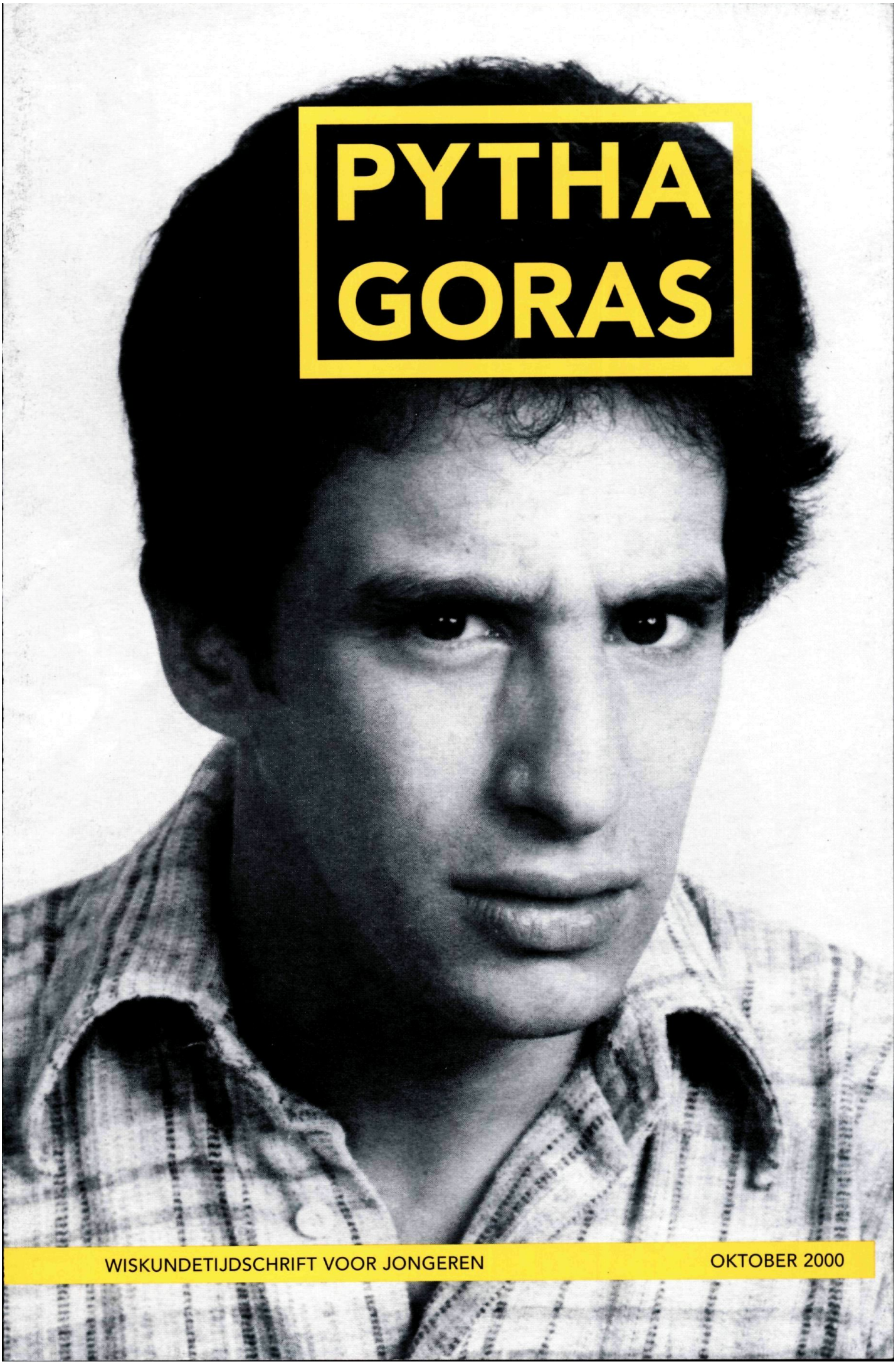
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN OKTOBER 2000

COLOFON

Uitgave
Pythagoras is een uitgave van
het Wiskundig Genootschap
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van septem-
ber tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

WWW
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij
Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras
gaan vergezeld van rondjes
die de moeilijkheidsgraad
aangeven.
Nul rondjes betekent:
geen enkele wiskundige
voorkennis vereist;
1 rondje $^{\circ}$: voor iedereen van
af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes $^{\circ\circ}$: hiervoor heb je
kennis uit de vijfde of zesde
klas nodig;
3 rondjes $^{\circ\circ\circ}$: dit gaat net
iets verder dan de middelbare
schoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **Drs. S. Biesheuvel** is docent wiskunde aan het Willem de Zwijgercollege te Bussum. **dr. L.A.M. van den Broek** is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **drs. J.S. Groot** is wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **dr. N.S. Hekster** is IT Specialist bij IBM Nederland N.V. te Amsterdam. **dr. A.P.H. van den Hombergh** is leraar wiskunde aan het Elzendaalcollege te Boxmeer. **drs. W.R. Oudshoorn** is AIO algebra en meetkunde aan de UG. **ir. S.M. van Rijnswou** is OIO computeralgebra aan de TUE. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **dr. S.A. Terwijn** is docent informatica aan de VU. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.

Een nieuw schooljaar, een nieuwe Pythagoras!
Met een nieuw thema: spelletjes. Spelletjes die leuk zijn om te spelen, en die je met behulp van wiskunde beter begrijpen kunt: Nim, Hex, vier op een rij, kamertje verhuren, et cetera. Het thema van vorig jaar, puzzels, werd zo gewaardeerd, dat we er dit jaar mee doorgaan. Elk nummer van Pythagoras bevat een puzzel om zelf te maken en op te lossen (zie p. 19). Tot slot: het grotere formaat en de gestegen verzendkosten hebben ons genoodzaakt dit schooljaar de abonnementsprijzen iets te verhogen. Voor Belgische abonnees is Pythagoras echter goedkoper geworden!

INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 5 **Het somcijfer van een getal**

6 - 9 **Spelen met vuur**

10 **Problemen**

11 **Oplossingen nr. 6**

12 - 14 **Pythagoras Olympiade**

15 **Opprikken**

16 - 17 **Het eirond en het langrond**

18 **Verliefd op een getal**

19 **Een ring- touw- en balpuzzel**

20 - 21 **Beeld en Bedrog**

22 - 23 **Het getal nul**

24 - 25 **De rekenmeester**

26 - 27 **De rij van Fibonacci**

28 **Typende aap**

29 **Oplossingen: Vouwpuzzels nr. 6**

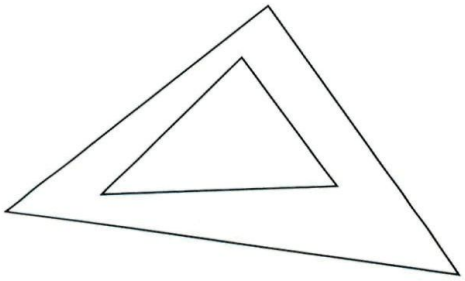
30 - 31 **De post**

32 **Activiteiten**

Kleine nootjes

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het *volgende* nummer van Pythagoras.

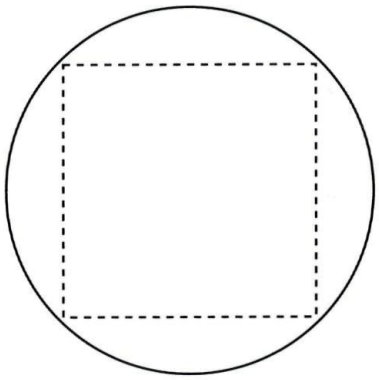
Broers en zussen
De moeder van David en Susan is in verwachting van een baby.
Als het een meisje is, heeft David tweemaal zoveel zussen als broers.
Maar als het een jongetje is, dan heeft Susan tweemaal zoveel broers als zussen.
Hoeveel kinderen heeft moeder?

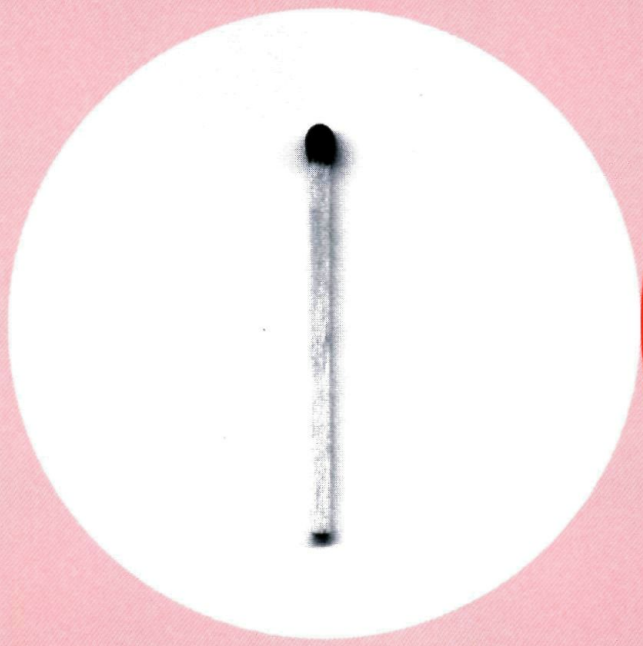


Driehoeken
Stel, je hebt twee driehoeken en iedere zijde van de ene driehoek is kleiner dan elk van de zijden van de andere driehoek. Mag je hieruit concluderen dat de ene driehoek binnen de andere driehoek past?

Handschoenen
In een la liggen tien paar verschillende handschoenen. Zonder te kijken pak je een aantal handschoenen uit de la. Hoeveel handschoenen moet je minstens pakken om er zeker van te zijn dat je een linker en een rechter handschoen hebt gepakt?
En hoeveel als je een linker en een rechter handschoen van eenzelfde paar wilt hebben?

Vierkant en cirkel
Een vierkant wordt bedekt door een cirkelschijf met straal 2.
Kun je het vierkant ook met 4 cirkelschijven van straal 1 bedekken?





Lucifers
Maak door 6 lucifers neer te leggen 8 gelijkzijdige driehoeken. Je mag de lucifers niet breken. Wel mag je ze over elkaar heen leggen.

Dolf van den Hombergh

HET SOMCIJFER van een getal!

Het somcijfer van een positief, geheel getal krijg je door de cijfers van dat getal op te tellen, daarvan de cijfers weer op te tellen enzovoort, tot je een enkel cijfer overhoudt. Zo is het somcijfer van 123 **gelijk aan** 6, **dat van** 123456 **gelijk aan** 3.

Een rekentruc

Na de zomervakantie van 1999 kwam Nick de Hoog bij mij en legde me uit wat het somcijfer van een getal is. Nick vroeg me twee getallen te kiezen. Ik koos 23456 en 789. Na een korte stilte antwoordde Nick:

"Het somcijfer van drieëntwintigduizend vierhonderdzesenvijftig tot de macht zevenhonderdnegenentachtig is acht!"

Bedenk wel dat 23456^{789} een getal is van duizenden cijfers! Hoe de truc van Nick werkt, ontdek je het makkelijkst door eerst wat onderzoek te doen.

Negen

In het oktobernummer van vorig jaar werden de bijzondere eigenschappen van het getal negen besproken. Daar werd uitgelegd dat x en het somcijfer $S(x)$ dezelfde rest hebben bij deling door 9. Bovendien werd uitgelegd dat je met resten kunt rekenen alsof het gewone getallen zijn. Zo is het somcijfer van $37^{400} = 37 \times \ldots \times 37$ (400 keer) gelijk aan:

$$S(37) \times \ldots \times S(37) = 1^{400} = 1,$$

omdat $S(37) = 1$. Zo hebben we zonder veel te rekenen al het somcijfer van een heel groot getal bepaald.
Op deze manier kun je altijd van het grondtal (het getal onder de exponent) een getal maken dat kleiner is dan 10. In een formule:

$$S(x^k) = S(S(x)^k).$$

Zo is het somcijfer van 2345^{36} gelijk aan het somcijfer van 14^{36} en van 5^{36}.

Een patroon

Wat is nu het somcijfer van 5^{36}? Dit getal is zo groot dat het niet in het venster van je rekenmachine past. We bekijken daarom eerst een makkelijker geval, namelijk de somcijfers van 5, 5^2, 5^3, 5^4, enzovoort. Deze kun je stapsgewijs uitrekenen door het vorige somcijfer met 5 te vermenigvuldigen: $5^3 = 5 \times 5^2$ en $S(25) = 7$, zodat $S(5^3) = S(5 \times 7) = S(35) = 8$. Net zo: $5^4 = 5 \times 5^3$, zodat $5^4 = S(5 \times 8) = S(40) = 4$.
Zo doorgaand vinden we voor de somcijfers van 5, 5^2, 5^3, 5^4, enzovoort:

$$5, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, 5, \ldots$$

n	$S(n^k)$, $k = 1,2,3\ldots$														
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . .
2	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7	5	1	2	4	. . .
3	3	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	. . .
4	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	. . .
5	5	7	8	4	2	1	5	7	8	4	2	1	5	7	. . .
6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	. . .
7	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	. . .
8	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	. . .
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	. . .

TABEL De somcijfers van de machten van een getal volgen een duidelijk patroon.

Een regelmatig patroon tekent zich af! Na elke 6 stappen herhaalt zich het patroon van de eerste zes somcijfers. Het somcijfer van 5^{36} is daarom gelijk aan dat van 5^{30}, 5^{24}, enzovoort, en dus aan dat van 5^6. Het somcijfer van 5^6 hadden we al uitgerekend: 1. Conclusie: het somcijfer van 5^{36} is 1.

Een tabel

Voor elk van de getallen 1 tot en met 9 kun je somcijfers van de machten van dat getal uitrekenen. Je vindt dan de tabel die hierboven is afgebeeld. In de tabel zie je een duidelijk patroon.Bij de getallen die geen drievoud zijn, herhaalt zich het patroon van de eerste zes somcijfers.
Dit gebruikt Nick bij zijn rekentruc: hij vervangt de exponent door de rest daarvan bij deling door 6 – dat geeft toch hetzelfde somcijfer. In de tabel zoekt hij dan het somcijfer op dat bij die rest hoort.

Voorbeelden

1. 10^{56}.
Het somcijfer is eenvoudig te berekenen: 1. Volgens Nick: 10 heeft somcijfer 1; 56 geeft rest 2 bij deling door 6. Volgens de tabel heeft 1^2 somcijfer 1. Klopt!

2. 11^7.
De rekenmachine: $11^7 = 19487171$. Nemen we achtereenvolgens de somcijfers, dan krijgen we: 19487171 38 11 2. Volgens Nick: Het somcijfer van 11 is 2; 7 geeft rest 1 bij deling door 6. De tabel geeft bij 2^1 somcijfer 2. Klopt!

3. 777^3.
Het rekenapparaat: $777^3 = 469097433$. Het somcijfer hiervan is: 9. Volgens Nick: het somcijfer van 777 is 3. De tabel geeft somcijfer 9. Klopt!

