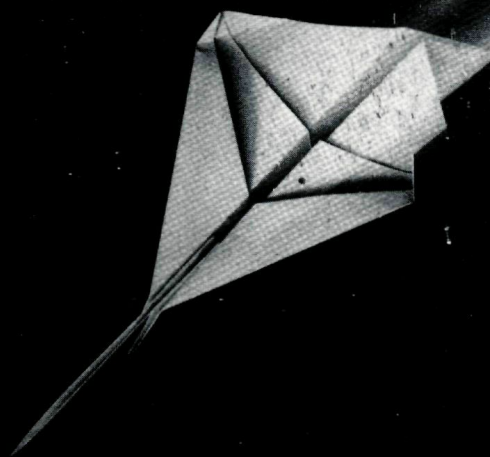


# PYTHA GORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

AUGUSTUS 2000

## COLOFON

### **Uitgave**

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

### **E-mail**

pythagoras@science.uva.nl

### **WWW**

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

### **Redactie**

André de Boer  
Dion Gijswijt  
Klaas Pieter Hart  
René Swarttouw  
Chris Zaal

### **Hoofd- en eindredactie**

Chris Zaal

### **Grafisch ontwerp**

Sonja en Esther, Amsterdam

### **Drukwerk**

Giethoorn Ten Brink, Meppel

### **Uitgever**

Wiskundig Genootschap  
Postbus 80010  
3508 TA Utrecht

### **Lezersreacties en kopij**

Dion Gijswijt  
Korteweg-de Vries Instituut  
voor wiskunde  
Universiteit van Amsterdam  
Plantage Muidergracht 24  
1018 TV Amsterdam

### **Redactiesecretariaat**

Pythagoras  
Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
tel 071 5277121  
fax 071 5277101

### **Abonnee-administratie**

#### **Adreswijzigingen**

Mirjam Worst  
Drukkerij Giethoorn Ten Brink  
Postbus 41  
7940 AA Meppel  
tel 0522 855175  
fax 0522 855176

### **Niveau-rondjes**

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.  
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;  
1 rondje <sup>o</sup>: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;  
2 rondjes <sup>oo</sup>: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;  
3 rondjes <sup>ooo</sup>: dit gaat net iets verder dan de middelbareschoolstof.

## MEDEWERKERS

**drs. A.A.J. de Boer** is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **dr. L.A.M. van den Broek** is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **ir. N. Bordewijk** is metagrobologist te Amsterdam. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **dr. B. Kuckert** is docent wiskunde aan de UvA. **dr. ir. A.A.J. Lefeber** is AIO systeem- en besturingstheorie aan de TUE. **prof.dr. R. Meester** is hoogleraar kansrekening aan de VU en de UU. **drs. W.R. Oudshoorn** is AIO algebra en meetkunde aan de UG. **ir. S.M. van Rijnsouw** is OIO computeralgebra aan de TUE. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **dr. E. Wattel** is docent wiskunde aan de VU. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.





# INHOUD

- |         |                                           |         |                                             |
|---------|-------------------------------------------|---------|---------------------------------------------|
| 2 - 3   | Lettertjes                                | 24      | Problemen                                   |
| 4 - 5   | Sangaku uit polderland                    | 25      | Oplossingen nr. 5                           |
| 6 - 7   | Pythagoras Olympiade                      | 26 - 27 | Beeld en Bedrog                             |
| 8 - 9   | Uitslag prijsvraag $3\frac{1}{2}$ omino's | 28      | Oplossingen:<br>Lettertjes<br>Scheuren nr.5 |
| 10 - 13 | De wereld in het platte vlak              | 29      | Boeken                                      |
| 14 - 15 | Maak je eigen <b>Vouwpuzzels</b>          | 30 - 31 | De post                                     |
| 16 - 17 | <b>4 Vouwpuzzels</b>                      | 32      | Agenda                                      |
| 18 - 20 | De kinderen van Ruud                      |         |                                             |
| 21      | Nederlandse<br>Wiskunde Olympiade         |         |                                             |
| 22 - 23 | Spiralen                                  |         |                                             |

# LETTERTJES

2

## 3 keer 1

In de volgende optelling staat elke letter voor een cijfer (0 - 9).  
Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Zoek uit welke cijfers bij welke letters horen. Er zijn meerdere oplossingen.

$$\begin{array}{r} \text{EEN} \\ \text{EEN} \\ \text{EEN} + \\ \hline \text{DRIE} \end{array}$$

## 2 keer 2

In de volgende optelling staat elke letter voor een cijfer (0 - 9).  
Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Zoek uit welke cijfers bij welke letters horen. Er zijn meerdere oplossingen.

$$\begin{array}{r} \text{TWEE} \\ \text{TWEE} + \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

In de volgende puzzels stellen de symbolen steeds een cijfer voor. Aan jou de taak voor elk symbool een cijfer te vinden zó, dat de som klopt.

De oplossingen staan op pagina 28.

## 6 keer 1

In de volgende optelling staat elke letter voor een cijfer (0 - 9).  
Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Zoek uit welke cijfers bij welke letters horen. Er is precies één oplossing.

$$\begin{array}{r} \text{EEN} \\ \text{EEN} \\ \text{EEN} \\ \text{EEN} \\ \text{EEN} \\ \text{EEN} + \\ \hline \text{ZES} \end{array}$$



## Vijf drieën

In de onderstaande som worden twee getallen van drie cijfers met elkaar vermenigvuldigd. Er zijn slechts vijf drieën, waarvan de positie al is aangegeven. De andere cijfers zijn met een kruisje aangegeven. Zoek uit wat de twee getallen zijn en maak de vermenigvuldiging af. Er is precies één oplossing.

$$\begin{array}{r}
 \text{X X 3} \\
 \text{X X 3} \times \\
 \hline
 3 \text{ X X} \\
 \text{X 3 X} \\
 \text{X X 3} \quad + \\
 \hline
 \text{X X X X X}
 \end{array}$$

## ° Een, twee, vier, zeven

In de volgende optelling staat elke letter voor een cijfer (0 - 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Zoek uit welke cijfers bij welke letters horen. Er zijn meerdere oplossingen.

$$\begin{array}{r}
 \text{ONE} \\
 \text{TWO} \\
 \text{FOUR} + \\
 \hline
 \text{SEVEN}
 \end{array}$$

## °° Cijferraadsel

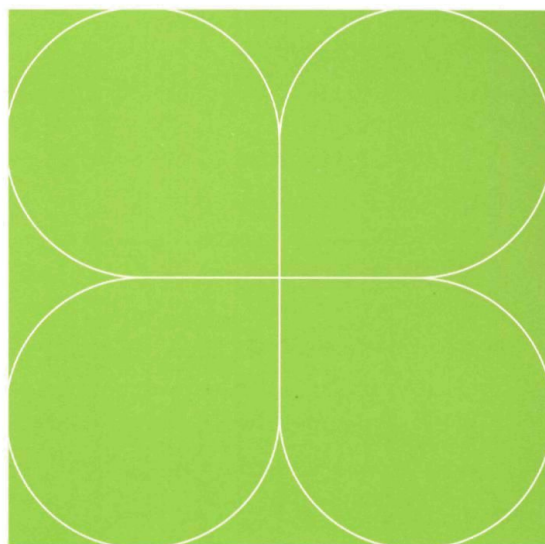
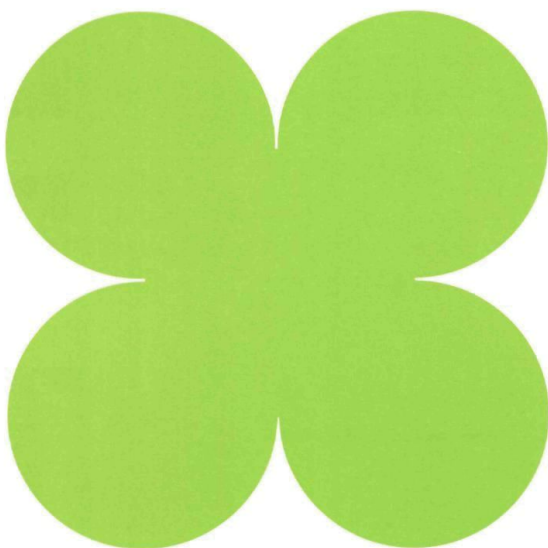
In deze som ontbreken alle getallen. Het enige bekende gegeven is dat de cijfers 1 tot en met 9 maar één keer gebruikt mogen worden.

$$\begin{array}{r}
 \bullet \bullet \\
 \bullet \times \\
 \hline
 \bullet \bullet \\
 \bullet \bullet + \\
 \hline
 \bullet \bullet
 \end{array}$$

## Gefeliciteerd!

In de volgende optelling staat elke letter voor een cijfer (0 - 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Zoek uit welke cijfers bij welke letters horen. Er is precies één oplossing.

$$\begin{array}{r}
 \text{SANDER} \\
 \text{SASKIA} + \\
 \hline
 \text{NIENKE}
 \end{array}$$



Figuur 1

# SANGAKU

4

Bruno Ernst

In ons land komen zo'n 20 verschillende klavers voor. De bekendste is de Witte Klaver (*Trifolium repens*). De bladsteel is onvertakt en draagt meestal drie blaadjes. Soms zit er wel eens een bij die vier blaadjes draagt en omdat dat zo zelden voorkomt, wordt het vinden van een klavertje vier geassocieerd met geluk. Hier maken we een link met meetkunde. In figuur 1 zijn vier gelijke cirkelbogen binnen een vierkant getekend. Het ziet er nogal plomp en onnatuurlijk uit en wiskundig is er weinig aan te beleven. Zo is de oppervlakte van dit klavertje vier nog wel uit het hoofd te berekenen (namelijk  $4 \cdot \frac{3}{4} \pi r^2 + 4r^2$  waarin de zijde van het vierkant gelijk is aan  $4r$ ). Het klavertje vier uit figuur 2 ziet er aantrekkelijker uit. Hier zijn de diagonalen van het vierkant getekend en ingeschreven cirkels in de vier driehoeken aangebracht. De vraag is: hoe groot is de oppervlakte van de blaadjes als

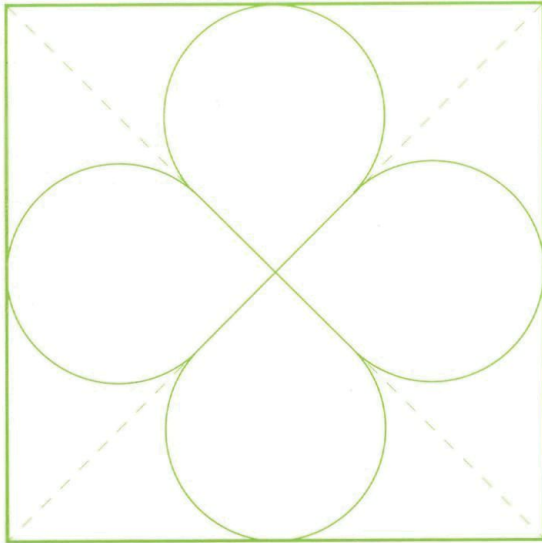
de zijde van het vierkant gelijk is aan  $a$ . Dit blijkt een aardige puzzel. En wie geen zin heeft in puzzelen kan hieronder meteen de oplossing vinden.

