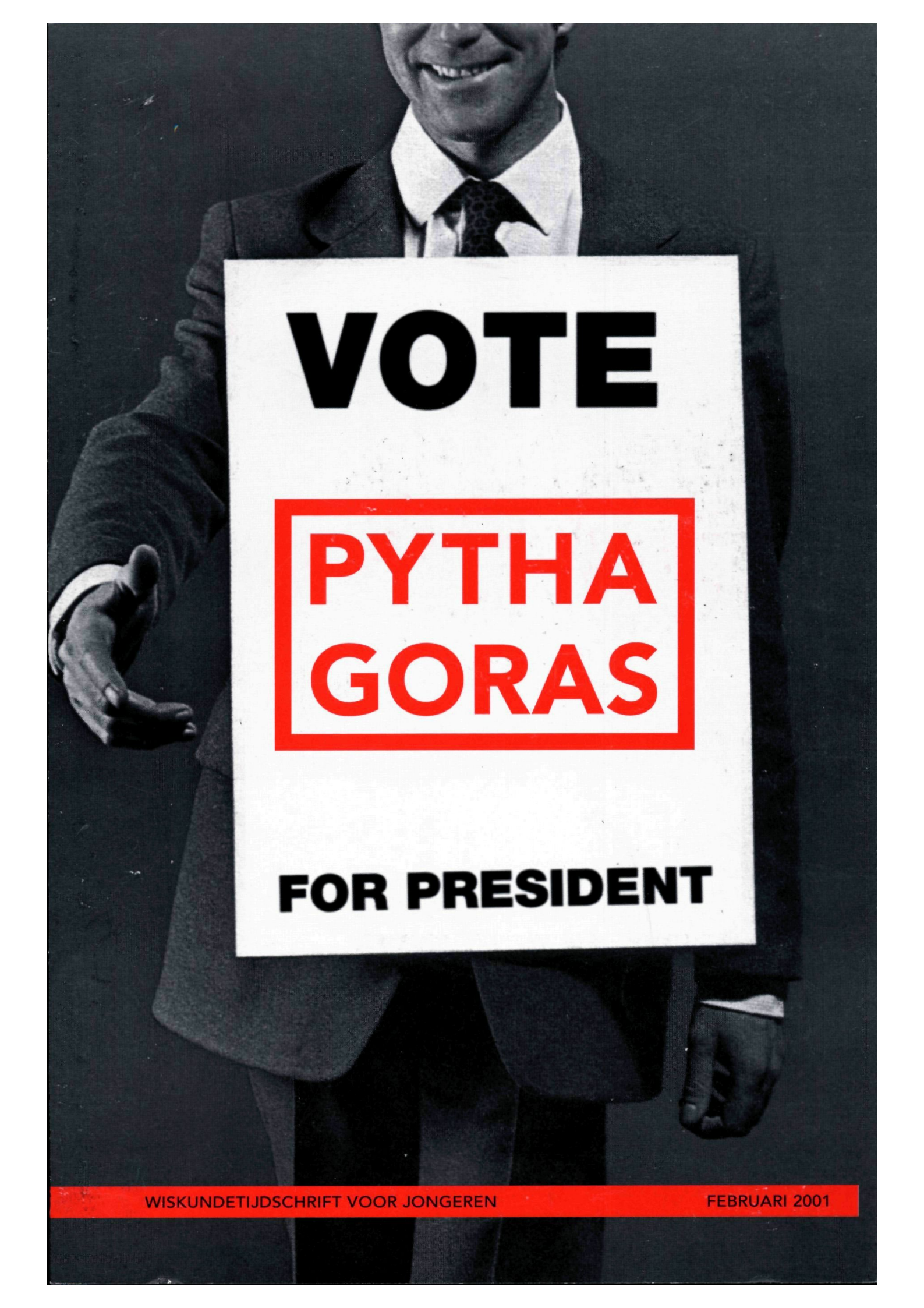


A black and white photograph of a man in a suit and tie, smiling and holding a large white sign. The sign has bold black and red text. The background is dark.

VOTE

**PYTHA
GORAS**

FOR PRESIDENT

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

WWW

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

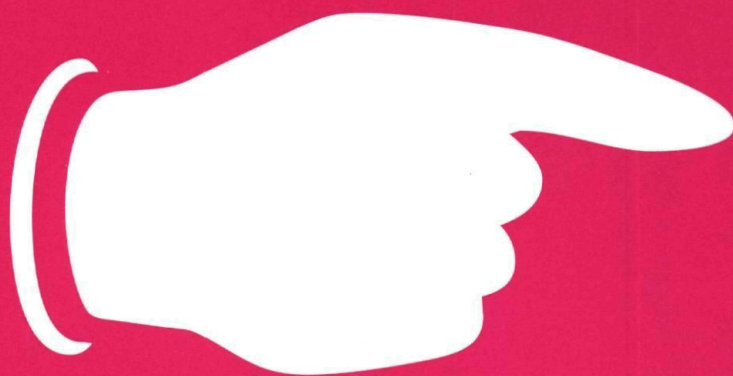
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist; 1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen; 2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig; 3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

prof.dr. W. Albers is hoogleraar statistiek en kansrekening aan de UT. **drs. A.A.J. de Boer** is leraar wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **prof.dr. R. Meester** is hoogleraar kansrekening aan de VU en de UU. **dr. H. Melissen** is docent wiskunde aan de TU Delft. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de UU. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wiskunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde aan de UL. **dr. M.H. Vellekoop** is docent wiskunde aan de UT. **J.J. Versluys** is oud-docent statistiek te Utrecht. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.



INHOUD

2 - 3	Kleine nootjes	24	Problemen
4 - 5	Taalkundig tellen	25	Oplossingen nr. 2
6 - 7	De Amerikaanse presidentsverkiezingen: zuiver of niet?	26 - 27	Meetkundige reeks
8 - 10	Knippen en schuiven	28 - 29	Beeldpuzzel
11 - 13	Op zoek naar M_{61}	30	De post
14 - 15	Pythagoras Olympiade	31	Oplossingen: • Nootjes nr. 2 • Het getal 2 • Ontsnapt!
16 - 17	Gambodulo puzzel	32	Activiteiten
18 - 21	De kinderen van Ruud, 2		
22 - 23	Het getal vijf		

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes

2



Tijdsmeting

Je hebt twee identieke lonten. Een lont die aan één kant wordt aangestoken brandt precies één uur. Hoe kun je met de twee lonten precies 45 minuten afmeten? (Een lont brandt niet over de hele lengte met constante snelheid.)

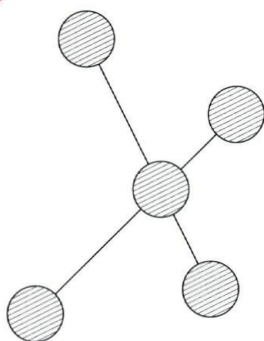
Vader en zoon

Cees van Aller is vier keer zo oud als zijn zoon Abel. Over twintig jaar zal Cees twee keer zo oud zijn als zijn zoon. Hoe oud zijn vader en zoon van Aller nu?



Cafébezoek

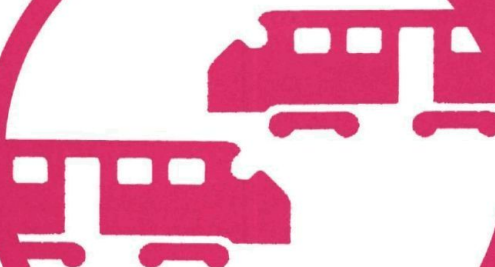
Drie vrienden komen uit het café. Twee hebben bier gedronken, twee water en twee wijn. De vriend die geen wijn heeft genomen, heeft ook geen water genomen. Diegene die geen bier heeft gedronken, heeft ook geen wijn gedronken. Wie heeft wat gedronken?



Vier op een rij

Waar moet je in de figuur de zesde munt neerleggen om vier keer drie munten op een rechte lijn te krijgen?

Treinen
Een trein vertrekt van Amsterdam naar Eindhoven en rijdt met een snelheid van 160 km/u. Een kwartier later vertrekt een trein van Eindhoven naar Amsterdam, die rijdt 120 km/u. De afstand tussen Amsterdam en Eindhoven is 140 km. Als de treinen elkaar passeren, welke van de twee treinen is dan het dichtst bij Amsterdam?





De Griekse wiskundige Pythagoras, naar wie dit tijdschrift genoemd is, schijnt ook de grondlegger van de numerologie te zijn. In de beste numerologische tradities wordt in dit artikel geprobeerd elke letter van het alfabet een dusdanige waarde te geven, dat de waarde van het rangtelwoord een precies 1 is, die van het rangtelwoord twee precies 2, enzovoort. De vraag is of dat mogelijk is.

Rekenen doen we met getallen, maar getallen kun je op twee manieren opschrijven. De ene manier is door symbolen voor de eerste tien getallen (vanaf nul) achter elkaar te zetten. Zo betekent 126: één honderdtal, twee

tientallen en zes eenheden. Dit is een notatie voor honderdzesentwintig. We zijn zó gewend aan deze notatie, dat we denken dat 126 honderdzesentwintig is, in plaats van een notatie ervoor.

Elke letter een waarde

Naast deze notatie met cijfers hebben we ook een taalkundige notatie.

'Honderdzesentwintig' is het getal dat we noteren als 126. Aan de andere kant bestaat honderdzesentwintig gewoon uit negentien letters, die in een bepaalde volgorde achter elkaar staan.

Zou je nu niet aan de afzonderlijke letters een waarde kunnen toekennen zodat je de

waarde van een getal uit zijn letters kunt uitrekenen?

Als je bijvoorbeeld $e = 0$ neemt en $n = 1$, dan klopt het voor één: $e + e + n = 1$! Zo kun je nog wat verder proberen. Neem $t = 1$ en $w = 1$, dan is ook $t + w + e + e = 2$. Kies vervolgens $d = -1$, $r = 3$ en $i = 1$, dan is $d + r + i + e = 3$. Neem nu $v = 0$, dan klopt ook $v + i + e + r = 4$. Kies je $j = 0$ en $f = 4$, dan is $v + i + j + f = 5$. Neem $z = 0$ en $s = 6$, dan is $z + e + s = 6$.

Maar nu gaat het mis. Alle letters uit zeven zijn al aan de beurt geweest. Er valt niets meer te kiezen en $z + e + v + e + n$ is domweg gelijk aan 1. Dat is natuurlijk erg jammer! Maar misschien is er nog iets aan te doen. We hebben namelijk zomaar een paar keuzes gemaakt voor de waarden van een paar letters. Misschien kan dat wel beter.