Bewijs

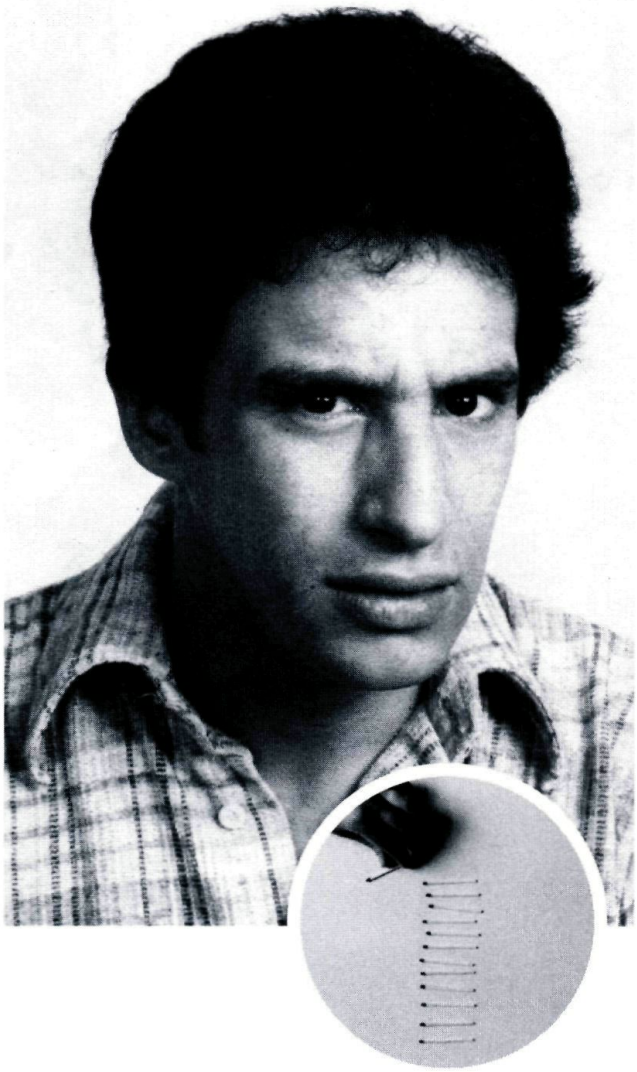
De regelmaat in de tabel kun je met enig denkwerk ook nog wel bewijzen. Wil je laten zien dat de somcijfers van machten van 2 zich na zes keer herhalen, dan moet je bewijzen dat $S(2^{k+6}) = S(2^k)$. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned} S(2^{k+6}) &= S(2^k \cdot 64) \\ &= S(S(2^k) \cdot S(64)) \\ &= S(S(2^k) \cdot 1) \\ &= S(2^k). \end{aligned}$$

Probeer zelf de andere gevallen te bewijzen.

Zelf doen

Als je deze rekentruc zelf wilt uitvoeren, zul je de tabel zo beknopt mogelijk willen opslaan in je hoofd. Dat is niet moeilijk. Om te beginnen kun je de machten van 1 en van 3, 6 en 9 weglaten. Verder kun je, omdat $4 = 2^2$ en $8 = 2^3$, de machten van 4 en van 8 afleiden uit de machten van 2. Tenslotte hebben de machten van 2 veel te maken met de machten van 7 $(2 + 7 = 9)$, en de machten van 5 veel met de machten van 4 $(4 + 5 = 9)$. Kijk maar eens goed! Zodoende kun je de hele tabel reconstrueren uitgaande van de machten van 2.



Spelen met vuur

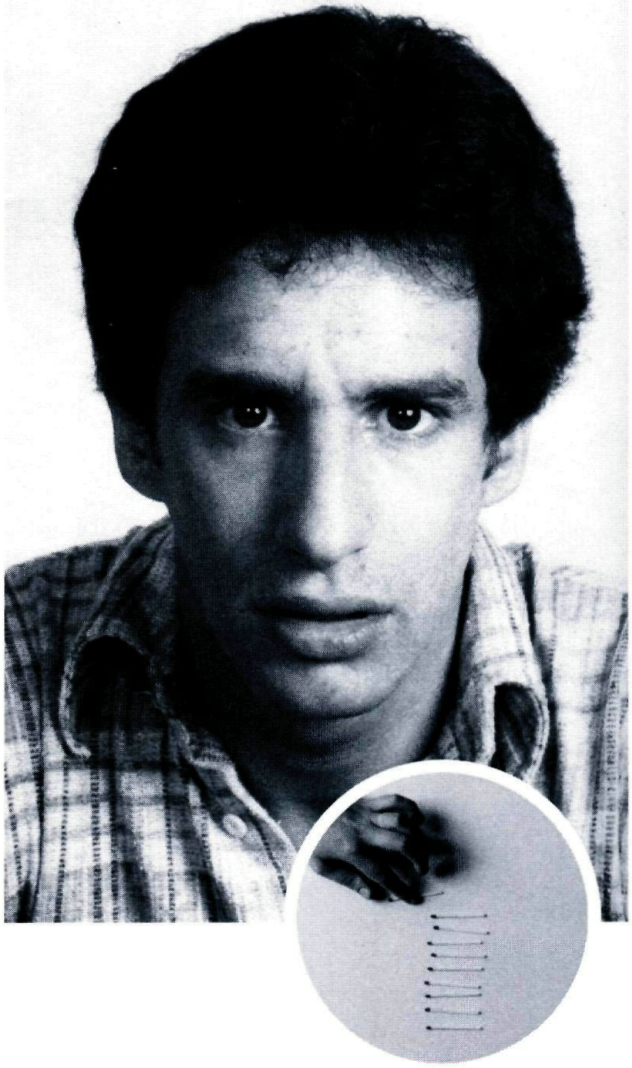
Chris Zaal

Spelen met vuur is gevaarlijk. Maar met lucifers zijn ook andere spelletjes mogelijk. Heel eenvoudige spelletjes, maar waarbij je met een beetje nadenken al veel winst kan behalen.

Dit jaar is het thema van Pythagoras: wiskundige spelletjes. Het gaat om spellen die je wiskundig kunt analyseren: Boter, kaas en eieren, Nim, Hex, vier op een rij, kamertje verhuren. Al deze spellen zijn eenvoudig uit te leggen en te spelen, dus daar kun je al voldoende plezier aan beleven. De wiskundige diepgang verschilt van geval tot geval: sommige van de spellen, zoals bijvoorbeeld Hex, zijn nog lang niet goed doorgrond. Andere spelletjes laten zich makkelijk wiskundig analyseren, zoals het volgende spelletje.

Een eenvoudig aftrekspel

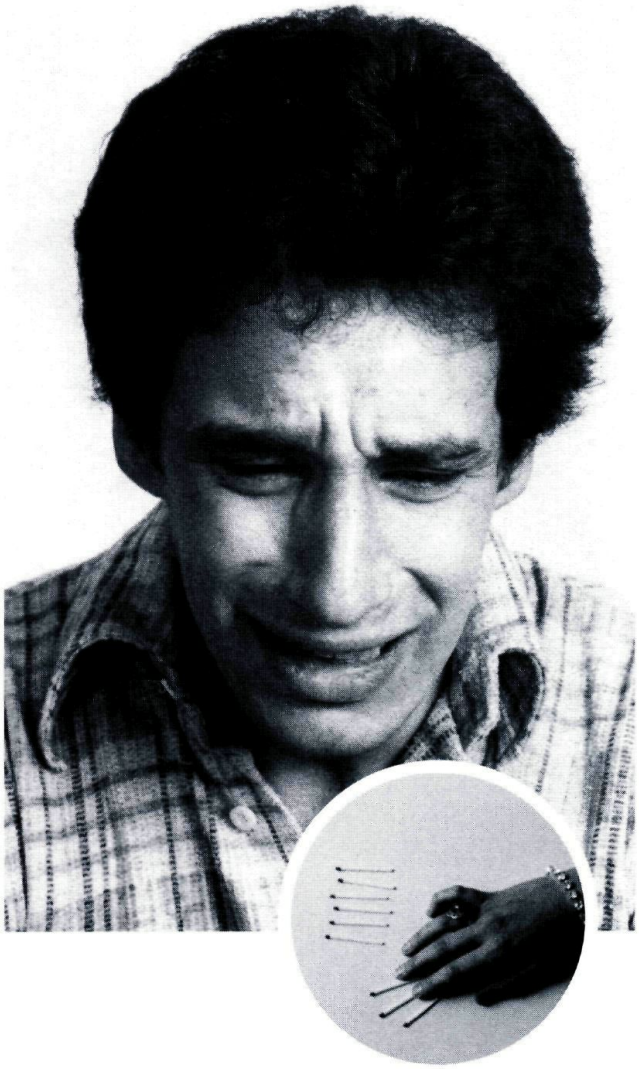
Dit spel speel je met twee spelers. Op een tafel leg je 25 lucifers neer op een rij. Om beurten neemt elke speler naar keuze

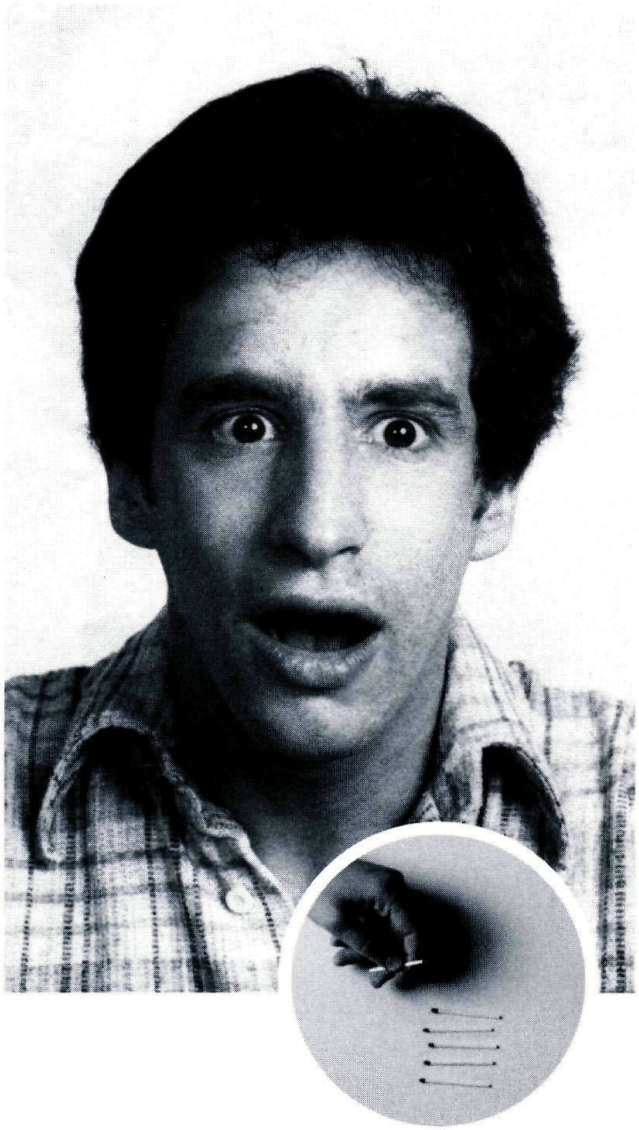


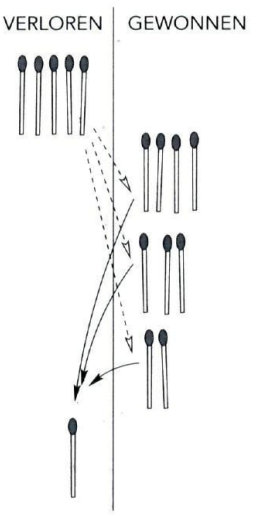
1, 2 of 3 lucifers weg. Degene die de laatste lucifers wegpakt, *verliest*.
Probeer het maar eens. Welke speler heeft het meeste voordeel? Degene die begint of degene die als tweede aan zet is? Of hebben beide spelers evenveel kans om te winnen?

Onderzoek

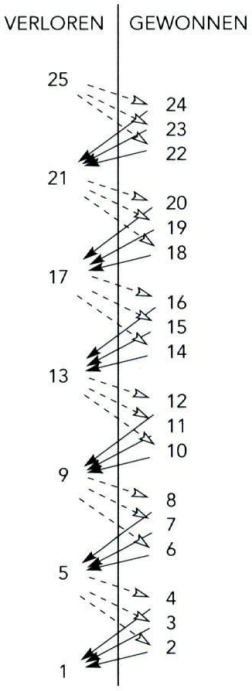
We gaan onderzoeken hoe dit spel in elkaar zit. Daartoe gaan we alle mogelijke posities bekijken. Elke mogelijke tussenstand van het spel is een positie.
De meest eenvoudige positie is die van 1 lucifer. Dit is een hopeloze situatie voor degene die aan de beurt is. Die verliest omdat hij volgens de spelregels gedwongen is de laatste lucifer op de pakken.
Deze positie noemen we daarom een *verloren* positie voor degene die aan zet is.
Hoe zit het nu met 2 lucifers? Als je aan de beurt bent, mág je beide lucifers wegnemen. Maar dat is dom, want dan heb je verloren. Door 1 lucifer weg te nemen, kun je je tegenstander met de laatste lucifer opzadelen en heb je gewonnen!
Hetzelfde kun je doen als je met 3 lucifers aan zet bent. Door dan 2 lucifers weg te nemen, breng je je tegenstander in een verloren positie. Idem dito voor vier lucifers: neem 3 lucifers weg, en je tegenstander is verloren. De posities van 2, 3 of 4 lucifers noemen we daarom *gewonnen*: door verstandig te spelen kun je *altijd* winnen.
De volgende te onderzoeken positie is die van 5 lucifers. Wat kun je doen? Je kunt 1 lucifer wegnemen. Dan blijven er 4 lucifers over, en dat is gewonnen voor je tegenstander. Neem je 2 lucifers weg, dan wint je tegenstander eveneens, en idem dito als je 3 lucifers wegneemt. Wat je ook doet, je tegenstander kan altijd winnen.
Deze positie, die van 5 lucifers, noemen we daarom *verloren*.
De resultaten van ons voorlopige onderzoek staan in figuur 1 (z.o.z.). Ons onderzoek kunnen we aan de hand van dit schema voortzetten.







Figuur 1.
De eerste paar posities van het luciferspel.
Alle gestippelde zetten verliezen, de getrokken zetten winnen.