## Oplossing van het klavertje vier

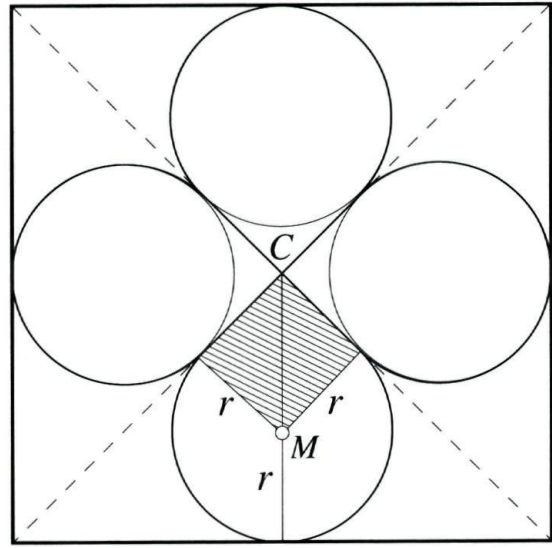
In figuur 3 zijn de cirkels volledig getekend binnen het vierkant met zijde  $a$ . Voor de berekening gebruiken we alleen het onderste deel van het vierkant. De cirkel heeft een straal  $r$  en we proberen eerst  $r$  uit te drukken in  $a$ . Trek  $CD$  door het middelpunt van de cirkel en ook twee stralen naar de raakpunten van de cirkel met  $AC$  en  $BC$ . Beide stralen staan ook loodrecht op  $AC$  en  $BC$ . In het gearceerde vierkant dat zo ontstaat is

$$CM = r\sqrt{2} \text{ en } CD \text{ is dus } r\sqrt{2} + r.$$

$$\text{Maar } CD = AD = DB = \frac{1}{2}a.$$



Figuur 2 **Quadrifolium Mathematicum**



A Figuur 3

D

B

# uit Polderland

5

Dus  $r\sqrt{2} + r = \frac{1}{2}a$ .

Daaruit volgt  $r = \frac{a}{2(\sqrt{2} + 1)}$ .

De oppervlakte van het blaadje is de oppervlakte van het vierkant plus  $\frac{3}{4}$  van de oppervlakte van de cirkel, dus

$$r^2 + \frac{3}{4} \pi r^2 = r^2 \left(1 + \frac{3}{4} \pi\right).$$

Vullen we de waarde van  $r$  die we hierboven vonden in dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte blaadje} &= \frac{a^2}{4(\sqrt{2} + 1)^2} \left(1 + \frac{3}{4} \pi\right) \\ &= \frac{a^2 \left(1 + \frac{3}{4} \pi\right)}{4(3 + 2\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

De oppervlakte van het hele klavertje is 4 maal zo groot, dus:  $\frac{a^2 \left(1 + \frac{3}{4} \pi\right)}{3 + 2\sqrt{2}}.$





# Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

## Opgave 61

Bepaal alle functies  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  die voldoen aan  $f(x) = f(x^2 + x + 1)$  en:

1. de functie is even, dat wil zeggen  $f(x) = f(-x)$  voor alle  $x \in \mathbb{Z}$ , of:
2. de functie is oneven, dat wil zeggen  $f(x) = -f(-x)$  voor alle  $x \in \mathbb{Z}$ .

Let op, dit zijn dus eigenlijk twee opgaven!

## Opgave 62

Een schaakbord is volledig overdekt met dominostenen. Elke dominosteentje overdekt precies 2 vakjes van het schaakbord. Elk vakje van het schaakbord wordt door precies één dominosteentje overdekt.

De dominostenen waarvan de lange kant parallel ligt aan de onderste kant van het bord noemen we horizontaal.

Bewijs dat het aantal horizontale stenen waarvan het linker vakje zwart is, gelijk is aan het aantal horizontale stenen waarvan het linker vakje wit is.

Stuur je oplossing naar:

**Pythagoras Olympiade**  
**TU Eindhoven**  
**Faculteit Wiskunde**  
**Hoofdgebouw kamer 9.50**  
**Postbus 513**  
**5600 MB Eindhoven**

**email: [sander@win.tue.nl](mailto:sander@win.tue.nl)**

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 september 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftientig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt! Hiernaast volgt de oplossing van opgave 56 uit het februarinummer.

## Veel succes!

Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn  
en Sander van Rijnswou.



### Opgave 57

Een spel voor twee spelers gaat als volgt. Er liggen 2000 lucifers op tafel. Om beurten moet je een aantal lucifers weghalen. Het aantal dat je weghaalt moet een tweemacht zijn (1, 2, 4, 8, ...). Degene die de laatste lucifer moet pakken heeft verloren. Kan de eerste speler altijd winnen? Kan de tweede speler altijd winnen?

**Oplossing.** We bekijken eerst het algemene geval. Noem  $n$  het aantal lucifers. De eerste speler kan winnen als de rest die overblijft wanneer je  $n$  door 3 deelt 0 of 2 is. De eerste speler zal verliezen als er rest 1 overblijft. We gaan dit bewijzen met een techniek die inductie heet. Allereerst, als  $n = 1$  dan is de eerste speler verloren. De rest bij deling van  $n$  door 3 is dan 1, dus dat klopt. Veronderstel nu dat we weten dat bovenstaande uitspraak waar is voor alle  $n$  tot een of andere grens  $K$ . Dan gaan we nu bewijzen dat het ook waar is voor  $n = K+1$ . Als de rest van  $n$  na deling door 3 gelijk aan 0 of 2 is, haal dan 2 respectievelijk 1 lucifer(s) weg. Het aantal lucifers dat dan overblijft geeft rest 1 en is dus verloren voor onze tegenstander. Wat nu als er een rest 1 overblijft. We beweren dat we dan een verloren positie hebben. We weten al dat de verloren posities voor kleinere  $n$  inderdaad rest 1 overhouden na deling door 3. Wat we dus moeten laten zien is dat het niet mogelijk is zo'n positie te bereiken. Met andere woorden dat  $n-2^a$  nooit rest 1 zal geven. Maar dat betekent dat  $2^a$  zelf deelbaar moet zijn door 3. Dat is onmogelijk (het enige priemgetal dat  $2^a$  deelt is 2). Tenslotte:  $2000 / 3 = 666 + 2 / 3$ . Oftewel, er is rest 2. Dus kan speler 1 winnen. Zijn winnende zetten zijn het weg nemen van 1, 16, 64, 256 of 1024 lucifers.

Deze opgave werd opgelost door: Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen en Jim Kasteel.  
De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

### Opgave 58

De hoekpunten van een kubus zijn gemerkt met getallen: zeven maal een 0 en eenmaal een 1. Het is toegestaan om bij de getallen die aan weerszijde van een zijde staan 1 op te tellen. Kan je er voor zorgen dat alle hoekpunten van de kubus deelbaar zijn door 3?

**Oplossing** We gaan bewijzen dat de ggd (grootste gemene deler) van alle hoekpunten altijd 1 is. De hoekpunten van de kubus geven we aan met de letters  $ABCD.EFGH$ , op de gebruikelijke manier. Kijk nu naar de volgende uitdrukking:

$$A - B + C - D - E + F - G + H.$$

Elke zijde heeft een hoekpunt dat hier positief geteld wordt en een hoekpunt dat hier negatief geteld wordt.

De waarde van deze expressie zal dus niet veranderen als we de toegelaten bewerking uitvoeren (het is een 'invariant'). In het begin heeft het de waarde 1 en dat zal hij dus altijd houden. Veronderstel nu dat alle hoekpunten deelbaar zijn door een positief geheel getal  $k$ . Dan zou ook  $A - B + C - D - E + F - G + H$  deelbaar zijn door  $k$ . Dus dan is  $k$  een deler van 1. Oftewel  $k = 1$ . Er bestaat dus geen geheel getal groter dan 1 dat ooit alle hoekpunten kan delen. In het bijzonder is het dus ook niet mogelijk dat alle hoekpunten ooit door 3 deelbaar zijn.

Deze opgave werd opgelost door: Rob van de Westelaken, **Gymnasium Beekvliet** te Sint-Michielsgestel, Dion Boesten, **Bernardinus college** te Heerlen, Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen en Jim Kasteel.  
De boekenbon gaat naar Rob van de Westelaken



# $3\frac{1}{2}$ omino's

René Swarttouw

## Uitslag prijsvraag

Voor de prijsvraag uit het februari-nummer van Pythagoras werd gevraagd alle zogenaamde  $3\frac{1}{2}$ -omino's te vinden. Van die vormen moest je dan één of meer mooie symmetrische vormen maken. In totaal kreeg de redactie dertien inzendingen, variërend van een enkel A4-tje tot hele mappen vol met werkstukken.

### 14 stukjes

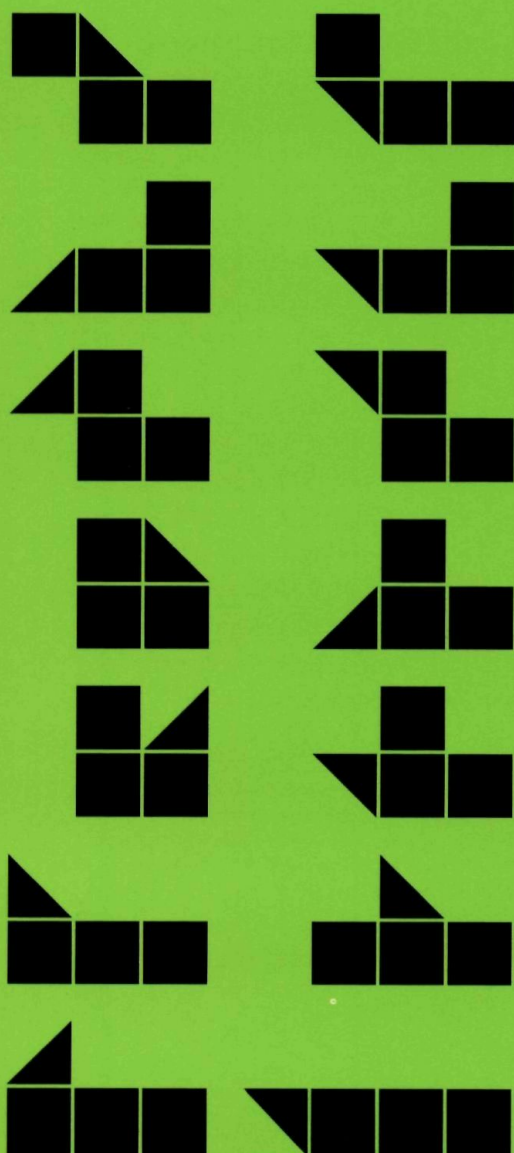
De eerste opdracht, het vinden van alle  $3\frac{1}{2}$ -omino's, is door iedere inzender opgelost. Er blijken, als we spiegelbeelden tellen als één en dezelfde vorm, 14 vorm-en te zijn. Ze staan getekend in figuur 1.

