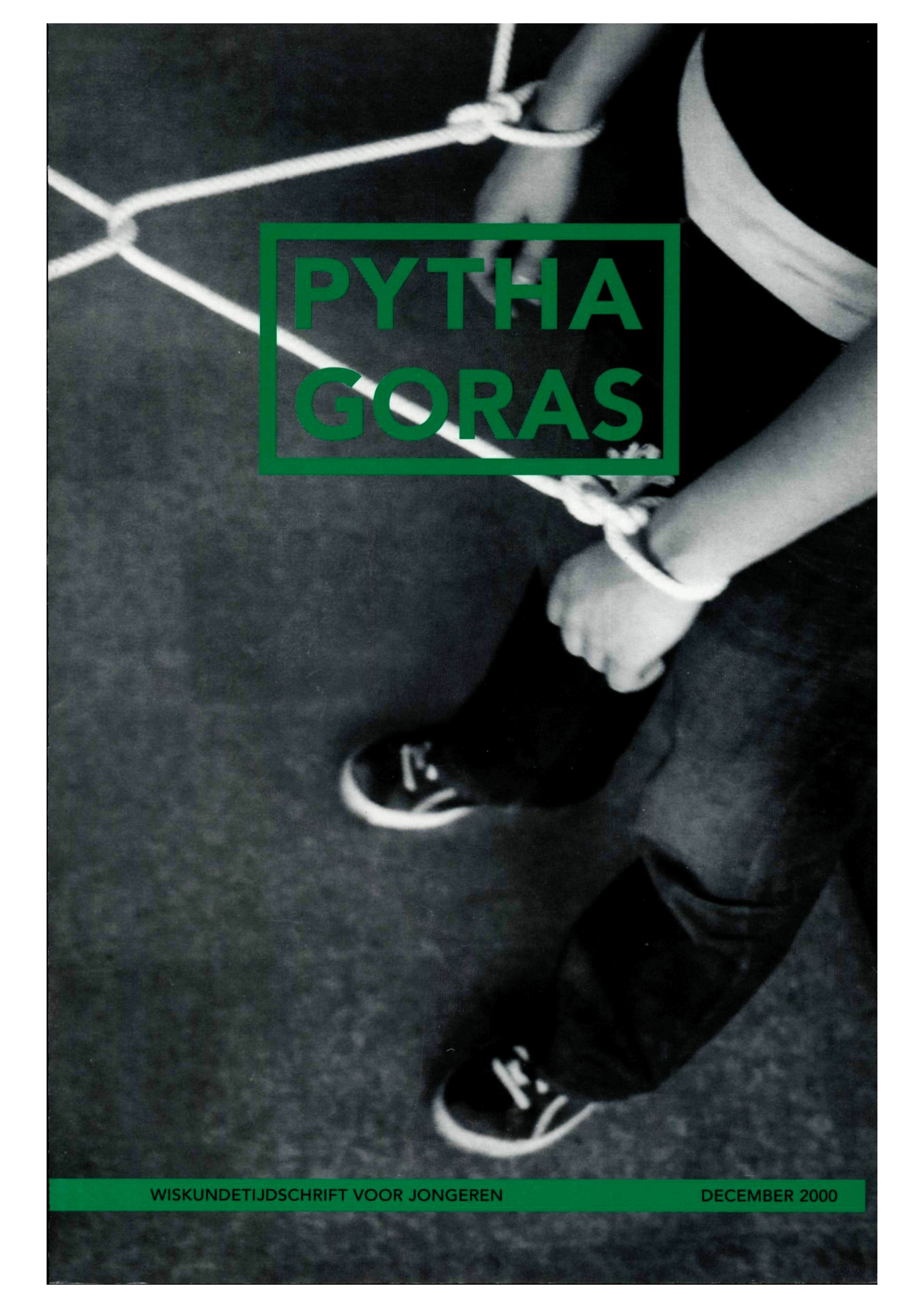




PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

DECEMBER 2000

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

WWW

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.

Nul rondjes betekent:

geen enkele wiskundige voorkennis vereist;

1 rondje ^o: voor iedereen van

af de derde klas te begrijpen;

2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je

kennis uit de vijfde of zesde

klas nodig;

3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net

iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.A.J. de Boer is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **D.A.J. Klingens** is docent wiskunde aan het Krimpenervaard College te Krimpen aan den IJssel. **drs. R. van Luijk** is PdD-student wiskunde aan UC Berkeley. **drs. M.F.M. Nuyens** is AIO kansrekening aan de UvA. **drs. W.R. Oudshoorn** is AIO algebra en meetkunde aan de UG. **R. Pannekoek** is student wiskunde en natuurkunde aan de UU. **ir. S.M. van Rijnsouw** is OIO computeralgebra aan de TUE. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wiskunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.

Inhoud



- 2 - 3 **Kleine nootjes**
- 4 - 5 **Een eitje, zo'n eitje**
- 6 - 7 **Ontsnapt!**
- 8 - 11 **Pythagoras Olympiade**
- 12 - 15 **Nim**
- 16 - 17 **Het getal twee**
- 18 - 21 **Het tellen van Sets**
- 22 - 23 **Een formule voor driehoeks-
getallen**
- 24 **Problemen**
- 25 **Oplossingen nr.1**
- 26 - 27 **Beeld en Bedrog**
- 28 - 30 **Eén en nog wat**
30 **Oplossingen: Het getal nul**
- 31 **Oplossingen:**
Kleine nootjes nr.1
- 32 **Activiteiten**

Trots presenteert Pythagoras zijn vernieuwde homepage. Niet hier, maar op Internet. Het adres is onveranderd gebleven:
<http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/>
De nieuwe site biedt, zo hopen we, meer gebruikersgemak. De site is nog niet af, maar is voortdurend in ontwikkeling. We streven er bijvoorbeeld naar bij de artikelen in het tijdschrift interactieve programma's te maken. Een voorbeeld is het Nim-applet bij het artikel op pagina 12. Veel plezier!



Internet

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes

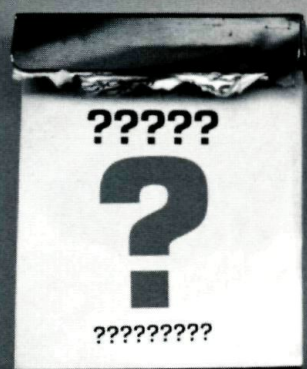
2

Tijd

Het is zesentwintig minuten voor drie in de ochtend. Het jaar is 1978 en de datum is 5 juni. Wat is er zo bijzonder aan dit tijdstip?

Maanden

Hoeveel maanden hebben 28 dagen?



Bomalarm!

De kans dat twee personen onafhankelijk van elkaar een bom in het vliegtuig smokkelen is verwaarloosbaar klein. Als je gaat vliegen is het voor je eigen veiligheid daarom verstandig een bom mee te smokkelen. Wat klopt er niet aan deze redenering?

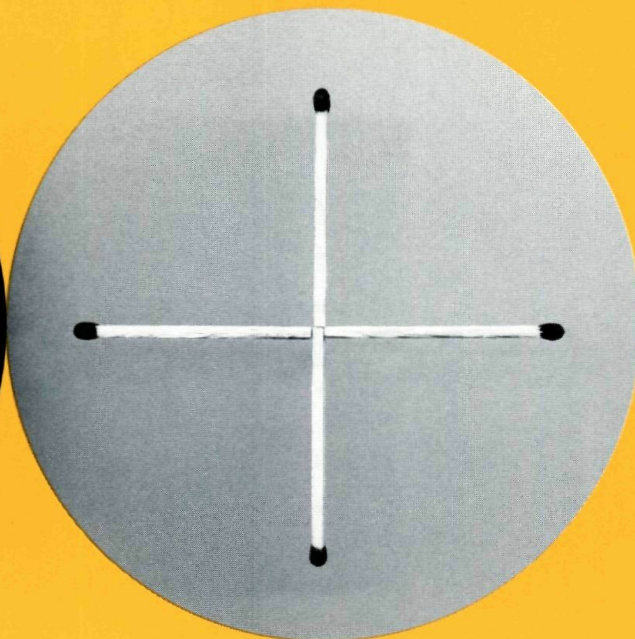


Magische bal

Bianca gooit een bal. Na een paar seconden stopt de bal, keert om en vliegt terug langs precies dezelfde weg. Hoe kan dat?

Lucifers

Leg vier lucifers neer als in de afbeelding hiernaast. Kun je door slechts één lucifer te verleggen een vierkant maken?



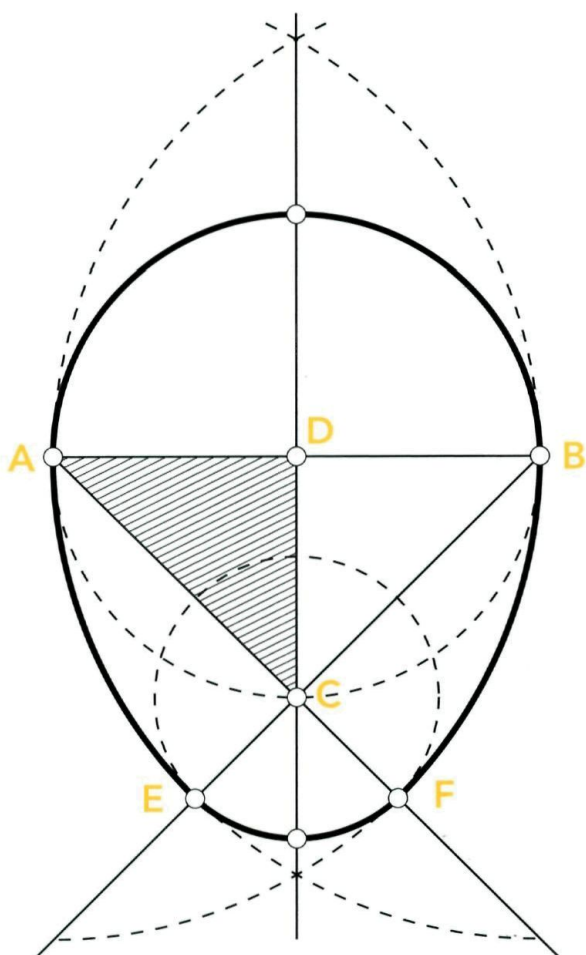
3



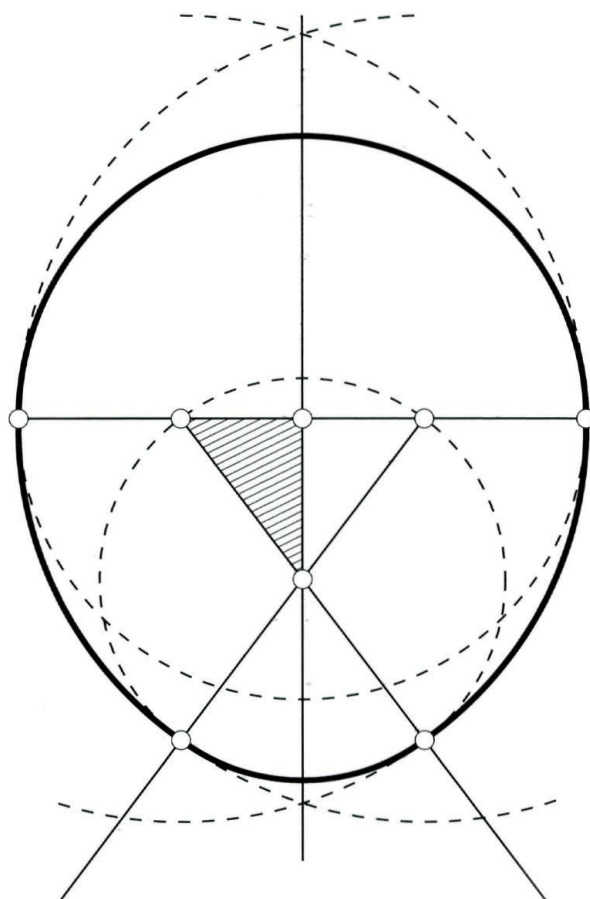
Ra Ra

Er is iets dat de doden eten, maar als de levenden het eten dan sterven ze. Ra ra, wat is dat?