Opnieuw

Eens kijken of we de waarde van de letters af kunnen leiden. Er zitten een aantal eigenaardigheden in de Nederlandse taal die ons helpen. Zo is 'dertien' het woord voor 13, terwijl 'drietien' eigenlijk logischer zou zijn (net als zestien), want $drietien = drie + tien = 3 + 10 = 13$. Voor ons systeem moeten de letters 'der' dus dezelfde waarde hebben als 'drie', omdat tien gelijk moet zijn aan 10. Hieruit leiden we af dat $i = 0$. Net zo volgt uit de gelijkheid van veertien en viertien dat $e = i$, dus ook $e = 0$. Omdat $een = 1$, weten we nu de waarde van n : $n = 1$. Dan volgt uit $negen = 9$ dat $g = 7$, en $tien = 10$ levert op dat $t = 9$.

Hoewel nog lang niet alles compleet is, kun je nu al zien dat het ergens mis zal gaan. Met wat we weten geldt namelijk dat $twintig = tw + nt + g = twee + tien + g = 2 + 10 + 7 = 19$. Dat klopt net niet helemaal!

Daarentegen klopt $eenentwintig = een + en + twintig = 1 + 1 + 19 = 21$ weer wel, net als alle andere getallen tussen twintig en dertig! Het is duidelijk dat het met de tientallen nooit meer kan kloppen, want $tig = 16$, dus met dertig, veertig, vijftig, et cetera, gaan we telkens de mist in.

De puntjes op de i

We gaan toch nog even verder om de kleinere aantallen goed te krijgen. Met $twee = 2$ volgt dat $w = -7$. Uit $elf = 11$ en $twaaft = 12$ volgt: $lf = 11$ en $aalf = 10$, dus $aa = -1$. Dan moet $a = -1/2$. Wel vervelend, zo'n breuk, maar het is niet anders. Nu kunnen we verder geen waarden meer bepalen. We hebben nog tien letters over: $c, d, f, h, j, l, r, s, v, z$, en nog zeven getallen: $drie, vier, vijf, zes, zeven, acht$ en elf .

De andere getallen tussen tien en twintig leveren geen extra informatie, want bijvoorbeeld $zestien = zes + tien = 6 + 10 = 16$ klopt automatisch als de kleinere getallen kloppen. De zeven getallen leveren zeven vergelijkingen:

$$\begin{aligned} d + r &= 3, & v + r &= 4, \\ v + j + f &= 5, & z + s &= 6, \\ z + v &= 6, & c + h &= -1/2, \\ l + f &= 11. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen leggen niet alle tien de letters vast. We kunnen er nog drie willekeurig kiezen en daarmee de rest uitrekenen. Kies bijvoorbeeld $h = 0$, $l = z = 4$, dan krijgen we tabel 1.

Met deze keuze kloppen alle getallen van nul tot en met negenentwintig, met uitzondering van twintig!

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2}, & h &= 0, & s &= 2, \\ c &= -\frac{1}{2}, & i &= 0, & t &= 9, \\ d &= 1, & j &= -4, & v &= 2, \\ e &= 0, & l &= 4, & w &= -7, \\ f &= 7, & n &= 1, & z &= 4, \\ g &= 7, & r &= 2, \end{aligned}$$

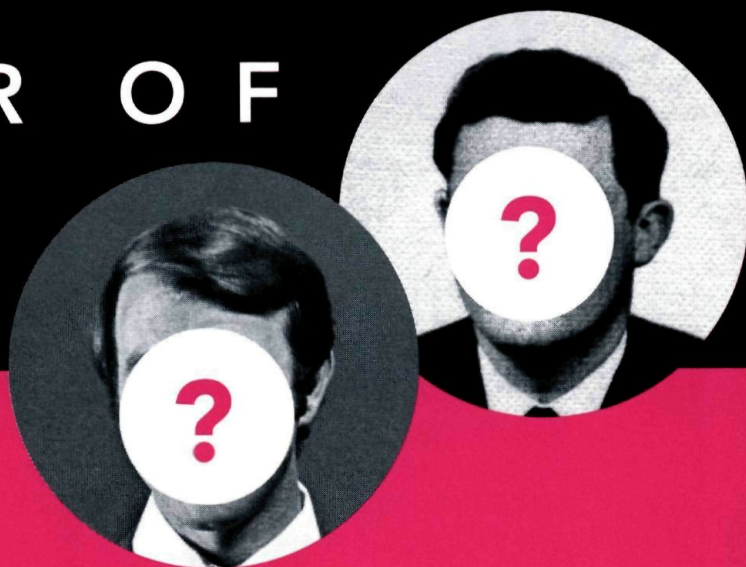
Tabel 1. De letters en hun waarde

Meer informatie

<http://www.pythagoras.nl> (nummerologie!)



AMERIKAANSE PRESIDENTS ★ VERKIEZINGEN ZUIVER OF NIET?



6

door Wim Albers en Michel Vellekoop

De laatste maanden is er nogal wat te doen geweest over de Amerikaanse presidentsverkiezingen van 2000. De twee belangrijkste kandidaten, Al Gore en George W. Bush bleken het landelijk ongeveer even goed te doen. De beslissing moest daarom vallen in de staat Florida. Daar wonen maar liefst zes miljoen stemgerechtigden en de verbijstering was groot toen na het tellen (en gedeeltelijk hertellen) van de stembiljetten bleek dat het verschil slechts 300 stemmen bedroeg. De helft van een honderdste van een honderdste oftewel 0.005% verschil. Ter vergelijking: dat komt erop neer dat bij een stemming met eenderde van de Nederlandse bevolking de beslissing valt door het stemgedrag in een paar Nederlandse straten!

Toevallig of niet?

Iedereen had het er meteen over hoe toevallig dit allemaal wel niet was. Zo toevallig zelfs dat alle regels die ooit voor de presidentsverkiezingen zijn vastgelegd nauwelijks meer uitkomst boden. Wiskundig gezien kun je je dan afvragen: hoe toevallig is zoiets nu eigenlijk? Het blijkt dat je daar, met behulp van wat kansrekening die helemaal niet zo ingewikkeld is, al best iets aardigs over kunt zeggen. Laten we er eens van uitgaan dat de kans dat iemand voor Bush stemt precies gelijk is aan $\frac{1}{2}$; in Amerika waren er ook andere kandidaten en de precieze kans weten we nooit, maar dit is een aardig begin. Stel dat we 6.000.000 munten opgooien met op de ene kant Bush en op de andere kant Gore (weer eens iets

anders dan de afbeelding van Beatrix). Gemiddeld zullen er dan zo'n 3.000.000 stemmen voor Gore en zo'n 3.000.000 stemmen voor Bush uitrollen. Maar omdat we munten opgooien en er dus wat onzekerheid in zit, zullen er nooit precies 3.000.000 stemmen voor beide uitkomen: in de praktijk zullen beide uitkomsten wel degelijk een verschil tonen.

De vraag is nu: wat is de kans dat het verschil minder dan 300 stemmen bedraagt? Waag voor je verder leest zelf maar eens een gokje. Denk je dat dit eens in de 10, eens in de 100 of eens in de 1000 verkiezingen voorkomt, of is het nog toevalliger?

OO Aan de slag

Nu gaan we aan de slag. Als we 6.000.000 munten werpen en de notatie G gebruiken voor het aantal stemmen op Gore, dan is het aantal stemmen voor Bush $6.000.000 - G$ (andere kandidaten laten we buiten beschouwing). Het aantal stemmen G modelleren we als 6.000.000 onafhankelijke trekkingen met succeskans $\frac{1}{2}$.

Dit geeft ons een binomiale verdeling $B(n = 6.000.000, p = \frac{1}{2})$. Zo'n verdeling heeft een gemiddelde van np , dat wil zeggen, $\frac{1}{2} \times 6.000.000 = 3.000.000$ stemmen.

De variantie is $np(1 - p)$, oftewel $6.000.000 \cdot \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = 1.500.000$ stemmen. Het verschil tussen de stemmen voor Gore en de stemmen voor Bush is dan $G - (6.000.000 - G) = 2G - 6.000.000$.

Die heeft dan een gemiddelde van nul (dat verwachtten we al). Wat is de variantie van $2G - 6.000.000$? Die is gelijk aan 4 maal de variantie van G , oftewel 6.000.000. De standaardafwijking van het verschil is de wortel uit 6.000.000 en dat is 2450 stemmen. Dus: als we 6.000.000 keren met de zuivere Gore-Bush munt gooien, dan heeft het verschil tussen de stemmen een gemiddelde nul en een standaardafwijking van 2450.

Hoe klein is nu de kans dat er slechts 300 stemmen verschil zijn? Om dat te berekenen gebruiken we het feit dat als je heel veel onafhankelijke muntuitskomsten optelt, het resultaat een verdeling heeft

die erg veel lijkt op een normale verdeling. De vraag wordt dan: wat is de kans dat een normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde $\mu = 0$ stemmen en standaardafwijking $\sigma = 2450$ stemmen slechts 300 stemmen (of minder) van nul afwijkt? We kunnen dit berekenen door van de variabele X zijn gemiddelde (nul) af te halen, en te delen door zijn standaardafwijking (2450). Wat er dan overblijft heeft een standaardnormale verdeling en die kunnen we opzoeken in een tabel. We vinden:

$$\begin{aligned} P(-300 < X < 300) \\ &= P\left(\frac{-300}{2450} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{300}{2450}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{300}{2450}\right) - \Phi\left(\frac{-300}{2450}\right) \approx 9.75\%. \end{aligned}$$

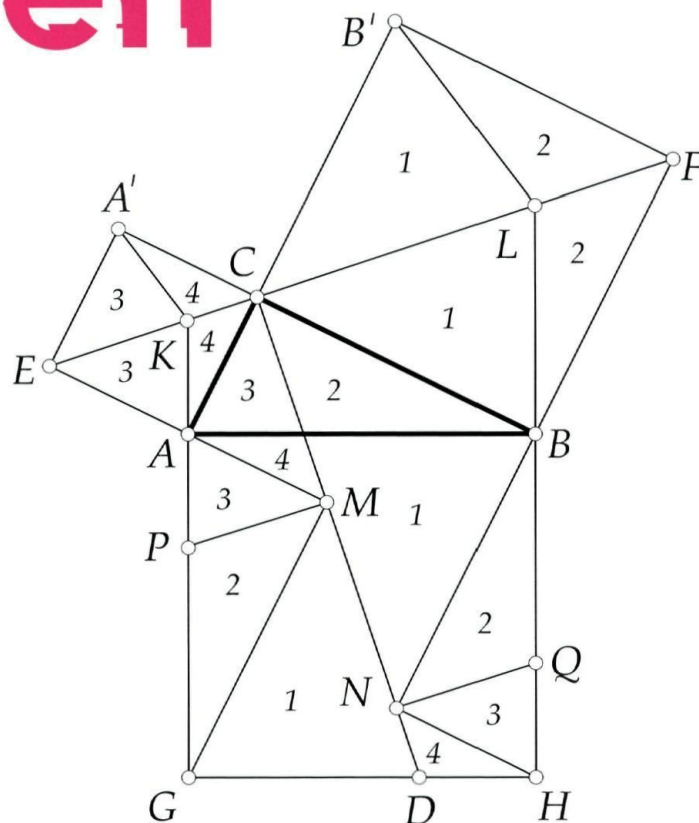
Oftewel: als we een zuivere munt gebruiken voor ons verkiezingsexperiment zal in een op de tien verkiezingen het stemmenverschil minder dan 300 stemmen bedragen! Ook al is dit slechts 0.005% van de uitgebrachte stemmen: zo toevallig is dit dus niet!