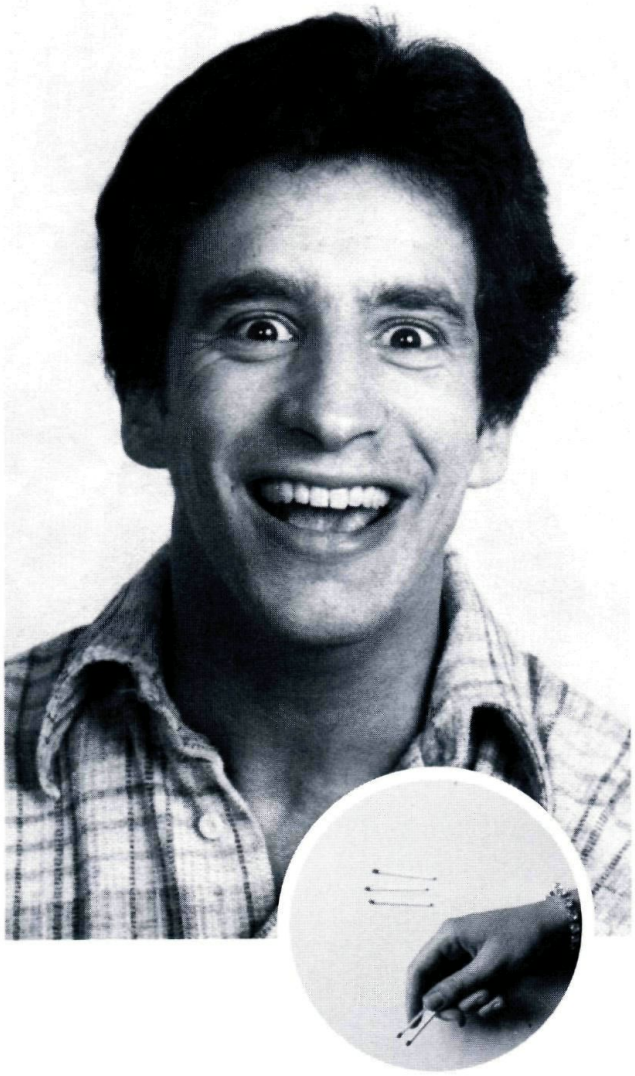


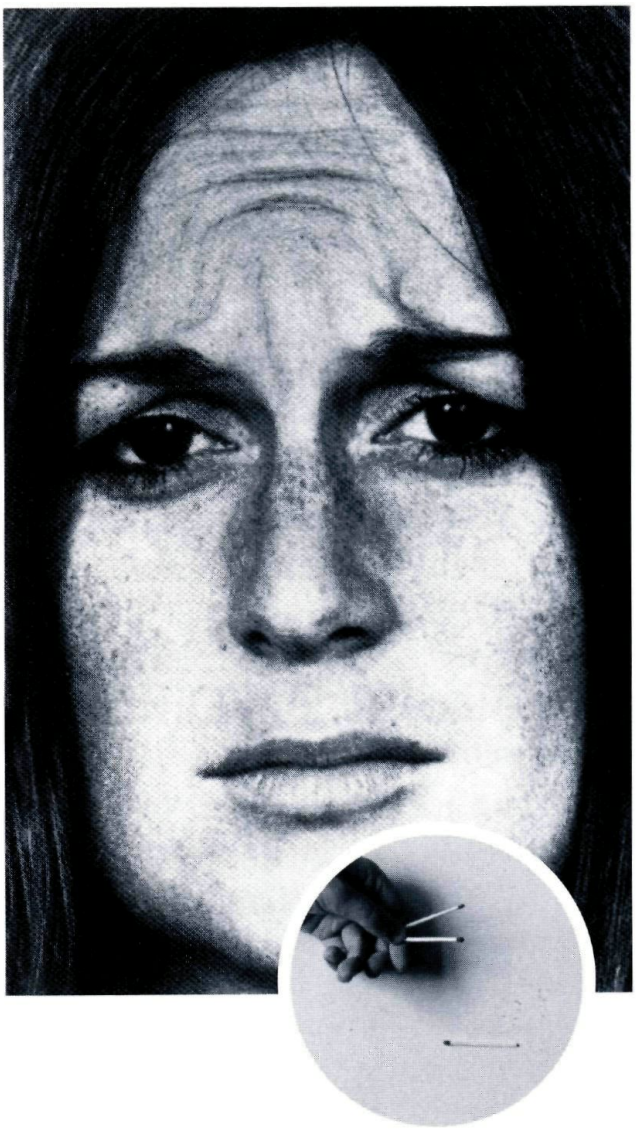
Figuur 2.
Alle posities van het lucifer-aftrekspel in een tabel.

Met 6 lucifers heb je weer gewonnen, omdat je door 1 lucifer weg te nemen je tegenstander 5 lucifers laat: een verloren postitie. Op dezelfde manier zijn ook de posities van 7 en 8 lucifers gewonnen, en is de positie van 9 lucifers weer verloren.
Nu zie je een patroon opdoemen: na elke verloren positie komen drie gewonnen posities, op hun beurt gevolgd door één verloren positie. Het complete diagram staat in figuur 2.
Je ziet dat de beginpositie van 25 lucifers *verloren* is voor degene die aan zet is.
Dit betekent dat de eerste speler bij verstandig spel van de tweede speler *altijd* verliest.. Maar als de tweede speler een domme zet doet, kan het gebeuren dat jij opeens een gewonnen positie in de schoenen geschoven krijgt, zodat je alsnog kan winnen!

Strategie

Het luciferspel dat we behandeld hebben, is van een heel simpel type. Er is altijd een verliezer en een winnaar, herhaling van zet-





ten is niet mogelijk en er is geen toeval in het spel. Bij dergelijke spellen kun je de posities een voor een onderzoeken en indelen op de manier die we al gezien hebben:

- een positie is *verloren* als de tegenstander door verstandig spel altijd kan winnen, welke zet je ook doet;
- alle andere posities zijn *gewonnen*.

Zodoende kun je een schema maken, waarbij je van gewonnen posities naar verloren posities springt en omgekeerd. Vanuit een gewonnen positie is er *altijd* een zet naar een verloren positie; en vanuit een verloren positie gaan *alle* mogelijke zetten naar gewonnen posities.

Op deze manier kun je ook vergelijkbare spellen analyseren. Bij alle spellen van dit type is de startpositie hetzij gewonnen, hetzij verloren. In het eerste geval kan de eerste speler altijd winnen, in het tweede geval kan de tweede speler die aan zet is altijd winnen. Er is dus altijd een winnende strategie (voor een van beide spelers).

Meer spelletjes

We geven nog een aantal andere luciferspelletjes, om te spelen en te analyseren. Welke speler een winnende strategie heeft, verklappen we niet.

Dat is aan jou om uit te zoeken. De startpositie bestaat steeds uit 25 lucifers. Verliezer is degene die de laatste lucifer pakt.

1. Per beurt neem je 1, 2, 3 of 4 lucifers weg.

2. Per beurt neem je 1, 5 of 7 lucifers weg.

3. Per beurt neem je 1, 4 of 6 lucifers weg.

4. Per beurt neem je 1, 3 of 4 lucifers weg.

Moeilijker

5. Het spel *Chomp* begint met 25 lucifers in een rechthoek van vijf bij vijf. Beide spelers zitten aan dezelfde kant. Per beurt wijst elke speler een lucifer aan en neemt die weg, en ook alle lucifers die er boven, rechtsboven en rechts van liggen. Verliezer is degene die de lucifer linksonder pakt.

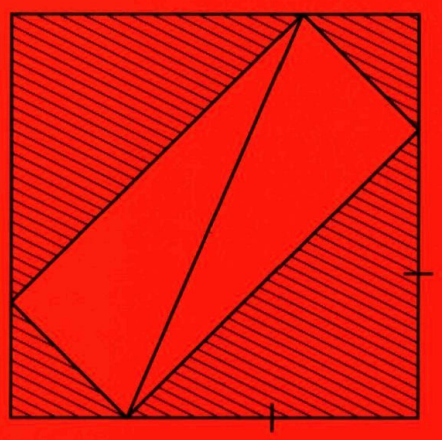
6. Startpositie: 25 lucifers in een rechthoek van vijf bij vijf. Per beurt neem je uit één rij of uit één kolom 1 of meer lucifers weg.

Problemen

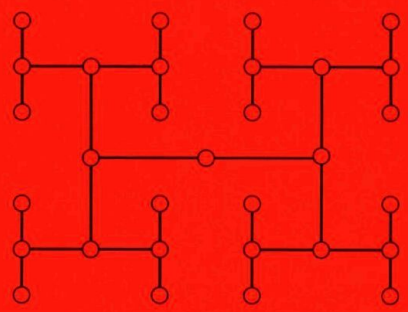
Dion Gijswijt

Leugenaars
In een klas staat een aantal leerlingen bekend om het feit dat ze altijd de waarheid spreken. De rest liegt soms en spreekt soms de waarheid. Aan alle leerlingen wordt gevraagd hoeveel van hen altijd de waarheid spreekt. De volgende antwoorden worden gegeven: 2, 3, 4, 6, 3, 6, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 6. Hoeveel leerlingen hebben de vraag naar waarheid beantwoord?

Diagonaal
In een vierkant is een rechthoek getekend (zie figuur). De oppervlakte van het gearceerde gebied is gelijk aan 8. Wat is de lengte van de diagonaal van de rechthoek?



Kleuren
Op hoeveel manieren kun je de knooppunten in de figuur zwart of wit kleuren, zó dat geen twee witte knopen met een lijnstuk verbonden zijn?



Kettingbreuk
Welk reëel getal stelt de volgende eindeloos herhalende breuk voor?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

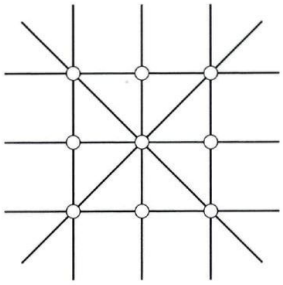
Derdegraads
De grafiek van de derdegraads functie $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ wordt door een lijn l in drie punten gesneden, waarvan de x-coordinaten x_1, x_2 en x_3 zijn. Bereken $x_1 + x_2 + x_3$.

Oplossingen nr.6

Dion Gijswijt

Driehoeken tellen
Ieder drietal punten niet op één lijn vormt een driehoek. Er zijn 8 lijnen met drie punten erop, dus het aantal driehoeken is

$$\binom{9}{3} - 8 = 84 - 8 = 76.$$



Vereenvoudig
Het antwoord is 2. Noem de gegeven worteluitdrukking x. Dan is

$$x^2 = \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$

Nogmaals kwadrateren geeft:

$$x^2 = 12 + 2\sqrt{\left(6+4\sqrt{2}\right) \times \left(6-4\sqrt{2}\right)}.$$

Vereenvoudigen geeft:

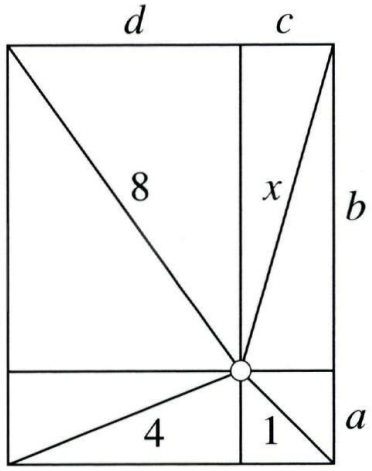
$$x^4 = 12 + 2\sqrt{36-32} = 16.$$

Dus $x = 2$.

Skates
Er zijn twee wieltjes die onderling worden verwisseld. Drie andere wieltjes worden cyclisch verwisseld en de vijf overgebleven wieltjes worden ook cyclisch verwisseld. Het aantal keer dat je moet verwisselen om alle wieltjes weer op hun oorspronkelijke plek te krijgen moet dus een veelvoud van zowel 2 als 3 als 5 zijn. Je moet de wieltjes dus 30 keer wisselen.

In honderd stukken
Als je de kubus in een aantal kubusjes hebt verdeeld, kun je door één van deze kubusjes in 8 kleine kubusjes te verdelen het totaal aantal kubusjes met 7 vermeerderen. Op dezelfde manier kun je dit aantal met 26 vermeerderen door één kubusje in 27 kubusjes te verdelen. Je begint met 1 kubus, dus de vraag is of er positieve gehele getallen a en b zijn met $1 + 7a + 26b = 100$. Dat kan, want $100 = 1 + 3\times7 + 3\times26$.

Vierde lengte
Noem de lengte van het vierde lijnstuk x. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat $1^2 + 8^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Maar evengoed geldt: $4^2 + x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dus $1 + 64 = 16 + x^2$, waaruit volgt dat $x = 7$.



°Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 63
Bepaal alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt:

$$ab + 5 = c,$$
$$bc + 1 = a,$$
$$ca + 1 = b.$$

Opgave 64
Iemand heeft elk punt van het vlak een kleur gegeven. In totaal heeft hij 10 kleuren gebruikt. Bewijs dat er een oneindige verzameling verschillende driehoeken is die allemaal congruent zijn en waarvan alle hoekpunten dezelfde kleur hebben.

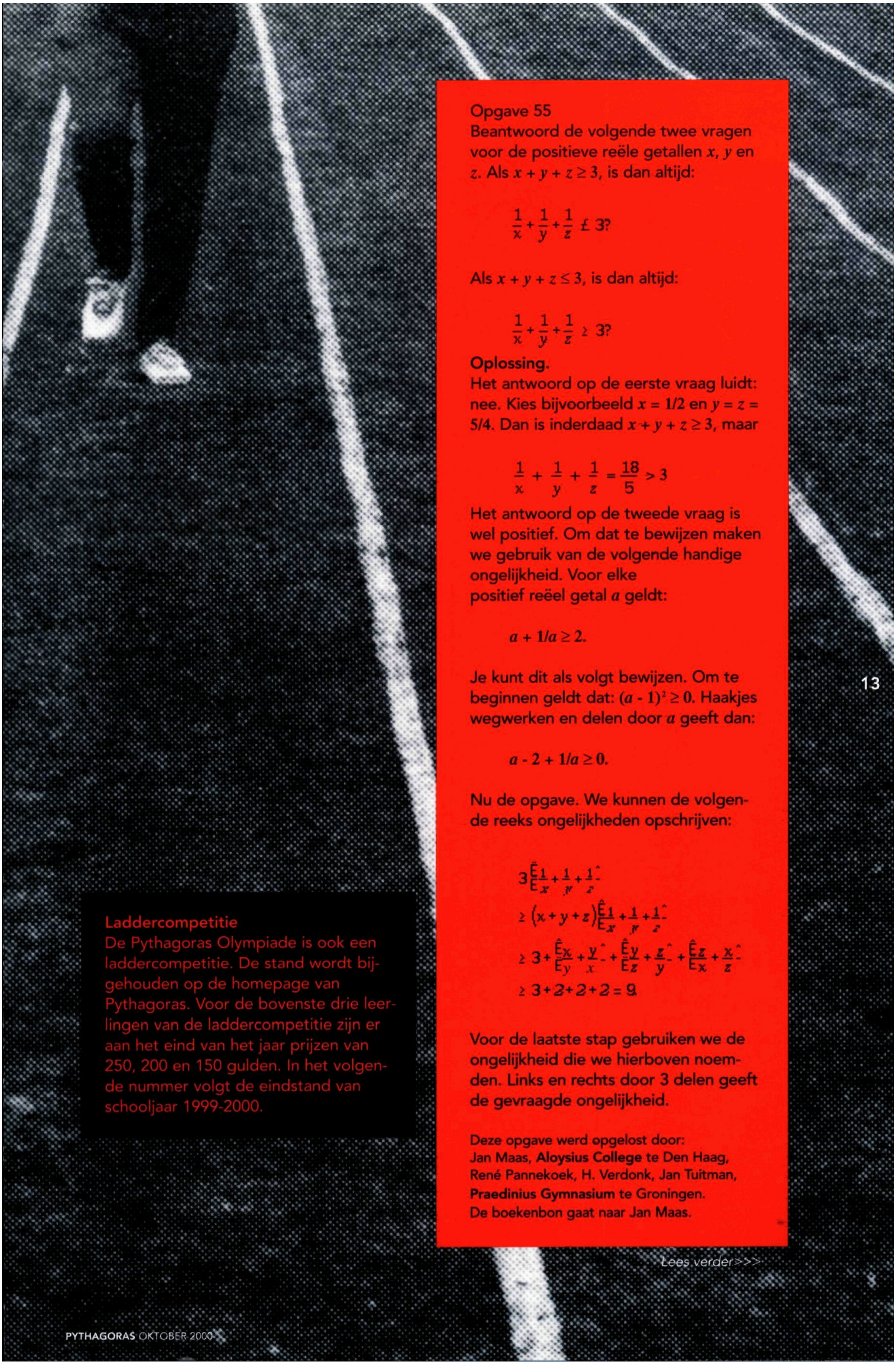
Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
TU Eindhoven
Faculteit Wiskunde
Hoofdgebouw kamer 9.50
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

email: sander@win.tue.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 november 2000. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot.
Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt! Hieronder volgen de oplossingen van de opgaven uit het juninummer.