Een eitje zo'n eitje



Figuur 1
De constructie van
een driepunts-ei



Figuur 2
Een ei-vorm op
basis van een
3 : 4 : 5-driehoek

Dick Klingens

In het oktobernummer van Pythagoras beschreef Bruno Ernst de constructie van een ei-vorm met behulp van een aantal cirkelbogen. Hieronder is de constructie nog eens weergegeven, samen met de constructiestappen. Alle stappen kunnen worden uitgevoerd met passer en liniaal.

Constructie driepunts-ei

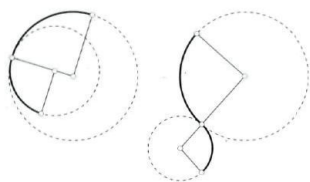
1. begin met lijnstuk AB met midden D en middelloodlijn van AB ,
2. trek cirkel (D, AD) ,
3. kies punt C willekeurig op de middelloodlijn

van AB ,

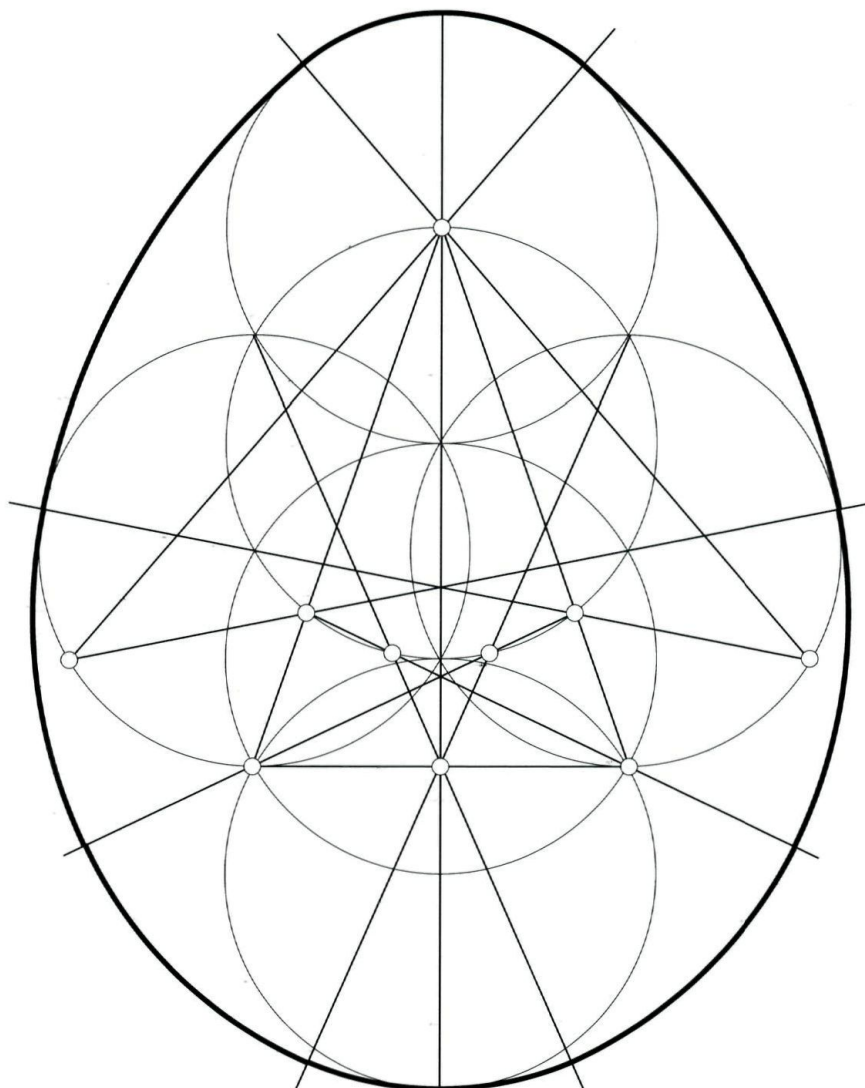
4. trek cirkel (A, AB) en cirkel (B, BA) ,
5. AC snijdt cirkel A in F , BC snijdt cirkel B in E ,
6. trek cirkel (C, CE) .

Een ei-vorm op basis van een 3:4:5-driehoek

Het ei van figuur 1 is opgebouwd uit cirkelbogen waarvan er twee, AE en BF , congruent zijn. Vanwege de symmetrie kunnen we ook zeggen, dat het ei bestaat uit drie cirkelbogen en hun spiegelbeeld in de middelloodlijn van AB . De bedoelde cirkelbogen zijn PA , AE en EQ . De middelpunten van de cirkelbogen zijn opeenvol-



Figuur 3
Hoe je twee cirkel-
bogen gladjes laat
aansluiten



Figuur 4
Een vijfpunts-ei

gend D , A en C , die de basisdriehoek van het ei vormen. We hebben een zogenaamd 'driepunts-ei'. De verhouding tussen de zijden van die driehoek bepaalt de uiteindelijke vorm van het ei. In figuur 2 is een ander driepunts-ei geconstrueerd op basis van de verhouding $3 : 4 : 5$. In de figuur staan ook enkele hulpcircels waarmee de verhouding tot stand is gekomen.

De aansluiting tussen elk tweetal cirkelbogen moet natuurlijk gladjes verlopen. Dit kan worden bereikt door telkens het middelpunt van de tweede boog te kiezen op een straal van de

eerste cirkel of op het verlengde daarvan. Zie figuur 3. Als je daarmee rekening houdt, kun je wellicht zelf ook het in figuur 4 afgebeelde vijfpunts-ei construeren.

Meer informatie Robert Dixon, *Mathographics*, Dover Publications, New York. In dit boek staat ook figuur 4.
Internet Meer over de wiskunde van het ei:
<http://chickscope.beckman.uiuc.edu/explore/eggmath/>





Ontsnapt!

Eén boef kun je met handboeien aan een centrale verwarmingsbuis vastketenen. Twee boeven kun je met twee stel handboeien aan elkaar vastmaken – de ketens van de boeien om elkaar heen geslagen. Maar als je in plaats van handboeien touwen neemt, kan een beetje slimme boef zó loskomen.

Deze goocheltruc is gebaseerd op een wiskundige puzzel. Benodigd: twee personen en twee stukken touw van 1 meter.

Kies twee vrijwilligers. Knoop de uiteinden van het ene stuk touw met lussen om de polsen van een van de vrijwilligers.

Maak de lussen zó groot, dat ze niet over de handen geschoven kunnen worden, maar maak ze niet te strak. Deze persoon is nu letterlijk geboeid. Bij het andere slachtoffer doe je hetzelfde, maar voordat je de laatste pols vastmaakt, zorg je ervoor dat je dit touw onder het touw van de andere persoon doorhaalt. Nu zijn beide personen geboeid, en zitten de boeien ook nog eens aan elkaar vast.

Los!

Je zou zeggen dat beide slachtoffers voor 100% zeker aan elkaar vastgeketend zijn. Helaas is dat niet waar. Zonder ook maar iets aan de boeien te

veranderen, kunnen beide slachtoffers van elkaar losgeraken. Niet dat ze de handboeien kwijt zijn, maar ze zijn dan in ieder geval elkaar kwijt.

Probeer het maar eens. Het kan echt, zonder ook maar iets aan de boeien zelf te veranderen.

De oplossing staat in het volgende nummer van Pythagoras. Voor de duidelijkheid: losknopen of doorknippen is dus verboden.

Rubberwiskunde

In plaats van de oplossing geven we een hint. Daarvoor heb je 'topologie' nodig. Dat is een tak van wiskunde waarbij meetkundige objecten bestudeerd worden die kunnen vervormen. In dit geval kun je doen alsof de handboeien niet van touw zijn, maar van rubber. Dan kun je een van de lussen gewoon oprekken en van de pols afschuiven. Daarna haal je het touw, waarvan nu een van de uiteinden los is, door de boeien van de ander heen, en schuift het uiteinde weer om je pols.

Los ben je!

De boeien blijven zodoende heel, ze rekken alleen een beetje op. Bij de bovenstaande manoeuvre bewegen de touwen op een bepaalde manier om elkaar heen. Kun je de touwen niet op dezelfde manier om elkaar heen laten bewegen zónder ze op te rekken?

Dan ben je ook los!

°Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 65

Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen a , b , c en d geldt: als $ab = cd$, dan is $a + b + c + d$ geen priemgetal.

Opgave 66

We definiëren bij elk natuurlijk getal n het getal

$$S(n) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$$

Bewijs dat $S(n)$ willekeurig klein wordt als het getal n heel erg groot wordt. Met andere woorden, bewijs dat $S(n)$ naar 0 gaat als n naar oneindig gaat.

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het augustusnummer. Bij de publicatie in het oktobernummer van de oplossingen van opgaven 55 en 59 is het een en ander misgegaan. Deze oplossingen drukken we daarom nogmaals af.

8

LET OP! NIEUW ADRES

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
email: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 januari 2001. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftentwintig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt! Hieronder volgen de oplossingen van de opgaven uit het juninummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en
Allard Veldman.

Opgave 61

Bepaal alle functies $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die voldoen aan $f(x) = f(x^2 + x + 1)$ en:

1. de functie is even, dat wil zeggen $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$, of:
2. de functie is oneven, dat wil zeggen $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$.

Let op, dit zijn dus eigenlijk twee opgaven!

Oplossing. We leiden eerst een hulpstelling af. Als voor a en b geldt dat $a + b + 1 = 0$, dan is $f(a) = f(b)$.
Bewijs:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a^2 + a + 1) \\ &= f((-1-b)^2 + (-1-b) + 1) \\ &= f(1 + 2b + b^2 - 1 - b + 1) \\ &= f(b^2 + b + 1) \\ &= f(b). \end{aligned}$$

We doen nu het eerste deel van de opgave. In dat geval weten we dat $f(x) = f(-x)$ voor alle x . Toepassen van deze voorwaarde en de zojuist afgeleide hulpstelling, levert dat $f(x) = f((-x) - 1) = f(x + 1)$ voor alle x . Daaruit volgt dat de functie constant is. Omdat alle constante functies even zijn, vormen deze de oplossingen van onderdeel 1.