De praktijk

Wat zegt dit nu over de praktijk? Niet zo heel veel natuurlijk. Mensen stemmen niet met munten maar kiezen voor een kandidaat op andere gronden en niet zozeer het stemmen als wel het tellen geeft afwijkingen die onzekerheid met zich meebrengen. Bovendien kun je laten zien dat de situatie drastisch verandert als Bush en Gore ongelijke kansen hebben, dat wil zeggen, als je in ons experiment een onzuivere stembus gebruikt.

Neem je bijvoorbeeld aan dat Bush een kans van 50.5% heeft en Gore dus 49.5%, dan komt een verschil van minder dan 300 gemiddeld minder dan eens in de miljoen keer voor! Dit is een mooie illustratie dat 'toevallig' een breed begrip is dat, als je het met wiskunde hard wilt maken, meer behelst dan een simpele conclusie op grond van die 0.05%.

Knippen & schuiven



Figuur 1

door Bruno Ernst

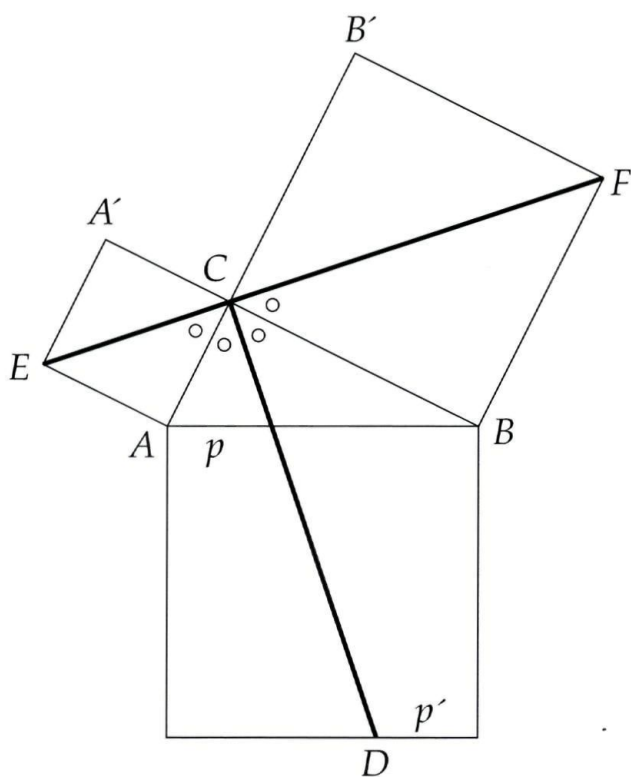
Er bestaan een heleboel bewijzen voor de stelling van Pythagoras. Bij een groot gedeelte daarvan worden de vierkanten op de rechthoekszijden in een aantal driehoekjes verdeeld die samen gelijk zijn aan driehoeken waarin het vierkant op de grote zijde is verdeeld. Op het eerste gezicht zijn deze bewijzen vrijwel allemaal saai en is er niets bijzonders aan te beleven. Ik heb er een uitgekozen die bij nader inzien opmerkelijk is. Bovendien geeft dit de gelegenheid om te tonen dat zo'n bewijs aanleiding kan zijn om geduldig te zoeken naar eigenschappen van een figuur die telkens van gedaante verandert bij het trekken van een nieuwe hulplijn. Dat is niet saai en laat zien dat de bedenker van het bewijs er lange tijd en met plezier aan gepuzzeld heeft.

Niet opzienbarend

Het uiteindelijke bewijs is in figuur 1 af te lezen. Door de hulplijnen zijn vier soorten driehoeken ontstaan. De driehoeken met hetzelfde cijfer zijn congruent en we nemen aan dat dit wel niet zo moeilijk aan te tonen is. Alle driehoeken die in het kleine vierkantje voorkomen, vinden we ook terug in het grote vierkant, waarmee de stelling van Pythagoras bewezen is. Niet echt interessant, en we kunnen de bladzijde omslaan om iets boeienders te zoeken.

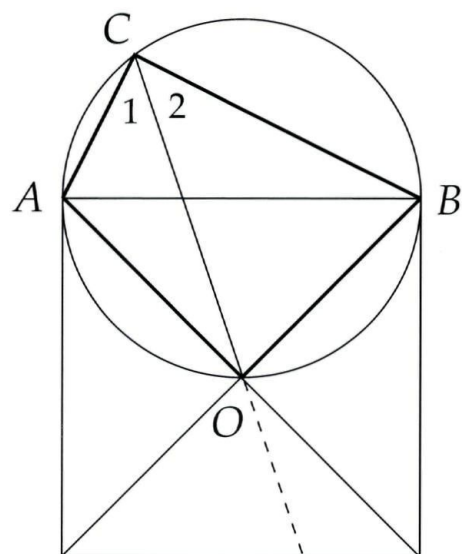
Een bijzondere configuratie

Maar wacht eens even; zoek eens naar het waarom van juist deze hulplijnen? Ze zijn zeker niet willekeurig en uit de lucht gevallen! De bedenker (in dit geval Epstein, die het



Figuur 2

bewijs in 1906 publiceerde) heeft eerst EF getrokken. Het is eenvoudig aan te tonen, dat EF door C gaat. Daarna de *deellijn* CD van de rechte hoek. Achteraf zal blijken dat daarin het bijzondere van dit bewijs schuilt. De lijnen EF en CD staan loodrecht op elkaar, want C is omringd door een krans van hoeken van 45 graden. Dit is op zich al een bijzonderheid van deze configuratie, die we ook tegenkomen in een bewijs dat is toegeschreven aan Leonardo da Vinci. Bij verdere overpeinzing ontdekken we nog een opmerkelijke eigenschap van de deellijn (figuur 2): ze verdeelt het grootste vierkant in twee gelijke delen. Om dit aan te tonen, hoeven we alleen maar te bewijzen dat $p = p'$. Dat zal zo zijn, als de deellijn door het midden van het vierkant gaat. Om dit te bewijzen, hebben we alleen een deel van de



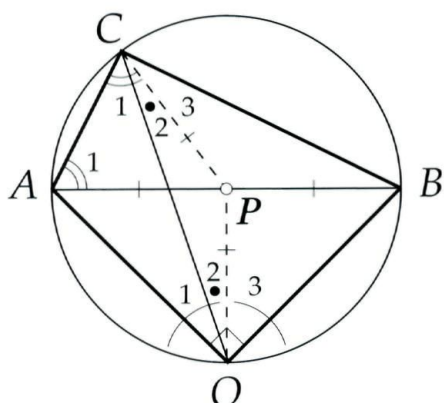
Figuur 3

figuur nodig (figuur 3). We trekken de diagonalen van het vierkant (snijpunt O). Het ligt een beetje voor de hand, dat we nu de omgeschreven cirkel trekken die door A , C , B en O gaat, en C met O verbinden. Nu blijkt dat $C_1 = C_2 = 45^\circ$, omdat zowel C_1 als C_2 op gelijke bogen van 90° staan.

Een alternatief bewijs

Maar moeten we wel die cirkel erbij halen? Het is nogal een zwaar middel en de gebruikte stelling (de stelling van Thales) wordt allang niet meer op de middelbare school onderwezen. We zullen het proberen: zie figuur 4. Daarin zijn alleen de twee rechthoekige driehoeken getekend. Het midden van AB is P . We trekken OP en CP , want daarmee komt een relatie tussen de twee rechthoekige drie-

Figuur 4

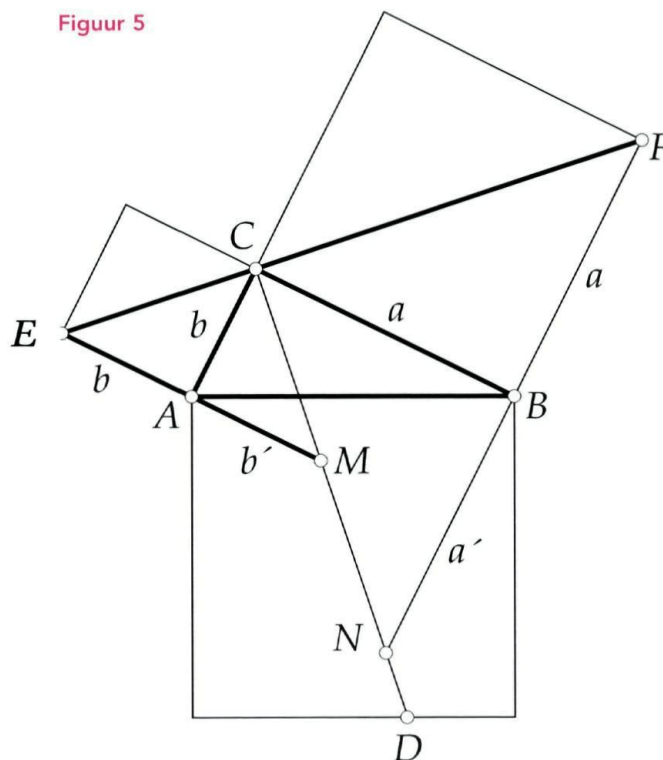


hoeken tot uiting: $AP = PB = PC = PO$. In de figuur zijn nu enige gelijkbenige driehoeken ontstaan (zie de tekenjes in de figuur). We moeten bewijzen, dat $C_1 - C_2 = 45^\circ$. We proberen het met driehoek OCA . De som van de hoeken moet 180° zijn, zodat: $(A_1 + A_2) + O_1 + C_1 - C_2 = 180^\circ$. Er volgt: $(A_1 + 45^\circ) + (45^\circ - O_2) + (A_1 - C_2) = 180^\circ$. Omdat $O_2 = C_2$ krijgen we: $2A_1 + 90^\circ - 2C_2 = 180^\circ$, zodat $A_1 - C_2 = 45^\circ$. Nu zijn we er: omdat $A_1 = C_1$ volgt $C_1 - C_2 = 45^\circ$. Wat we verwachtten is dus waar: de cirkel is niet nodig.