Veel succes!
Ronald van Luijk, Wim Oudshoorn en Sander van Rijnswou.



Opgave 55

Beantwoord de volgende twee vragen voor de positieve reële getallen x, y en z. Als $x + y + z \geq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ £ } 3?$$

Als $x + y + z \leq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3?$$

Oplossing.

Het antwoord op de eerste vraag luidt: nee. Kies bijvoorbeeld $x = 1/2$ en $y = z = 5/4$. Dan is inderdaad $x + y + z \geq 3$, maar

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{18}{5} > 3$$

Het antwoord op de tweede vraag is wel positief. Om dat te bewijzen maken we gebruik van de volgende handige ongelijkheid. Voor elke positief reëel getal a geldt:

$$a + 1/a \geq 2.$$

Je kunt dit als volgt bewijzen. Om te beginnen geldt dat: $(a - 1)^2 \geq 0$. Haakjes wegwerken en delen door a geeft dan:

$$a - 2 + 1/a \geq 0.$$

Nu de opgave. We kunnen de volgende reeks ongelijkheden opschrijven:

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ & \geq (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ & \geq 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \\ & \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

Voor de laatste stap gebruiken we de ongelijkheid die we hierboven noemden. Links en rechts door 3 delen geeft de gevraagde ongelijkheid.

Deze opgave werd opgelost door:
Jan Maas, **Aloysius College** te Den Haag,
René Pannekoek, H. Verdonk, Jan Tuitman,
Praedinius Gymnasium te Groningen.
De boekenbon gaat naar Jan Maas.

Lees verder >>>

Laddercompetitie

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Voor de bovenste drie leerlingen van de laddercompetitie zijn er aan het eind van het jaar prijzen van 250, 200 en 150 gulden. In het volgende nummer volgt de eindstand van schooljaar 1999-2000.

Opgave 59
Hoeveel priemgetallen zijn er die, geschreven in het tientallig stelsel, alleen bestaan uit nullen en enen, die elkaar steeds afwisselen. Ze zien er dus uit als 101010...

Oplossing.
Een getal dat eindigt op een nul is nooit een priemgetal. Neem een getal S dat voldoet aan de voorwaarden. We kunnen S dan schrijven als:

$$S = 1 + 100 + 100^2 + 100^3 + \ldots + 100^k,$$

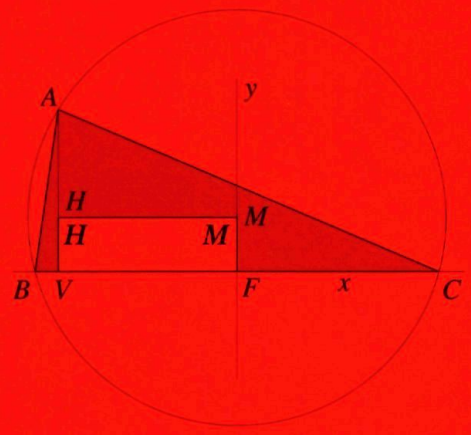
met k oneven. Deze som kunnen we sommeren met behulp van de volgende truc. In de som $100S - S$ vallen bijna alle termen weg, we houden alleen $100^{k+1} - 1$ over. Dus:

$$S = \frac{100^{k+1} - 1}{99} = \frac{\left(100^{\frac{k+1}{2}} - 1\right)\left(100^{\frac{k+1}{2}} + 1\right)}{99}.$$

Voor $k > 1$ zijn beide factoren in de teller groter dan 99. Dan is S dus geen priemgetal, want ook nadat 99 is weggedeeld blijven er twee factoren over die groter zijn dan 1. In het geval $k = 1$ is $S = 101$, en dat is inderdaad een priemgetal. Het geval $k = 0$ levert $S = 1$ op, en dat is geen priemgetal.
De enige oplossing is dus $S = 101$.

Deze opgave is opgelost door:
Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, H. Verdonk te Den Haag en Peter Deleu, Hulste (België).
De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Opgave 60
Een rechthoek $HMFV$ heeft zijden $HM = 23$ en $MF = 7$. Een driehoek ABC heeft H als hoogtepunt, M als middelpunt van de omgeschreven cirkel, F als midden van BC en V als voetpunt van de hoogtelijn uit A.
Wat is de lengte van BC?



Oplossing.
We maken gebruik van coördinaten. Als x-as kiezen we zijde BC, als y-as, de lijn MF. Het oorsprong komt in F. We hebben nu de punten:

$F = (0,0)$, $V = (-23,0)$,
$M = (0,7)$, $H = (-23,7)$,
$B = (-b,0)$, $A = (-23,a)$.
$C = (b,0)$,

We willen de onbekende b bepalen. We gebruiken twee gegevens, allereerst dat $AM = MC$, oftwel $23^2 + (7 - a)^2 = (-b)^2 + 7^2$. Uitwerken levert $a^2 - b^2 - 14a + 23^2 = 0$. Het tweede dat we gebruiken is dat $BH \perp AC$, dat is $(b - 23,7) \perp (23 + b, -a)$. Inproduct nemen geeft $(b - 23)(b + 23) - 7a = 0$, oftewel $b^2 - 23^2 - 7a = 0$. Deze laatste vergelijking gebruiken we om b^2 te elimineren uit de eerste: $a^2 - 21a = 0$.
De enige niet ontaarde oplossing is $a = 21$. Invullen in een van de vergelijkingen geeft vervolgens het antwoord $b = 26$, dus $BC = 52$. Merk overigens op dat de waarde van a niet afhangt van de lengte van HM.

Deze opgave is opgelost door:
Jan Tuitman, **Praedinius Gymnasium** te Groningen, Luc Gheysens, **Pleinschool** te Kortrijk, H. Verdonk te Den Haag en Peter Deleu, Hulste (België).
De boekenbon gaat naar Luc Gheysens.

Prijsvraag

Leon van den Broek

Het nieuwe schooljaar opent Pythagoras weer met een prijsvraag. Doe mee en maak kans op een prijs!

Opprikken

De 33 kinderen van klas 2Bx hebben bij een project tekeningen gemaakt.
De tekeningen zijn gemaakt op kleurige vierkante vellen van 30 bij 30 centimeter. In de hal van de school is een van de wanden geschikt om alle 33 tekeningen op te prikken. Hoeveel punaises zijn daarvoor nodig?
Inderdaad, maar één. Maar die manier van opprikken is natuurlijk niet de bedoeling. De tekeningen moeten netjes overzichtelijk aan de wand komen. Ze worden allemaal op de vier hoeken vastgeprikt. Er wordt zo zuinig mogelijk met de punaises omgesprongen; als het kan wordt een punaise voor meerdere tekeningen tegelijk gebruikt. Eén punaise kan maximaal vier hoeken tegelijk vastprikken.
Nu stellen we de vraag nog een keer: *Hoeveel punaises zijn er minimaal nodig?*

Prijsvraag

Natuurlijk is het aantal van 33 willekeurig. Wiskundig is het pas interessant als het opprikprobleem *algemeen* wordt opgelost.
We formuleren de defintieve vraag:
Hoeveel punaises heb je nodig om n even grote vierkanten op te prikken? Hier is n een willekeurig aantal.
Je kunt de vraag op allerlei manier beantwoorden. Bijvoorbeeld:
- door in woorden te omschrijven hoe je bij n het aantal punaises vindt;
- door een tabel te maken en de regelmaat in die tabel op de een of andere wijze vast te leggen;
- door verschillende gevallen te onderscheiden;
- door middel van een formule (waarschijnlijk heb je hiervoor de entier-functie nodig; vraag je leraar).

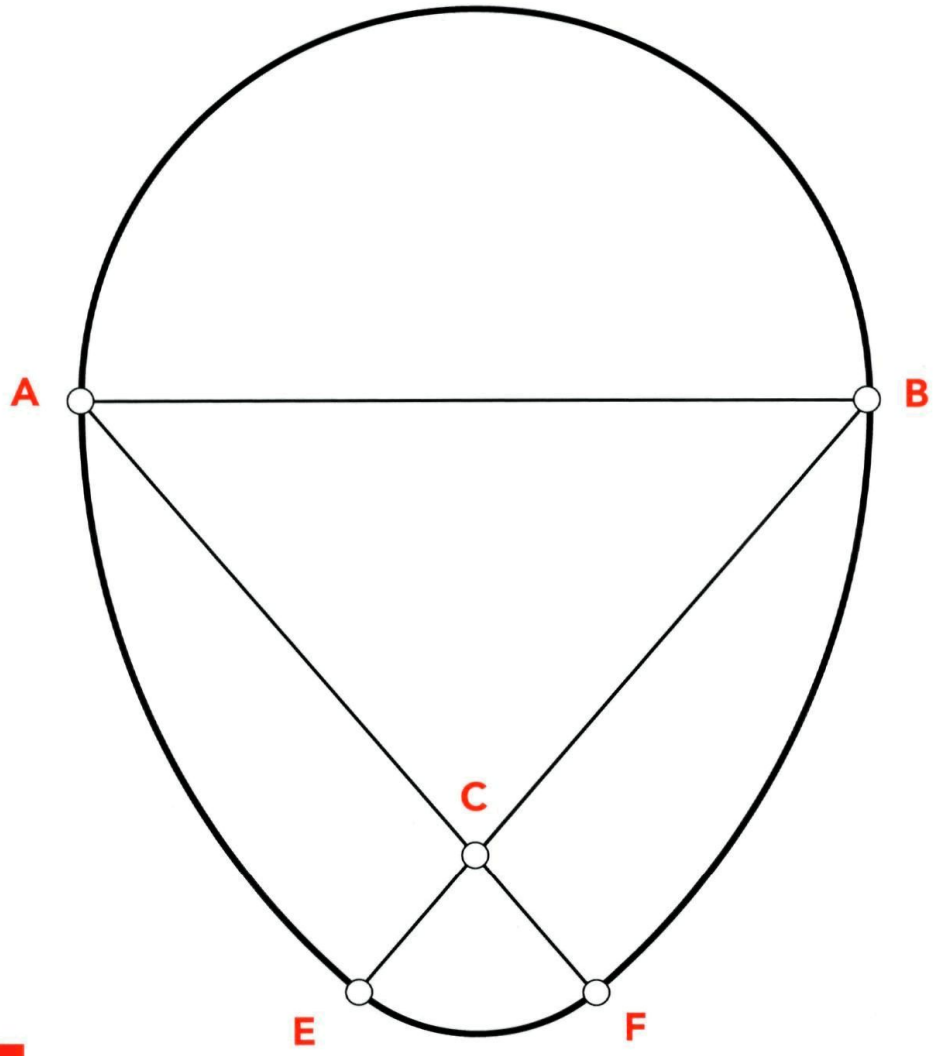
Inzenden

Stuur je antwoord voor 15 januari 2001 naar:
René Swarttouw
Vrije Universiteit
Faculteit Exacte Wetenschappen
Divisie Wiskunde en Informatica
De Boelenlaan 10181a
1081 HV Amsterdam

Prijzen

Voor de beste individuele inzendingen zijn er drie boekenbonnen van 100 gulden. Daarnaast is er een klassenprijs van 250 gulden. Bij het beoordelen van de inzending wordt vooral gelet op de wiskundige kwaliteit van de inzendingen (probeer alle uitspraken te bewijzen!).

Het eirond



Figuur 1

Bruno Ernst

In een ongeveer 200 jaar oud meetkundeboek vond ik de volgende aardige constructies: die van een eirond en een langrond. Wiskundig uiterst simpel, maar toch getuigend van meetkundige inventiviteit. En de woorden zijn ook zo typisch Nederlands. Ze geven precies aan wat er bedoeld wordt.