Nu het tweede onderdeel. In dat geval weten we dat $f(x) = -f(-x)$ voor alle x . Dan is $f(0) = -f(-0)$, zodat $f(0) = 0$. Op de zelfde manier redenerend als in het vorige geval vinden we dat $f(x) = f(-x - 1) = -f(x + 1)$ voor alle x . Hieruit volgt dat f overal gelijk is aan 0. De enige oplossing van deel 2 is dus de nul-functie (de functie die voor alle x de waarde 0 oplevert).

Deze opgave werd opgelost door: Jan Maas, Aloysius College te Den Haag, Jan Tuitman, Praedinius Gymnasium te Groningen. De boekenbon gaat naar Jan Maas.

Opgave 62

Een schaakbord is volledig overdekt met dominostenen. Elke dominosteen overdekt precies 2 vakjes van het schaakbord. Elk vakje van het schaakbord is door precies een dominosteen overdekt. De dominostenen waarvan de lange kant parallel ligt aan de onderste kant van het bord noemen we horizontaal. Bewijs dat het aantal horizontale stenen waarvan het linker vakje zwart is, gelijk is aan het aantal horizontale stenen waarvan het linker vakje wit is.

Oplossing. Nummer de vakjes van het schaakbord als volgt, het vakje linksonder is zoals gebruikelijk zwart.

0	1	-2	3	-4	5	-6	7
0	-1	2	-3	4	-5	6	-7
0	1	-2	3	-4	5	-6	7
0	-1	2	-3	4	-5	6	-7
0	1	-2	3	-4	5	-6	7
0	-1	2	-3	4	-5	6	-7
0	1	-2	3	-4	5	-6	7
0	-1	2	-3	4	-5	6	-7

Horizontale stenen waarbij het linker vakje zwart is bedekken twee vakjes waarvan de som -1 is. Horizontale stenen waarnij het linkervakje wit is bedekken twee vakjes waarvan de som $+1$ is. Het is duidelijk dat verticale stenen twee vakjes bedekken waarvan de som 0 is. Als er z horizontale stenen zijn waarbij het linker vakje zwart is, w waarbij het linker vakje wit is en v verticale stenen, dan is de totale som van de bedekte vakjes $-1 \times z + 1 \times w + 0 \times v = w - z$. De totale som van alle vakjes is 0 . Als dus het schaakbord volledig bedekt is met stenen, dan geldt $w - z = 0$, zodat $w = z$.

Deze opgave werd opgelost door: Jan Tuitman Praedinius Gymnasium te Groningen. De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Opgave 55

Beantwoord de volgende twee vragen voor de positieve reële getallen x, y en z .
Als $x + y + z \geq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3?$$

Als $x + y + z \leq 3$, is dan altijd:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3?$$

Oplossing. Het antwoord op de eerste vraag luidt: nee. Kies bijvoorbeeld $x = 1/2$ en $y = z = 5/4$. Dan is inderdaad $x + y + z \geq 3$, maar

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{18}{5} > 3$$

Het antwoord op de tweede vraag is wel positief. Om dat te bewijzen maken we gebruik van de volgende handige ongelijkheid. Voor elke positief reëel getal a geldt:

$$a + 1/a \geq 2.$$

Je kunt dit als volgt bewijzen. Om te beginnen geldt dat: $(a - 1)^2 \geq 0$.
Haakjes wegwerken en delen door a geeft dan:

$$a - 2 + 1/a \geq 0.$$

Nu de opgave. We kunnen de volgende reeks ongelijkheden opschrijven:

$$\begin{aligned} & 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ & \geq (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ & \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \\ & \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9. \end{aligned}$$

Voor de laatste stap gebruiken we de ongelijkheid die we hierboven noemden. Links en rechts door 3 delen geeft de gevraagde ongelijkheid.

Deze opgave werd opgelost door:
Jan Maas, Aloysius College te Den Haag,
René Pannekoek, H. Verdonk, Jan Tuitman,
Praedinius Gymnasium te Groningen.
De boekenbon gaat naar Jan Maas.

Opgave 59

Hoeveel priemgetallen zijn er die, geschreven in het tientallig stelsel, alleen bestaan uit nullen en enen, die elkaar steeds afwisselen. Ze zien er dus uit als 101010...

Oplossing. Een getal dat eindigt op een nul is nooit een priemgetal. Neem een getal S dat voldoet aan de voorwaarden. We kunnen S dan schrijven als:

$$S = 1 + 100 + 100^2 + 100^3 + \dots + 100^k,$$

met k oneven. Deze som kunnen we sommeren met behulp van de volgende truc. In de som $100S - S$ vallen bijna alle termen weg, we houden alleen $100^{k+1} - 1$ over. Dus:

$$\begin{aligned} S &= \frac{100^{k+1} - 1}{99} \\ &= \frac{\left(100^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 - 1}{99} \\ &= \frac{\left(100^{\frac{k+1}{2}} - 1\right)\left(100^{\frac{k+1}{2}} + 1\right)}{99}. \end{aligned}$$

Voor $k > 1$ zijn beide factoren in de teller groter dan 99. Dan is S dus geen priemgetal, want ook nadat 99 is weggedeeld blijven er twee factoren over die groter zijn dan 1. In het geval $k = 1$ is $S = 101$, en dat is inderdaad een priemgetal. Het geval $k = 0$ levert $S = 1$ op, en dat is geen priemgetal. De enige oplossing is dus $S = 101$.

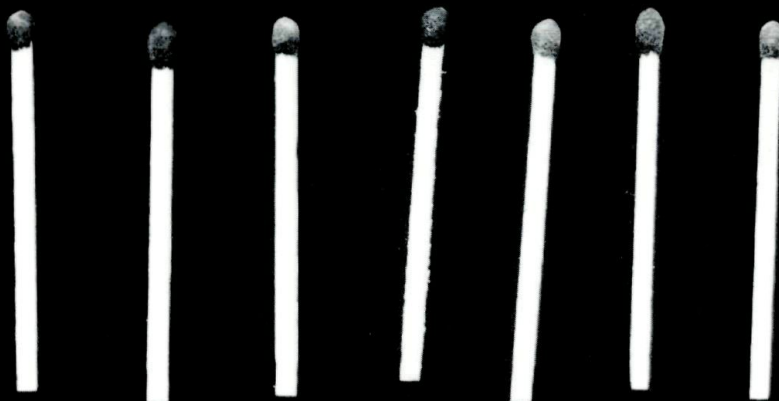
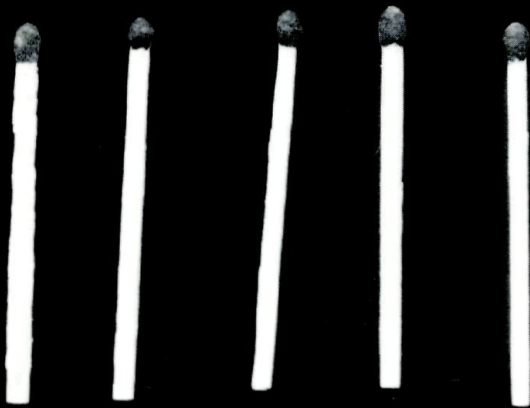
Deze opgave is opgelost door:

Jan Tuitman, Praedinius Gymnasium te Groningen, H. Verdonk te Den Haag en Peter Deleu, Hulste (België).
De boekenbon gaat naar Jan Tuitman.

Eindstand 1999 – 2000

Op de eerste plaats eindigt Jan Tuitman van het *Praedinius College* te Groningen. Hans Verdonk deelt de tweede plaats met Jan Maas van het *Aloysiuscollege* te Den Haag. Op plaats 3 staat Peter Deleu. Plaats 4 wordt gedeeld door Jim Kasteel en René Pannekoek. Martijn van der Schans van het *Farel College* te Ridderkerk bezet de vijfde plaats. Zie de homepage van Pythagoras voor de complete eindstand. De boekenbonnen van 250, 200 en 150 gulden gaan naar respectievelijk Jan Tuitman, Jan Maas en Martijn van der Schans. Hartelijk gefeliciteerd.

Nim



Figuur 1

Dit schooljaar is het thema van Pythagoras: spelletjes. Niet zomaar spelletjes, maar spellen met een wiskundig karakter. In het vorige nummer hebben eenvoudige luciferspelletjes behandeld. Nu een ingewikkelder luciferspel: Nim!

Op tafel leg je onder elkaar vier rijtjes lucifers neer, van 1, 3, 5 en 7 lucifers elk.

Om en om nemen de twee spelers uit één rijtje een of meer lucifers weg.

Verliezer is degene die de laatste lucifer wegneemt.

Dit is het spel Nim. Je moet altijd dus minstens één lucifer wegnemen, en de lucifers die je per zet wegneemt, moeten uit één rijtje komen.

Dit spel kun je overal spelen: thuis, op school of op internet – op de homepage van Pythagoras. Probeer maar eens van het computerprogramma te winnen dat je daar vindt. Je zult zien dat het niet meevalt. Dit is het adres:

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/interactief

De start van het Nim-spel

Leg 16 lucifers neer zoals in figuur 1 (zie linker pagina), maak vier rijtjes van 1, 3, 5, en 7 lucifers.

Om beurten nemen de spelers uit een rijtje naar keuze één of meer lucifers weg.

Degene die de laatste lucifer pakt verliest.

Onderzoek

Net als bij de luciferspelletjes in het oktobernummer kunnen de spelsituaties van Nim ingedeeld worden in gewonnen en verloren posities. Een positie is *gewonnen* als je door verstandig spel *altijd* kan winnen. Een positie is *verloren* als je, bij verstandig tegenspel, altijd verliest, *welke* zet je ook doet.

Het indelen van spelposities doe je van achteren naar voren. De simpelste spelpositie is die van één lucifer. Die is verloren voor degene die aan zet is, want je móet een lucifer wegnemen. De een-na-simpelste positie is een rijtje met twee of meer lucifers. Door op één na alle lucifers weg te nemen, breng je de tegenstander in een verloren positie. Dit is dus een

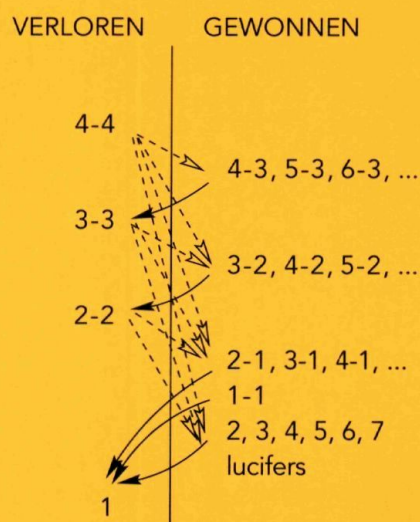
gewonnen positie. Samenvattend: 1 lucifer: verloren, 2 of meer lucifers op een rij: gewonnen (voor degene aan zet).

Twee rijtjes

We bekijken nu spelposities met twee rijtjes. De eerste die je tegenkomt is de 1-1-positie, twee rijtjes van elk 1 lucifer. Dan is er maar één zet mogelijk en blijft 1 lucifer over, een verloren positie. De 1-1-positie is dus gewonnen. Daarna komt de 2-1-positie. Daarin kun je het langste rijtje helemaal wegnemen – de 2-1-positie is dus ook gewonnen. Hetzelfde kun je doen met de 3-1-, 4-1-, 5-1-, 6-1 en 7-1-positie, die zijn ook gewonnen.