Epsteins bewijs

Het wordt een lang verhaal, want we gaan nu pas de twee volgende hulplijnen trekken die Epstein voor zijn bewijs nodig heeft. We verlengen b tot het snijpunt met de deellijn (figuur 5) en doen hetzelfde met a . Er ontstaan twee rechthoekig-gelijkbenige driehoeken: ECM en FCN . We zien dat de helften van deze driehoeken, namelijk CAM en CBN , gelijk zijn aan de helften van de vierkanten op de rechthoekszijden. Nu liggen delen van deze driehoeken in het vierkant op de schuine zijde, zodat we alleen nog de erbuiten liggende delen in het grote vierkant moeten onderbrengen om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Erg lastig is dat niet, maar het wordt onoverzichtelijk en gekunsteld: echt

Figuur 5



geen fraai bewijs, dat wil ik u graag besparen. Wat Epstein doet, is veel fraaier. Hij verbindt G met M en B met N , waardoor er in het grootste vierkant twee driehoeken ontstaan die congruent zijn met de oorspronkelijke driehoek ABC . Dat geeft weer stof voor verdere analyse van de nieuwe figuur, wat dan weer interessante relaties oplevert. Ik ga hier niet verder op in, omdat uit het voorgaande al duidelijk is hoeveel er te beleven valt aan de aandachtige bestudering van schijnbaar weinig interessante bewijzen. Ook de bedenker van zo'n bewijs heeft er in de meeste gevallen veel tijd aan besteed. We voltooien het bewijs van Epstein nu maar snel. We trekken MP en NQ loodrecht op de deellijn en verlengen we de verticale zijden van het grote vierkant tot ze EF in K en L snijden. Als we A' met K verbinden en B' met L is de hele figuur verdeeld in de kleinere driehoeken waarvan we de congruentie moeten bewijzen. Daar zal wel niemand die het voorgaande gevolgd heeft veel moeite mee hebben. En daarmee is het bewijs voltooid: de oppervlakte van beide kleine vierkanten samen bevat dezelfde driehoeken als het grote vierkant.

Op zoek naar M_{61}

In Pythagoras, februari 1997 staat een lijst met 35 priemgetallen van Mersenne. Dat zijn priemgetallen die geschreven kunnen worden in de vorm $2^n - 1$. Bij de rangnummers van M_{32} tot en met M_{35} werden vraagtekens geplaatst, omdat onbekend was of er tussen de uitkomsten ná M_{31} nog meer priemgetallen van Mersenne schuilen. Inmiddels kunnen aan die lijst worden toegevoegd M_{36} (Pythagoras december 1997), M_{37} en M_{38} (Pythagoras februari 2000). Ook deze drie rangnummers zullen van vraagtekens moeten worden voorzien.

Eeuwige roem

Het februarinummer stelt eeuwige roem in het vooruitzicht voor de ontdekker van M_{39} en bovendien 100.000 dollar, als de ontdekking tenminste 10.000.000 cijfers bevat. In dit artikel wil ik niemand die 100.000 dollar afhandig maken. Ik beperk mij tot een poging het rangnummer te bepalen van het eerste priemgetal van Mersenne met meer dan 10.000.000 cijfers.

Trend

Blijkbaar worden tussen M_1 en M_{31} geen nog onbekende priemgetallen van Mersenne aanwezig geacht (Pythagoras februari 1997). Dan kunnen we ons afvragen of op basis van die

31 paren van vaststaande gegevens in het verloop van de reeks een trend is te ontdekken. Anders en concreter geformuleerd: is er een numeriek verband vast te stellen tussen het rangnummer M en de exponent n ?

Statistische analyse

Uitgaande van een gegeven vergelijking van een rechte of kromme lijn kunen we een aantal punten in een grafiek opnemen en zo die lijn in beeld brengen. Het verband tussen de punten is dan zuiver functioneel, dat wil zeggen precies volgens de gegeven functie. In wiskundig-statistische analyses werken we in de omgekeerde volgorde. Een aantal uitkomsten van waarnemingen levert een even groot aantal punten op. Vervolgens onderzoeken we of er een wiskundig te formuleren lijn is, waarvan het verloop redelijk tot goed aansluit bij het verloop van de reeks punten. In dat geval spreken we van een zogenaamd 'stochastisch' verband. Het woord 'stochastisch' is uit het Grieks afkomstig en betekent dat in de variabelen toevalselementen aanwezig zijn. De punten liggen doorgaans niet op een lijn, maar in de naaste omgeving daarvan. Er is een trend zichtbaar (de algemene koers in het verloop van de puntenreeks), maar daaromheen treden positieve en negatieve afwijkingen op. Hoe men tot de keuze

<i>M</i>	<i>n</i>	<i>voor afronding</i>	<i>na afronding</i>
1	2	1.37	1
2	3	2.20	2
3	5	3.27	3
4	7	3.99	4
5	13	5.32	5
6	17	5.91	6
7	19	6.15	6
8	31	7.24	7
9	61	8.77	9
10	89	9.65	10
11	107	10.08	10
12	127	10.48	10
13	521	13.91	14
14	607	14.29	14
15	1279	16.20	16
16	2203	17.64	18
17	2281	17.73	18
18	3217	18.66	19
19	4253	19.43	19
20	4423	19.54	20
21	9689	21.76	22
22	9941	21.83	22
23	11213	22.18	22
24	19937	23.90	24
25	21701	24.15	24
26	23209	24.36	24
27	44497	26.40	26
28	86243	28.56	29
29	110503	29.41	29
30	132049	30.02	30
31	216091	31.77	32
32?	756839	36.62	37
33?	859433	37.15	37
34?	1257787	38.80	39
35?	1398269	39.27	39
36?	2976221	42.86	43
37?	3021377	42.93	43
38?	6972593	47.54	48

Tabel. De exponenten van de 38 bekende priemgetallen van Mersenne.

van de best passende trendlijn komt (een rechte of kromme lijn, welk type kromme lijn?), bespreken we hier niet.

Een trend voor Mersenne-priemen

De trend in de reeks van 31 gegevens lijkt redelijk goed te kunnen worden weergegeven door een kromme lijn met de vergelijking

$$n = ab^{M_c}M^2.$$

Deze vorm maken we wat beter hanteerbaar door hem te herleiden tot

$$\log n = \log a + M \log b + M^2 \log c.$$

Deze vergelijking draagt de naam logaritmische parabool. De numerieke constanten $\log a$, $\log b$ en $\log c$ kunnen worden berekend uit de 31 paren basisgegevens. We volstaan hier met de vermelding van het eindresultaat:

$$\log n = 0.00936525 + 0.21569987M - 0.00151353M^2.$$

Het gebruik van acht decimalen lijkt misschien wat overdreven, maar het gaat hier om logaritmen en verdere afronding zal vooral bij hogere waarden van M leiden tot te grote onnauwkeurigheden in de einduitkomsten voor n .

Toepassing

Ondanks al die decimalen is de gevonden relatie toch niet geschikt om priemgetallen van Mersenne te genereren. Het voortbestaan van de Great Internet Mersenne Prime Search komt dus niet gevaar! Allereerst leidt substitutie van gehele waarden van M tot gebroken waarden van n . Bovendien komen die uitkomsten slechts min of meer in de buurt van de exponenten van de priemgetallen. Voor $M=30$ bijvoorbeeld is de berekende exponent 131276 en de werkelijke exponent 132049. De relatieve afwijking is minder dan 1%, maar het absolute verschil tussen de twee exponenten is 773.

In omgekeerde richting lijkt de gevonden relatie wél tot praktisch bruikbare resultaten

te leiden. We kiezen bepaalde waarden voor n en berekenen de bijbehorende waarden van M . De lijst uit Pythagoras van februari 1997, aangevuld met enkele later bekend geworden uitkomsten, staat afgedrukt in tabel 1, onder toevoeging van de berekende waarden van M . In de tabel is M telkens berekend door het oplossen van een kwadratische vergelijking, die steeds twee positieve wortels blijkt te hebben. Daarvan is steeds de kleinste praktisch bruikbaar en de grootste niet. In het bekende traject M_1 tot en met M_{31} blijkt er een grote mate van overeenstemming te zijn tussen de kolom berekende waarden van M en de kolom rangnummers links in de tabel. Dan mogen we de gevonden relatie wel gebruiken voor extrapolatie, dat wil zeggen, toepassen in het min of meer onbekende gebied met waarden van M groter dan 31 en waarden van n groter dan 216091. Uit het laatste deel van de tabel zouden we de conclusie kunnen trekken, dat er tussen M_{31} en M_{32} uit de lijst van februari 1997 nog vier of vijf priemgetallen van Mersenne moeten schuilen.

100.000 dollar

Waar moeten we de kandidaten voor de prijs van 100.000 dollar zoeken? Als de vorm $2^n - 1$ tienmiljoen cijfers moet hebben, dan volgt de grootte van de exponent n uit: $n \log 2 = 10.000.000$. We vinden $n = 33.219.281$ en $\log n = 7.52139023$. Substitutie in de gevonden vergelijking brengt ons bij $M = 60.56$. Het gaat dus om de jacht op M_{61} . Daaruit volgt dan, dat er beneden M_{61} nog $60 - 38 = 22$ priemgetallen van Mersenne te vinden moeten zijn. De ontdekking van deze priemgetallen van Mersenne leveren vooralsnog geen geldelijke beloning op, wel eeuwige roem!

Meer informatie

<http://www.mersenne.org>

<http://www.utm.edu/research/primes/>

Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 67

Kan een getal dat bestaat uit drie enen en voor de rest alleen maar nullen, deelbaar zijn door 11?

Opgave 68

We beschouwen functies van de vorm $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Voor welke waarden van a , b en c geldt $f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3))$?

Adres

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
email: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 maart 2001. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing **zelf** vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het oktobernummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en
Allard Veldman.

Opgave 63

Bepaal alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt:

$$ab + 5 = c,$$

$$bc + 1 = a,$$

$$ca + 1 = b.$$

Oplossing. We trekken eerst de derde vergelijking van de tweede af en krijgen $c(b - a) = a - b$.

Hieruit volgt dat $c = -1$ of $a = b$.

1. Als $a = b$, wordt de eerste vergelijking $a^2 + 5 = c$ en de tweede $ac + 1 = a$. We vullen $c = a^2 + 5$ in de tweede vergelijking in en krijgen $a^3 + 5a + 1 = a$, dus $a(a^2 + 4) = -1$. Aangezien $a^2 + 4 \geq 4$, heeft deze vergelijking geen geheel-tallige oplossing.