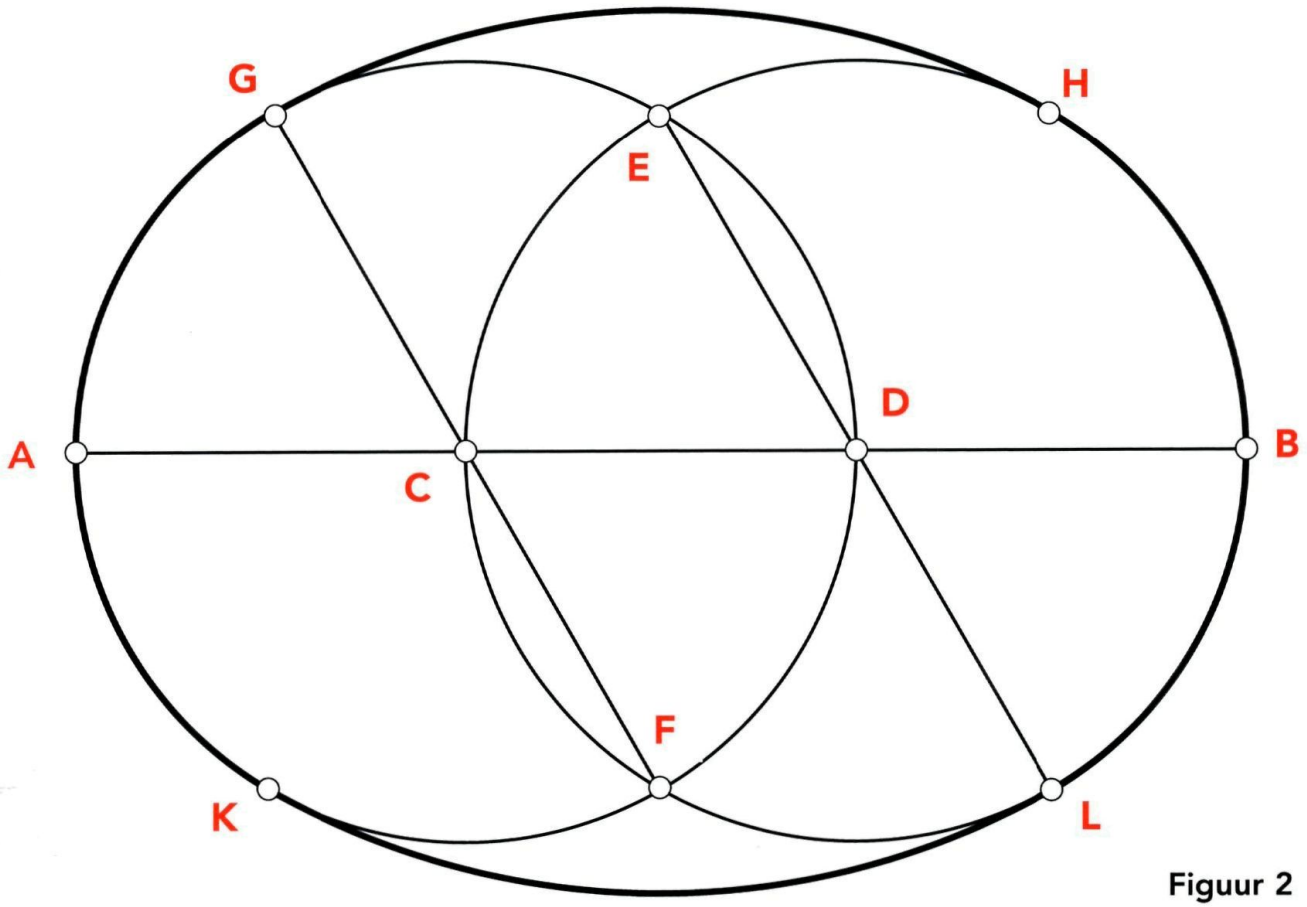
Het eirond

Zie figuur 1. Teken een halve cirkel met de middellijn AB. Teken met AB als basis een gelijkbenige driehoek ABC. De gelijke benen moeten kleiner zijn dan de middellijn maar groter dan de straal van de cirkel. Verleng BC en AC. Zet de passerpunt in A en teken een cirkelboog met straal AB. Deze boog snijdt het verlengde van AC in F. Dat doen we ook vanuit B en vinden zo het punt E. Zet de passerpunt in C en trek een cirkelboog EF.

"... waardoor het eirond $ABFE$ voltooid is. Wat te doen was."

Het zal wel duidelijk zijn dat het eirond langer en van onder puntiger wordt, als we de benen van de gelijkbenige driehoek ABC langer maken.

en het langrond



Figuur 2

Het langrond
Zie figuur 2. Het langrond is een benadering van een ellips, opgebouwd uit vier cirkelbogen. De constructie is als volgt. Deel AB in drie gelijke delen. Teken een cirkel met middelpunt C en straal CA. Eveneens een cirkel met D als middelpunt en DB als straal. De cirkels snijden elkaar in E en F. Trek FC die de linkercirkel in G snijdt. Eveneens ED die de rechter cirkel in L snijdt. Trek vanuit F de boog GH en vanuit E de boog KL.

"... dan zal $AGHBLK$ het begeerde langrond zijn. Wat te doen was."

Dit zijn beslist aardige constructies. Wie ze wat te simpel vindt nodig ik uit om de oppervlakte van een eirond en van een langrond uit te rekenen. Dat is namelijk minder eenvoudig.

Jos Groot

Verliefd op een getal

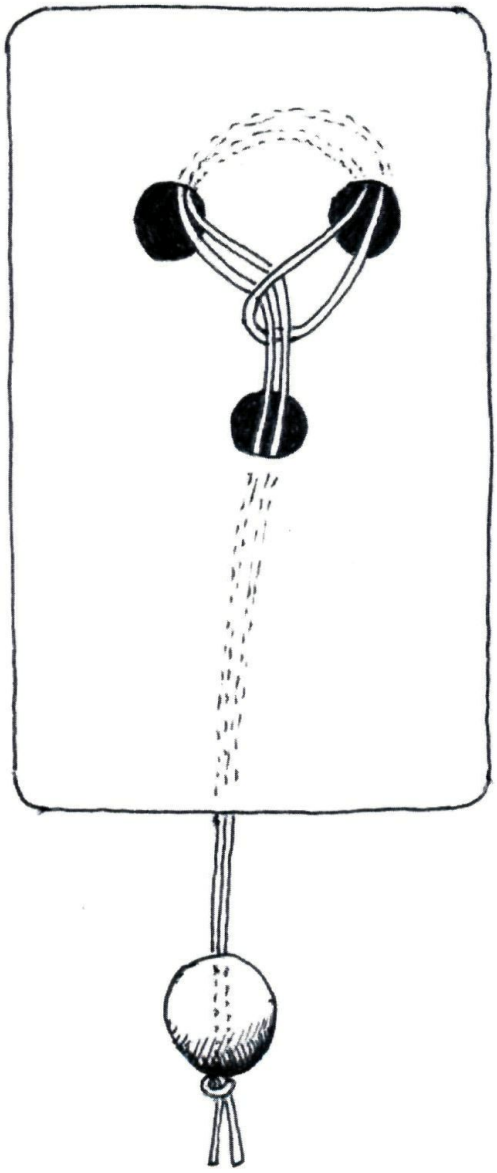
Kun je verliefd worden op een getal? Op een getal als 37 niet zo gauw, want dat lijkt niet erg bijzonder. In het aprilnummer (prijsvraag 'Elk getal is bijzonder') schreef René Swarttouw dat 37 wel degelijk bijzonder is: 37 is het kleinste priemgetal dat zowel het verschil is van twee derde machten ($4^3 - 3^3$) als de som van twee kwadraten ($6^2 + 1^2$). Uiteindelijk maken irrationale getallen toch meer kans bijzonder gevonden te worden, denk ik (omdat verliefdheid en irrationaliteit vaak samen gaan?). Zoals bijvoorbeeld π en e. Er zijn boeken die helemaal over zo'n getal gaan. De historie, relaties met andere getallen, benaderingen, van alles komt er in aan bod. Dit wijst op zijn minst op een bijzondere relatie tussen de auteur en het beschreven getal. Het getal wordt op een bijna obsessieve manier mooi gevonden, anders schrijf je er geen boek over vol. En doet dat niet denken aan verliefdheid? Zelf ben ik nooit verliefd geraakt op een getal, ik ben nooit verder gekomen dan een verheviging van een verliefdheid door een voorval waarbij priemgetallen betrokken waren...

Het was me opgevallen dat zij van vrij grote getallen nog kon zeggen of ze priem zijn of niet. Het was een sport om een hoog getal te noemen (ter plekke bepaald), en dan te kijken of haar antwoord juist was. Op een zeker moment dacht ik slim te zijn en gaf het getal 127127. Alhoewel het beste antwoord altijd is: "Dit is geen priem" (omdat het veel gemakkelijker is een grote niet-priem te noemen dan een grote priem), gaf ze een veel beter antwoord: "Dit is geen priem, want het is deelbaar door 1001." ($127127 = 7 \times 11 \times 13 \times 127 = 1001 \times 127$). Ik was verkocht, want dit precieze antwoord had ik niet verwacht. Het getal 127127 is een voorbeeld van een getal dat toetsing op deelbaarheid door 2, 3 en 5 doorstaat, en daarom priem zou kunnen zijn. Maar door de speciale structuur, de herhaling van 127, zie je makkelijk dat het geen priemgetal is. Zouden er getallen zijn waarin die structuur wat onduidelijker is, maar die toch eenvoudig (uit het hoofd) uit te rekenen zijn? Jawel, $127381 = 1003 \times 127$ is daarvan een voorbeeld ($17 \times 59 \times 127$). Nu komt er geen herhaald groepje cijfers in het getal voor, wat de 'ontmaskering' als niet-priem moeilijker maakt. De methode is simpel: neem een driecijferige priem en vermenigvuldig het met twee eencijferige getallen. De twee uitkomsten moeten elk weer uit drie cijfers bestaan (anders wordt het hoofdrekenen te moeilijk) en worden naast elkaar gezet. Dit is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden naar 9 cijfers: $635381889 = 5003007 \times 127$. Meer methoden dan deze ken ik niet. Weet jij andere manieren om uit je hoofd een getal te berekenen waaraan (1) niet makkelijk te zien is dat het geen priemgetal is, maar (2) waarvan je zeker weet dat het geen priemgetal is? Stuur je antwoord naar de redactie van Pythagoras.

Chris Zaal

Een ring, touw en balpuzzel

Vorig jaar waren puzzels het thema van Pythagoras: geen wiskunde-opdrachten, maar tastbare puzzels die je met je handen kan oplossen. Dit jaar gaan we met deze rubriek door: elk nummer van Pythagoras bevat steeds een puzzel, om zelf te maken en op te lossen.



Ring-touw-en-balpuzzels zijn er in vele gedaanten. In puzzel- en cadeauwinkels kom je soms de puzzels van het Belgische bedrijfje Eureka tegen. Die hebben een aantal mooie ring, touw en balpuzzels in hun collectie.
Een van de meest elementaire ring-touw-en-balpuzzels is de volgende puzzel, die we hier zelf gaan maken.

Benodigd Een speelkaart (of een rechthoekig stuk karton), een stukje touw van ongeveer 30 centimeter en een houten kraal.
Zelf maken Maak met een perforator drie gaten in de speelkaart (de 'ringen'). Sla het stuk touw dubbel en haal het op de aangegeven manier door de gaten. Rijg dan het dubbele uiteinde door de kraal en leg een dikke knoop in het uiteinde van het touw zó, dat de kraal niet meer van het touw los kan. Opdracht: maak het touw los van de kaart, zonder de kaart te beschadigen of de kraal van het touw los te halen. Succes!
Variaties De puzzel kun je moeilijker maken door een paar extra gaten toe te voegen, en het touw ook daar doorheen te halen. In plaats van een kartonnen speelkaart, kun je ook een blokje hout nemen waar je drie gaten in boort.

Twee poppenhoofdjes, een in gips en een in plastic

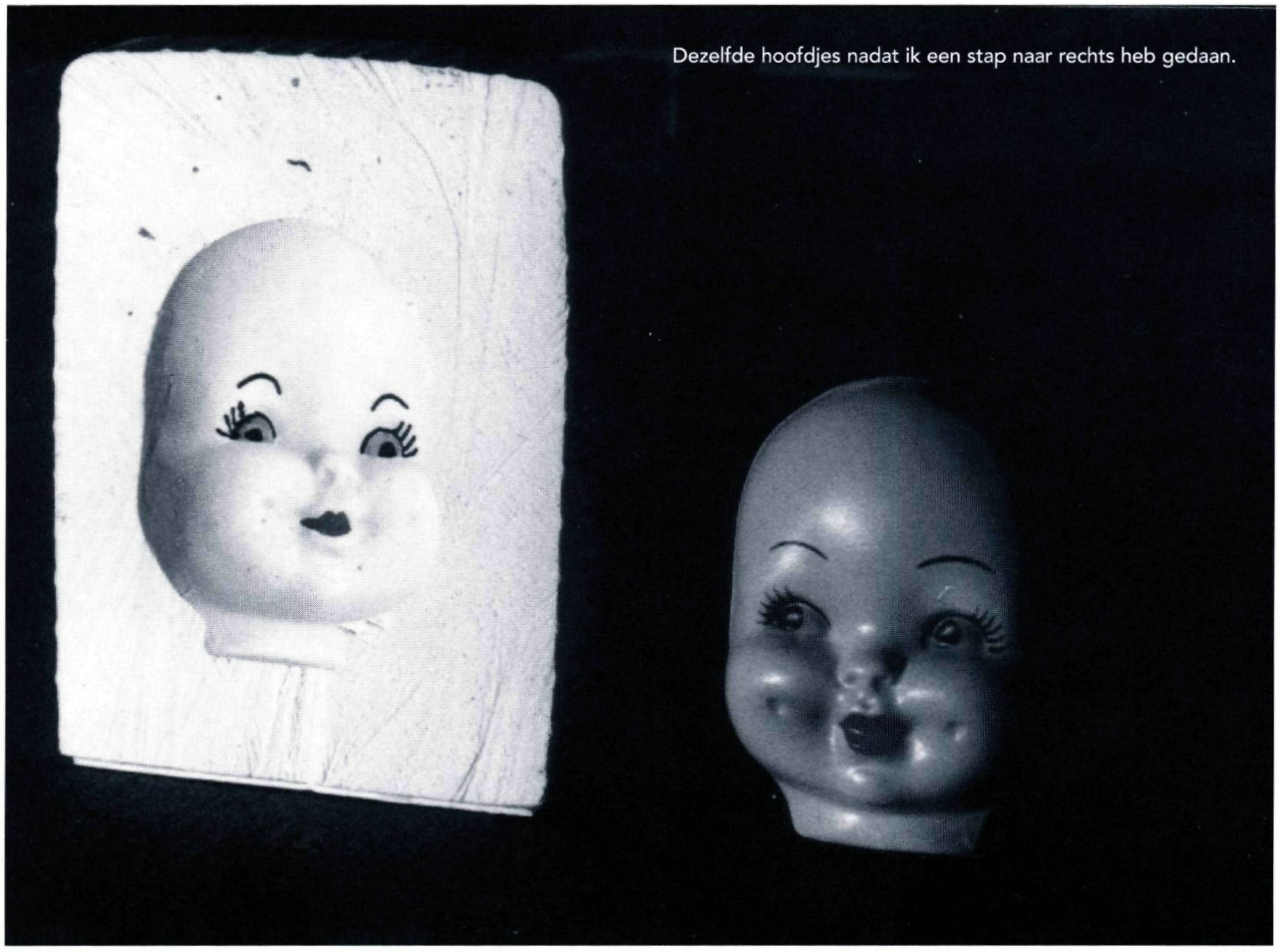
Beeld & Bedrog

Simon Biesheuvel

Hol Bol

De mooiste optische illusie die ik ooit gezien heb is een pop gemaakt van steen, die het hoofd draait als ik me beweeg. In dit geval geven de hersenen een verkeerde interpretatie van wat het oog ziet. Het vreemde is dat mijn hersenen deze fout blijven maken, ook al weet ik heel goed hoe het werkelijk in elkaar zit.