Dan de 2-2-positie. Die is verloren, want zowel de 2-1-positie als de 2-0-positie is gewonnen. De 3-2-positie is gewonnen (neem 1 lucifer weg uit het rijtje van 3). De 3-3-positie weer verloren. We vatten alles voor je samen in figuur 2.

Het patroon in figuur 2 is duidelijk. Twee rijtjes met verschillende aantallen zijn gewonnen. Rijtjes met gelijke aantallen lucifers zijn verloren. De enige uitzondering hierop is de 1-1-positie, die gewonnen is.



Figuur 2. Gewonnen en verloren Nim-posities in een schema. De getrokken pijlen winnen. Alle gestippelde zetten verliezen.

Alle posities

Het is een leuke opgave om van alle mogelijke Nim-posities te uit te zoeken of ze gewonnen of verloren zijn. Als je dat doet, zul je bijvoorbeeld ontdekken dat de posities 1-2-3, 1-4-5 en 2-4-6 verloren zijn. Dit zijn veelvoorkomende spelposities.

Als je alles goed uitrekent, vind je ook dat de startpositie 1-3-5-7 *verloren* is.

Als je Nim speelt moet je dus altijd als tweede beginnen. Het Java-applet op de homepage moet je dus zó instellen, dat de computer begint (en degene die de laatste lucifer trekt verliest). Alleen zo kun je winnen! Maar als je een foutje maakt, breng je de computer in een winnende positie en ben je verloren!

Hoe weet de computer nu of een positie gewonnen of verloren is? Dat kan door alle posities een voor een in te voeren in een tabel. Maar het programma van de Java-applet op de homepage doet dat anders! Die *berekent* de aard van een positie. Hoe? Dat gaan we nu uitleggen.

Nim-sommen

Er is een wiskundige theorie die van elke mogelijke positie voorspelt of de positie gewonnen of verloren is. Daarvoor moeten de aantallen lucifers in elke rij geschreven worden als binaire getallen.

Deze theorie werkt als volgt. Schrijf de aantallen lucifers in elk rijtje als binaire getallen. De binaire schrijfwijze is een manier om getallen te noteren. In binaire notatie wordt het getal 7 geschreven als 111, omdat $7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1$.

Hoe je van een getal de binaire schrijfwijze vindt, lees je in het stukje 'Het getal twee' op pagina 16.

Zet de getallen van de aantallen lucifers in binaire schrijfwijze onder elkaar, de 1-tallen onder de 1-tallen, de 2-tallen onder de 2-tallen, de 4-tallen onder de 4-tallen, enzovoort. Tel de cijfers in elke kolom bij elkaar op. De uitkomst heet de 'Nim-som' van de positie. Zie figuur 3. Een Nim-som heet even als alle cijfers in de som even zijn, anders heet de Nim-som oneven.

Even Nim-som	Oneven Nimsom
1 = 1	1 = 1
3 = 11	2 = 10
5 = 101	5 = 101
7 = 111 +	5 = 101 +
224	213

Figuur 3. De 1-3-5-7-positie heeft een 'even' Nim-som, de 1-2-5-7-positie is 'oneven' omdat niet alle cijfers in de Nim-som even zijn.

Een andere spelregel

Grofweg is nu de regel dat de even posities verloren zijn, en de oneven posities gewonnen. Dat klopt niet helemaal, vanwege de spelregel dat degene die de laatste lucifer pakt het spel verliest.

Als we deze spelregel veranderen, wordt de theorie mooier.

We veranderen de spelregels: we gaan er even vanuit dat degene die de laatste lucifer pakt het spel wint. De regel is dan dat posities met even Nim-som verloren zijn, en posities met oneven Nim-som gewonnen. Bijvoorbeeld, de posities uit figuur 4 hebben even Nim-som, en zijn daarom allemaal verloren.

1 = 1	1 = 1	2 = 10
2 = 10	4 = 100	4 = 100
3 = 11 +	5 = 101 +	6 = 110 +
22	202	220

Figuur 4. Drie veelvoorkomende posities met even Nim-som. Die zijn dus verloren.

Stellingen

De volgende stellingen verklaren het verband tussen het even/oneven en het gewonnen/verloren zijn van een stelling.

Stelling 1. De verliezer van het spel eindigt met een even positie (0-0-0-0).

Stelling 2. Een even positie wordt altijd veranderd in een oneven positie (nimmer in een even positie).

Stelling 3. Elke oneven positie kan met een geldige zet altijd in een even positie veranderd worden.

Het bewijs van deze stellingen is niet zo moeilijk. Daarvoor moet je gewoon goed kijken wat er met een Nim-som gebeurt als je uit een rijtje een aantal lucifers wegneemt.

Als je 'oneven' vertaalt in 'winnend' en 'even' in 'verliezend', zeggen Stelling 2 en 3 precies dat je vanuit een verloren positie altijd op een gewonnen positie uitkomt, en dat er vanuit een gewonnen positie altijd een zet is die een verloren positie oplevert.

Hoe te winnen

Voor de oorspronkelijke spelregel hoeven we de theorie maar een beetje aan te passen: de oneven posities zijn gewonnen en even posities zijn gewonnen, met als enige *uitzondering* de posities 1-1 en 1-1-1 (die winnend zijn) en 1 en 1-1-1 (verliezend). Op deze manier kun je van iedereen winnen, bijvoorbeeld van het Java-applet op de homepage. Omdat de beginpositie 1-3-5-7 even is en dus verloren, moet je de ander laten beginnen. Wat die ook doet, het levert altijd een oneven, dus gewonnen positie voor jou op. Bijvoorbeeld, als je tegenstander twee lucifers wegneemt uit het rijtje met vijf, krijg je de 1-3-3-7-positie voor je. De Nim-som hiervan is 134. Die kun je even maken door 6 lucifers uit de rij van 7 weg te nemen. De 1-1-3-3-situatie die dit oplevert is even, dus verloren. Zo ga je door, en win je gegarandeerd! Let aan het eind alleen even op de posities 1, 1-1, 1-1-1 en 1-1-1-1.

Nim-varianten

Op Internet kun je verschillende Nim-varianten aantreffen: vaak met drie of meer rijtjes, en met meer lucifers. De hierboven gepresenteerde theorie werkt natuurlijk altijd, het maakt niet uit met welke positie je begint. Probeer het maar

eens. Het is in ieder geval een goede oefening in binair rekenen!

Opdrachten

1. Hoeveel Nim-posities zijn er in totaal?
2. Hoeveel posities zijn gewonnen (oneven) en hoeveel zijn verloren (even)?
3. Maak een schema van alle gewonnen en verloren posities, mét de winnende zetten.
4. Bewijs Stelling 2 en 3.

Interactief

<http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/interactief/>

Meer informatie

1. Charles L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics, Series 2, Vol. 3, p. 35-39, 1901-1902.
2. Dr. Fred Schuh, *Wonderlijke problemen, leerzaam tijdverdrijf door puzzle en spel*, 2e druk, p. 111-122, W.J.Thieme & Cie, Zutphen.
3. Martin Gardner, *Nim and Tac Tix*, in: Mathematical Puzzles and Diversions, Simon and Schuster, 1959.



Het getal



16

De oude Grieken betwijfelden of 2 wel een getal was, aangezien het een begin en een einde, maar geen middenstuk heeft. In ieder geval is twee een bijzonder getal, al was het maar omdat $2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2$.

Je kunt 2 ook schrijven als 10. Twee is namelijk 10 in het tweetallige of binaire stelsel. In dit stelsel wordt een getal met slechts 2 symbolen geschreven, een 0 of een 1. Een getal is dan bijvoorbeeld 101. Om te weten hoe groot dit getal is in het gebruikelijke tientallige stelsel reken je de volgende som uit:

$$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5.$$

Om aan te geven dat het getal uit het tweetallig stelsel komt hangt men vaak een 2 onder het getal: $101_2 = 5_{10}$. Op precies dezelfde manier rekenen we in het ons bekende 10-tallige stelsel:

$$144_{10} = 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Halveren

Een handige manier om de binaire notatie

van een getal te vinden is herhaaldelijk halveren totdat je op 1 stuit. De helft van een oneven getal ronden we dan af naar beneden. Als het getal oneven is schrijven we een 1 en als het even is een 0. Laten we bijvoorbeeld de binaire notatie van 27 berekenen:

27	1
13	1
6	0
3	1
1	1

We concluderen dat 27_{10} gelijk is aan 11011_2 .

Twee tot de macht nul

Dat $2^0 = 1$, klinkt misschien erg vreemd, maar wordt aanvaardbaar als je naar onderstaand rijtje kijkt:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2 \times 2^2 = 8, \\ 2^2 &= 2 \times 2^1 = 4, \\ 2^1 &= 2 \times 2^0 = 2, \end{aligned}$$

Hieruit moet dan wel volgen dat $2^0=1$.

Dit geldt natuurlijk niet alleen voor twee, maar voor elk getal.

Getalstelsels

Aan elk getalstelsel kleven voor- en nadelen. In het tientallig stelsel wordt een getal beknopter dan in het tweetallig stelsel doordat het grondtal zoveel groter is. Maar bij het tweetallige stelsel worden getallen met een geringer aantal verschillende symbolen genoteerd. De binaire notatie is heel nuttig voor computers omdat die het gemakkelijkst zijn te bouwen uit componenten die twee toestanden hebben: aan of uit, vol of leeg. Hetzelfde principe maakt dat de binaire notatie ideaal is voor de codering van langs een draad te versturen boodschappen. De 1 en 0 worden dan voorgesteld door het aan- en uitschakelen van de stroom.

Boerenvermenigvuldiging

Lang voor de uitvinding van de computers voerden de Egyptenaren vermenigvuldigingen uit door zo vaak te verdubbelen als nodig was en dan de resultaten op te tellen. Om bijvoorbeeld het produkt van 27 en 45 uit te rekenen schrijf je die twee getallen naast elkaar. Halveer de eerste kolom net zolang totdat je op 1 uitkomt. Rond net als boven naar beneden af als het getal oneven is. In de andere kolom voer je steeds een verdubbeling uit. Als er in de linkerkolom een even getal verschijnt schrijf je de verdubbeling in de rechterkolom op met een sterretje. Uiteindelijk tel je de getallen zonder sterretje in de rechterkolom op.

$$\begin{array}{r}
 27 \quad 45 \\
 13 \quad 90 \\
 6 \quad 180^* \\
 3 \quad 360 \\
 1 \quad 720 \quad + \\
 \hline
 1215
 \end{array}$$

Dat wil zeggen, $45 + 90 + 360 + 720 = 1215$. Inderdaad is dit gelijk aan 27×45 , reken maar na!