2. Als $c = -1$, wordt de eerste vergelijking $ab + 5 = -1$, oftewel $ab = -6$, en de tweede $-b + 1 = a$. We vullen nu $a = 1 - b$ in de eerste vergelijking in en krijgen $-a^2 + a = -6$, dus $a^2 - a - 6 = 0$. Deze vergelijking heeft als oplossingen $a = -2$ en $a = 3$. Dit levert de volgende oplossingen voor a, b en c :

$$a = -2, \quad b = 3, \quad c = -1.$$

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = -1.$$

Deze opgave werd opgelost door:

Peter Deleu uit Hulste (België), Tim Wouters van het Vrij Katholiek Onderwijs te Opwijk (België), P. Dekker van de P.J. Evertseschool te Rotterdam, Sander Oosterom van het Buys Ballot College te Goes, H. Verdonk uit Den Haag, Janneke Wilting te Goes, Ruud Stolk van het Coenecoopcollege te Waddinxveen. De boekenbon gaat naar Sander Oosterom.

Opgave 64

Iemand heeft elk punt van het vlak een kleur gegeven. In totaal heeft hij 10 kleuren gebruikt. Bewijs dat er een oneindige verzameling verschillende driehoeken is die allemaal congruent zijn en waarvan alle hoekpunten dezelfde kleur hebben.

Oplossing. Voor deze opgave maken we gebruik van het *ladenprincipe*: als n ballen over $n - 1$ laden verdeeld worden, is er een lade waarin minstens twee ballen zitten. Een variant hiervan zegt dat als oneindig veel objecten eindig veel verschillende eigenschappen kunnen hebben, er een eigenschap is die oneindig veel objecten gemeen hebben. We verdelen nu het vlak in vierkanten van 1 bij 1. In elk vierkant trekken we een cirkel met diameter 1 en tekenen daar een regelmatige 21-hoek in. Elk van deze 21 punten heeft een kleur. Volgens het ladenprincipe is er een kleur die minstens drie keer voorkomt. Onder deze 21 punten bevindt zich dus een eenkleurige driehoek. Je kunt echter maar op eindig veel manieren uit 21 punten en 10 kleuren 3 punten en een kleur kiezen, terwijl je oneindig veel 21-hoeken hebt. Volgens de genoemde variant van het ladenprincipe is er dus een kleur en een vorm die bij oneindig veel driehoeken voorkomt en dit is precies wat we moesten bewijzen.

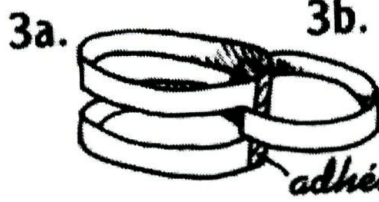
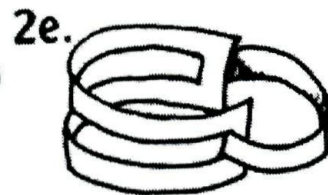
Deze opgave werd door niemand bevredigend opgelost.

approx. 2cm

1.



approx. 3cm



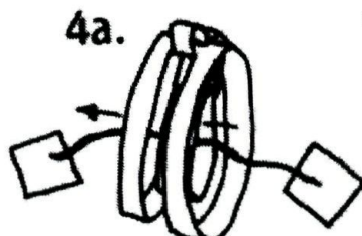
3b.



3c.



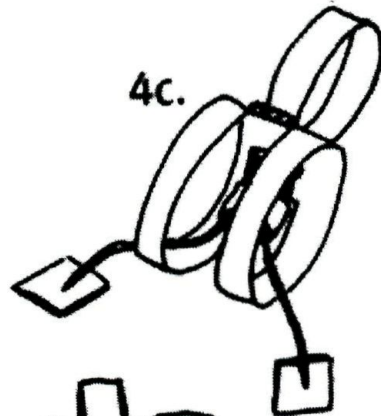
3d.



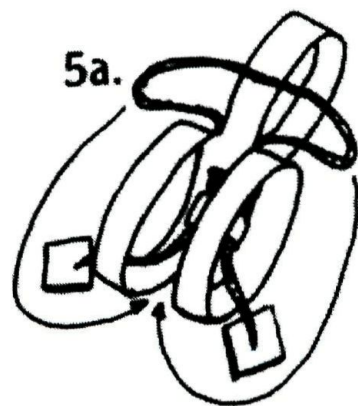
4b.



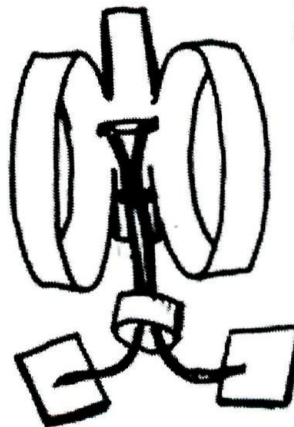
4c.



5a.



5b.



door Chris Zaal

De gamblo so dulo puzz zel

Deze topologische puzzel kun je heel eenvoudig zelf maken. Het enige wat je nodig hebt is een vel dun karton van A4-formaat, een stukje touw en plakband.

Gianni Sarcone en zijn partner Marie Waeber zijn de grondleggers van Archimedes' Laboratory, een Zwitsers bedrijfje dat wiskundige spelletjes uitvindt, creëert en ontwikkelt. Op hun prachtige website www.archimedes-lab.org vind je onder andere deze 'gambodulo' puzzel. Deze naam is Italiaans. Naar de betekenis

ervan kunnen we slechts gissen, want dit woord komt in geen enkel woordenboek voor. 'Gamba' betekent 'been', het zal dus zoiets zijn als een topologische puzzel met drie benen.

Aan de slag

Neem een vel A4-karton. Niet te dik, want je moet het goed kunnen buigen. Vouw dit vel in drieën, en knip er één strook af (figuur 2a). Ga verder met de afgeknipte strook. Maak hierin in de lengterichting twee inkepingen (figuur 2b & 2c). Maak uit het overige karton een ring van 2 cm in doorsnee (figuur 1) en twee vierkantjes van 3 cm bij 3 cm en maak die vast aan de uiteinden van een stuk touw van ongeveer 30 cm (figuur 1). Voer deze vierkantjes liefst dubbel uit (ze mogen niet kunnen buigen). Buig (figuur 2d) de papieren strook nu zó, dat je figuur 2e krijgt. Plak de uiteinden van de strook aan elkaar met plakband (figuur 3a). Maak op deze verbindingsplek een inkeping dwars op de lengterichting van de strook (figuur 3b). Duw de middelste ring van de Gambodulo door dit 'knoopsgat' (figuur 3c), en schuif de papieren ring om de binnenste buiten gekeerde ring (figuur 3d). Haal het touw met de vierkantjes door de binnenste buiten gekeerde ring (figuur 4a). Trek de middelste lus weer terug uit de inkeping (figuur 4b & 4c). Sla tenslotte de lus van het touw om de ringen van de puzzel heen (figuur 5a). Het eindresultaat zie je in figuur 5b.

Klaar!

Nu ben je klaar. Benader een slachtoffer met de vraag deze puzzel op te lossen, dat wil zeggen, de kartonnen ring te bevrijden!

Meer informatie

Gianni A. Sarcone, *Almanacco del matematico in erba*, Zwitserland, 2000. (een jaarlijks verschijnende publicatie, waarop men zich kan abonneren en waarvan iedereen kan bijdragen.)
<http://www.archimedes-lab.org>
email: archimedes_lab@hotmail.com

In het augustusnummer van Pythagoras verscheen een artikel over het volgende probleem: Ruud is vader van twee kinderen. Op een dag kom ik hem tegen met een jongetje. Ruud zegt: "Dit is mijn zoontje Tom." Hoe groot is nu de kans dat Ruud vader is van twee zonen?

door Ronald Meester

De kinde- ren van Ruud vervolg

18





Het artikel in het augustusnummer was bedoeld om een langslappende discussie af te ronden. Dat lijkt niet te zijn gelukt, gezien de reacties van onder andere Jan de Ruiter, Johan Hidding en Thomas W. de Boer. Daarom denk ik dat het zinvol is een tweede poging te doen om alle ongelovige Thomassen te overtuigen.

De conclusie van het artikel uit het augustusnummer was als volgt. Als we alleen maar weten dat Ruud tenminste één zoontje had, en verder weten we helemaal niets, dan is de kans dat Ruud vader van twee zonen is gelijk aan $1/3$. Als we echter Ruud vervolgens in het park zien wandelen met een zoontje aan zijn hand, dan is de gevraagde kans gelijk aan $1/2$.

Het verschil tussen deze twee uitkomsten werd door veel mensen niet geloofd. Immers, zo luidde hun redenering, als ik al weet dat Ruud tenminste één zoontje heeft, dan geeft het feit dat ik hem daarna in het park zie wandelen met een jongetje geen enkele extra informatie, want ik zie een zoontje waarvan ik al wist dat hij er was!

In dit artikel wordt aan de hand van een analogie met het trekken van kaarten uitgelegd waarom de twee antwoorden verschillen. In tegenstelling tot het vorige artikel wordt gebruik gemaakt van elementaire formules.

Vervolgens wordt geschetst hoe je zelf een computerprogramma kunt schrijven om je van de juistheid te overtuigen. Voor de notoire scepticus tenslotte, stel ik een spel voor waarvan de scepticus meent dat hij of zij daarmee geld kan verdienen, maar waarvan ik zeker weet dat ik ermee verdien. Ik nodig een ieder die nog twijfelt uit om dit spel met mij te spelen, met een zo hoog mogelijke inzet!