Op de eerste foto staat links het hoofdje in gips, rechts hetzelfde hoofdje, maar nu van plastic, bedoeld als voorkant van een poppenhoofd, om verder zelf af te maken. Het gipsen hoofd kijkt ons recht aan. Voor de tweede foto ben ik een stap naar rechts gaan staan. Het plastic hoofdje ziet eruit zoals je mag verwachten als je naar rechts loopt.



Dezelfde hoofdjes nadat ik een stap naar rechts heb gedaan.

Maar het gipsen hoofd is met me meegedraaid, zelfs extra veel. Het kijkt nu voor me langs. Aan de onderkant van de steen is te zien dat de steen niet gedraaid is. Onderkant steen en onderkant plastic hoofd staan nog steeds op een lijn. Hoe kan een steen zijn hoofd draaien?

Maak je eigen illusie

De verklaring is erg eenvoudig. Het gipsen hoofd is *hol*. Het is de afdruk van het hoofdje ernaast. Plak het plastic hoofd met de neus omhoog op de bodem van een plastic bakje. Vul het voorzichtig met water, onder het plastic blijft dan een luchtbel hangen. Strooi veel gipspoeder in het water en laat het geheel heel lang drogen. Als het gips goed hard is kan er aan de voorkant nog een flinke plak afgezaagd worden, het hoofd moet niet diep worden omdat dieptewerking het effect verstoord als je er met twee ogen naar kijkt. (Een fototoestel heeft geen last van diepte-inzicht).

Het meedraai-effect is het best te zien als het gipshoofd verlicht wordt vanaf de onderkant. De lamp stond linksonder. De schaduw op het gipsen hoofd is dan ook links en onder de kin. Het andere hoofdje, gewoon bol, is door deze lamp rechtsboven niet verlicht. Loop je nu voor het hoofd langs, dan draait het hoofd schijnbaar mee. Meer naar rechts kun je meer zien van de wang aan de linkerkant. In plaats van te constateren dat het hoofd hol is, vertellen je hersenen je dat de steen gedraaid is. Wat ik heel vreemd vind is dat dit zo blijft, ook als je zelf dat holle hoofd hebt gemaakt. De steen staat op mijn bureau en lopend naar mijn bureau om te gaan werken constateer ik steeds dat 'hij het nog doet'. Mijn verstand gaat er nog niet op vooruit!

André de Boer

Het getal nul

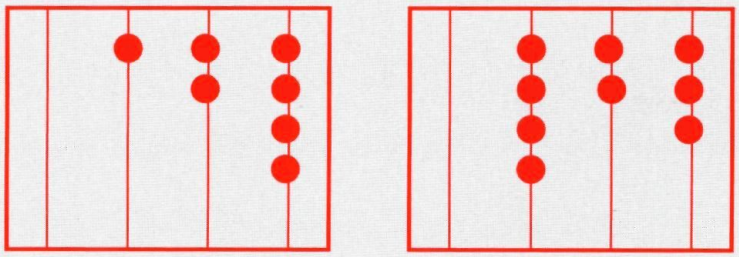
Dit jaar verschijnt er in Pythagoras een serie over bijzondere getallen en hun eigenschappen. Het eerste getal dat we behandelen is natuurlijk nul. Vreemd genoeg is de nul pas veel later ontdekt dan de andere getallen. En het heeft nog een hele tijd geduurd voordat men met dit getal overweg kon.

Vroeger gebruikte men voor de oplossing van een rekensom een telraam. Zo'n telraam bestaat uit een raampje met evenwijdige spijlen. De eerste spijl aan de rechterkant vertegenwoordigt de eenheden, de tweede spijl de tientallen, de derde spijl de honderdtallen, enzovoorts. Het aantal kralen op een spijl geeft het aantal eenheden, tientallen of honderdtallen aan.
De telramen in figuur 1 geven de getallen **124** en **423** weer. Om een getal van het telraam op het papier over te brengen, heb je niet meer dan tien tekens nodig, want elke spijl van het telraam heeft maar tien mogelijkheden: een, twee, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, negen kralen, of geen enkele kraal. Een spijl kan leeg zijn. Het tiende symbool moet het teken zijn voor een lege spijl. Anders is het immers niet mogelijk getallen die op het telraam van elkaar verschillen, op papier van elkaar te onderscheiden.
Zonder een teken voor een lege spijl zouden de standen in figuur 2 er op papier precies hetzelfde uitzien: **124**. Met dat extra cijfer kun je ze gemakkelijk onderscheiden. Het zijn: **1240, 1024** en **1204**.

Soenja

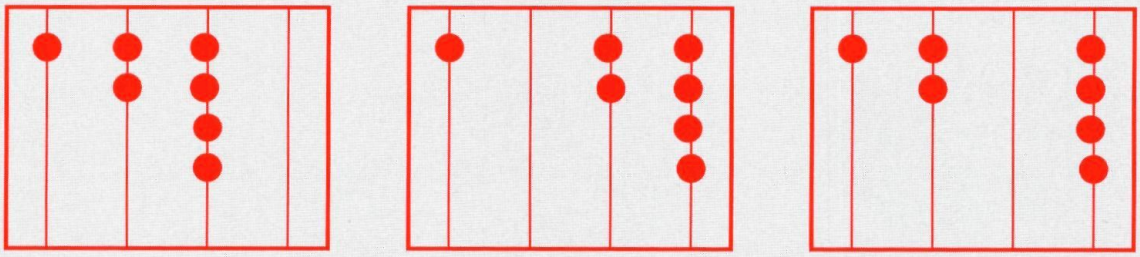
In het begin van de jaartelling schreef een onbekende Hindoe die de stand van een telraam wilde vastleggen, een symbool op voor een lege spijl, een stip die hij *soenja* noemde. Die stip was niet meer dan een bedenksel om een lege plaats te kunnen aangeven. Het woord soenja betekent leeg. Later zijn de Indiase cijfers door de Arabieren overgenomen. De grote Arabische wiskundige Al- Chwarizmi heeft in het jaar **820** een leerboek over de rekenkunde geschreven, waarin hij het gebruik van de nieuwe Indiase cijfers uitlegde. Nul werd aangeduid met het Arabische 'al-cifr'. In de twaalde eeuw introduceerde de Italiaan Fibonacci de nul in

Figuur 1
De getallen 124 en 423 weergegeven op een telraam.



Nul is een getal
Ernie: Ik heb een zeker aantal koekjes in die trommel gedaan. Je mag ze hebben als je mij je beer geeft.
Bert: Dat is erg aardig van je, Ernie, ik doe mee! Bert geeft Ernie de beer en kijkt begerig in de trommel.
Bert: Wacht eens even, Ernie, ik zie helemaal geen koekjes. Je zei dat je een aantal koekjes in de trommel zou doen.
Ernie: Klopt, Bert, nul is ook een aantal !

Figuur 2
Zonder symbool voor een lege spijl zien deze 3 standen er op papier hetzelfde uit als 124.



Europa als 'cifra', waarvan ons woord 'cijfer' is afgeleid. In het Engelse betekent 'cipher' nog steeds nul, evenals 'ziffer' in het Duits.

Rekenen met nul

Vele eeuwen nadat soenja was bedacht als symbool voor de lege spijl van het telraam, worstelde men met het probleem hoe je met nul moet rekenen. Met elk ander getal kun je naar believen optellen, vermenigvuldigen, aftrekken of delen. Wat moet je echter met de volgende rekensommen?

$0 : 1,$
$1 : 0,$
$0 : 0.$

We nemen eerst de rekensom $0 : 1$ onder de loep. Bij de deling $12 : 4$ reken je uit hoe vaak je vier moet aftrekken van twaalf totdat je niets meer overhoudt, met andere woorden, hoe vaak vier in twaalf 'past'. Het antwoord is drie keer: $12 - 4 - 4 - 4 = 0$. Bij $0 : 1$ is de vraag hoe vaak je één van nul moet aftrekken opdat je niets overhoudt. Het antwoord is: geen enkele keer. Want we hadden al nul. De som luidt dus: $0 : 1 = 0$. Bij de som $1 : 0$ ligt het iets ingewikkelder. In deze som wil je weten: hoe vaak moet je nul van één aftrekken opdat je nul overhoudt. Maar van een getal nul aftrekken levert altijd weer het oorspronkelijke getal op. Hoe vaak je er ook nul van aftrekt, je komt nooit op nul uit. De som $1 : 0$ heeft dus geen uitkomst. Delen door nul is daarom zinloos.

Opgaven

1. Wat is de uitkomst van $0 : 0$?
2. Ons cijferschrift kent 10 tekens. In de rij van deze tekens staat de nul meestal voorop. Soms komt de nul na de negen. Wat is de logica van onderstaande ordening?

$$8, 3, 1, 9, 0, 2, 4, 5, 6, 7.$$

3. Wat is de uitkomst van 1^0 en 0^1? En van 0^0?
De oplossingen kun je vinden in het volgende nummer van Pythagoras.

Bronnen
1. Constance Reid, *Van nul tot oneindig*, Prima boeken, 1965
2. David Wells, *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, uitgeverij Bert Bakker, 1987.

Meer informatie
http://ubmail.ubalt.edu/~harsham/zero/ZERO.HTM

Boeken De rekenmeester

In de derde klas van de middelbare school leer je hoe je een tweedegraadsvergelijking, dat wil zeggen, een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ moet oplossen. De oplossingen worden gegeven door de fraaie *abc*-formule.
Het kunnen oplossen van de kwadratische vergelijking is al heel oud.
De Babyloniërs (400 voor Christus) en de Arabische geleerde Al-Chwarizmi (800 na Christus) beschikten over methoden om deze vergelijking op te lossen. En dat, terwijl ze geen enkele notie hadden van het moderne algebraïsche notatiesysteem (met letters voor variabelen) zoals wij dat nu kennen.

De oude Grieken losten vierkantsvergelijkingen op met behulp van meetkundige constructies. Aan de grote wiskundige Euclides (ongeveer 300 voor Christus) werd een oplossingsmethode via een hoekoppervlak, gnomon genaamd, toegeschreven. De Grieken hadden ook al nagedacht over de volgende stap, het oplossen van de derdegraadsvergelijking (in hedendaagse notatie: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$). Voor de oplossing vonden ze constructies, waarbij snijpunten van kegelsneden een rol speelden. Maar zelfs toen de algebraïsche notatie zijn intrede had gedaan (rond 100 na Christus) duurde het nog ruim 1400 jaar voordat een *abcd*-formule werd ontdekt.

In 1494 merkte Luca Pacioli aan het eind van zijn boek *Summa de arithmetica* nog op dat het oplossen van de vergelijkingen $x^3 + mx = n$ en $x^3 + n = mx$ onmogelijk is. In de Renaissance ontdekte men dat een kubische vergelijking altijd terug te voeren is tot een van de volgende drie typen: $x^3 + mx = n$, $x^3 = mx + n$ of $x^3 + n = mx$ (m en n positieve getallen).

Men maakte dit onderscheid omdat het begrip negatief getal nog niet bestond. Een getal werd toen altijd geassocieerd met een lengte, oppervlak, inhoud of gewicht.

Nicolo Tartaglia
Het boek De Rekenmeester is een historische roman over een van mensen die ontdekte hoe je de kubische vergelijking kon oplossen. De naam van de hoofdpersoon is Nicolo Fontana, die in 1499 in het Italiaanse Brescia geboren werd. Toen hij dertien jaar was voerde het Franse leger daar een represaillemaatregel uit.
Hij werd daarbij neergesabeld en zwaar gewond aan kaak en verhemelte, maar overleefde het voorval. Gevolg was wel dat hij sindsdien stotterde. Nu is stotteren in het Italiaans tartagliare en zo verkreeg Nicolo de bijnaam Tartaglia.

Tartaglia verdiende de kost als rekenmeester te Venetië. Hij stond ten dienste van de rijke Venetiaanse kooplieden om bijvoorbeeld hun rente op kapitaal of leningen te berekenen. Maar ook hielp hij ze bij hun favoriete tijdverdrijf, gokspelletjes, om winstkansen voor te rekenen. Tartaglia gaf daarnaast ook wiskundeles over de leerstellingen van Euclides. Doordat hij erg goed in rekenen en wiskunde was, werd hij al snel een befaamd man en deed vele en goede zaken met de meeste kooplui.

Natuurlijk waren er andere rekenmeesters die dat niet konden verkroppen.
En zo kwam het dat hij door een concurrent tot een wiskundewedstrijd uitgedaagd werd. Zijn tegenstander, de rekenmeester Antonio Maria Fior, gaf Tartaglia dertig opgaven. Dat deed Tartaglia op zijn beurt ook aan Fior. De opgaven van

Fior bleken echter allemaal neer te komen op het kunnen oplossen van de derdegraadsvergelijking. En dat kon Tartaglia niet. Althans nog niet op dat moment. Na een paar weken nadenken en ploeteren, waarbij hij de gnomon als uitgangspunt nam, ontdekte hij in een race tegen de klok hoe het allemaal moest. Uiteindelijk versloeg hij Fior, die de stad halsoverkop voor altijd moest verlaten.

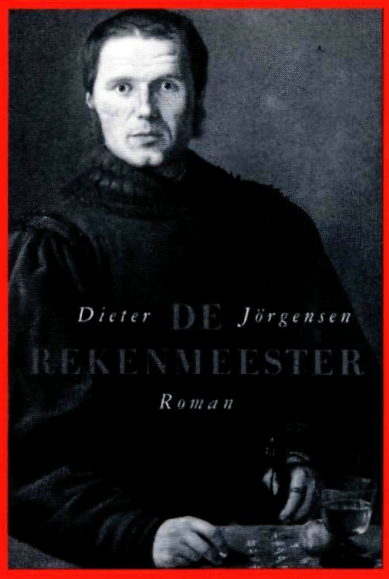
In 1539 werd Tartaglia uitgenodigd door de Milanese wiskundige en arts Girolamo Cardano. Deze stond op het punt een wiskundeboek te publiceren en wilde graag de oplossingsmethode van Tartaglia daarin opnemen. Maar dat wilde Tartaglia niet. Hij speelde met de gedachte zelf een boek schrijven en daarin zijn methode uit de doeken te doen. Uiteindelijk ontfutselde Cardano, geholpen door zijn knecht en leerling Ludovico Ferrari, toch Tartaglia's algoritme. Terwijl Cardano een heilige belofte deed deze nooit en te nimmer aan iemand te vertellen, laat staan te publiceren, deelde Tartaglia in een cryptisch versje zijn geheim mee.