De werking van deze 'boerenvermenigvuldiging' kan met het tweetallig stelsel worden

verklaard. De opeenvolgende halveringen van 27 herleiden dit getal tot de tweetallige schrijfwijze. De opeenvolgende verdubbelingen van 45 zijn nu vermenigvuldigingen met de in 27 voorkomende machten van twee. Kijk maar!

$$\begin{array}{ll}
 1 = 2^0 = 1 & 1 \times 45 = 45 \\
 1 = 2^1 = 2 & 2 \times 45 = 90 \\
 0 = 0 & 0 \times 45 = 0 \\
 1 = 2^3 = 8 & 8 \times 45 = 360 \\
 1 = 2^4 = 16 & 16 \times 45 = 720 + \\
 & \hline
 27 & 27 \times 45 = 1215
 \end{array}$$

Opgaven

1. Wat is de binaire notatie van 30?
2. In het tweetallig stelsel heb je maar twee symbolen: 0 en 1. De uitkomst van de reksommen $0_2 + 0_2 = 0_2$, $1_2 + 0_2 = 1_2$ liggen dan ook voor de hand. Maar wat is de uitkomst van $1_2 + 1_2$ en $1_2 \times 1_2$?
3. Tel op in het tweetallig stelsel: 11101 en 1111.
4. Vermenigvuldig in het tweetallig stelsel: 11011×101101 . Wat is de waarde in het tientallige stelsel?

De oplossingen kun je vinden in het volgende nummer van Pythagoras. De oplossingen van de vorige keer staan op pag. 28.

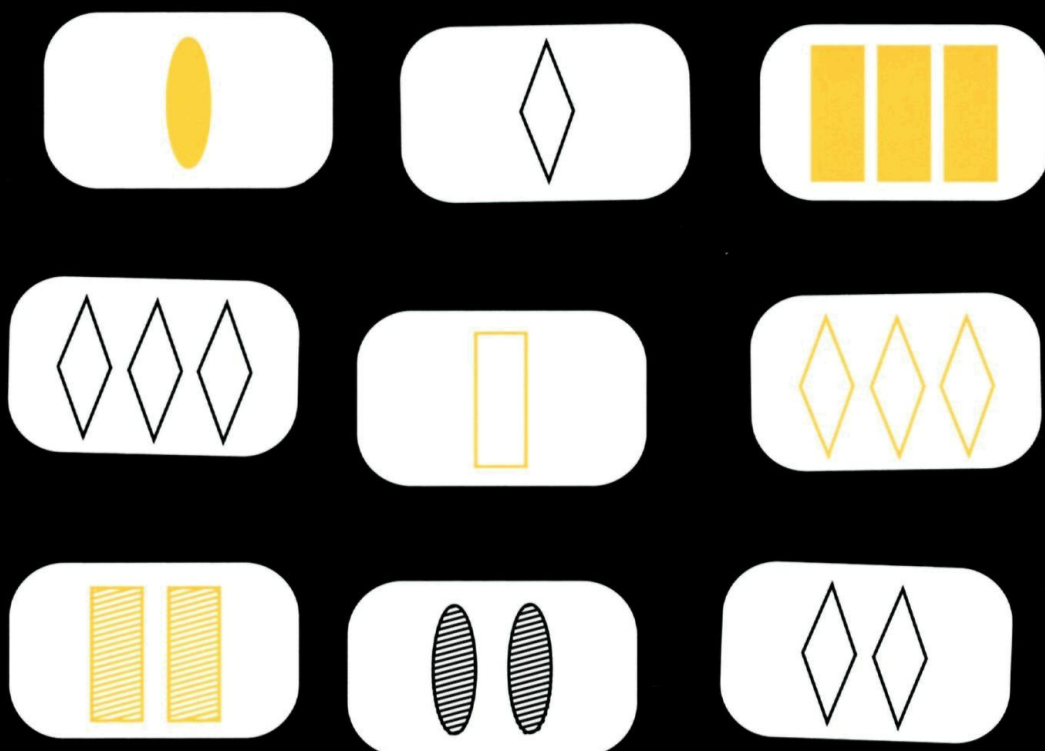
Bronnen

Constance Reid, *Van nul tot oneindig*, Prisma boeken, 1965.
David Wells, *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, Uitgeverij Bert Bakker, 1987.

Het tellen van Sets

Dion Gijswijt

18



Figuur 1.
Negen Set-kaarten.
De bovenste drie vormen een Set
(3 eigenschappen gelijk, 1 verschillend),
de onderste drie ook
(1 eigenschap gelijk, 3 verschillend).
Er is nog één andere Set.

Set is een gezelschapsspel bestaande uit 81 kaarten, waarvan je op het eerste gezicht zou zeggen dat het niet veel met wiskunde te maken heeft. Toch roept het spel veel wiskundige vragen op. Het kaartspel Set is uitvoerig behandeld in Pythagoras, december 1999. Set is tegenwoordig te koop in de reguliere speelgoedwinkels (Intertoys). Importeur is de firma Ravensburg te Amersfoort. Je kunt het spel zelf maken aan de hand van de beschrijving op de homepage van Pythagoras (kijk bij december 1999), maar daar moet je wel wat voor doen.

De spelregels

Set bestaat uit 81 kaarten. Op elke kaart kun je vier eigenschappen herkennen: kleur (rood/groen/paars), aantal (1/2/3), vorm (ruit/ovaal/rechthoek) en arcering (open/gearceerd/dicht). Alle mogelijke combinaties komen precies één keer voor. Er zijn daarom $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ Set-kaarten.

Om het spel te kunnen spelen moet je weten wat een Set is. Dit is een drietal kaarten die 'bij elkaar' horen volgens een heel precieze regel: een drietal kaarten vormt een Set als elke eigenschap ofwel gelijk is, ofwel op elk van de drie kaarten verschillend is. Deze regel moet je voor alle vier eigenschappen controleren. Een Set kan 1, 2, 3 of 4 eigenschappen verschillend hebben. Dit klinkt moeilijker dan het is, zie het voorbeeld in figuur 1.

Het spel gaat als volgt.

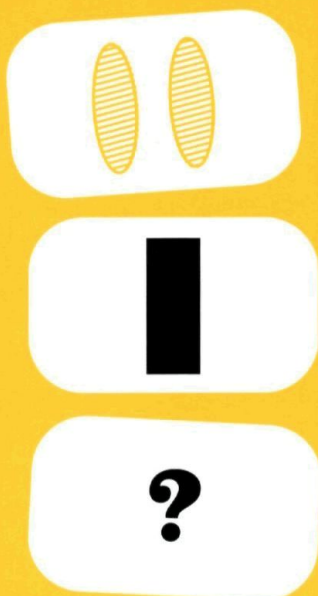
Een spelleider schudt het spel en legt twaalf kaarten open op tafel in een rechtehoek van drie bij vier. De kunst is in deze twaalf kaarten een Set te herkennen. Wie een Set ziet, roept 'Set!' Degene die het eerste roept, mag de gevonden Set aanwijzen. De andere spelers controleren. Als het klopt is de Set voor degene die hem het eerste zag, en worden de kaarten op tafel weer aangevuld tot twaalf. Klopt het niet, dan volgt er een straf (een beurt overslaan of drie kaarten inleveren). Als niemand in de kaarten op tafel een Set ziet, dan worden er drie kaarten toegevoegd. Het spel is afgelopen als alle kaarten op zijn en er geen Sets meer op tafel liggen. Degene met het grootste aantal kaarten wint.

Het aantal Sets in twaalf kaarten

Bij het spelen van Set komt het wel eens voor dat er in de twaalf kaarten op tafel geen enkele Set zit. Het minimale aantal Sets in twaalf kaarten is dus gelijk aan 0. Je kunt je ook afvragen hoeveel Sets er maximaal in twaalf kaarten kunnen zitten. Het antwoord op deze vraag is 14, maar is niet eenvoudig te vinden. Voor een kleiner aantal kaarten is het eenvoudiger uit te vinden wat het maximale en minimale aantal Sets is. Voor vier kaarten is bijvoorbeeld het minimale aantal Sets gelijk aan 0 en het maximale aantal gelijk aan 1. Op die manier kun je proberen voor elk aantal kaarten het minimale en maximale aantal Sets te berekenen. Het invullen van *alle* plaatsen in deze 'grote Set-tabel' is echter nog niemand gelukt. Het blijkt echter dat in de Set-tabel een verrassende symmetrie zit. Zo kun je het aantal Sets in 77 kaarten bepalen als je het aantal Sets in 4 kaarten weet en omgekeerd. Hoe dit precies in elkaar zit volgt nu. >>

Alle kaarten

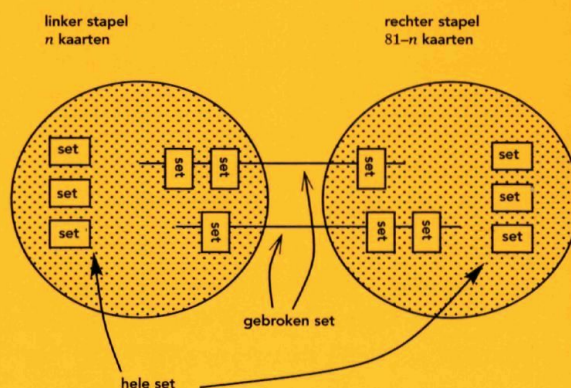
Eerst bepalen we het aantal Sets in alle 81 kaarten samen. Omdat er bij ieder tweetal kaarten altijd een unieke derde kaart is die het drietal tot een Set maakt (ga maar na), kunnen we alle Sets maken door twee verschillende kaarten te kiezen en dit tweetal te completeren tot een Set. Voor de eerste kaart kun je alle 81 kaarten kiezen en voor de tweede kaart zijn er nog 80 mogelijkheden. Zo vindt je dus $81 \times 80 = 6480$ Sets. Elke Set is nu $3! = 6$ maal geteld, dus er zijn $6480/6 = 1080$ verschillende Sets.



Figuur 2. Elke twee kaarten bepalen een unieke derde kaart die het drietal tot een Set maakt. In dit geval moeten alle vier eigenschappen verschillend zijn

Twee stapels

Neem de 81 Setkaarten en verdeel ze in gedachten over een linker en een rechter stapel. Van de 1080 Sets liggen sommige nu geheel in een van beide stapels, maar andere Sets zijn in tweeën gebroken en hebben een kaart in zowel de linker als de rechter stapel. Noem het aantal 'hele' Sets H en het aantal 'gebroken' Sets G . We weten dus $H + G = 1080$. Verder geven we het aantal kaarten in het linker stapeltje aan met n , zodat het aantal kaarten in het rechter stapeltje gelijk is aan $81 - n$.



figuur 3. 'Hele Sets' en 'gebroken Sets'

Zoals gezegd, bij ieder tweetal kaarten hoort een unieke derde kaart die het drietal tot een Set maakt. Je kunt dus het aantal gebroken Sets tellen door een kaart in de linker en een kaart in de rechter stapel te kiezen en de derde kaart, die met deze twee een set vormt erbij te nemen. Je telt zo alle gebroken Sets, elk precies tweemaal. Dus

$$G = \frac{1}{2} n (81 - n) \text{ zodat:}$$

$$H = 1080 - \frac{n(81 - n)}{2}.$$

Dit is verrassend: deze formule geldt blijkbaar altijd, zolang er links maar n kaarten liggen en rechts $81 - n$. Het aantal Sets dat geheel in een van beide stapels ligt is dus *onafhankelijk* van de precieze verdeling van de kaarten! Dit betekent dat als we n vast nemen, het aantal Sets in de linker stapel minimaal is, precies dan als het aantal Sets in de rechter stapel maximaal is, en andersom. De som van de twee aantallen is immers constant. Als we $n = 4$ nemen, dan is het aantal Sets in de linker en rechter stapel samen gelijk aan

$$\frac{1}{2} \times 4(4 - 81) + 1080 = 926$$

Het minimale en maximale aantal Sets in de vier kaarten zijn 0 en 1, dus het maximale en minimale aantal Sets in 77 kaarten is 926 en 925.