Het trekken van kaarten

Als we Ruud zien lopen met een jongetje, geeft dat echt andere informatie dan de mededeling dat Ruud tenminste één zoontje heeft? Om dit nogmaals te onderzoeken neem ik mijn toevlucht tot de volgende analogie. Stel ik heb een klein stapeltje van precies twee kaarten. De kaarten liggen met de rug naar boven, zodat ik niet kan zien of ze rood of zwart zijn. De kaarten zijn getrokken uit een hele grote stapel, zodat elke kaart met kans $1/2$ rood is, en met kans $1/2$ zwart, ongeacht de kleur van de andere kaart. Er zijn dus vier mogelijkheden, namelijk (van boven naar beneden) *RZ*, *RR*, *ZR* en *ZZ*. Stel nu dat gegeven is dat er tenminste één zwarte kaart tussen zit. De conditionele kans dat er twee zwarte kaarten zijn, gegeven dat er minstens één zwart is, berekenen we als volgt, waarbij bijvoorbeeld *RZ* staat voor de gebeurtenis dat de oorspronkelijke stapel uit een rode en een zwarte kaart bestond (van boven naar beneden):

$$\begin{aligned} P(ZZ|ZZ \text{ of } RZ \text{ of } ZR) \\ &= \frac{P(ZZ)}{P(ZZ \text{ of } ZR \text{ of } RZ)} \\ &= \frac{1/4}{3/4} = 1/3 \end{aligned}$$

Maar stel nu dat ik een kaart trek en deze blijkt zwart te zijn. Het feit dat ik uit de stapel van 2 een zwarte kaart trek, geeft nu extra informatie over de oorspronkelijke kaarten. Immers, als ik alleen maar weet dat er minstens één zwarte kaart bij zit, dan valt RR af, en ik heb geen enkele reden om onderscheid te maken tussen de andere mogelijkheden. Na het trekken van een zwarte kaart heb ik die reden wel, want nu valt de mogelijkheid af dat er eerst een rode en een zwarte kaart was, en daarna de rode getrokken is. Voor wie het gewoon wil berekenen, volgt hier het argument met wat elementaire kansrekening. In de berekening staat T_Z voor de gebeurtenis dat ik een zwarte kaart trek:

$$\begin{aligned} P(ZZ|T_Z) &= \frac{P(ZZ \text{ en } T_Z)}{P(T_Z)} \\ &= \frac{P(ZZ)}{P(T_Z|ZZ)P(ZZ) + P(T_Z|RZ)P(RZ) + P(T_Z|ZR)P(ZR)} \\ &= \frac{1/4}{1 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Een computerprogramma

We kunnen het probleem van Ruud ook heel eenvoudig simuleren op een computer. Op het eerste gezicht lijkt dat misschien moeilijk, want we hebben te maken met conditionele kansen. Als ik bijvoorbeeld het gooien met een munt wil simuleren, dan laat ik de computer een toevallig getal tussen 0 en 1 trekken. Als het getal kleiner is dan 1/2 dan noem ik het kop, als het groter is noem ik het munt.

Het simuleren van conditionele gebeurtenissen is niet veel moeilijker. Stel ik wil het gooien met een dobbelsteen simuleren, waarbij ik wil conditioneren op de gebeurtenis dat er geen 6 boven komt. Ik laat opnieuw de computer een getal tussen 0 en 1 trekken.

Een uitkomst tussen 0 en 1/6 noem ik 1, een uitkomst tussen 1/6 en 2/6 noem ik 2, et cetera. Als de uitkomst tussen 5/6 en 1 zit zou het die 6 moeten noemen, maar ik wil juist conditioneren op geen 6. Dus die uitkomst laat ik simpelweg vervallen. Een rijtje toevalsgetallen op de computer correspondeert dan met een (mogelijk korter) rijtje van het gooien met een dobbelsteen, geconditioneerd op geen 6.

Dit idee gebruiken we ook om het probleem van Ruud te simuleren. We beperken ons hier tot het geval waarin we Ruud met een jongetje zien lopen, het andere geval is nog makkelijker en gaat op dezelfde manier.

De stappen zijn als volgt:

- Laat de computer een toevallig gezin van twee kinderen kiezen. De vier mogelijkheden zijn *JJ*, *MJ*, *JM* en *MM*, elk met kans 1/4.
- Laat de computer één van de twee kinderen uitkie-





zen. Dit kind is het kind dat mee uit wandelen gaat.

- Als het uitgekozen kind een meisje is, dan vervalt deze poging, en beginnen we weer opnieuw.
- Als het uitgekozen kind een jongetje is, dan kijken we of het andere kind een jongetje is.

Dit herhalen we een groot aantal malen. Je zult zien dat na vele herhalingen blijkt, dat bij het laatste punt in ongeveer de helft van de gevallen het andere kind een jongetje is. Dit komt overeen met de kans die we hebben uitgerekend.

Een weddenschap

Wellicht zijn er nog steeds lezers die niet geloven dat de kans op nog een jongetje gelijk is aan $1/2$, nadat we Ruud met een jongetje in het park hebben zien lopen. Deze sceptici bied ik een weddenschap aan.

Zoals ik net heb uitgelegd, beweer ik dat de kans op nog een jongetje gelijk is aan $1/2$. Stel nu dat iemand daar heel anders over denkt. Stel maar even dat jij vindt dat deze kans gelijk is aan p , waarbij $p \neq 1/2$ natuurlijk. Laten we eerst aannemen dat $p < 1/2$. Wel, dan stel ik dan het volgende spel voor:

We gaan de straat op en spreken elke ouder aan die met een jongetje loopt. We vragen dan eerst of hij/zij precies twee kinderen heeft. Als dat niet zo is dan vragen we verder niets. Als dat wel zo is, dan vragen we of het andere kind ook een jongetje is. Als dat inderdaad zo is, dan ontvang ik $\frac{1-p}{p} + p - 1/2$ gulden van jou.

In het andere geval geef ik jou 1 gulden. Aangezien jij beweert dat de kans op een ander jongetje gelijk is aan p , is de verwachte opbrengst per keer voor jou gelijk aan:

$$(1-p) \cdot 1 - p \cdot \left(\frac{1-p}{p} + p - 1/2 \right) \\ = -p(p - 1/2) > 0$$

Dit betekent dat jij denkt dat je kunt winnen met dit spel en dat je het vast wel wilt spelen. Aangezien ik zeker weet dat de kans op een tweede jongetje gelijk is aan $1/2$, is mijn verwachte opbrengst gelijk aan:

$$1/2 \cdot \left(\frac{1-p}{p} + p - 1/2 \right) - 1/2 \cdot 1.$$

Welke p met $0 \leq p < \frac{1}{2}$ je ook neemt, dit is altijd groter dan nul. Ik weet dus dat ik ga winnen. Voor $p > 1/2$ is er ook zo'n weddenschap te bedenken, maar dat laat ik graag aan de lezer over. Dus wil de eerste kandidaat zich zo snel mogelijk bij mij melden?

meester@math.uu.nl

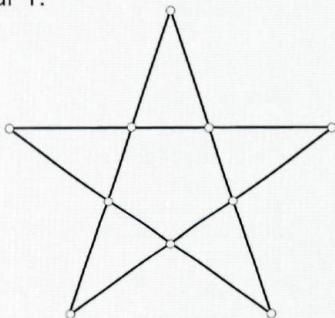
Het getal



22

De Pythagoreeërs associeerden het getal 5 met het huwelijk, omdat het de som is van 2 en 3. Volgens hun beleving was 2 het eerste vrouwelijke getal, en 3 het eerste mannelijke getal. Ook noemden zij 5 de natuur, omdat het bij vermenigvuldiging met zichzelf op zichzelf eindigt.

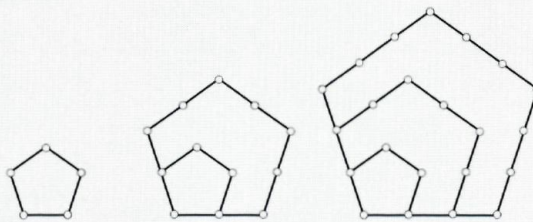
De Pythagoreeërs toonden een bijzondere voorkeur voor figuren waaraan het getal vijf ten grondslag ligt. Het herkenningsteken van hun genootschap was de stervormige vijfhoek. Het hart van dit symbool wordt gevormd door een regelmatige vijfhoek. Zie figuur 1.



Figuur 1

Het pentagram was het herkenningsteken voor de Pythagoreeërs.

Voor de Pythagoreeërs waren de vijfhoeksgetalen een van de vele soorten veelhoeksgetalen. Drie is het eerste driehoeksgetal, vier het eerste vierhoeksgetal, vijf het eerste vijfhoeksgetal. De driehoeksgetalen zijn in het decemберnummer van Pythagoras behandeld. Vijfhoeksgetalen zijn getallen die zich in een regelmatige vijfhoek laten rangschikken. Door aan een vijfhoek een rand toe te voegen ontstaat een volgend vijfhoeksgetal. Zie figuur 2.



Figuur 2

Hoe de eerste drie 5- hoeksgetalen ontstaan.

Als men het getal 1 toevoegt als het eerste vijfhoeksgetal dan zijn de eerste vijfhoeksgetalen: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, ...

Formule

De getallen in bovenstaande rij vind je ook als volgt:

1e vijfhoeksgetal = 1,

2e vijfhoeksgetal = 1 + 4 = 5,

3e vijfhoeksgetal = 1 + 4 + 7 = 12,

4e vijfhoeksgetal = 1 + 4 + 7 + 10 = 22.

Het vijfde vijfhoeksgetal vinden we door 13 op te tellen bij het vierde vijfhoeksgetal en is dus gelijk aan $22 + 13 = 35$. Als we naar deze sommen kijken, zien we dat we steeds het laatste getal plus 3 erbij moeten optellen om het volgende vijfhoeksgetal te krijgen. Om het n -de vijfhoeksgetal te vinden kunnen we de formule gebruiken:

$$F_n^5 = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

De vijf boven de F duidt aan dat we met vijfhoeksgetalen te maken hebben. De formule voor driehoeksgetalen luidt

$$F_n^3 = (n^2 + n)/2.$$

Opgave 1. Leid deze formule voor vijfhoeksgetalen af.

Onverwachte verbanden

Wanneer we de formule F_n^5 ook gebruiken voor negatieve n , dan krijgen we

..., 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, ...

Bij ordening van klein naar groot krijgen we de rij 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, ... De verschillen van deze rij vormen ook een patroon:

1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, ...

De verschillen op de oneven plaatsen vormen de rij 1, 2, 3, 4, 5, ... en die op de even plaatsen de rij 1, 3, 5, 7, 9, ... Een fraaie stelling, ontdekt door Euler, maakt op verrassende wijze gebruik van de tweezijdig voortgezette rij. Hij begon het oneindig produkt

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...$$

te berekenen en ontdekte dat de eerste termen luidden:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ...$$

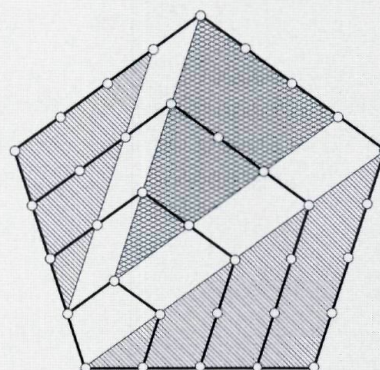
De oneven exponenten zijn juist de vijfhoeksgetalen. Dat vijfhoeksgetalen op onverwachte plaatsen weer opduiken wisten de oude Grieken niet, maar ze zouden het zeker gewaardeerd hebben. Het verband tussen de vijfhoeksgetalen en de driehoeksgetalen wordt duidelijk in onderstaand plaatje. Daarin zijn de stippen onderverdeeld in drie driehoeken die op hun beurt weer driehoeksgetalen zijn. Dan moet wel gelden:

$$F_n^5 = F_n^3 + 2 \cdot F_{n-1}^3.$$

Zie figuur 3.

Opgave 2. Ga na dat $F_n^5 = F_n^3 + 2 \cdot F_{n-1}^3$.

Opgave 3. Wat is de relatie tussen zeshoeksgetalen en driehoeksgetalen?