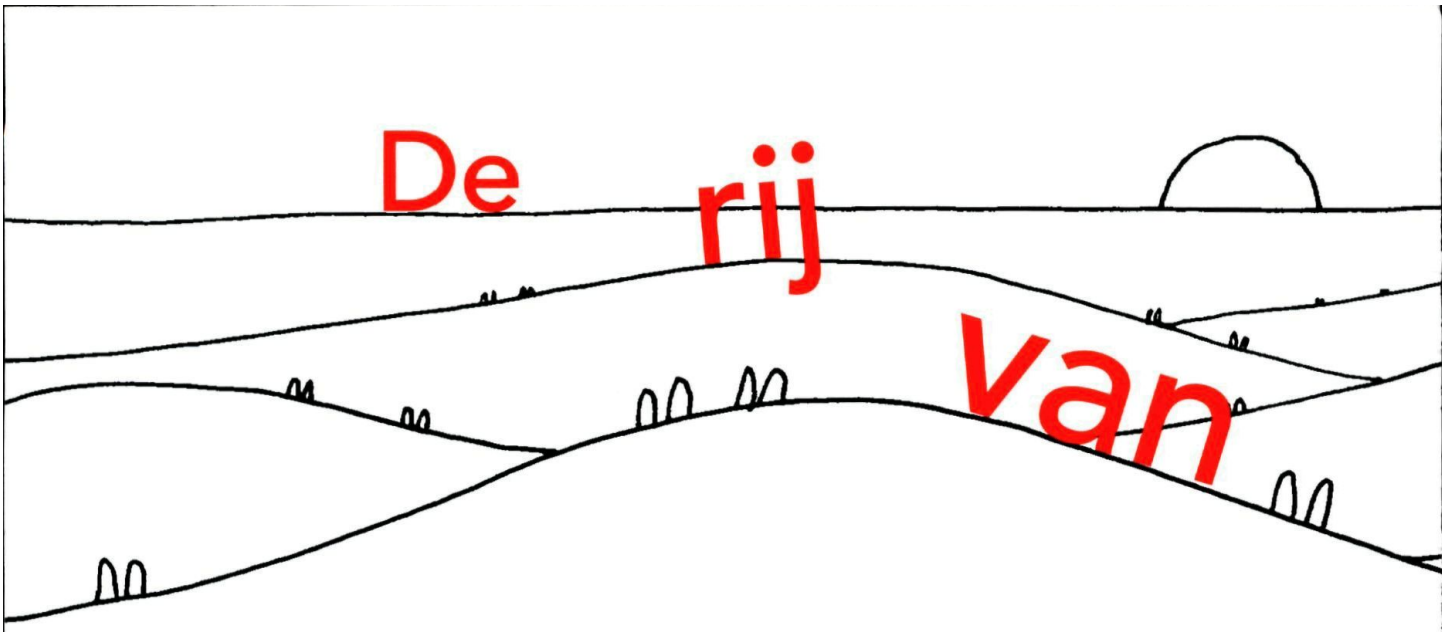
Een paar jaar later kwam Cardano er achter dat er vóór Tartaglia nog iemand was geweest die kubische vergelijkingen kon oplossen. Cardano vond dat hij daarom zijn eed mocht breken en publiceerde een boek met onder meer Tartaglia's methode. In 1547 werd Tartaglia tot overmaat van ramp nu door Ferrari tot een wiskundewedstrijd uitgedaagd. Ferrari was inmiddels Cardano als hoogleraar in de wiskunde opgevolgd en was erin geslaagd zelfs vierdegraadsvergelijkingen op te lossen. Tartaglia leed in 1548 tegen Ferrari een smadelijke nederlaag.

Niet alleen deze verwikkelingen rond de kubische vergelijkingen spelen een rol in dit boek. Tartaglia schreef nog veel meer. Bijvoorbeeld een verhandeling over schootshoeken, die in het boek een belangrijke plaats inneemt. Het boek geeft ook een schitterende impressie van het dagelijks leven in het Venetië van de Renaissance. De dialogen in het boek zijn daarop ook aangepast, hetgeen dit beeld nog eens versterkt. Het boek laat zien dat er nog heel wat voorafgegaan is aan wat je tegenwoordig met een grafische rekenmachine binnen een paar seconden oplost. Naast dit wiskundige thema is er dat van de gevoelige hoofdpersoon: ondanks zijn handicap wil Tartaglia de bewondering van de wereld afdwingen. Door toedoen van dit boek is hij daar wat mij betreft zeker in geslaagd!

Nicky Hekster

Dieter Jörgensen, *De Rekenmeester*.
Vertaald door Marjo Frings-Latour. BZZTôH, 's Gravenhage 2000.
336 pagina's, prijs fl. 39,50.
ISBN 90-5501-722-1.





De rij van

Klaas Pieter Hart

Bij wiskunde horen formules. Mooie formules vormen het onderwerp van een nieuwe rubriek in Pythagoras. Deze keer: de rij van Fibonacci, een getallenrij die al bijna 800 jaar oud is. Toch worden er nog altijd eigenschappen van ontdekt. Wij leiden een verrassende formule af die deze rij precies beschrijft.

In 1202 schreef Leonardo van Pisa een rekenboek, *Liber Abaci* geheten. Daarin beschreef hij een heleboel rekenkunde. Opmerkelijk was dat Leonardo consequent de decimale schrijfwijze toepaste; dat was in die tijd een nieuwigheid uit de Arabische wereld. Het boek is onsterfelijk geworden door deze onschuldig klinkende opgave: *Hoeveel paren konijnen kan men uit één paar in één jaar fokken?*
Een man heeft een paar konijnen in een ommuurde tuin. We willen weten hoeveel paar konijnen in één jaar gefokt kunnen worden uit dit paar, als elk paar konijnen elke maand een nieuw paar voortbrengt en wel vanaf de tweede maand na hun geboorte.
Leonardo beschreef hoe je het aantal paren konijnen in de twaalfde maand kunt uitrekenen. Neem aan dat het eerste paar al kinderen kan krijgen; dat betekent dat we in de eerste maand twee paar konijnen zullen hebben. In de tweede maand krijgt het eerste paar weer kinderen; we hebben dan drie paren. Van deze krijgen twee paren in de derde maand kinderen zodat we dan vijf paren hebben.
Zo doorgaand vinden we achtereenvolgens $8 = 5 + 3$, $13 = 8 + 5$, $21 = 13 + 8$, $34 = 21 + 13$, 55, 89, 144, 233 en 377 paren konijnen.
Deze getallen vormen het begin van de rij van Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 55, 89, 144, 233, 377,...

Het recept dat Leonardo gebruikte om de aantallen paren konijnen in elke maand uit te rekenen is eenvoudig: tel de aantallen uit de voorgaande twee maanden bij elkaar op. In een formule:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

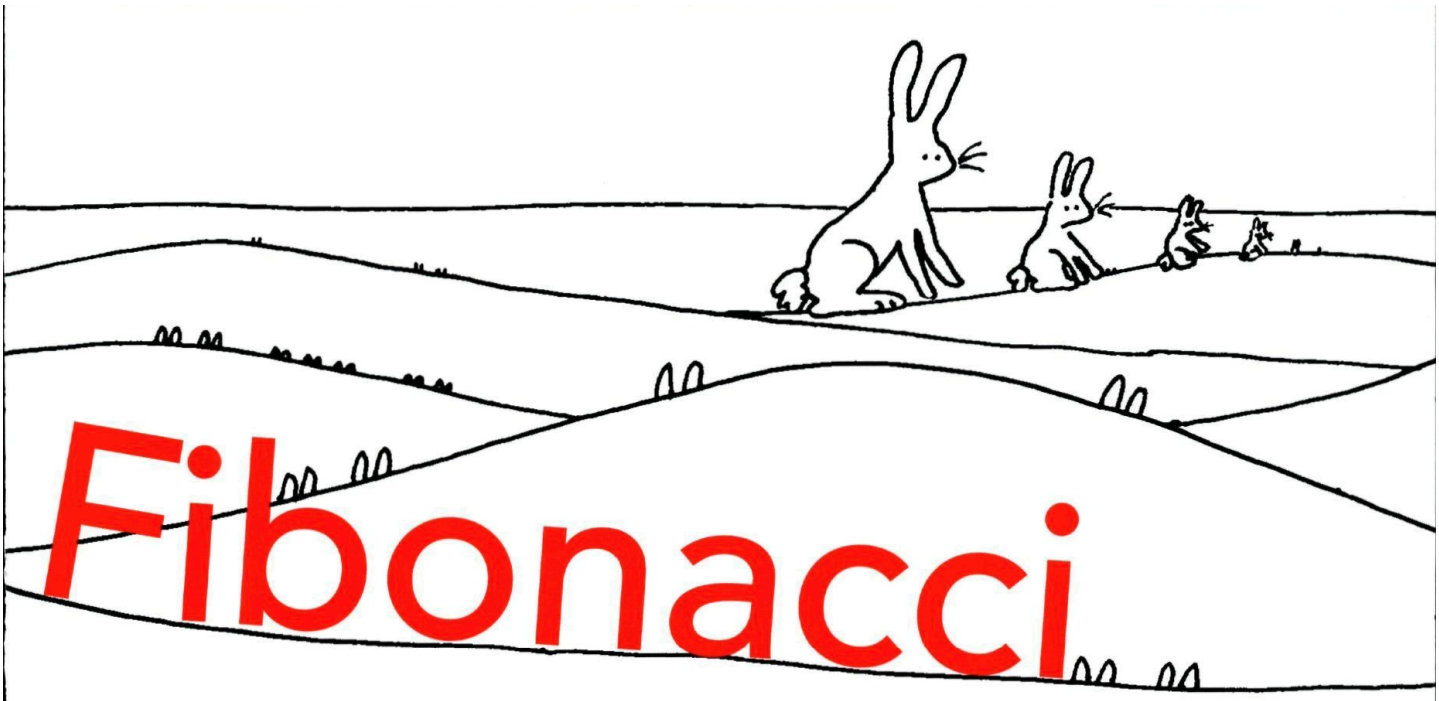
Voor een groot aantal maanden kost dit nogal wat rekenwerk. Zelfs op een rekenmachine moet je flink wat toetsen aanslaan om het aantal paren konijnen in de zevenendertigste maand te bepalen. Probeer het maar eens.

Een formule

Het is echter mogelijk om voor het aantal konijnen K_n in maand n een formule op te schrijven, namelijk:

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+2}\right).$$

Als je het niet gelooft moet je K_1 en K_2 maar eens uitrekenen. Je zult zien dat er echt 2 en 3 uit komt. Het wonderbaarlijke van deze formules is dat hij een rij *gehele* getallen beschrijft met behulp van breuken en wortels — zoiets verwacht je helemaal niet.



Fibonacci

Snel Fibonacci-getallen uitrekenen
Je kunt proberen de formule te controleren door meer waarden van n in te vullen, maar dat wordt na een tijdje vervelend. Met een beetje rekenwerk kom je er achter dat de getallen die door de formule gegeven worden aan dezelfde regel voldoen als de aantallen paren konijnen: $K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$.
We weten al dat $K_1 = 2$ en $K_2 = 3$; dus geldt ook $K_3 = 5$, $K_4 = 8$, enzovoort. Hiermee is het snel uitrekenen van K_n eenvoudig geworden.

Het getal $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ is ongeveer gelijk aan $-0{,}62$ en gedeeld door $\sqrt{5}$ is dat ongeveer $-0{,}2764$; dit betekent dat $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+2}/\sqrt{5}$ in absolute waarde altijd kleiner is dan $1/2$. Om K_n uit te rekenen hoeven we daarom alleen $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+2}/\sqrt{5}$ te bepalen en dan af te ronden. Dat zie je er aan het begin niet aan af. Bereken hiermee eens K_{37}.

Het afleiden van de formule
Onze formule voor K_n werd al in 1765 door Euler gegeven en werd in 1843 door Binet herontdekt. Eén van de manieren om de formule te vinden gaat als volgt.
Je zoekt getallen λ waarvan het rijtje machten λ, λ^2, λ^3,... aan de konijnenrelatie $K_{n+1} = K_n + K_{n-1}$ voldoet.
De vergelijking $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$ die je dan krijgt heeft drie oplossingen: één flauwe, $\lambda = 0$, en twee minder flauwe, die je krijgt door λ^{n-2} weg te delen.
Je houdt dan $\lambda^2 = \lambda + 1$ over.

Deze vergelijking heeft twee oplossingen:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{en} \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Het grappige is dat niet alleen λ_1^n en λ_2^n aan de relatie voldoen
maar ook $\lambda_1^n + \lambda_2^n$ en $10\,\lambda_1^n - 5\,\lambda_2^n$ en nog veel meer combinaties.
Het is niet moeilijk een combinatie te vinden die precies de aantallen paren konijnen beschrijft. Om het rekenwerk makkelijker te maken zoeken we getallen a en b zó dat $F_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ voldoet aan $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$. Dan geldt $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, enzovoort. Dit geeft $a + b = 0$, dus $b = -a$, en $a\lambda_1 + b\lambda_2 = 1$, ofwel $a(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$. Hieruit volgt $a = 1/\sqrt{5}$ en dus:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right).$$

Fibonacci
De rij 1, 2, 3, 5, 8, ... wordt genoemd naar Leonardo van Pisa, die de bijnaam *Fibonacci* had. Zijn vader heette namelijk Bonaccio en *filius Bonacci* werd afgekort tot Fibonacci — een bijnaam die overigens pas uit de negentiende eeuw schijnt te stammen. De Fibonacci-getallen zijn nog steeds populair; er is zelfs een wetenschappelijk tijdschrift gewijd aan deze en aanverwante getallen: *The Fibonacci Quarterly*.

OPLOSSING

vouwpuzzels

Sebastiaan Terwijn

DE TYPENDE AAP

Hoe groot is de kans dat een aap achter een typemachine Shakespeare's Hamlet produceert? En hoe groot is deze kans als je de typemachine vervangt door een computer? Hoewel beide kansen verwaarloosbaar klein zijn, zullen we laten zien dat de tweede kans toch $10^{300.000}$ maal groter is dan de eerste!