### Symmetrische figuren

De tweede opdracht was het maken van mooie symmetrische vormen waarin al deze 14 vormen precies één keer voorkomen. In de opdracht werd gesuggereerd te zoeken naar een rechthoek. Aangezien er 14 vormen van elk  $3\frac{1}{2}$  blokjes bestaan, hebben we totaal 49 blokjes. De enige rechthoek waarin zoveel blokjes precies passen is een  $7 \times 7$  vierkant. Bijna alle inzenders vonden een manier om van de 14 stukjes zo'n vierkant te vormen. Sommige inzenders gaven zelfs meerdere manieren aan om tot het gewenste resultaat te komen. Naast het vierkant heeft de redactie nog veel meer mooie symmetrische vormen ontvangen.

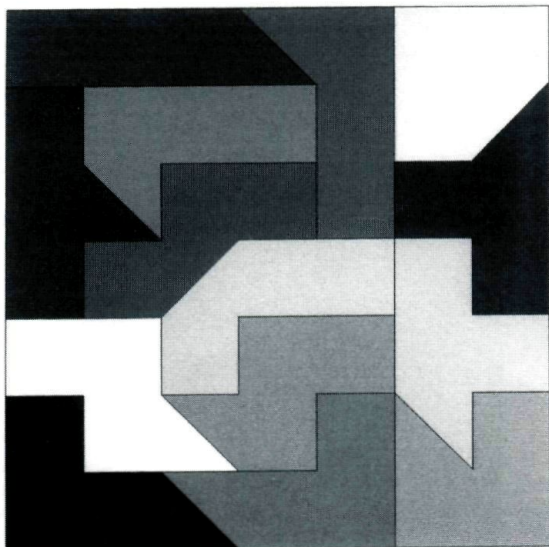
Wij waren onder de indruk van de grote creativiteit. Zo zijn er bijvoorbeeld molens, kaarsen met standaard, zwaailichten en zelfs olifanten binnengekomen. Een aantal van deze fraaie figuren zijn op de home-page van Pythagoras te bewonderen.

Figuur 1: de 14 stukjes

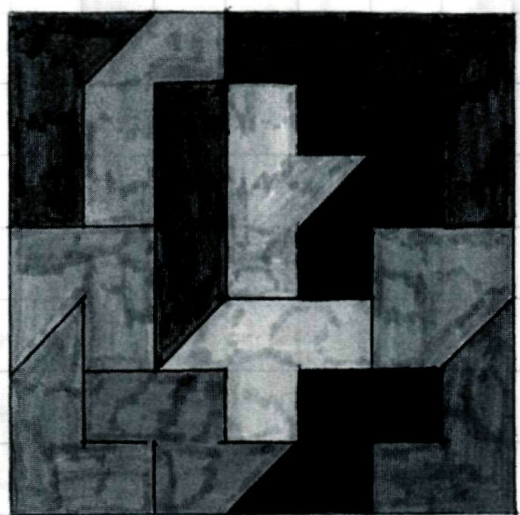




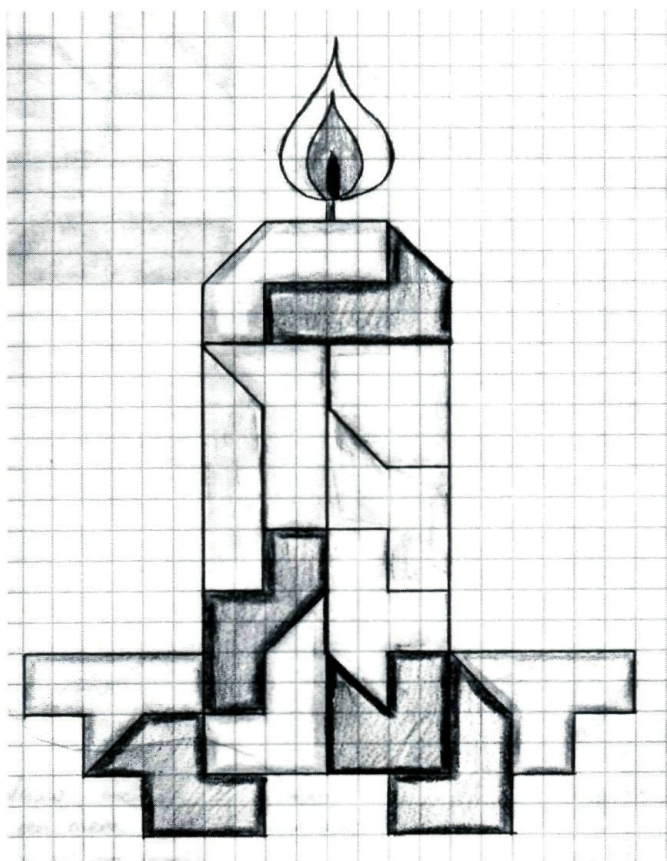
Een selectie uit de winnende inzendingen.



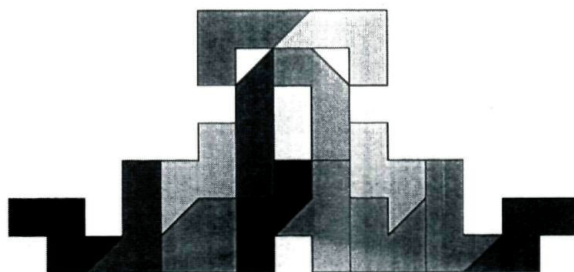
Een 7x7 vierkant van Lennard (Rythovius College)



Een 7x7 vierkant van Joyce Wouts



Kaars van Jasper Wijnands.



Vrij ontwerp van een leerling van het Rythovius College.

9

### Klassenprijzen

Er zijn twee categorieën van inzenders: klassen-inzendingen en individuele inzendingen. Bij de klasseninzendingen springen er twee bovenuit: de inzending van klas Z11 van het Greydanus College te Zwolle en die van klas 3Ga van het Rythovius College te Eersel. Zij verdienen hiermee ieder een prijs van f 250,-. Laatstgenoemde klas heeft ook nog een poging gedaan alle  $4\frac{1}{2}$ -omino's te vinden: zij kwamen uit op een totaal van 54. Zijn ze dit allemaal, of kan iemand er meer vinden?

### Individuele prijzen

Van de individuele inzenders gaan de prijzen naar Jasper Wijnands uit Kudelstaart, Wouter Jansen uit Den Haag en Joyce Wouts uit Alphen aan de Rijn. De eerste twee vonden meerdere manieren om een vierkant op te bouwen uit de 14 bouwstenen. Jasper voegde hier ook nog twaalf mooie symmetrische vormen aan toe. Een aantal zijn te bewonderen op de homepage van Pythagoras, evenals enkele inzendingen van de overige deelnemers.



# De wereld in

Evert Wattel

Vanaf de prehistorie hebben mensen kaarten van hun omgeving gemaakt. De Babyloniërs en de Egyptenaren maakten kaarten van de ligging van landen om na overstromingen het land opnieuw te kunnen verdelen.

In de bloeitijd van de Griekse cultuur gaat de kromming van de aarde een rol spelen bij het maken van kaarten. Eerst alleen bij het maken van sterrenkaarten. De sterrenhemel lijkt vanaf de aarde meer op een bol dan de aarde zelf. Toch wisten de Grieken al dat de aarde bolvormig was, en er zijn schattingen van de omtrek. Bijvoorbeeld van Earthostenes, die de omtrek schatte op 252.000 stadiën. Bij een stadie van 154 meter ligt dat vlak bij de werkelijke waarde van 40.000 kilometer (de stadie varieert in de literatuur tussen 154 en 185 meter).

In de middeleeuwen werden allerlei fraaie kaarten van de aarde gemaakt. Vaak T-vormig: Afrika, Azië en Europa werden afgebeeld als drie aan elkaar grenzende landmassa's, met daaromheen een smalle ringvormige oceaan. Afstanden ontbreken, en dat de aarde bolvormig is lijkt vergeten.

Toen vanaf het einde van de vijftiende eeuw routes over zee naar Indië werden gezocht, waren betrouwbare kaarten nodig die een groot deel van de wereld besloegen. Een oplossing is het gebruik van globes, maar die zijn onhandig. Wereldkaarten wilde men, en toen ontstond er een probleem. Een onmogelijk probleem.

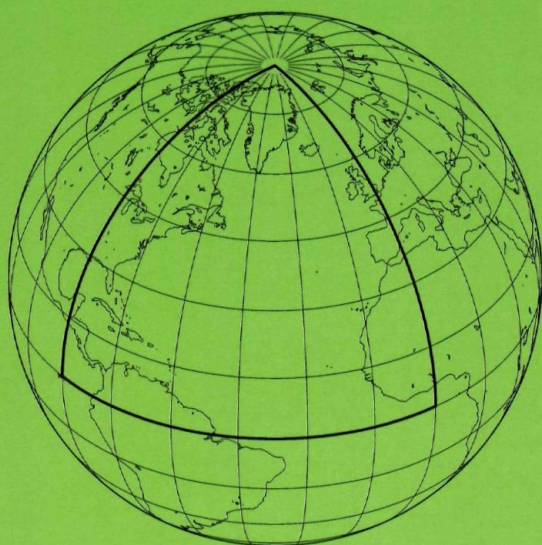
## Een driehoekige reis

Stel je voor dat we een wereldreis gaan maken. We beginnen op de Noordpool en reizen via de kortste weg over de nulmeridiaan via London naar de Bocht van Guinee (zie figuur 1). Daar maken we een hoek van 90 graden en reizen verder over de evenaar naar Galapagos, een daar maken we weer een hoek van 90° graden en reizen over Noord Amerika terug naar de noordpool. Dan hebben we via een driehoek gereisd. Die driehoek heeft drie hoeken van 90 graden. Op een vlakke kaart kan dat dus nooit een rechtlijnige driehoek worden. Toch hebben we driemaal over de kortste weg gereisd. Een goede kaart zou toch rechte lijnen moeten geven als we over de kortste weg willen reizen. We hebben daarom bewezen dat een perfecte wereldkaart (een kaart zonder vervorming) niet kan bestaan. We laten daarom de hoop op een perfecte kaart varen en gaan op zoek naar praktisch bruikbare kaarten. Zo geeft figuur 1 goed weer dat de aarde een bol is, en dat de lijnen van kortste afstand (de zogenaamde 'geodeten') krom zijn. Figuur 1 is een kaart 'in perspectief', zoals je de aarde zou zien



# het platte vlak

vanaf grote afstand. De afbeeldingsmethode voor dit type kaarten wordt vaak aangeduid als 'planparallelle projectie'. Van de drie dimensies van de bol wordt één dimensie weggelaten om de kaart te maken.



11

Figuur 1. Een perspectivische kaart met een driehoekige wereldreis

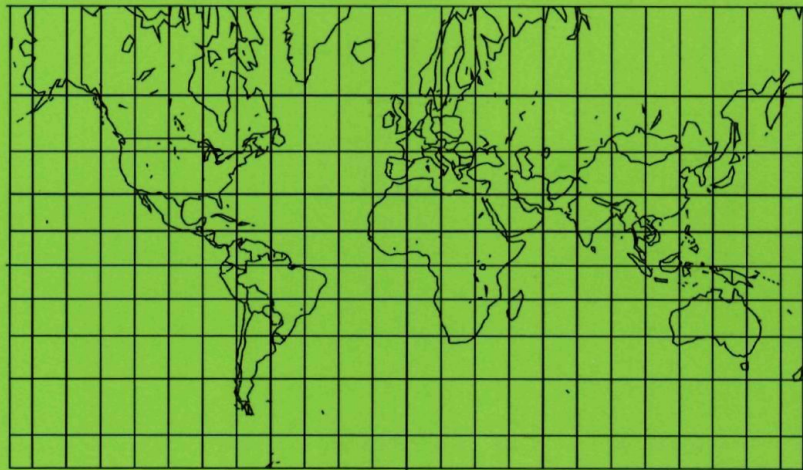
## De oplossing van Mercator

In het midden van de zestiende eeuw begon Gerhard (de) Kremer van Rupelmonde (een dorpje tussen Antwerpen en Gent) met het maken van een globe bedoeld voor de zeevaart. Aanvankelijk bracht dat hem in conflict met de autoriteiten die, 50 jaar na Columbus, dachten dat de aarde plat was. Zijn gegevens zette hij van de globe over op kaarten. Hij ontwikkelde en verfijnde die kaarten totdat hij in 1569 een perfecte wereldkaart maakte. Intussen was hij een man van aanzien geworden en vertaalde daarom zijn naam in het Latijn: Gerard Mercator. In de zeevaart wordt de vaarrichting altijd bepaald als de hoek met het noorden. Denk aan de poolster of het kompas. Een route die een constante hoek ten opzicht van het noorden heeft moet op een goede zeekaart worden weergegeven als een rechte lijn. Daarmee zijn de evenaar en de parallellen daarvan horizontale lijnen op de kaart.

De meridianen zijn verticale lijnen. De 'geografische lengte', dat is de afstand in de oost-west richting kan direct op de kaart worden overgebracht. De 'geografische breedte', de noord-zuid afstand, kun je berekenen met behulp van logaritmen en goniometrie (zie inzet). Maar Mercator had



geen logaritmen, en waarschijnlijk ook geen goede sinustabel. Mercator bereikte zijn resultaat met behulp van zijn nauwkeurige tekenkunst. De integraalrekening, waarmee de geografische breedte wiskundig kon worden bepaald kwam pas 150 jaar later. In de Mercatorprojectie zijn de lengten niet betrouwbaar. Dat nam men voor lief. Met de onregelmatigheden van weer en wind waren afstanden toch niet zo belangrijk. En oppervlakten? De oppervlaktevergroting die bij de poolcirkels optreedt was niet zo belangrijk: de westkust van Amerika was nog niet eens verkend, en op de polen kon je niet eens varen. Deze kaarten waren voor de zeevaart het ideale compromis. De richtingen waren goed, daardoor waren de vormen van de eilanden en continenten redelijk nauwkeurig. De kaart is 'hoekgetrouw', dat wil zeggen, alle hoeken worden waarheidsgetrouw op de kaart afgebeeld.



Figuur 2. Een wereldkaart in Mercatorprojectie

### Moderne cartografiemethoden

Na Mercator zijn er nog tientallen andere projectiemethoden ontwikkeld, ieder met zijn voor- en nadelen. Als je bijvoorbeeld een kaart wil hebben waarop kortste afstanden rechte lijnen zijn, dan kan dat met een zogenaamde 'gnomische' projectie. Dit is handig voor de luchtvaart. De maximale afstand zonder al te grote vertekening is 15.000 kilometer — binnen deze afstand moet een vliegtuig toch landen. Als voor een ander doel oppervlakten precies moeten worden weergegeven, dan kan dat ook. Iedere cartografiemethode heeft zijn eigen vertekening. Voor gnomische projectie doet men alsof een klein gebied 'gefotografeerd' wordt met de lens in het middelpunt van de aardbol. Neem dan een denkbeeldig vlak dat aan de bol raakt in het gebied dat we willen afbeelden. We kunnen dan een lijn trekken door het midden van de bol en een punt op het boloppervlak, en die lijn verlengen tot het vlak. Als we dit doen voor elk punt op het oppervlak, dan krijgen we een afbeelding van ons gebied. Vaak worden projecties in twee



stappen toegepast. Een cilinder en een kegel kunnen worden uitgerold tot een plat vlak. Je kunt dus eerst projecteren van een bol naar een cilinder of kegel, en daarna deze uitrollen tot een kaart. Zo bestaan er kaarten in 'cilinderprojectie' en 'kegelprojectie'. De Peters-projectie, een cilinderprojectie die is uitgerekt, geeft de grootte van de afgebeelde gebieden precies weer. De uitrekking is nodig omdat anders alle details in de gematigde zones verloren gaan. Deze projectie heeft de voorkeur van veel ontwikkelingswerkers, omdat die laat zien hoe groot Afrika werkelijk is. Mijn voorkeur gaat uit naar enkele varianten van 'azimuthale projectie'. Die begint in het midden van de kaart, en maakt dan een kaart door ervoor te zorgen dat de afstand en de richting naar ieder punt tot in de verre omtrek precies op schaal zijn, gerekend vanuit het middelpunt van de kaart. Op deze manier kun je een halve bol heel precies weergeven, met tot aan de rand toe maar kleine afwijkingen in hoeken en oppervlakten. Via een truc kun je zelfs een hele wereld ermee afbeelden. Dat geeft kaarten zoals in figuur 3. De omgeving van de polen is minder fraai afgebeeld, maar wie heeft daar nu veel te zoeken? Zo worden er nog steeds nieuwe projectiemethoden uitgevonden.



Figuur 3. Een bolschilprojectie die de hele wereld weergeeft.

### **Mercatorprojectie**

Mercator moest ieder punt  $(\phi, \theta)$  van een bol, waarbij  $\phi$  voor de lengtegraad, en  $\theta$  voor de breedtegraad staat ( $-180^\circ < \phi < 180^\circ, -90^\circ < \theta < 90^\circ$ ), omzetten in een punt  $(x, y)$  in zijn kaart. Hij nam  $x$  gelijk aan  $\phi$ . Maar wat moest  $y$  worden opdat de kaart hoekgetrouw werd? Er moet dan gelden dat de verhouding van  $y$  tot  $\theta$  is als in bol en vlak. Dit levert een factor  $\cos \theta$  op:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

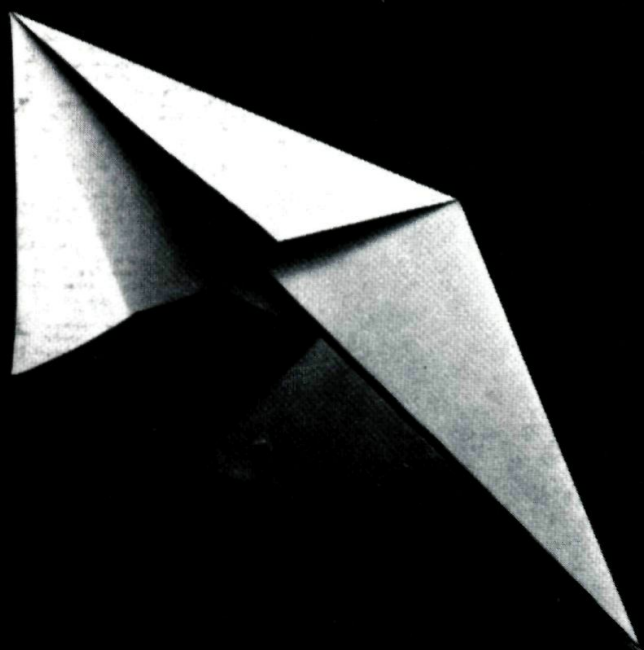
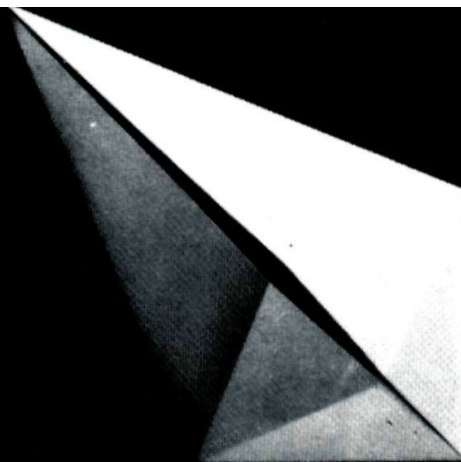
Deze (differentiaal)vergelijking heeft als oplossing:

$$y = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin \theta) - \frac{1}{2} \ln(1 - \sin \theta),$$

een formule die Mercator nog niet kende.



Op vakantie met de auto in een vreemd land gebruik je een wegenkaart om je weg te vinden. Na gebruik moet zo'n kaart opgevouwen worden. Na enig geworstel eindig je vaak met een kaart die anders opgevouwen is dan toen je hem kocht. Op dit principe zijn vouwpuzzels gebaseerd. Een vouwpuzzel is vaak een rechthoekig stukje papier. De opdracht is het papier zo te vouwen dat je een bepaalde afbeelding te zien krijgt. Op een klassieke vouwpuzzel uit de oorlogsjaren zie je bijvoorbeeld vier varkens. De opdracht is het papier zo te vouwen dat je het gezicht van Hitler te zien krijgt! Een recentere versie gebruikt het gezicht van Saddam Hussein.



14

#### Origami

Origami komt uit Japan. Het is een manier om kunstzinnige figuren te maken van eenvoudige velletjes papier. De kraanvogel is een van de klassieke origami-figuren. In Amerika is dollarvouwen een bijzondere tak van sport. Met een briefje van een dollar worden de meest krankzinnige figuren gevouwen. Op Internet kun je hier heel veel voorbeelden van vinden. (Zoek naar 'dollar folding'.)

#### Wiskundige origami

De klassieke manier om meetkunde te doen is met passer en lineaal. Maar het kan ook met alleen een vel papier. Ga voor de volgende opdrachten uit van een vel A4-papier.

Maak je eigen

# Vouw puzzels



- 
1. Vouw een vel A4 in de lengterichting precies in drieën.
  2. Vouw een gelijkzijdige driehoek.
  3. Vouw een regelmatige achthoek.
  4. Vouw een willekeurige hoek en deel die in drieën. (Met passer en lineaal is dit onmogelijk, maar met vouwen lukt het wel! Zie de tweede Internetlink.)

#### Postzegels vouwen

Neem een reep van drie postzegels achter elkaar. Zonder te scheuren kun je zo'n reep opvouwen tot een stapeltje van drie postzegels. Op hoeveel manieren kan dit? Hoeveel manieren zijn er met 4 zegels? Met 5? Het aantal verschillende manieren waarop je een reep van  $n$  zegels kunt opvouwen kan wel berekend worden, maar een rechtstreekse formule is onbekend! Het aantal manieren waarop je een vel van  $n$  bij  $m$  postzegels kan vouwen, is totaal onbekend. Niemand weet hoe je dit zou moeten berekenen.

#### Meer informatie

W.F. Lunnon, A map folding problem,  
Mathematics of computation,  
Vol. 22, nr. 101, 193 - 199

(te vinden via <http://www.jstor.org>)

[www.theory.csc.uvic.ca/~cos/inf/perm/StampFolding.html](http://www.theory.csc.uvic.ca/~cos/inf/perm/StampFolding.html)

#### Links

[www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/origami.html](http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/origami.html)

<http://chasm.merrimack.edu/~thull/OrigamiMath.html>

[www.honeylocust.com/crumpling/](http://www.honeylocust.com/crumpling/)

<http://hverrill.net/pages~helena/origami/>

[www.exploratorium.edu/exploring/paper/](http://www.exploratorium.edu/exploring/paper/)

[www.fascinating-folds.com/](http://www.fascinating-folds.com/)

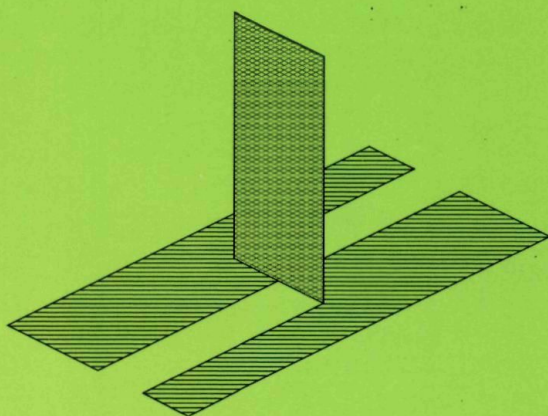
<http://reality.sgi.com/grafica/fiatlux/spring.html>

# 4 VOUW-PUZZELS

**Vouwpuzzels zijn de makkelijkste puzzels om zelf te maken. Het enige wat je nodig hebt is schaar en papier.**

## **Onmogelijke vouwfiguur**

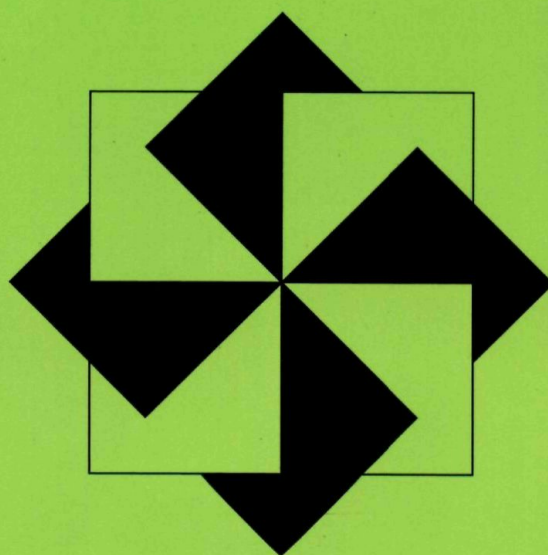
De constructie uit figuur 1 is gemaakt uit een rechthoekig stuk papier. Met een schaar is het een paar keer ingeknipt. Daarna is het gevouwen tot wat je ziet. Kun jij deze figuur namaken uit een enkel stuk rechthoekig papier? In eerste instantie lijkt het onmogelijk, maar het kan echt! Probeer het maar eens.



Figuur 1  
Een 'onmogelijke' vouwfiguur

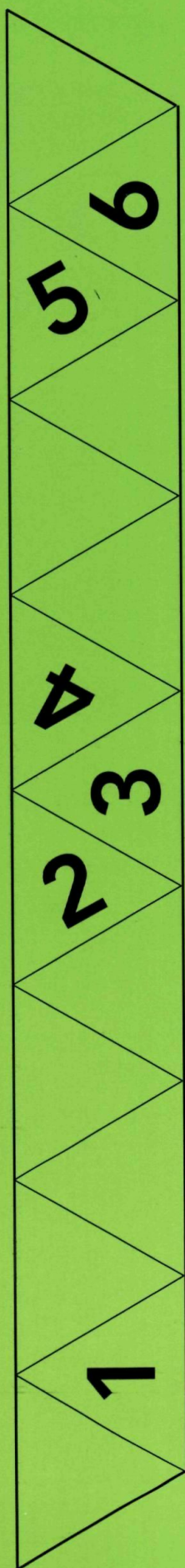
## **Onmogelijke ster**

In figuur 2 zie je een platte ster gemaakt van papier. De ster is samengesteld uit twee verschillende vierkanten. Die zijn met een schaar op een paar plaatsen ingeknipt, en daarna in elkaar geschoven met figuur 4 als resultaat. Kun jij deze ster namaken? Deze constructie is ingenieuzer dan je denkt, want de vierkante stukken papier zijn niet verknipt tot losse stukken. Dat lijkt op het eerste gezicht onmogelijk, maar het kan echt! In het volgende nummer vind je de oplossingen van de twee 'onmogelijke' figuren.

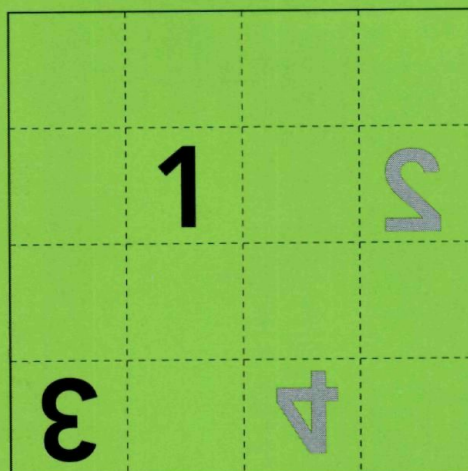


Figuur 2  
Een 'onmogelijke' ster





**Figuur 4**  
Vouw deze strip van 15 gelijkzijdige driehoeken op tot een zeshoek met de cijfers 1 tot en met 6. Alle cijfers staan op de dezelfde kant.



**Figuur 3**  
Vouw deze 'kaart' op tot een vierkant met de cijfers 1 tot en met 4. De grijze cijfers staan op de achterkant

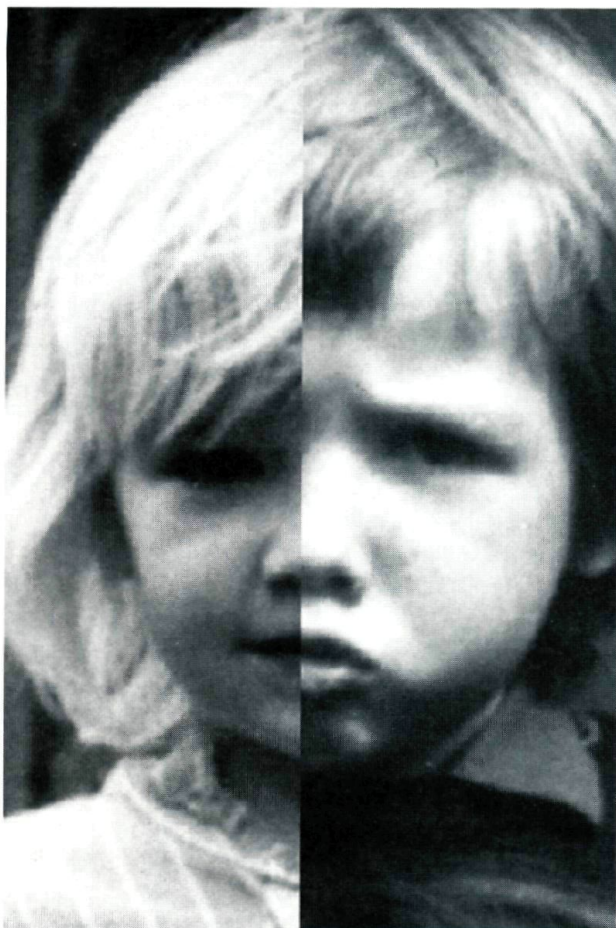
### Landkaartpuzzel

Neem een vierkant vel papier en vouw dat in twee richtingen in vieren. Vouw het vel uit elkaar. Maak de vouwlijnen in beide vouw-richtingen goed scherp. Vouw nu het vel zodanig in elkaar dat je een vierkant van vier vierkantjes krijgt. Nummer de vierkantjes van 1 tot en met 4. Vouw nu het vel weer uit en de puzzel is klaar. De opdracht is de genummerde vierkanten weer naast elkaar te vouwen. Een voorbeeld zie je in figuur 3. Je kunt de puzzel moeilijker maken door ook de andere vierkanten een cijfer te geven.

### Hexagons

Neem een strip van een aantal gelijkzijdige driehoeken en vouw die in elkaar tot een zeshoek. Nummer de zijden van 1 tot en met 6. Vouw nu de strip weer open en je hebt weer een puzzel. Want hoe krijg je de zes genummerde driehoekjes weer bij elkaar in een zeshoek? Je kunt de puzzel moeilijker maken door ook de andere driehoeken een cijfer te geven.





# De kinde- ren van Ruud

Het volgende probleem verscheen in het novembernummer van 1993:

*Ruud is vader van twee kinderen. Op een dag kom ik hem tegen met een jongetje. Ruud zegt: "Dit is mijn zoontje Tom." Hoe groot is nu de kans dat Ruud vader is van twee zonen?*

Op het eerste gezicht lijkt de gestelde vraag onzinnig. Immers, het tweede kind van Ruud is gewoon een jongetje of een meisje, daar komt geen kansrekening aan te pas. Of toch wel?

## Drie antwoorden

Voordat ik hier op in ga laat ik eerst een aantal 'oplossingen' zien die in Pythagoras verschenen zijn.

1 (Jan Mathieu) Er zijn vier mogelijke gezinssamenstellingen: *JJ*, *MJ*, *JM* en *MM*, waarbij *J* een jongetje voorstelt, en *M* een meisje. Het oudste kind wordt als eerste aangegeven. Er valt één mogelijkheid af, nl. *MM*, Ruud heeft immers een zoontje. In één van de drie overgebleven





gevallen is het andere kind een jongetje. De gevraagde kans is dus  $1/3$ .

2 (Joris Mooij) Het jongetje dat Ruud bij zich heeft is of de jongste jongen uit *JJ*, of de oudste jongen uit *JJ*, of de jongen uit *MJ* of *JM*. In twee van deze vier gevallen is het andere kind ook een jongetje. De gevraagde kans is dus  $1/2$ .

3 (R. Kooistra) Er zijn voor Ruuds gezin drie mogelijkheden: twee jongens, twee meisjes of een jongen en een meisje. Twee van de drie jongetjes in deze opsomming hebben een broertje, dus de gevraagde kans is  $2/3$ .

#### Conditionele kansen

Om de oplossing van het probleem helemaal te begrijpen is het belangrijk eerst iets te weten over conditionele kansen. Ik zal daar iets over vertellen aan de hand van het gooien met een dobbelsteen. Aangezien we er van uit gaan dat een dobbelsteen geen voorkeur heeft voor een bepaalde zijde, stellen we dat de kans op elk van de mogelijke uitkomsten 1, 2, ..., 6 gelijk is aan  $1/6$ .

Dit wordt bevestigd wanneer we de dobbelsteen heel vaak achter elkaar gooien; elk van de uitkomsten treedt dan in ruwweg  $1/6$  van de gevallen op. Stel nu dat ik de dobbelsteen werp, en 3 komt boven. Jij weet dat echter niet. Ik zeg nu tegen jou: "Het aantal ogen is oneven." Wat is voor jou dan de kans dat ik 3 gegooid heb. Wel, er zijn voor jou nog drie mogelijkheden over (met allemaal even grote kans) waarvan er slechts één de uitkomst 3 oplevert. Voor jou is de kans dus  $1/3$ . Maar ik had ook tegen je kunnen zeggen: "De uitkomst is niet groter dan 4". In dat geval zou je de kans op 3 op  $1/4$  gesteld hebben. Immers, van de vier mogelijke uitkomsten is er opnieuw slechts één correct.

In de vorige alinea was er sprake van *conditionele kansen*. Jou werd gevraagd een kans te bepalen op een bepaalde gebeurtenis (in dit geval de gebeurtenis dat 3 boven komt) als je al informatie hebt over de uitkomst van het experiment. In het eerste geval bijvoorbeeld bestond die informatie uit de wetenschap



dat het aantal ogen oneven was. Uit de voorbeelden bleek duidelijk dat andere informatie tot andere conditionele kansen op dezelfde gebeurtenissen kunnen leiden. Als alle uitkomsten van een experiment dezelfde kans hebben (zoals bij het gooien van de dobbelsteen) dan kunnen we de kans op gebeurtenis A gegeven gebeurtenis B uitrekenen door de formule:

$$\frac{\text{aantal uitkomsten die in zowel A als B liggen}}{\text{aantal uitkomsten die in B liggen}}$$

### Ruuds kinderen

Hoe kunnen we dit nu gebruiken om het probleem van Ruud op te lossen? Dat is niet op voorhand duidelijk, want er lijkt geen sprake van een kansexperiment. Maar dat kunnen we er wel van maken, bijvoorbeeld op de volgende manier. We kiezen een willekeurige vader van twee kinderen die gaat wandelen met één van zijn kinderen. We nemen aan dat de vader geen voorkeur heeft voor een wandeling met zijn jongste of oudste kind. De gebeurtenis dat de vader als oudste kind een meisje heeft, als jongste kind een jongetje en met het oudste kind gaat wandelen geef ik aan met  $M^*J$ . Als hij met zijn jongste kind gaat wandelen noteer ik dat met  $MJ^*$ . Het symbool  $*$  geeft dus aan welk kind mee uit wandelen genomen wordt. Er zijn nu 8 mogelijke uitkomsten van dit experiment, die allemaal even waarschijnlijk zijn. Als we nu de informatie krijgen dat er een jongetje mee uit wandelen is, dan blijven er precies 4 over, namelijk  $J^*J$ ,  $JJ^*$ ,  $J^*M$  en  $MJ^*$ . In twee van deze vier gevallen heeft het jongetje een broertje, de gevraagde kans is dus  $1/2$ , volgens bovenstaande formule.

### Exacte informatie

Hiermee lijkt de kous af maar dat is maar ten dele zo. In Pythagoras van februari 1999 (waarin R. Kooistra zijn vermeende oplossing beschreef) werd het probleem

van Ruud als volgt geformuleerd: "Ruud heeft twee kinderen. Je komt erachter dat een van de twee een jongen is. Hoe groot is de kans dat Ruud twee jongens heeft?" Het aardige is nu dat de vraag in deze formulering eigenlijk geen goed antwoord heeft. Er is namelijk een subtiel maar belangrijk verschil tussen de twee vragen. In de oorspronkelijke formulering van het probleem kwamen we er niet alleen achter dat Ruud een zoontje heeft, maar er werd ook bij verteld hoe we daar achter kwamen: we zagen hem wandelen met zijn zoontje. Als we de tweede formulering interpreteren als zouden we echt alleen maar weten dat Ruud een zoontje heeft en verder niets, dan zegt deze informatie ons alleen maar dat van de vier mogelijkheden  $JJ$ ,  $MJ$ ,  $MJ$  en  $MM$ , de mogelijkheid  $MM$  afvalt. Er blijven dan drie mogelijkheden over, ieder met gelijke kans, waarvan er maar één leidt tot een broertje. In dat geval is de kans dus  $1/3$ , de uitkomst van Jan Mathieu. Bedenk dus dat voor het bepalen van conditionele kansen, de exacte informatie die je hebt gekregen van cruciaal belang is. Als je eerst via de buurman van Ruud wist dat Ruud een zoontje had dan is de conditionele kans dat hij twee zoontjes heeft  $1/3$ . Als je echter 5 minuten daarna Ruud in het park ziet wandelen met een zoontje aan de hand, dan is deze kans plotseling  $1/2$  geworden! Het feit dat Ruud daar zo wandelt met zijn zoontje geeft weer extra informatie en leidt dan ook tot een andere uitkomst.





De winnaars van de scholenprijs met de decaan, Herman Alink. De prijs werd uitgereikt door Jan van de Craats.

eerste ronde

# NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Dion Gijswijt

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, waarvan de eerste ronde op school wordt georganiseerd. Dit jaar deden maar liefst 2350 scholieren mee aan de eerste ronde, die op vrijdag 21 januari werd gehouden. Dit jaar mochten alle deelnemers met 14 punten of meer (van de 22) door naar de tweede ronde, in totaal 119 leerlingen. De tweede ronde wordt medio september in Eindhoven gehouden, en uit de winnaars zal dan een team van zes leerlingen samengesteld worden dat Nederland mag vertegenwoordigen op de Internationale Wiskunde Olympiade (dit jaar in Zuid-Korea).

## De scholenprijs

Hoewel de Wiskunde Olympiade een individuele wedstrijd is, wordt er elk jaar ook een scholenprijs uitgereikt aan de school met de beste vijf deelnemers. Dit jaar ging het **Elzendaalcollege** uit Boxmeer met de eer strijken, als beste van alle 222 deelnemende scholen. De vijf problem-solvers van deze school (zie foto vlnr: Roland Wind, Tim Flachs, Nellie

Teunissen, Bart Kerkhoff en Frank van der Graaff), haalden samen maar liefst 81 punten. Opmerkelijk is dat het Elzendaalcollege in 1988 ook al de scholenprijs in de wacht sleepte. Bovendien hebben de vijf leerlingen zó goed gescoord dat ze alle vijf door mogen naar de tweede ronde!

## Voorbeeldopgave

Geef het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door 26, eindigt op 26 en waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 26.

## Meedoen!

In januari 2001 wordt op scholen in heel Nederland weer de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade gehouden. Als je ook wilt meedoen, ga dan naar je wiskundeleraar of neem contact op met de secretaris van de stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Fred Bosman.

Telefoon: 026-3521294, fax 026-3521356, email: [fred.bosman@cito.nl](mailto:fred.bosman@cito.nl).

De olympiade heeft ook een webpagina: <http://olympiads.win.tue.nl/nwo/>



# spiraal

22

**Er zijn veel soorten spiralen; daarvan heeft de logaritmische spiraal de mooiste eigenschappen. Jacob Bernoulli was daar zo van onder de indruk dat hij hem op zijn grafsteen wilde hebben.**

Het woord 'spiraal' wordt gebruikt om diverse figuren aan te duiden. Zo wordt een trekveer ook wel een spiraal genoemd. In het platte vlak spreken we ook over spiralen, maar daar bedoelen we krommen mee die op een bepaalde manier om een vast punt draaien. Met behulp van de in deze jaargang al vaker gebruikte poolcoördinaten kunnen we de bekendste spiralen eenvoudig beschrijven.

## Archimedes

De spiraal van Archimedes heeft als vergelijking  $r = \varphi$ . Dit betekent dat we een lijn om de oorsprong laten draaien en op die lijn het punt met afstand  $\varphi$  tot de oorsprong nemen, waarbij  $\varphi$  de hoek tussen de lijn en de x-as is (in radialen). Als de lijn eenmaal rond is geweest gaan we gewoon door, we

laten  $\varphi$  alle waarden van 0 tot  $\infty$  aannemen. We krijgen dan het plaatje in figuur 1.

Je kunt hierop variëren door andere machten van  $\varphi$  te nemen; bekende spiralen zijn die van Fermat ( $r = \sqrt{\varphi}$ ), de hyperbolische spiraal ( $r = 1/\varphi$ ) en de Lituus ( $r = 1/\sqrt{\varphi}$ ). Als je de Lituus getekend hebt zie je waar de naam vandaan komt: 'lituus' is de naam van een staf. Hiervan is de staf van Sinterklaas afgeleid.

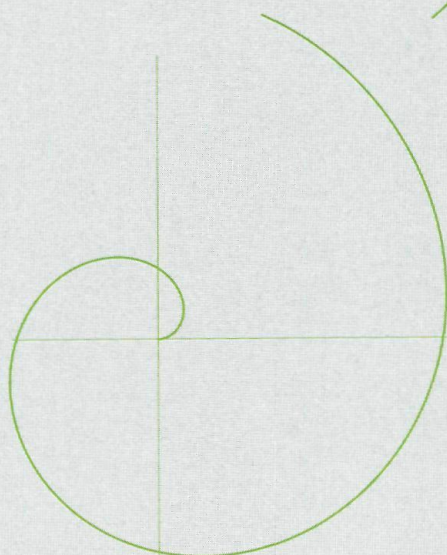
## De logaritmische spiraal

In 1638 ontdekte Descartes de logaritmische spiraal toen hij een kromme zocht die elke lijn door de oorsprong onder dezelfde hoek  $\alpha$  snijdt. Het blijkt dat die kromme de vergelijking  $r = e^{a\varphi}$  moet hebben, met  $a = \cos \alpha / \sin \alpha$ . De wiskundige Jacob Bernoulli heeft deze kromme met behulp van de in zijn tijd gloednieuwe differentiaal- en integraalrekening nauwkeurig onderzocht. Zo kon hij de lengte van elk stuk van de spiraal uitrekenen.

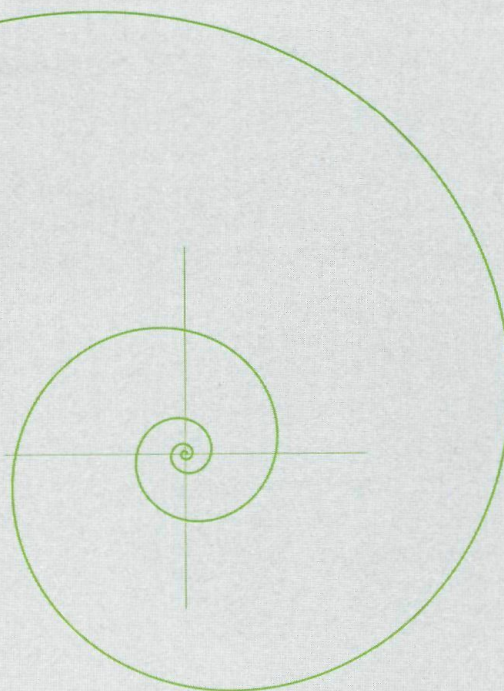
Als je bijvoorbeeld  $\varphi$  van 0 tot  $2\pi$  laat



Figuur 1  
Spiraal van Archimedes



Figuur 2  
De logaritmische spiraal  $r = e^{\varphi/5}$



toenemen (één omwenteling) dan is de lengte van het bijbehorende stuk precies

$$\frac{1}{a} \sqrt{1+a^2} (e^{2a\pi} - 1).$$

De oneindig vele omwentelingen die je krijgt als  $\varphi \rightarrow \infty$  tot 0 toeneemt blijken bij elkaar een eindige lengte hebben:

$$\frac{1}{a} \sqrt{1+a^2}.$$

De logaritmische spiraal is bijzonder goed bestand tegen transformaties. Als je alle punten in het vlak met dezelfde constante  $k$  vermenigvuldigt, dan blijft de spiraal nagenoeg zichzelf: in plaats van  $r = e^{a\varphi}$  krijg je  $r = ke^{a\varphi}$ . Hoewel het lijkt of de spiraal opgerekt wordt is dat maar schijn. Neem de logaritme van  $k$  maar en deel die door  $a$ , dat wil zeggen

$$\theta = \frac{1}{a} \ln k.$$

Dan kunnen we schrijven

$$r = ke^{a\varphi} = e^{a(\varphi + \theta)}.$$

Hieruit blijkt dat de spiraal eigenlijk alleen maar gedraaid is over  $-\theta$  radialen.

### Spira mirabilis

Bij elke kromme kun je een heleboel 'afgeleide' krommen maken. Je kunt bijvoorbeeld in elk punt van de kromme de best passende cirkel tekenen – de straal van die cirkel geeft aan hoe 'krom' je kromme daar in de buurt is. Als je nu van al die cirkels telkens het middelpunt neem krijg je een nieuwe kromme, de zogeheten evolvente van je kromme. De evolvente van de logaritmische spiraal is een even grote logaritmische spiraal. Bij een heleboel van dit soort afgeleide krommen krijg je in het geval van de logaritmische spiraal weer dezelfde spiraal terug. Jacob Bernoulli was hier zo van onder de indruk dat hij deze spiraal de *spira mirabilis* noemde en hem op zijn grafsteen wilde hebben, met daarbij de spreuk 'Eadem numero mutata resurgo'. Hetgeen zoveel betekent als: hoe vaak ik ook veranderd word, ik zal als dezelfde weer opstaan.

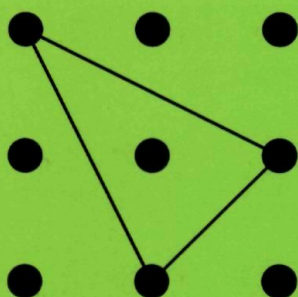


# Problemen

Dion Gijswijt

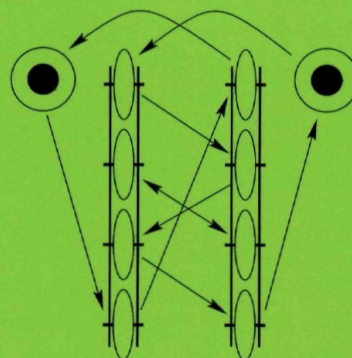
## Driehoeken tellen

Hiernaast zie je negen roosterpunten. Hoeveel driehoeken zijn er waarvan de hoekpunten een van deze negen punten zijn?



## Skates

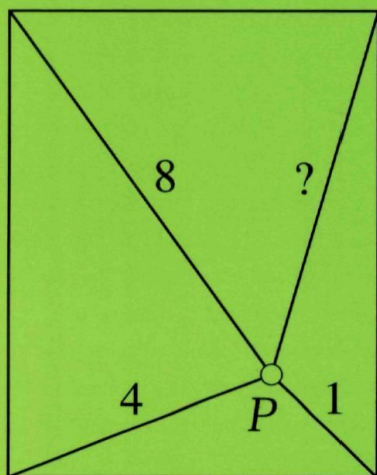
Omdat van skates niet alle wieltjes op dezelfde manier slijten, is het verstandig ze af en toe van plaats te verwisselen. Bij nieuwe skates wordt meestal een wisselschema meegeleverd, waarop staat hoe de wieltjes verwisseld moeten worden. Hier zie je zo'n wisselschema waar bovendien twee reservewieltjes in zijn opgenomen. Na hoeveel verwisselingen zijn alle wieltjes weer terug op hun oorspronkelijke plek?



24

## Vierde lengte

Binnenin een rechthoek ligt een punt  $P$ . Van de vier lijnstukken van  $P$  naar de hoekpunten van de rechthoek, is van drie de lengte al gegeven. Bepaal de lengte van het vierde lijnstuk



## In honderd stukken

Een kubus in duizend kubusjes te verdelen is niet moeilijk, maar kun je een kubus ook in 100 kubusjes verdelen? (De kubusjes hoeven niet allemaal even groot te zijn).

## Wortels

Vereenvoudig deze uitdrukking:

$$\sqrt{\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}}$$



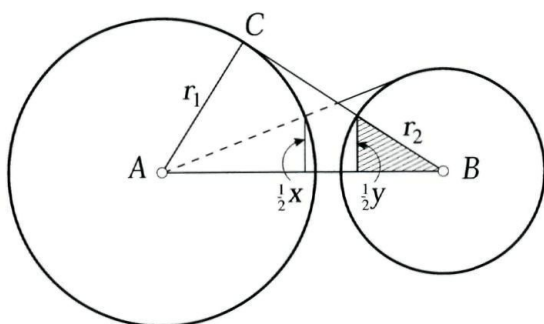
# Oplossingen

## nr.5

Dion Gijswijt

### Oogbalstelling

De gerarceerde driehoek is gelijkvormig met driehoek ABC, dus  $y/2 = r_1 \frac{r_2}{|AB|}$ , zodat  $y = \frac{r_1 r_2}{2|AB|}$ . Eenzelfde redenering gaat op voor  $y$ , zodat  $x = y$ .



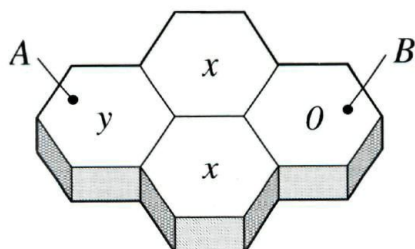
### Vier cijfers

Er zijn  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  getallen met vier cijfers die 1, 2, 3 of 4 zijn. Van deze 256 getallen hebben er 64 een '1' als laatste cijfer, 64 een '2', 64 een '3' en 64 een '4'. Hetzelfde geldt voor het eerste, tweede en derde cijfer, dus de som van alle getallen samen is

$$64 (10 + 100 + 1000 + 10000) = 711040$$

### Honingbij

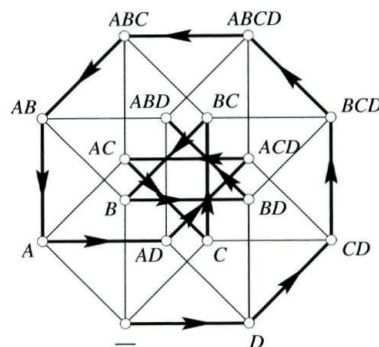
Noem het gemiddelde aantal vluchten dat de bij nodig heeft om van A naar B te komen  $y$ , en het aantal om van een van de middelste cellen naar B te komen  $x$  (zie de figuur).



Vanuit A komt de bij na een vlucht altijd op een van de twee middelste cellen terecht en moet ze daarna gemiddeld nog  $x$  vluchten uitvoeren, dus  $y = 1 + x$ . Vanuit een van de middelste cirkels komt ze met kans eenderde op A, met kans eenderde op B en met kans eenderde op de andere middelste cirkel. Daarna moet ze nog  $y$ , 0 en  $x$  keer vliegen. Dus  $x = 1 + \frac{y}{3} + \frac{0}{3} + \frac{x}{3}$ , ofwel  $2x = 3 + y$ . Uit de twee vergelijkingen volgt dat  $y = 5$ . De honingbij moet gemiddeld vijf vluchten uitvoeren om van A naar B te komen.

### Elektronisch slot

In de figuur zijn alle mogelijke schakelaar-combinaties weergegeven door punten. Twee punten zijn verbonden als het omzetten van een schakelaar van het ene tot het andere punt leidt. De pijlen geven aan in welke volgorde de schakelaars moeten worden omgezet.



### Pythagorasboom

De gevraagde oppervlakte is 1. Dit zie je door herhaald de stelling van Pythagoras toe te passen.



# Beeld & Bedróg



Het is niet wat je ziet: afbeeldingen waarmee iets bijzonders aan de hand is. Aan de lezer de taak uit te zoeken wat. Heb jij ook een foto voor deze rubriek gevonden of gemaakt?

Stuur dan op naar de redactie.

Joop van der Vaart







## OPLOSSINGEN

# LETTERTJES

### 3 keer 1

Een oplossing is:

$$3 \times 662 = 1986$$

### 6 keer 1

$$6 \times 119 = 714$$

### 2 keer 2

Een oplossing is:

$$2 \times 2199 = 4398$$

### Vijf drieën

$$123 \times 163 = 20049$$

### Gevaarlijke kruising

Een oplossing is:

$$96233 + 62513 =$$

$$158746$$

### Een, twee, vier, zeven

Een oplossing is:

$$940 + 729 + 8935 =$$

$$10604$$

### Cijferraadsel

$$17 \times 4 = 68 + 25 = 93$$

### Gefeliciteerd

$$S = 2, A = 8, N = 5,$$

$$D = 0, E = 7, R = 9,$$

$$K = 4, I = 6.$$

28

## OPLOSSING

# Scheuren

uit het Juninummer

1. Onafhankelijk van de aanpak, moet je altijd 65 keer scheuren.
2. Altijd 43 keer.
3. Het aantal postzegels min 1.
4. Zeg dat er  $p$  postzegels zijn. Je begint met het hele vel, dat is dus 1 stuk. Je eindigt met losse postzegels, dat zijn  $p$  stukken. Elke keer als je scheurt, wordt het aantal stukken 1 groter. Je moet dus altijd  $p - 1$  keer scheuren.
5. Minstens 7 keer.
6. Laat  $x$  de kleinste exponent zijn waarvoor  $2^x \geq n$  en  $y$  de kleinste exponent waarvoor  $2^y \geq m$ , dan is  $x + y$  het aantal keer dat je minstens moet scheuren. Met behulp van de entier-functie  $\lceil \dots \rceil$  laat  $x = y$  zich schrijven als  $\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 m \rceil + 2$ .
7. Altijd 4 keer (als het vel tenminste 3 bij 3 postzegels groot is).



# Boeken

## De stelling van de papegaai

De oude boekhandelaar Monsieur Ruche in Parijs krijgt op een dag een brief van een oude vriend van wie hij al jaren niets meer heeft gehoord. Deze is inmiddels oud geworden in een hutje in het Braziliaanse oerwoud, en hij heeft daar in de loop der jaren de meest complete wiskundebibliotheek ter wereld verzameld met boeken die door de eeuwen heen over wiskunde zijn geschreven. Omdat hij zijn einde ziet naderen, stuurt hij zijn gehele bibliotheek in een aanzienlijk aantal kisten op naar M. Ruche. Die arme man staat ineens op zijn oude dag voor de taak om de kostbare nalatenschap van zijn vriend op een ambachtelijke manier op te slaan. Omdat zijn vriend de boeken met grote haast heeft moeten inpakken, moet Ruche ze weer sorteren naar vakgebieden en auteurs, en daarvoor moet je een beetje weten waar het over gaat. Dus moet hij dat dan maar leren. Hij doet dit samen met zijn huisgenoten, zijnde zijn medewerkster, haar kinderen, en een papegaai om wie zich de 'misdaad-verhaallijn' van het boek ontwikkelt (voor mijn gevoel lang niet het spannendste onderdeel van het boek). Het hele huis werkt zich stap voor stap door de wiskunde en haar geschiedenis heen. En omdat ze het allemaal zelf nog moeten leren, hoeft ook de lezer geen wiskundige te zijn om van de erfenis van de heer Ruche mee te kunnen genieten. Het is Guedj in zijn roman over de geschiedenis van de wiskunde gelukt een virtueuze keuze te maken wat wel en wat niet wordt opgenomen; het boek is leesbaar voor een breed publiek – als je je tenmiste niet gek laat maken door een aantal pagina's aan het begin waar in een aanzienlijk tempo een duizelingwekkende reeks problemen en vakgebieden wordt opgesomd. Die kun je desgewenst overslaan.

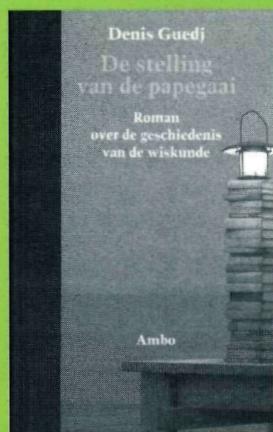
Het meest indrukwekkende aan het boek vind ik de manier waarop het tegen de wiskunde aankijkt. De wiskunde wordt niet gepresenteerd als het onbezielde zootje sommetjes dat menig buitenstaander er wellicht in ziet. Ze wordt daarentegen geschetst als een school van het denken die met haar al te menselijke acteurs door de eeuwen heen is gegroeid, als een bron van eeuwenoude onopgeloste raadsels en vergeefse pogingen om die op te lossen, als een pilaar van cultuur, wetenschap, economie, oorlogsvoering en nog veel meer. Op de momenten dat het hierover ging, heb ik het meeste van dit boek genoten. Wellicht kun je een aantal foutjes uit de honderden pagina's vissen, maar fouten, ook van inmiddels wereldberoemde figuren, hebben altijd bij de wiskunde gehoord net als bij ieder ander vak. Het leuke is alleen dat het in de wiskunde uiteindelijk geen machtskwestie is wie er gelijk heeft. En dat je er anderzijds, zoals je ook uit het boek leert, niets zomaar moet geloven.

Bernd Kuckert

## Besproken boek:

Denis Guedj, *De stelling van de papegaai*, Roman over de geschiedenis van de wiskunde. Ambo, 1999, f 49,50.

ISBN 90 26316046

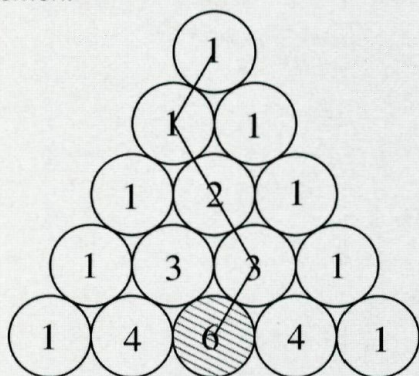




# De post

## De driehoek van Pascal

Een prachtige formule voor de getallen in de driehoekige piramide van Pascal (zie het aprilnummer) werd bedacht door *Bram Kuijvenhoven* uit Den Haag. Eerst keek hij naar de driehoek van Pascal. Stel, je bevindt je in het gearceerde vakje en je wilt via aangrenzende vakjes naar de top toe. Je wil steeds de kortste weg nemen.



In de figuur is één mogelijke weg aangegeven, maar er zijn 6 kortste wegen naar de top (tel maar na). In de driehoek van Pascal staat op deze plek ook een 6. Dat is geen toeval, de getallen in de driehoek geven altijd het aantal wegen naar de top aan! Waarom is dat zo? Voor een vakje aan de rand is er maar 1 mogelijke route. Als je ergens midden in de driehoek staat, dan moet je eerst naar het vakje links- of rechtsboven, en vandaaruit naar de top. Voor het aantal wegen van

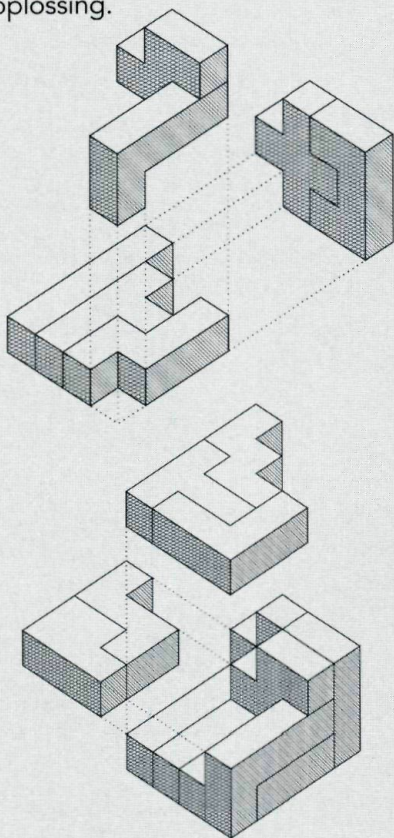
een vakje naar de top, moet je de aantallen van de twee vakjes erboven dus optellen. Je ziet: de regels om het aantal wegen naar de top te berekenen en de regels voor de getallen in de driehoek van Pascal zijn gelijk. Voor het aantal wegen naar de top bestaat een formule. Vanuit het gearceerde vakje moet je in totaal 4 stappen doen, waarvan 2 naar linksboven. Om te kiezen welke weg je neemt moet je kiezen welke twee van de vier stappen je naar linksboven gaat. Het aantal wegen is dus  $\binom{4}{2} = 6$ . Als je op het  $k$  de vakje van rij  $r$  staat, moet je  $r-1$  stappen doen, waarvan  $k-1$  naar linksboven. Het getal op deze plaats is dus  $\binom{r-1}{k-1}$ . De getallen in de driezijdige piramide zijn ook gelijk aan het aantal (kortste) wegen naar de top. Je kunt nu echter bij elke stap 3 kanten uit. Als je het getal op een plaats in de piramide wilt weten, tel je het aantal stappen dat je in elk van de drie richtingen moet doen en noemt die  $x, y, z$ . Eerst kies je van het totaal van  $x+y+z$  stappen welke je er in de eerste richting doet en van de overgebleven  $y+z$  stappen moet je er  $y$  in de tweede richting kiezen. Het resultaat is de formule van Bram: het aantal wegen is:

$$\binom{x+y+z}{x} \binom{y+z}{y} = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}.$$



### 3D-pentomino's

Van Hans Leer uit Riemst (België) ontving de redactie een grote collectie pentomino-creaties. Wanneer de bekende pentomino's van kubusjes gemaakt worden in plaats van vierkanten, ontstaan ook meteen nieuwe puzzels. Kun je bijvoorbeeld een blok van 3 bij 4 bij 5 maken van de 12 pentomino's? (zie het aprilnummer). Hans stuurde de volgende mooie oplossing.



Verder stuurde hij onder andere oplossingen op van alle mogelijke blokken die je met de pentomino's kunt maken, bijvoorbeeld een blok van 2 bij 3 bij 10, alsmede diverse andere meetkundige figuren, zoals piramides en een trapvorm.

### Palindromen

'Meetsysteem' is het het grootste hem bekende palindroom van Peter Deleu (peterdeleu@usa.net). Hij vraagt zich af of er nog grotere bestaan.

### Zoekertjes gevraagd

Bob Van Muylder is een leerkracht uit België die op verschillende manieren probeert zijn lessen (klassen 3 en 4 TSO en BSO) af te wisselen. Elke week krijgen leerlingen een 'vraag van de week'. Dit zijn originele vragen over de meest uiteenlopende zaken, waarop je het antwoord niet onmiddellijk kan vinden (heersende misverstanden, wetenschap, keuken, enzovoort). Verder onderbreekt hij af en toe de les voor een zoekertje (luciferpuzzels, getalraadsels). Hij probeert origineel te zijn en vermijdt het liefst klassiekers zoals het probleem van de kool, het schaap en de wolf. Tot slot beëindigt hij graag de les met het vermelden van een grappige examenblunder. Op dit ogenblik heeft hij nog onvolgende materiaal. Door hem zoekertjes, weetjes of examenblunders toe te sturen doe je hem een groot plezier. Op verzoek stuurt hij ook zijn voorlopige collectie toe. Bob van Muylder, Vijverstraat 20, 2870 Puurs, België. E-mail: zobi.elliott@pi.be



# Agenda

ma 7 - vr 11 augustus:

kamp A

voor groep 6, 7 en 8

en brugklassers

ma 14 - vr 18 augustus:

kamp B

voor leerlingen van

het voortgezet onderwijs

## **Vierkant zomerkampen**

Lunteren (jeugdherberg de Poelakker)

Stichting Vierkant voor Wiskunde organiseert twee

zomerkampen met een wiskundige inslag voor scho-

lieren van 10 tot 17 jaar. De kampen worden begeleid

door ervaren wiskundigen. Je hoeft geen whizzkid te

zijn om mee te gaan, maar je moet wel een liefhebber

zijn van het oplossen van (wiskundige) problemen en

puzzels of het maken van wiskundige kunst(bouw)wer-

ken. De activiteiten worden afgewisseld met lezingen,

spelletjes en sport.

Meer informatie: tel: 020-4447776

e-mail: [vierkant@cs.vu.nl](mailto:vierkant@cs.vu.nl),

internet: [www.cs.vu.nl/~vierkant](http://www.cs.vu.nl/~vierkant)

vr 25 en za 26 augustus 2000

## **Is wiskunde nog wel mensenwerk?**

Vakantiecursus 2000 (voor wiskundedocenten)

TU Eindhoven

<http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/>

vr 1 en za 2 september 2000

## **Is wiskunde nog wel mensenwerk?**

Vakantiecursus 2000 (voor wiskundedocenten)

CWI, Amsterdam

<http://www.cwi.nl/conferences/VC2000/>

zo 8 oktober 2000

## **Wetenschapsdag 2000**

di 10 oktober 2000

## **De Nationale Doorsnee**

Via een grootschalig meetproject, uit te voeren door

leerlingen en leraren, wordt op deze dinsdag van de

Wetenschap & TechniekWeek antwoord gegeven op

de vraag: "Wie is de gemiddelde leerling van

Nederland?" Van tevoren hebbende deelnemers daar

al voorspellingen over kunnen doen.

vr 17 en za 18 november 2000

## **Lustrumcongres Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren**

Educatorium, Uithof, Utrecht

Open dag op locatie

Universiteit van Amsterdam

tel 020-59995750, email [kattie@wins.uva.nl](mailto:kattie@wins.uva.nl)



#### Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.



Universiteit van  
Amsterdam



Universiteit  
Leiden

#### Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

#### Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar.

Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

**telefonisch:** 0522 855175,

**per fax:** 0522 855176,

**via Internet:** [www.science.uva.nl/misc/pythagoras/](http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/)

**schriftelijk** (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

#### Tarieven 1999-2000

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 37,50. Losse nummers f 8,- of BF 160.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 950,

Pythagoras buitenland f 52,50.

Pythagoras én Archimedes f 67,50,

Pythagoras én Archimedes België BF 1570,

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50.

#### Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

#### Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Prijs: f 25,- / BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

#### Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Prijs: f 30,- / BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.

Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

#### Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37 en 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).