Figuur 3

Het vierde vijfhoeksgetal als som van driehoeksgetalen

De oplossingen van de vraagstukken kun je vinden in het volgende nummer van Pythagoras.

Bronnen

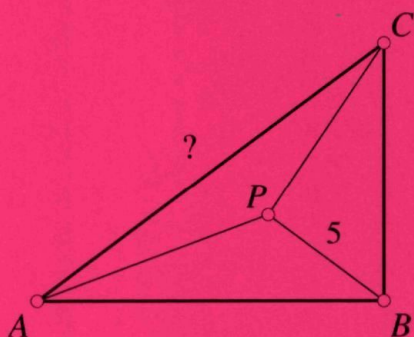
1. Constance Reid, *Van nul tot oneindig*, Prisma boeken, 1965.
2. David Wells, *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, Uitgeverij Bert Bakker, 1987.

Problemen

door **Dion Gijswijt**

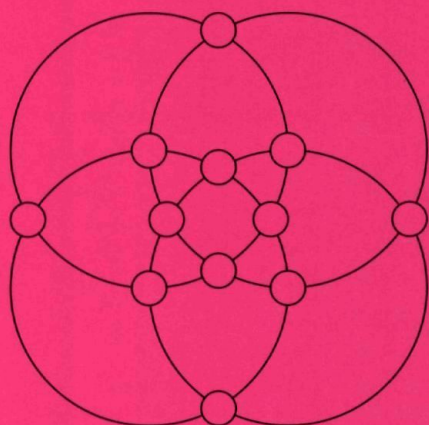
Schuine zijde

Een rechthoekige driehoek is in drie driehoeken van gelijke oppervlakte verdeeld (zie de figuur). De lengte van BP is 5. Wat is de lengte van de schuine zijde AC ?



Cijfersom

Verdeel de getallen 1 tot en met 12 op zo'n manier over de twaalf snijpunten van de vier cirkels, dat de som van de cijfers op elke cirkel gelijk is.

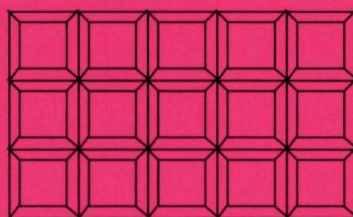


Pincode

Hoeveel pincodes zijn er van vier verschillende cijfers die in stijgende volgorde staan?

Chocolade breken

Fokko en Vincent hebben een tablet chocola dat uit 3 maal 5 vierkante blokjes bestaat. Ze kunnen het tablet alleen langs de lijnen breken. Omdat ze de chocola niet eerlijk kunnen verdelen spelen ze een spel; de winnaar krijgt 8 van de blokjes, de verliezer 7. Fokko begint en mag het tablet in tweeën breken. Daarna breken Vincent en Fokko om de beurt een of meer van de stukken chocola doormidden. De winnaar is degene die na zijn beurt 15 losse blokjes chocola over laat. Wie heeft er een winnende strategie?



Verborgene hoekpunten

Is het mogelijk om zes balken op zo'n manier in de ruimte te plaatsen dat er een punt is van waaruit geen van de 48 hoekpunten van de zes balken te zien zijn?

Oplossingen

nr.2

door **Dion Gijswijt**

Eenentwintig

De enige (ons) bekende oplossing is:

$$\frac{6}{1 - \frac{5}{7}} = 21.$$

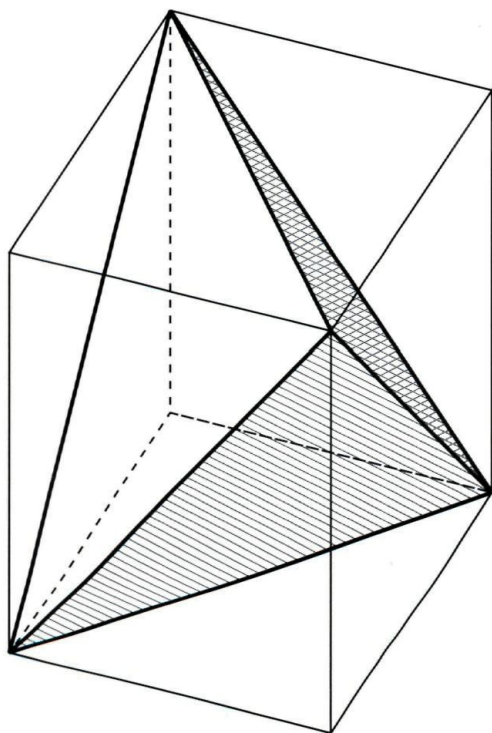
Verborgen rechthoeken

Iedere verborgen rechthoek correspondeert met twee verschillende verticale lijnen en twee verschillende horizontale lijnen die de rechthoek begrenzen.

Er zijn $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ paren verschillende verticale lijnen en evenzoveel paren verschillende horizontale lijnen. In totaal zijn er dus $10 \times 10 = 100$ rechthoeken in de figuur verstopt.

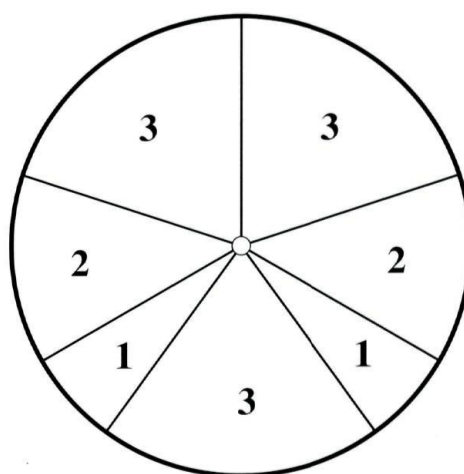
Tetraëder

De vier hoekpunten (0,0,0), (1,1,0), (1,0,1) en (0,1,1) van de eenheidskubus vormen een tetraëder.



Goudstaven

De staven wegen 1, 1, 2, 2, 3, 3 en 3 kilo.



Cijfersom

We bekijken alleen de getallen waarvan alle cijfers ongelijk zijn aan 0. Noem het aantal van deze getallen waarvan de som van de cijfers gelijk aan 1 is $S(1)$, het aantal met cijfersom 2 is $S(2)$, enzovoort.

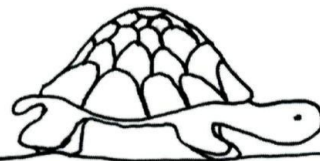
Van de getallen met cijfersom 9 beginnen er $S(8)$ met een 1, $S(7)$ met een twee, ..., $S(1)$ met een 8 en één getal begint met een 9. Dus $S(9) = 1 + S(1) + S(2) + \dots + S(8)$. Op dezelfde manier is $S(7) = 1 + S(1) + \dots + S(6)$, et cetera.

Omdat $S(1) = 1$, zien we dat $S(2) = 1 + 1 = 2$, $S(3) = 1 + 1 + 2 = 4$, $S(4) = 8$, $S(5) = 16$ en tenslotte $S(9) = 128$.

Omdat 10 geen cijfer is, is $S(10) = S(1) + \dots + S(9) = 511$. Net zo: $S(11) = S(2) + \dots + S(10) = 1021$.

De meetkun

door Klaas Pieter Hart



Rijstkorrels tellen en paradoxen ontrafelen; met de meet

26

In het decembernummer van de vorige jaargang van Pythagoras staat beschreven hoe de bedenker van het schaakspel voor zijn uitvinding beloond wilde worden. Voor het eerste vakje van het schaakbord één graankorrel, voor het tweede vakje twee korrels, voor het derde vakje vier, voor het vierde vakje acht enzovoort, voor elk vakje het dubbele van wat hij voor het vorige vakje kreeg. Als je opschrijft wat dat betekent kom je op $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$ graankorrels.

Achilles en de schildpad

De bekende paradox van Zeno vertelt van de Griekse held Achilles, die een schildpad niet kan inhalen. Want als Achilles de plek bereikt waar de schildpad startte, is deze al wat opgeschoten. Als Achilles daar komt is de schildpad weer iets verder weg, enzovoort. Achilles moet oneindig veel stukjes overbruggen om de schildpad in te halen en dat kost oneindig veel tijd. Aan de andere kant: als we Achilles en de schildpad echt tegen elkaar laten lopen, zien we dat Achilles met gemak de schildpad in kan halen.

Laten we Zeno's verhaal eens in getallen vertalen. Neem, om de gedachten te bepalen, eens aan dat Achilles 2 m/s loopt en de schildpad met een snelheid van 1 m/s. Verder geven we de schildpad 2 meter voorsprong. Om tot het startpunt van de schildpad te komen heeft Achilles 1 secon-

de nodig — de schildpad is dan één meter verder. Om tot dat tweede punt te komen heeft Achilles een halve seconde nodig, maar dan is de schildpad alweer een halve meter verder.

Die halve meter kost Achilles een kwart seconde, waarin de schildpad een kwart meter verder komt. Als ze zo door blijven lopen zal Achilles

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

seconden nodig hebben om de schildpad in te halen.

Je ziet hier een som van machten van één en hetzelfde getal (machten van $\frac{1}{2}$), net als bij het schaakbord (machten van 2). Voor die som maken een mooie formule en we zullen ook laten zien hoe je die kunt gebruiken.

De formule

We zijn nu twee keer een som van de vorm $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ tegen gekomen. De formule waar het ons deze keer om gaat is die voor $S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Die bepalen we op bijna dezelfde manier als bij de rekenkundige reeks uit de vorige Pythagoras:

$$\begin{array}{r} xS = x^{n+1} + x^n + \dots + x \\ S = x^n + \dots + x + 1 - \\ \hline xS - S = x^{n+1} - 1 \end{array}$$

d i g e r e e k s



kundige reeks kun je heel verschillende dingen doen...

We concluderen dat $S(x-1) = x^{n+1} - 1$, zodat $S = (x^{n+1} - 1) / (x - 1)$. Dus:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

We kunnen ook kijken wat gebeurt als we n heel groot laten worden (de limiet voor n naar oneindig nemen). Als x niet al te groot is, gebeurt er iets interessants. Is namelijk $-1 < x < 1$, dan wordt voor grote n de waarde x^{n+1} heel klein. De term x^{n+1} in de formule voor S wordt steeds minder belangrijk en de oneindig lange som $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ krijgt dan een vaste, eindige waarde:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}.$$

Twee voorbeelden:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2}.$$

Hoeveel graankorrels?

Het aantal rijstkorrels dat de bedenker van het schaakspel wilde hebben was $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$. Volgens onze formule is dat gelijk aan $2^{64} - 1$ rijstkorrels ($x = 2$ en $n = 63$).

Zoals in Pythagoras december 1999 beschreven stond, is dit een heel groot aantal. Helemaal uitgeschreven:

18.446.744.073.709.551.615.