Mini-Set

Neem alle dichte ruiten-kaarten. Deze negen kaarten vormen een mini-Setspel, waarbij er slechts twee in plaats van vier eigenschappen zijn, namelijk kleur en aantal. Ieder tweetal kaarten bepaalt weer precies een Set. Je kunt makkelijk nagaan dat er nu in totaal 12 Sets zijn. Als we de vorige redenering herhalen voor mini-Set, dan vinden we dat:

$$H = \frac{n(9-n)}{2} + 12.$$

Voor mini-Set kunnen we met behulp van deze formule vrij eenvoudig de hele Set-tabel uitrekenen. Voor 0, 1 of 2 kaarten is het maximale (en minimale) aantal Sets gelijk aan 0. In 3 kaarten zitten maximaal 1 en minimaal 0 Sets. De vier kaarten met aantal 0 of 1 en kleur rood of groen bevatten geen Set, dus het minimale aantal Sets in 4 kaarten is 0. Het maximale aantal Sets in 4 kaarten is 1 (ga na). We hebben nu de eerste 5 regels van de Settabel al ingevuld. Maar de laatste 5 volgen automatisch uit de formule en de tabel is compleet!

n	$\frac{1}{2}n(9-n) + 12$	Max.	Min.
0	12	0	0
1	8	0	0
2	5	0	0
3	3	0	1
4	2	0	1
5	2	1	2
6	3	2	3
7	5	5	5
8	8	8	8
9	12	12	12

Open vragen

Maak een Settabel voor 3-dimensionaal Set (27 kaarten), en dezelfde vraag voor gewoon Set (81 kaarten). Beide vragen zijn nog onopgelost!

Download

In de download-sectie van de homepage van Pythagoras kun je een programma vinden, waarmee je Set aan een statistisch onderzoek kunt onderwerpen. Het programma trekt steeds opnieuw twaalf kaarten, en telt het aantal Sets daarin. De resultaten worden bijgehouden in een histogram. Het programma werkt ook voor andere aantallen dan twaalf. Wat gebeurt er bijvoorbeeld bij zeven kaarten?

De jonge Gauss wist al hoe je de getallen van 1 tot en met 100 in een mum van tijd bij elkaar op kan tellen – een handig rekentrucje geeft in een keer het antwoord. Dezelfde truc geeft ook een mooie formule voor driehoeksgetallen.

Een formule voor d

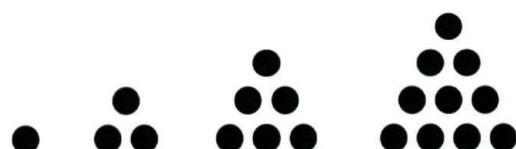
Klaas Pieter Hart

22

Over de grote wiskundige Gauss (1777-1855) doet de volgende anecdotte de ronde: de leraar op school wilde zijn klas even zoet houden en gaf zijn leerlingen de opdracht de getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen. Iedereen begon hard te cijferen, behalve de jonge Carl Friedrich Gauss, die na even nadenken het getal 5050 op zijn lei schreef. Op de vraag hoe hij dat gedaan had antwoorde hij: "Nou, $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, ..., $50 + 51 = 101$. Het antwoord is dus $50 \times 101 = 5050$ "

Driehoeksgetallen

Of het verhaal waar is is niet geheel duidelijk, vooral omdat Gauss het zelf de wereld in gebracht schijnt te hebben. Wat Gauss in feite ontdekte, was de formule voor driehoeksgetallen. Een *driehoeksgetal* krijg je door een gelijkzijdige driehoek regelmatig met stippen te vullen.



Figuur 1. De eerste vier driehoeksgetallen

Zoals je ziet in figuur 1 zijn de eerste vier driehoeksgetallen gelijk aan 1 , $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ en $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Een driehoek met n stippen langs elke zijde heeft $1 + 2 + \dots + n$ stippen. Dit is het n -de driehoeksgetal. Wat Gauss uitrekende, was het honderdste driehoeksgetal: 5050 stippen.

Een formule

Werkt de methode van Gauss voor elk getal? Als n even is wel. Om $1 + 2 + 3 + \dots + n$ uit te rekenen, tellen we het grootste getal n op bij 1, het een na grootste getal $n-1$ bij 2, enzovoort. We krijgen dan achtereenvolgens $n + 1$, $(n-1) + 2$, $(n-2) + 3$, et cetera. Steeds krijgen we $n + 1$ en dat $n/2$ keer. Zo krijgen we, voor even n , een formule voor het n -de driehoeksgetal:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Als n oneven is, werkt deze methode niet. Neem bijvoorbeeld $n = 5$. We kunnen dan 5 bij 1 optellen, en 4 bij 2, maar dan houden we het middelste getal 3 over.

Dit gebeurt ook in het algemene geval: je krijgt $(n-1)/2$ keer $n + 1$, en je houdt het middelste getal $(n+1)/2$ over. Als je alles optelt komt het echter mooi uit: $1/2 (n-1)$

$$\frac{1}{2} (n-1)(n+1) + \frac{1}{2} (n+1) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Ook voor oneven n geldt dus de formule:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Conclusie. Of n nu even is of oneven, we krijgen een en dezelfde formule voor het n -de driehoeksgetal: $\frac{1}{2} n(n+1)$.

In één klap

Wiskundig is het niet erg bevredigend om een onderscheid te moeten maken tussen even en oneven n , terwijl de uitkomst in

riehoeksge- tallen

505



beide gevallen hetzelfde is. Het kan echter veel mooier. We tellen het n -de driehoeksgetal bij zichzelf op en krijgen n keer $n+1$:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + n \\ n + n - 1 + \dots + 1 + \\ \hline n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 = n(n+1) \end{array}$$

Dus $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)$, zodat:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

De som $1 + 2 + \dots + n$ staat bekend als de 'rekenkundige reeks', en voor de uitkomst daarvan bestaat dus een mooie formule:

$$\frac{1}{2} n(n+1).$$

Opdracht. Bereken het duizendste driehoeksgetal.

Hogere machten

Ook voor sommen van hogere machten zijn formules bedacht. In 1705 beschreef Jakob Bernoulli een methode die algemeen werkt. Zo vind je in zijn *Ars Conjectandi* de volgende formule voor $1 + 2^{10} + \dots + n^{10}$:

$$\frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{5}{66} n.$$

Bernoulli hield van opscheppen en schreef dat hij zo "in minder dan de helft van een kwartier" had uitgerekend dat $1 + 2^{10} + \dots + 1000^{10}$ gelijk is aan:

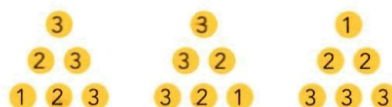
91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

Hij verwees daarmee een boek naar de prullenmand dat zo'n tien jaar eerder was uitgekomen en dat voornamelijk bestond uit tabellen met sommen van machten.

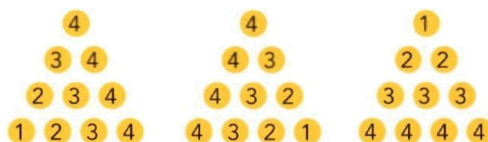
Kwadraten en derde machten

De formules voor $1 + 2^2 + \dots + n^2$ en $1 + 2^3 + \dots + n^3$ kun je ook op een Gauss-achtige manier bedenken en bewijzen. De eerlijkheid gebiedt echter te zeggen dat die manieren pas achteraf bedacht zijn en dat daarbij naar het (reeds bekende) antwoord is toegewerkt.

Hieronder bijvoorbeeld zie je drie keer $1 + 2^2 + 3^2$:



En dit is drie keer $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$:



Wat krijg je als je de driehoeken positie voor positie bij elkaar optelt?

Kun je op deze manier een formule voor $1 + 2^2 + \dots + n^2$ afleiden? Dezelfde vraag voor $1 + 2^3 + \dots + n^3$. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Problemen

Dion Gijswijt

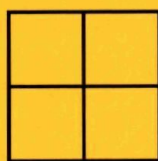
Eenentwintig

Maak met de getallen 1, 5, 6 en 7 en de operaties $-$, $+$, $\times$ en $/$ het getal 21. Je mag elk getal maar éénmaal gebruiken.

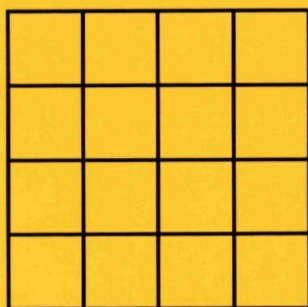
Maarten Schroen

Verborgen rechthoeken

In de onderstaande figuur zitten negen rechthoeken verborgen: vier vierkantjes van 1 bij 1, twee rechthoeken van 1 bij 2, twee rechthoeken van 2 bij 1 en een vierkant van 2 bij 2.



Hoeveel rechthoeken zitten in de volgende figuur verstopt?

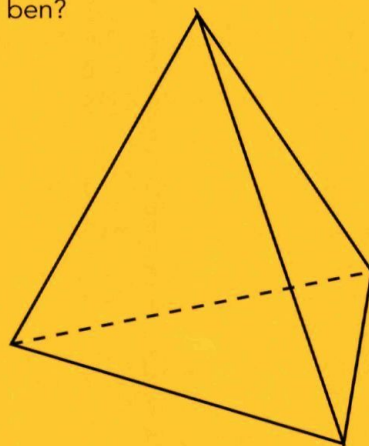


Cijfersom

Hoeveel getallen zijn er, waarvan de cijfers ongelijk zijn aan 0 en de som van de cijfers gelijk is aan 10?

Tetraëder

Er bestaat in het vlak geen gelijkzijdige driehoek waarvan de hoekpunten geheeltallige coördinaten hebben. Bestaat er wel een tetraëder (regelmatig viervlak) in de ruimte waarvan de hoekpunten geheeltallige coördinaten hebben?



Goudstaven

Zeven goudstaven, 15 kilo in totaal, kunnen worden verdeeld in drie gelijke stapeltjes, en ook in vijf gelijke stapels. Wat zijn de gewichten van de zeven goudstaven?

Oplossingen

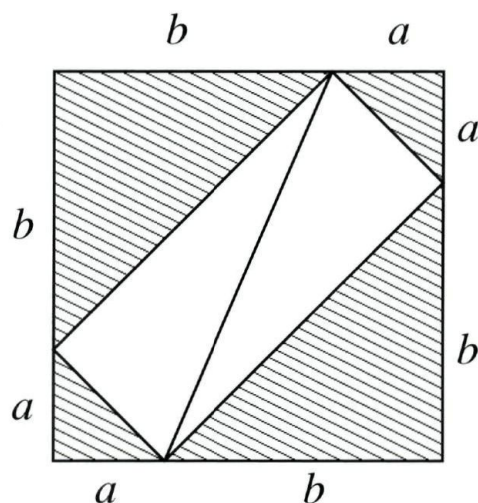
nr.1

Dion Gijswijt

Leugenaars

Alle waarheidsprekers geven hetzelfde antwoord, dus als er n waarheidsprekers zijn, dan moet het antwoord n minstens n maal worden gegeven. Het enige getal waarvoor dit geldt is 3. Het aantal waarheidsprekers is dus 3 en vier leerlingen hebben de vraag naar waarheid beantwoord.

Diagonaal



De zijden van de rechthoek zijn $a\sqrt{2}$ en $b\sqrt{2}$, dus de diagonaal heeft lengte

$$\sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

De oppervlakte van het gearceerde gebied is gelijk aan $a^2 + b^2 = 8$. De diagonaal heeft dus lengte 4.

Kettingbreuk

Stel dat de kettingbreuk gelijk is aan x . dan is $1/(x-1) = x$. Dus $x^2 - x - 1 = 0$ en $x = (1 + \sqrt{5})/2$, want x is positief.

Derdegraads

De lijn l heeft vergelijking $l(x) = ax + b$ voor zekere getallen a en b . De oplossingen van $f(x) - l(x) = 0$ zijn x_1, x_2 en x_3 . Dus:

$$0 = f(x) - l(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \dots$$

Maar $f(x) - l(x)$ is ook gelijk aan $x^3 + 2x^2 + (3-a)x + (4-b)$. Dus $-2 = x_1 + x_2 + x_3$. De som is dus onafhankelijk van de gekozen lijn l .

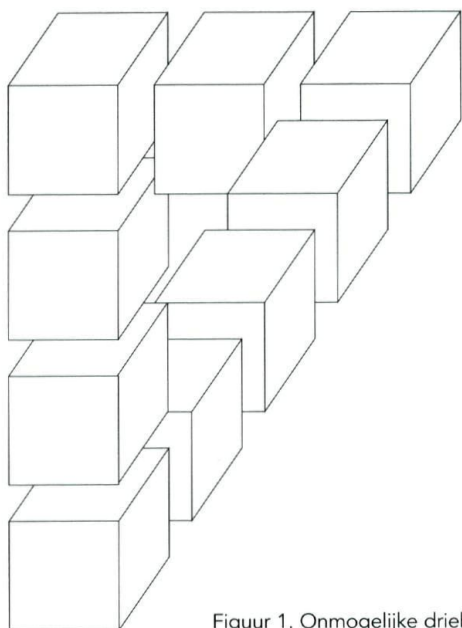
Kleuren

Geef het aantal kleuringen van een figuur F aan met $N(F)$. Stel dat K een knoop van F is. Het aantal kleuringen waarbij K zwart is, is gelijk aan het aantal kleuringen van F met de knoop K verwijderd. Het aantal kleuringen waarbij K wit is, vind je door uit F niet alleen K , maar ook de 'buren' van K te verwijderen. Zie de figuur. Het aantal kleuringen van de figuur met nog een extra vertakking is $41^2 + 5^4 = 2306$. Het gevraagde aantal kleuringen is nu $2306^2 + 41^4 = 8143397$.

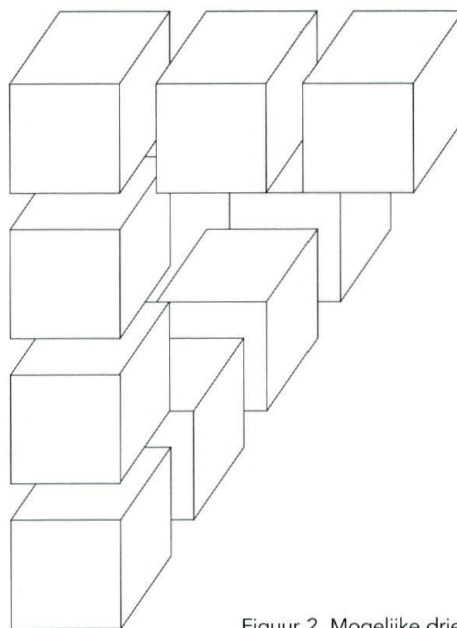
$$N(\circ) = 2$$

$$N(\circ-\circ-\circ) = 5$$

$$\begin{aligned} N\left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ-\circ-\circ \\ | \\ \circ \end{array}\right) &= N\left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array}\right) + N\left(\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array}\right) \\ &= N\left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \\ | \\ \circ \end{array}\right)^2 + N(\circ)^4 = 41 \end{aligned}$$



Figuur 1. Onmogelijke drie balk,
Oscar Reutersvärd, 1938.



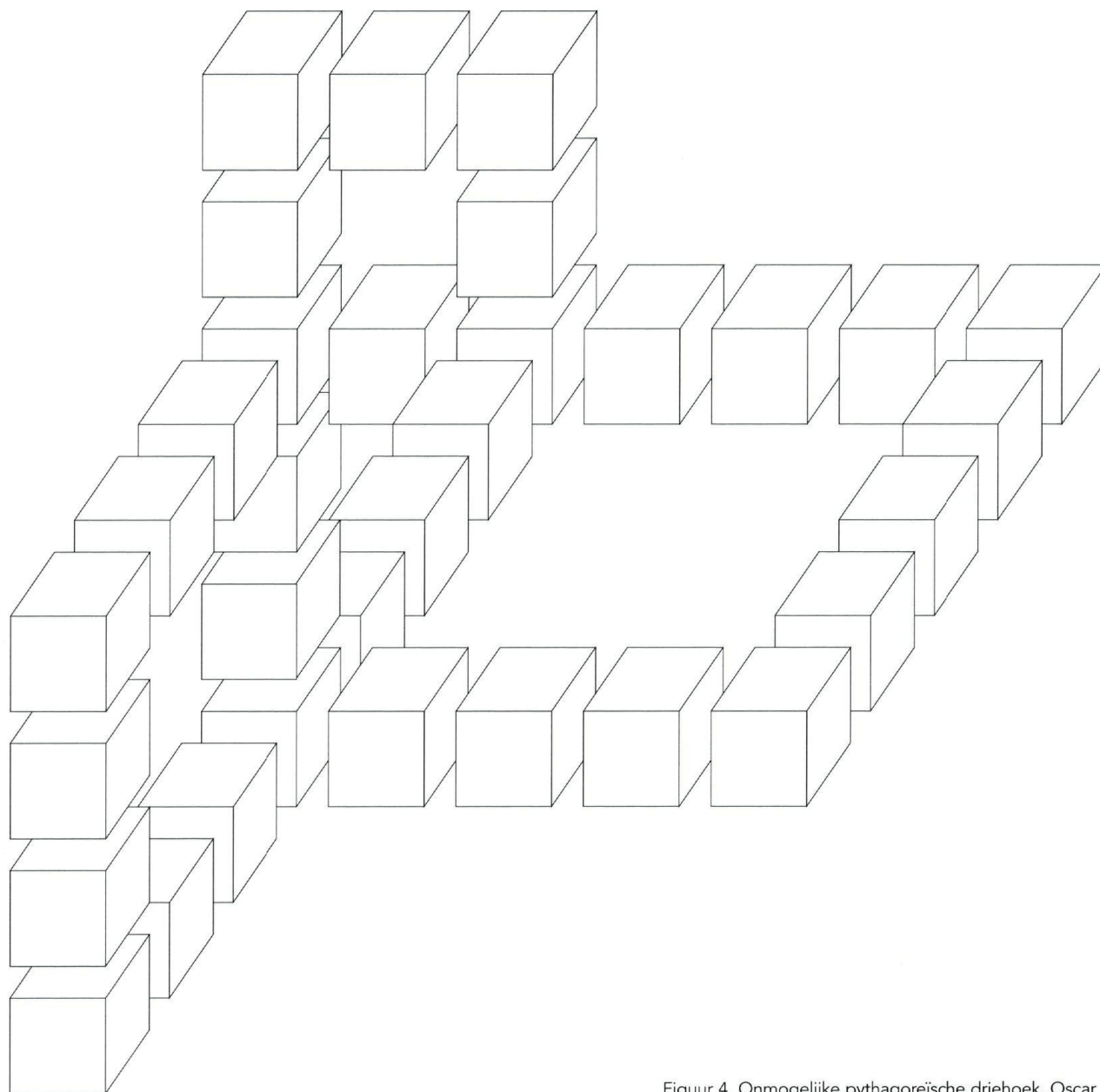
Figuur 2. Mogelijke drie balk.

Beeld & Bedrog

Een onmogelijke pythagoreïsche drie balk.

In 1938 tekende Oscar Reutersvärd een onmogelijke drie balk, die lijkt op een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 (zie figuur 1). Het aardige is, dat er hier twee onmogelijkheden aan elkaar gekoppeld zijn. Eerstens is het een onmogelijke ruimtelijke figuur. Dat zien we goed als we figuur 2 erbij bekijken. De horizontale, van

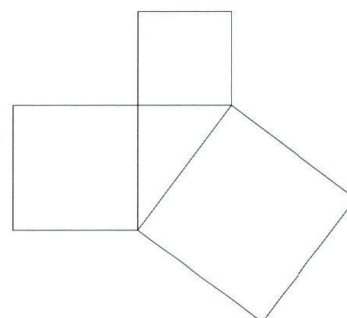
ons weglappende balk moet eigenlijk onder het laatste blokje van de bovenste balk doorlopen. De tweede onmogelijkheid die deze drie balk suggereert, is dat er drie hoeken van 90 graden zijn en tegelijk, dat er sprake is van één hoek van 90 graden en twee scherpe hoeken. Als we de tekening beschouwen als een rechthoekige driehoek moeten we op de zijden vierkanten kunnen



27

Figuur 4. Onmogelijke pythagoreïsche driehoek, Oscar Reutersvärd, 1938.

tekenen zoals in figuur 3. In figuur 4 is het resultaat te zien. Een onmogelijk ruimtelijk bouwsel. Het zal wel duidelijk zijn, dat zulke pythagoreïsche drie-balken, bestaande uit kubusjes alleen getekend kunnen worden als de rechthoekszijden pythagoreïsche trijels zijn: drie gehele getallen a , b en c waarvoor geldt $a^2 + b^2 = c^2$.



Figuur 3.

1 en nog wat

Waarom zijn de eerste bladzijden van tabellenboeken viezer dan de laatste bladzijden? Waarom is de belastingdienst hierin geïnteresseerd? Het antwoord ligt in het eerste cijfer van een getal.

Stel je maakt een lange lijst van alle constanten uit natuur- en scheikundeformules, lengtes en oppervlakten van rivieren, aantallen inwoners van dorpen en steden in de gehele wereld. Dan ga je turven hoeveel getallen met een 1 beginnen, hoeveel met een 2, et cetera. Als je flink veel getallen hebt genomen (hoe meer, hoe beter), dan ziet het staafdiagram er ongeveer zo uit (zie figuur 1).

Niet elk cijfer komt even vaak voor, zoals je geneigd zou zijn te denken. Een 1 komt vaker als eerste cijfer voor dan een 9!

Wet van Benford

Deze verrassende eigenschap van grote aantallen 'in het wild' voorkomende getallen gaat in de wiskunde door het leven als de wet van Benford. De wet zegt iets over lijsten van getallen die voortkomen uit metingen van een heleboel *verschillende* dingen in de 'echte wereld'. Tel in zo'n lijst het aantal getallen die beginnen met het cijfer d . Deel dit door het totaal aantal getallen in de lijst en noem dit $f(d)$. Dit heet de *relatieve frequentie* van het begin-

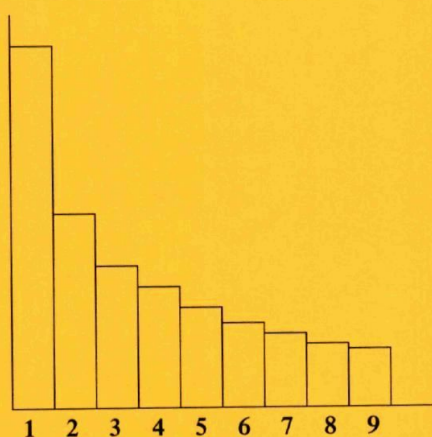
cijfer d . De wet van Benford geeft een formule voor $f(d)$ ($1 \leq d \leq 9$):

$$f(d) = {}^{10}\log(1+1/d) \quad (1)$$

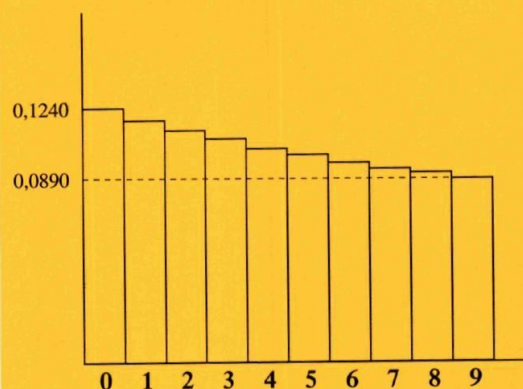
Deze formule zegt bijvoorbeeld dat $f(1) = {}^{10}\log(1+1) = 0,301$. Ongeveer 30 % van de getallen begint dus met een 1. Aan de andere kant begint maar 4,6 % = ${}^{10}\log(1+\frac{1}{9})$ van de getallen met een 9.

Niet alleen het eerste cijfer blijkt aan deze wet te voldoen, ook alle volgende cijfers. De formule blijft hetzelfde, maar je mag alle natuurlijke getallen op de plaats van d invullen! De functie geeft dan de frequentie van de getallen waarvan de eerste cijfers gelijk zijn aan die van d . Zo begint 1,85 % van de getallen met de cijfers 23, want $f(23) = {}^{10}\log(1+\frac{1}{23}) = 0,0185$. Met een trucje kun je nu ook uitrekenen hoe vaak bijvoorbeeld 3 als tweede cijfer van een getal optreedt, door de volgende optelling uitvoeren:

$$f(13) + f(23) + \dots + f(93).$$



Figuur 1. Geturfde aantallen per eerste cijfer.



Figuur 2. De relatieve frequentie van het tweede cijfer van een getal.

Hoe verder je naar achteren gaat in het getal, hoe meer de cijfers 'echt willekeurig' worden. De relatieve frequentie komt voor alle cijfers steeds dichterbij $1/10$ te liggen. De verdeling in formule (1) heet de *logaritmische verdeling*. (Zie figuur 2.)

VRAAG. Waarom geeft formule (1) een echte frequentieverdeling, in de zin dat de som van alle functiewaarden $f(d)$ voor $d = 1, \dots, 9$ gelijk aan 1 is?

Geschiedenis

Simon Newcomb was aan het einde van de 19e eeuw de eerste die dit verschijnsel opmerkte. Hij zag dat in de tabellenboeken die hij gebruikte de pagina's waarop getallen stonden die met een één begonnen veel vaker geraadpleegd waren dan de anderen – hun zijkant was veel viezer! Zijn verhaal vond echter weinig weerklank.

Een kleine zestig jaar later maakte Frank Benford een uitgebreide studie van het fenomeen. Hij verzamelde meer dan 20.000 getallen en de wet, die vervolgens

naar hem vernoemd werd, kon niet langer meer genegeerd worden. Een goede reden voor het optreden van de regelmaat kon Benford niet geven. Het duurde tientallen jaren voor er aannemelijke verklaringen verschenen. Overigens vermoeden sommige wiskundigen inmiddels dat Benford zelf met bepaalde afrondingen heeft gerommeld om het nog iets beter te laten kloppen, maar zelfs dan lijken zijn frequenties als twee druppels water op die van formule (1).

Verklaringen

De verklaring voor de formule (1) van de wet van Benford vindt zijn oorsprong in de voorwaarden waar een 'universele wet van eerste cijfers' (gesteld dat deze bestaat) aan zou moeten voldoen. Zo'n wet zou immers ook moeten gelden op de planeet Grojumi waar afstanden niet in meters maar in asims worden gemeten (1 asim = 239,76 meter), en ook de munteenheid anders is. Deze eigenschap heet *schaalinvariantie*. Berekeningen hebben aangetoond dat een wet die voldoet aan de >>

1 en nog wat

<<

voorwaarde van schaalinvariantie er automatisch uit ziet als formule (1).

Gebruik & misbruik

Aangezien de wet van Benford vertelt hoe grote aantallen willekeurige getallen zich moeten gedragen, kunnen mensen die daarmee te maken krijgen er hun voordeel mee doen. Zo wordt de wet gebruikt door belastingcontroleurs: als de getallen die zij onder ogen krijgen te veel afwijken van het door formule (1) geschetste beeld, gaan de alarmbellen rinkelen. Dus als je van plan bent om te frauderen, zorg dan dat je je getallen juist kiest.

Zelf experimenteren

Je kunt natuurlijk de wet van Benford zelf ook controleren. Het enige wat je moet doen is heel veel gegevens van uiteenlopende soort verzamelen en de relatieve frequenties van de begincijfers uitrekenen. Zorg er wel voor dat de getallen die je vindt de ruimte hebben gehad om te variëren: de prijs van tien merken pindakaas biedt te weinig variatie om de wet van Benford te laten werken. Ook moet je bedacht zijn op 'onnatuurlijke' aanpassingen, zoals de prijzen in de supermarkt die altijd eindigen op 98 of 99 cent. Succes!

Meer informatie

<http://mathworld.wolfram.com/B/BenfordsLaw.html>

<http://www.newscientist.com/ns/19990710/thepowerof.html>

<http://256.com/gray/info/benfords.html>

OPLOSSINGEN



Het
getal
nul

1. Wat is de uitkomst van $0 : 0$?

Hoe vaak moet je 0 van 0 aftrekken opdat je niets overhoudt? Zo vaak als je wil.

Aan de uitdrukking $0 : 0$ kun je dus geen zinvolle betekenis geven.

2. Acht, drie, één, negen, nul, twee,...

Deze getallen zijn alfabetisch gerangschikt.

3. 1^0 , 0^1 , 0^0 .

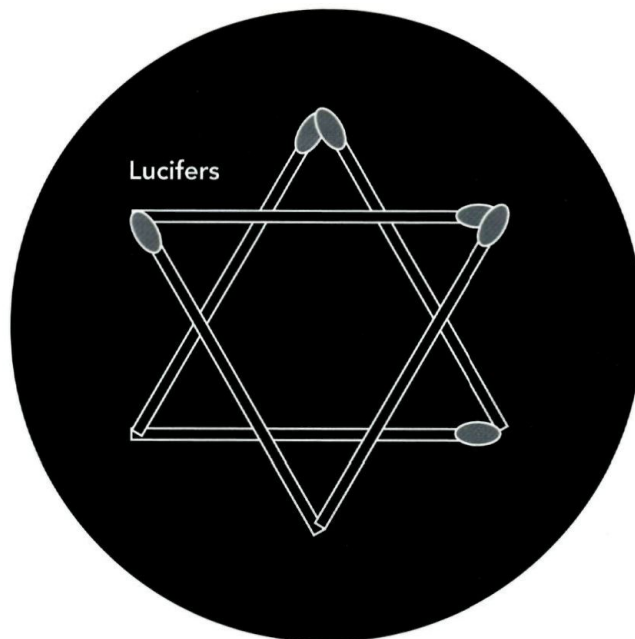
$1^0 = 1$, zoals uitgelegd is op p. 16 ('Het getal twee').

$0^1 = 0$, dit volgt uit de definitie van machtsverheffen.

$0^0 = 1$, volgens afspraak.

OPLOSSINGEN

Kleine nootjes nr.1



Broers en zussen

Moeder heeft drie zoons en drie dochters (de baby niet meegerekend).

Driehoeken

Nee. Neem bijvoorbeeld een driehoek met zijden 101, 51, 51 en een driehoek met alle zijden 50. Dan past de tweede driehoek niet binnen het eerste. Maak maar een tekening!

31

Vierkant en cirkel

De schijf bedekt het vierkant, dus kan een schijf met tweemaal zo kleine straal een vierkant met tweemaal zo kleine zijde bedekken. Deel het vierkant in vier kleine vierkantjes en bedek elk van deze vierkantjes met een schijfje.

Handschoenen

Je moet minstens 11 handschoenen pakken om zeker te weten dat je een linker en rechter handschoen hebt, want er zijn 10 handschoenen van beide soorten. Als je 11 handschoenen pakt, heb je automatisch een twee handschoenen van een paar, en dus een compleet paar, want er zijn maar 10 paren.

Activiteiten

vrijdag 15 december 2000/

vrijdag 20 april 2001

Mastercourse **Wiskunde van het geluid**

UvA, afdeling Wiskunde / Statistiek / Natuurkunde / Sterrenkunde. Voor docenten wis- en natuurkunde.

Deze cursus biedt goede aanknopingspunten voor profielwerkstukken en praktische opdrachten.

tel. 020 - 5255074

e-mail: kattie@wins.uva.nl (Kattie Schoot)

zaterdag 6 januari 2001

Wintersymposium

Wiskundig Genootschap

Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Amersfoort

Thema: Wiskunde en recreatie

24 januari 2001

Cursus "Kansrekening"

voor wiskundeleraren in bovenbouw WVO

VU Amsterdam,

afdeling Econometrie en Operationele Research

<http://www.econ.vu.nl/ectrie> (klik op wvo-scholen)

vr 2 en za 3 februari 2001

Nationale Wiskunde Dagen

Congrescentrum de Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

tel. 030 - 2611611,

<http://www.fi.uu.nl/nwd>

maandag 5 februari 2001

Beta-collegemiddag 5/6-vwo, Universiteit Utrecht

tel. 030 - 2532670,

<http://www.uu.nl>

vrijdag 16 maart 2001

Kangoeroewedstrijd

Wiskundewedstrijd voor klassen 1, 2, 3 en 4

<http://www.win.tue.nl/~marco/kangoeroe>

vrijdag 16 maart 2001

mastercourse **Patronen en golven**

UvA, afdeling Wiskunde / Statistiek / Natuurkunde / Sterrenkunde. Voor docenten wis- en natuurkunde.

Deze cursus biedt goede aanknopingspunten voor profielwerkstukken en praktische opdrachten.

tel. 020 - 5255074

e-mail: kattie@wins.uva.nl (Kattie Schoot)

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam

 **TU Delft**



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar.

Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2000-2001

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 39,50. Losse nummers f 8,50 of BF 160.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 850,

Pythagoras buitenland f 54,50.

Pythagoras én Archimedes f 69,50,

Pythagoras én Archimedes België BF 1470,

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Prijs: f 27,50/ BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Prijs: f 32,50 /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement.

Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.

Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37, 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) jaargang 39 (37,50 excl. verzending) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).