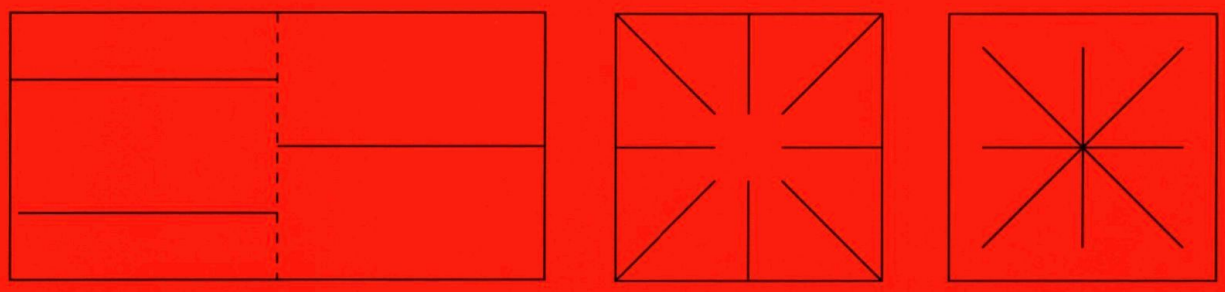
Op een typemachine

De eerste kans is makkelijk te berekenen. 'Hamlet' bevat met 30 pagina's van 2 kolommen, 80 regels per kolom en 44 tekens per regel ongeveer 200.000 tekens. We nemen aan dat de aap 100 verschillende tekens kan typen (dit is zeker voldoende voor alle gebruikelijke leestekens), en dat elk teken evenveel kans heeft om door de aap getikt te worden. De kans dat de aap het hele toneelstuk tikt is dan:

$$(1/100)^{200.000} = 10^{-400.000}.$$

Comprimeren

Om de tweede kans te berekenen moeten we eerst iets weten over coderingstheorie. Als we tekst zo compact mogelijk willen opslaan, bijvoorbeeld om geheugenruimte in onze computer te besparen of om het makkelijker per e-mail te kunnen versturen, dan is het niet erg efficiënt om de tekst ongewijzigd te laten. Geschreven natuurlijke taal is namelijk geen opeenvolging van willekeurige tekens, maar zeer gestructureerd. Bepaalde patronen komen veel vaker voor dan andere. Door configuraties die vaak optreden een korte code te geven en zeldzamere configuraties een langere kunnen we flink besparen op de totale hoeveelheid ruimte die de gecodeerde tekst gaat innemen. De beste codeerprogramma's kunnen talen zoals Engels en Nederlands ongeveer met een factor vier comprimeren! Hoe groot is nu de kans dat de aap op de computer de gevraagde pagina's tikt? Wel, hij kan er voor kiezen om gewoon op de ouderwetse manier het hele manuscript te typen, maar hij kan ook nog het volgende doen. Eerst tikt de aap een decodeerprogrammaatje in zoals we boven hebben beschreven, en vervolgens tikt hij de gecodeerde versie van Hamlet in. Zoals we hebben gezien is de lengte hiervan ongeveer een vierde van de lengte van de oorspronkelijke tekst. Het decodeerprogramma kan zeer eenvoudig zijn, en de lengte ervan mogen we wel als verwaarloosbaar klein beschouwen ten opzichte van de lengte van de eigenlijke tekst. De gevraagde kans is nu minstens: $(1/100)^{\frac{1}{4}\cdot 200.000} = 10^{-100.000}$.
Eigenlijk is de kans groter, omdat verschillende codeermethoden kunnen werken. De schrijver J. L. Borges (Labyrinths; selected stories & other writings, New Directions, New York, 1964) heeft een amusant verhaal geschreven over een bibliotheek waarin alle boeken van 410 pagina's staan die onze aap zou kunnen typen. Denk je dat deze bibliotheek in ons heelal past?



uit het Augustusnummer

De post

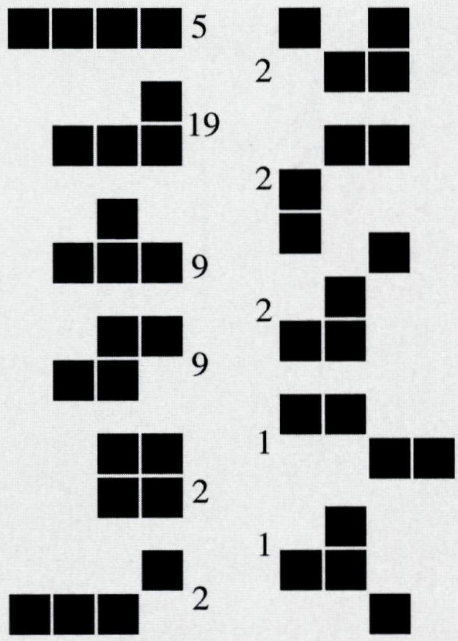
Dion Gijswijt

De kinderen van Ruud

In het novembernummer van 1993 verscheen in Pythagoras het kansrekeningprobleem 'De kinderen van Ruud'. Sinds die tijd heeft het bij de redactie voortdurend brieven geregend van lezers, die elk met hun eigen redenering en antwoord kwamen. In het vorige nummer van Pythagoras probeerde Ronald Meester om voor eens en altijd duidelijkheid in deze zaak te brengen en haarfijn uit te leggen hoe de vork precies in de steel zit. Daarmee was de kous af, dachten we... Na de publicatie van het augustusnummer ontving de redactie echter verschillende reacties van lezers die het totaal niet met de strekking van het artikel eens waren. Daarom zal Ronald Meester in een van de volgende nummers een bespreking wijden aan deze reacties, in een poging om dit verhaal tot een goed einde te brengen.

$4\frac{1}{2}$omino's

Volgens *Bram Kuijvenhoven* uit Den Haag is het aantal $4\frac{1}{2}$-omino's gelijk aan 54. Bij het tellen ging hij systematisch te werk. Eerst noteerde hij alle 'raamwerken' van vierkantjes. Zo'n raamwerk kan een quatromino zijn, een tetromino en een monomino die elkaar in een hoekpunt raken, of twee domino's die elkaar in een hoekpunt raken. In de laatste twee gevallen moet de driehoek de twee delen gaan verbinden. Vervolgens keek hij bij elk van de 11 raamwerken op hoeveel manieren een driehoek kan worden toegevoegd om een $4\frac{1}{2}$-omino te maken.

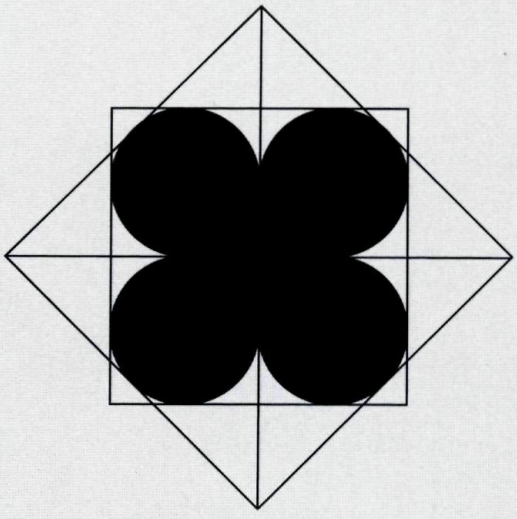


Kansberekening bij bridge

De heer *R. Gerritsen* uit Amsterdam is op zoek naar iemand om samen kans rekening toe te passen op bridge. Een voorbeeld van een op te lossen vraag is: Hoe groot is de kans dat partner aas en/of vrouw in een bepaalde kleur heeft. Reacties graag sturen naar de redactie van Pythagoras.

Klavertje vier

In 'Sangaku uit Polderland' uit het vorige nummer van Pythagoras werden twee 'meetkundige' klavertjes aan de lezer voorgelegd. De puzzel was om van de klavertjes de oppervlakte uit te rekenen. Voor het eerste klavertje was dat eenvoudig, maar het tweede klavertje was een hardere noot ... dacht Bruno Ernst en dachten ook wij. *Leo H. van den Raadt* uit Heemstede merkte iets op dat de redactie geheel was ontgaan, namelijk dat de twee klavertjes gelijkvormig zijn! Het tweede klavertje krijg je door het eerste over 45 graden te draaien.



Pentomino's

Leerlingen van het Technisch Instituut Depoorter uit Ronse (België) hebben samen met hun wiskundelerares *Odette De Meulemeester* een prachtige website over pentomino's gemaakt. Behalve originele puzzels is op deze webpagina ook een pentomino-wedstrijd te vinden. Hierbij is het de bedoeling om met de pentomino's zoveel mogelijk vierkantjes in te sluiten. Het adres is: http://home.planetinternet.be/~odettedm/startpagina.html

Neurale netwerken en Excel

Hans Engel (engel.h@12move.nl) is sterk geïnteresseerd in neurale netwerken: wiskundige netwerken die je kunt laten leren. Het schijnt mogelijk te zijn iets dergelijks te maken met Excel. Wie kan hem verder helpen? Reacties graag naar de redactie van Pythagoras, zodat wij er in de toekomst ook aandacht aan kunnen schenken.

Kleine nootjes

Hanneke is een meisje van 14 jaar, dat schrijft dat ze het heel erg jammer vindt dat de kleine nootjes verdwenen zijn. Zij vond het de leukste rubriek. Die puzzels waren niet zo ingewikkeld, zodat je ze tussendoor even kon oplossen. Ze zou het fijn vinden als de kleine nootjes weer terugkwamen. Bij deze.

Activiteiten

zondag 8 oktober 2000 **Nationale Wetenschapsdag 2000**

dinsdag 10 oktober 2000 **De Nationale Doorsnee**
Via een grootschalig meetproject, uit te voeren door leerlingen en leraren, wordt op deze dinsdag van de Wetenschap & Techniek Week antwoord gegeven op de vraag: "Wie is de gemiddelde leerling van Nederland?" Van tevoren hebben de deelnemers daar al voorspellingen over kunnen doen.
http://www.nationaledoorsnee.nl

zaterdag 28 oktober 2000 **20ste Kubusdag**
Jaarlijkse bijeenkomst van de Nederlandse Kubus Klub.
Gildeschool, Venlo
E-mail: plaataf@casema.net (Joop van der Vaart)

zaterdag 28 oktober 2000 **Studiefestival Universiteit Leiden**
http://www.leidenuniv.nl/studiesite

vrij 10 en za 11 november 2000 **Voorlichtingsdagen 5/6-vwo Universiteit Utrecht**
tel. 030-2532670
http://www.uu.nl

zaterdag 11 november 2000 **Ars et Mathesis-dag 2000**
Jaarlijkse bijeenkomst van de stichting Ars et Mathesis, onder andere gewijd aan Johann Sebstiaan Bach.
CSB-zalencentrum, Utrecht.
E-mail: A.Goddijn@fi.uu.nl

vr 17 en za 18 november 2000 **Lustrumcongres**
Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren
Educatorium, Uithof, Utrecht
http://www.nvvw.nlvrijdag

vrijdag 24 november 2000 **Open Dag Wiskunde en Natuurwetenschappen**
Universiteit Leiden
http://www.leidenuniv.nl/studiesite

vrijdag 15 december 2000
of vrijdag 20 april 2001 **Wiskunde van het geluid mastercourse**
Uva
afdeling Wiskunde/Statistiek/Natuurkunde/Sterrenkunde.
Voor docenten wis- en natuurkunde. Deze cursus biedt goede aanknopingspunten voor profielwerkstukken en practische opdrachten.
tel. 020-5255074
e-mail: kattie@wins.uva.nl (Kattie Schoot)

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.

Universiteit van Amsterdam

TU Delft

Universiteit Leiden

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855175,
per fax: 0522 855176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17,
NL- 7940 VB Meppel.

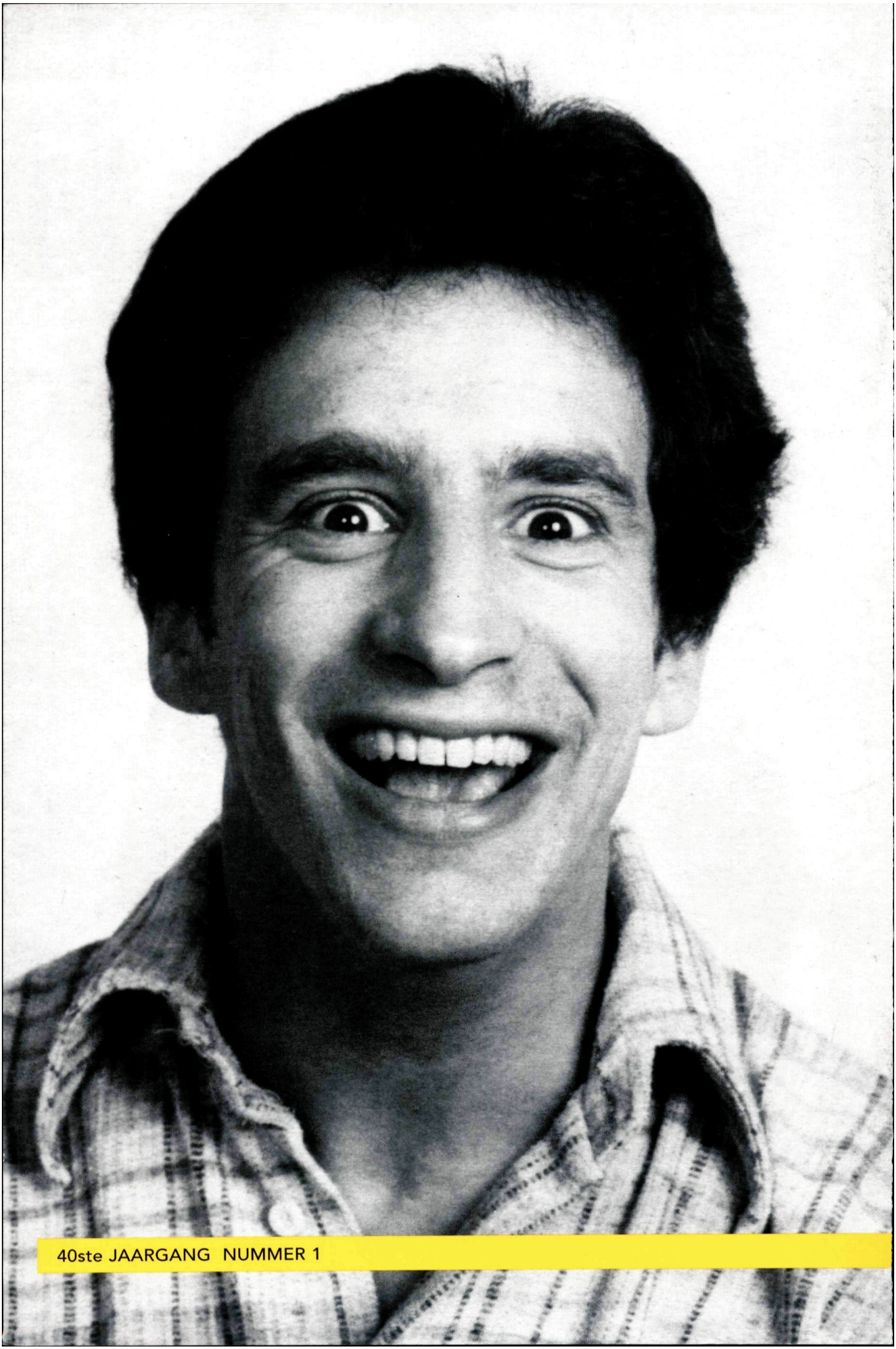
Tarieven 2000-2001
Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost ƒ 39,50. Losse nummers ƒ 8,50 of BF 160.
Overige prijzen per jaar:
Pythagoras België BF 850,
Pythagoras buitenland ƒ 54,50.
Pythagoras én Archimedes ƒ 69,50,
Pythagoras én Archimedes België BF 1470,
Pythagoras én Archimedes buitenland ƒ 83,50.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen
Voor scholen zijn er bulkabonnementen.
Prijs: f 27,50/ BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.
Prijs: ƒ 32,50 /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.
Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37, 38 en 39 (fl 25,- excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).



40ste JAARGANG NUMMER 1