Meer dan 18×10^{18} dus. Op mijn keukenweegschaal wegen 100 rijstkorrels ongeveer

één gram. De bedenker van het schaakspel vroeg dus om meer dan 18×10^{16} gram rijst, meer dan 10^{11} ton! Ter vergelijking: de wereldproductie in 1989 – 1990 was 3.41×10^8 ton.

Opgave Stel je ouders het volgende voor: deze week krijg je één cent zakgeld, volgende week twee, dan vier, elke week het dubbele van de voorgaande week en zo een jaar lang. Wanneer zou je net zo rijk worden als Bill Gates?

De paradox weerlegd

Hoe zit het met Achilles en de schildpad? Achilles loopt 1 m/s harder dan de schildpad, die 2 meter voorsprong had. Na twee seconden heeft Achilles die voorsprong dus ingehaald.

Maar hoe zit het dan met de oneindige som? Die heeft, omdat $-1 < \frac{1}{2} < 1$, een eindige waarde! Vul $x = \frac{1}{2}$ maar in de formule in:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Dat is precies de tijd die we daarnet ook al hadden uitgerekend.

Met deze paradox probeerde Zeno aan te geven dat rekenen met 'oneindig' tot rare dingen kan leiden: oneindig veel tijdsintervallen bij elkaar optellen en toch een eindige tijdsduur overhouden.

Beeld puzzel

door Chris Zaal

Op de figuur hiernaast zie je een kunstwerk gemaakt door Ton Schotten uit Heerhugowaard. Het zijn vormpjes die uit hout gefiguurzaagd zijn. Met een beetje goede wil zijn in de vormen mens- en dierfiguren te herkennen: een kreeft, een schorpioen, vissen, tweelingen, een stier.

Waar doen deze vormen je aan denken? Juist, aan de sterrenbeelden uit de horoscoop. Kijk maar eens of je de andere figuren herkent als sterrenbeeld. Ton Schotten noemde dit kunstwerk 'Pentomino zodiak'. 'Zodiak' is een moeilijk woord voor de dierenriem.

Pentomino zodiak

Wat heeft dit figuurzaagwerk nu met wiskunde te maken? De titel geeft ons weer een hint: pentomino's. In het februari-nummer van 2000 zijn pentomino's al eerder behandeld: het zijn precies alle vormen die je kunt samenstellen uit vijf gelijke vierkantjes. Er zijn ook precies twaalf verschillende pentomino's, zie figuur 1.

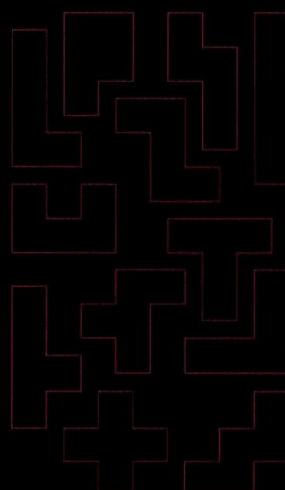
Er zijn ook precies twaalf sterrenbeelden. Dat bracht Ton Schotten op het idee de twaalf pentomino's uit te voeren

als sterrenbeeld. Het resultaat is een decoratieve legpuzzel bestaande uit twaalf stukjes.

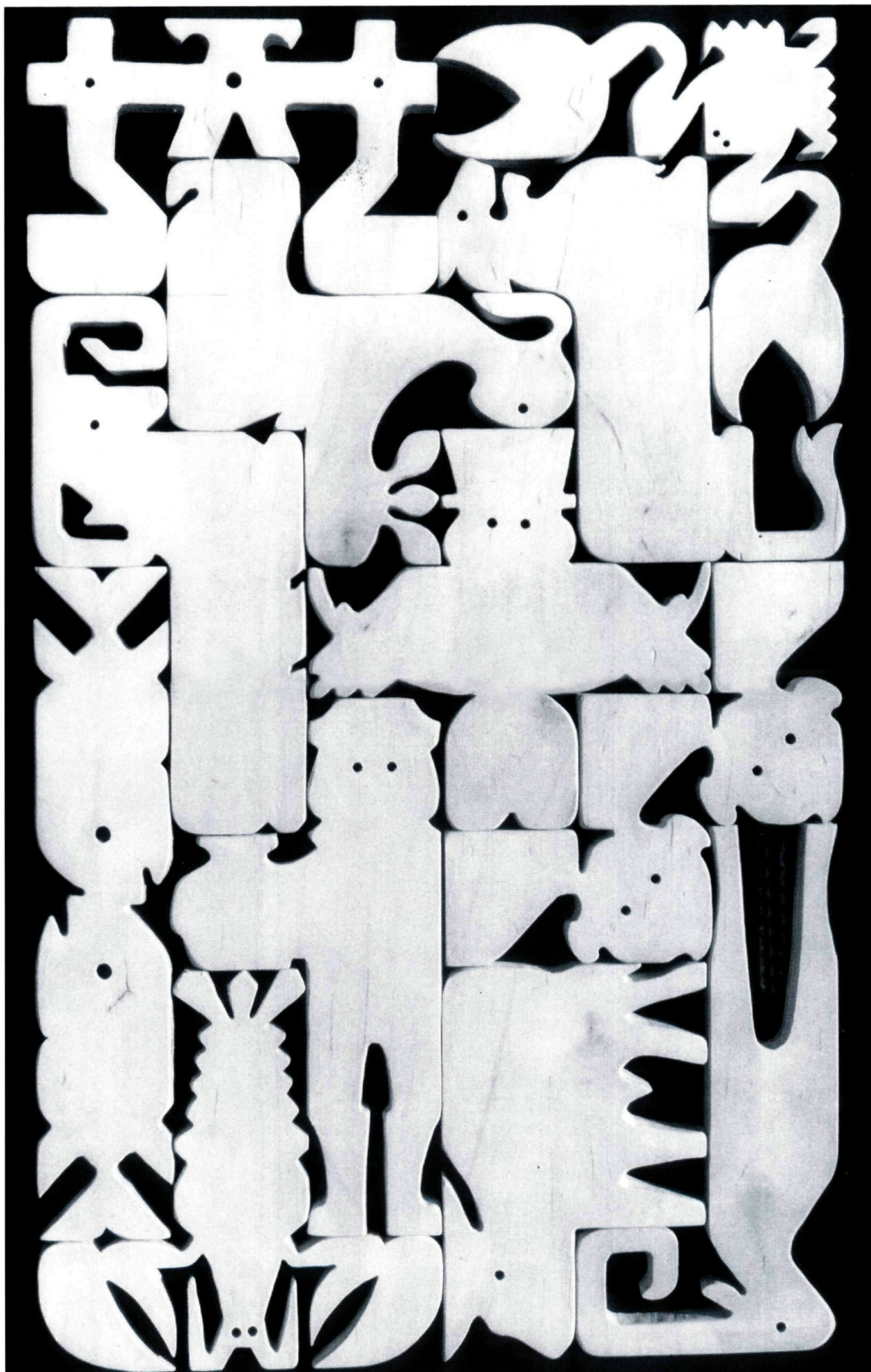
De twaalf sterrenbeelden passen precies in een rechthoek van 6 bij 10, zoals je kunt zien in de afbeelding. Dit is echter maar een van de vele manieren waarop je de pentomino-stukjes kunt rangschikken in een 6 bij 10 rechthoek. Kun jij een andere manier vinden?

Meer informatie

De pentomino-links op de homepage van Pythagoras (klik: links $\mapsto$ onderwerpen $\mapsto$ pentomino's).



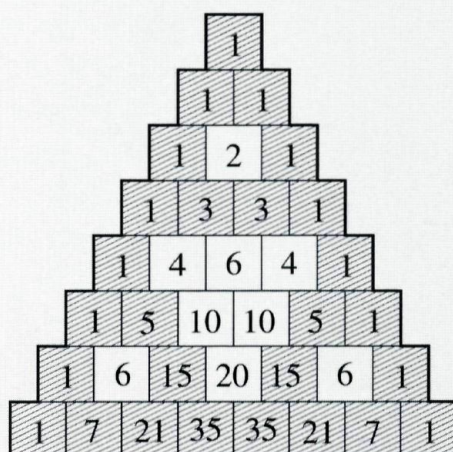
Figuur 1.
De 12 pentomino's:
L, P, Z, N, I,
U, T, Y, F,
V, X en W.



De post

De driehoek van Pascal

In de figuur zie je de eerste zeven rijen van de driehoek van Pascal (zie het april- en augustusnummer van 2000). De driehoek is opgebouwd volgens de regel dat elk getal in de driehoek gelijk is aan de som van de twee getallen erboven.



De driehoek van Pascal bevat veel mooie getalpatronen. Onder de rij enen aan de rechterrاند zie je de natuurlijke getallen (1, 2, 3, ...), daaronder de driehoeksgetalen (1, 3, 6, 10, ...). Ook kun je de kwadraten, machten van 2 en de rij van Fibonacci in de driehoek terugvinden. Van **J. Leguijt** uit Willemstad ontving de redactie nog een eigenschap van de driehoek van Pascal, die met priemgetallen te maken heeft. Hiervoor bekijken we de driehoek van Pascal zonder de enen aan de rand. Als een rij uit deze driehoek begint met een priemgetal p , dan zijn alle getallen uit de rij deelbaar door p .

En als een rij begint met een getal dat geen priemgetal is, dan zijn niet alle getallen uit de rij er door deelbaar. Zo zijn 5 en 10 deelbaar door 5 en zijn 7, 21 en 35 deelbaar door 7. Maar 6 is niet deelbaar door 4 en 15 is niet deelbaar door 6.

Letter-cijfer puzzel

Van **Job van de Groep** uit Vianen ontving de redactie de volgende leuke letter-cijfer puzzel. De puzzel heeft een unieke oplossing. Wie vindt die?

Vervang de letters van de woorden 'wilt ge er een?' door cijfers zó, dat het product van de vier getallen een getal van tien cijfers geeft, dat bestaat uit alle cijfers van 0 tot en met 9 en dat deelbaar is door alle getallen van 2 tot en met 18 alsmede door 7072. Het woord 'wilt' is een product van twee ondeelbare factoren, en $n = 3$.

Website

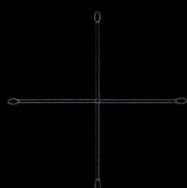
Willem van Ravenstein heeft een prachtige wiskunde-website over onder andere het getal π , kansrekening en cryptosystemen (geheimtaal). Behalve heel veel informatie en uitleg kun je hier ook materiaal vinden voor werkstukken of praktische opdrachten. Het adres is: <http://skyline.www.cistron.nl>

Oplossingen nr. 2

nootjes nr. 2

Lucifers

Als je de onderste lucifer een beetje omlaag schuift ontstaat in het midden een klein vierkantje. