovenaan deze pagina op het schoolbord.

De spreker had blijkbaar de vijf getallen razendsnel bij elkaar opgeteld. Het antwoord werd met een rekenmachine nagerekend, en

het klopte! De lezing ging snel verder met weer een ander raadsel van Lewis Carroll.

Het geheim

Het publiek begreep de truc niet. Hoe kan iemand zó snel optellen? Maar de spreker veranderde niet voor niets zo snel van onderwerp. Kijk eens wat langer naar de vijf getallen en naar het eindresultaat. Wat is er voor bijzonders aan de hand? Het tweede getal en het vierde getal zijn samen precies 999999, en het derde en het vijfde getal ook. De som van de vijf getallen is daarom gelijk aan het eerste getal plus twee keer 1000000 – 1. De optelling komt daarom neer op:

eerste getal + 2000000 – 2

Het antwoord krijg je dus door voor het eerste getal een 2 te zetten, en daar 2 van af te trekken. Hoe kan het nu dat het tweede en vierde getal samen 999999 waren? Gewoon, de spreker had in de zaal twee handlangers zitten die het vierde en vijfde getal opnoemen. Geen rekentruc dus, maar gewoon bedrog!

Zonder publiek

Deze rekentruc kun je ook uitvoeren zonder een groot publiek. Zelf geef je het eerste getal van zes cijfers, daarna vraag je iemand anders twee willekeurige cijfers van maximaal zes cijfers te noemen. Het vierde en vijfde getal geef je dan zelf, en de som schrijf je er onmiddellijk onder. Succes gegarandeerd!

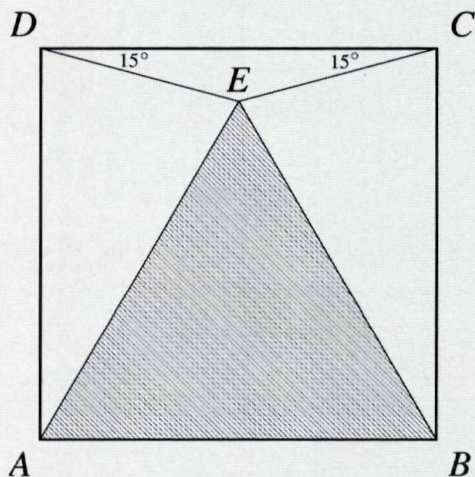
De post

30

C.J.J. van der Raaij uit Amsterdam zond ons een vraagstuk uit de vlakke meetkunde. Het probleem werd door geen enkele eindexamenkandidaat van de Kweekschool in 1949 opgelost. De oorspronkelijke opgave is door schoning van het Rijksarchief niet meer beschikbaar, wat niet wegneemt dat hij zich de opgave nog haarscherp herinnert, omdat het zo'n eenvoudig probleem leek waarvan de oplossing bij nader inzien verdraaid moeilijk was. Na een nacht puzzelen lukte het hem het probleem op te lossen. De rest van zijn leven is hij bezig geweest met probleem-oplossen, waarvoor de oplossing van het kweekschool-probleem vaak model stond. Het probleem luidde als volgt:

Gegeven: een vierkant $ABCD$ omsluit een gelijkbenige driehoek CDE met basishoeken van 15 graden. Te bewijzen: driehoek ABE is een gelijkzijdige driehoek!

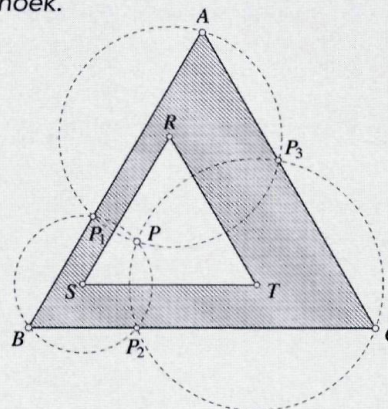
N.B. Het was de bedoeling dit vraagstuk langs louter planimetrische weg op te lossen, dus niet met behulp van goniometrie, noch door uit het ongerijmde te redeneren.



Figuur 1.

Luc Janus uit Kuurne (België) bedacht tijdens de nieuwjaarsnacht een meetkundestelling. Hij werd geïnspireerd door de Quattro-puzzel en de bijdrage van Bruno Ernst (*Pythagoras voor een gewone driehoek*) uit het oktobernummer van Pythagoras. Voor deze volgens hem eerste stelling van 2000 geeft hij twee verschillende bewijzen.

Stelling. Beschouw een gelijkzijdige driehoek ABC en een willekeurig punt P binnen deze driehoek. De punten P_1 , P_2 en P_3 zijn de loodrechte projecties van P op de zijlijnen AB , BC en CA . De punten R , S en T zijn de middelpunten van de omgeschreven cirkels van de (koorden)vierhoeken PP_1AP_3 , PP_1BP_2 en PP_2CP_3 . Dan is de oppervlakte van driehoek RST een vierde van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek.

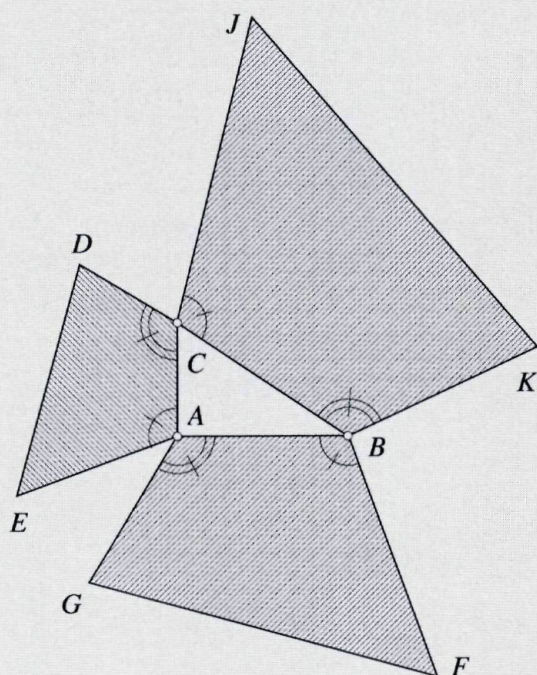


Figuur 2.
opp. driehoek $ABC = 4$ opp. driehoek RST

Luc merkt verder nog op dat de stelling ook geldt voor een willekeurige driehoek en in het geval dat P buiten de driehoek gelegen is. De stelling is ook waar voor een willekeurige vierhoek, voor een willekeurige n -hoek en voor het limietgeval van een cirkel.

Jacques Devos uit België stuurde een verslag van zijn exploratie van de stelling van Pythagoras met Cabri. In plaats van vierkanten plaatst hij willekeurige vierhoeken op de zijden van een rechthoekige driehoek. De vorm en de grootte van de vierhoeken kan hij in Cabri variëren door de getallen voor de hoeken en de verhoudingen te wijzigen. Telkens stelt hij vast dat de som van de oppervlakten op de rechthoekszijden gelijk is aan de oppervlakte op de schuine zijde. Met andere woorden, hij heeft de volgende generalisatie van de stelling van Pythagoras ontdekt:

Stelling. Van drie gelijkvormige figuren gebouwd op de zijden van een rechthoekige driehoek is de som van de oppervlakten op de rechthoekszijden gelijk aan de oppervlakte op de hypothenusa.



Figuur 3.
Op de zijden van een rechthoekige driehoek construeren we drie gelijkvormige vierhoeken volgens het kenmerk: drie overeenkomstige zijden zijn evenredig en de twee overeenkomstige ingesloten hoeken zijn gelijk. Dan geldt: opp. $EACD$ + opp $FBAG$ = opp $JCBK$.

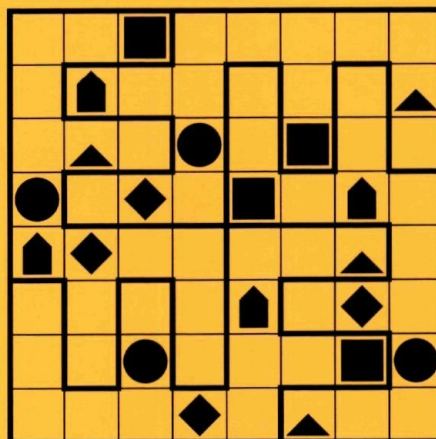
Oplossingen

Z O E
K E R
T J E S

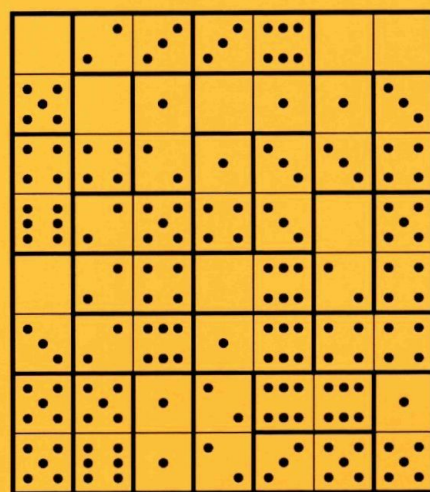
Origami

A, D, G, H, F, B, E, C.

Verdeel de taart



Domino's



Vreemde eend

Figuur C. Alle andere figuren zijn spiegelbeeld van de aangrenzende figuren.

Agenda

vrijdag 9 juni 2000

Open dag op locatie

Universiteit van Amsterdam
tel 020-59995750, email kattie@wins.uva.nl

woensdag 5 juli 2000

Pi in de Pieterskerk

Onthulling gedenksteen Ludolph van Ceulen
<http://www.math.rug.nl/~top/pi-dag/5juli.html>

Vierkant zomerkampen Lunteren

Locatie: jeugdherberg de Poelakker.

Stichting Vierkant voor wiskunde organiseert twee zomerkampen met een wiskundige inslag voor leerlingen van 10 tot 17 jaar. De kampen worden begeleid door ervaren wiskundigen. Je hoeft geen whizzkid te zijn om mee te gaan, maar je moet wel een liefhebber zijn van het oplossen van (wiskundige) problemen en puzzels of het maken van wiskundige (kunst)(bouw)werken. De activiteiten worden afgewisseld met lezingen, spelletjes en sport.

ma 7 tot vr 11 augustus 2000
ma 14 tot vr 18 augustus 2000

kamp A voor groep 6, 7 en 8 en brugklassers

kamp B voor leerlingen van het voortgezet onderwijs

Meer informatie: tel: 020 4447776

e-mail: vierkant@cs.vu.nl,

internet: www.cs.vu.nl/~vierkant

vr 25 en za 26 augustus 2000

Is wiskunde nog wel mensenwerk?

Vakantiecursus 2000 (voor wiskundedocenten)
TU Eindhoven
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/>

vr 1 en za 2 september 2000

Is wiskunde nog wel mensenwerk?

Vakantiecursus 2000 (voor wiskundedocenten)
CWI Amsterdam
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/>

zo 8 oktober 2000

Wetenschapsdag 2000

di 10 oktober 2000

De nationale doorsnee

Via een grootschalig meetproject, uit te voeren door leerlingen en leraren, wordt op deze dinsdag van de Wetenschap & TechniekWeek antwoord gegeven op de vraag: "Wie is de gemiddelde leerling van Nederland?" Van tevoren hebben de deelnemers daar al voorspellingen over kunnen doen.

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskundeafdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam

 **TU Delft**



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar.

Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 1999-2000

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 37,50. Losse nummers f 8,- of BF 160.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 950,

Pythagoras buitenland f 52,50.

Pythagoras én Archimedes f 67,50,

Pythagoras én Archimedes België BF 1570,

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:

Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Prijs: f 25,- / BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Prijs: f 30,- / BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement.

Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.

Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37 en 38 (f 25,- excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (f 7,50 excl. verzendkosten).

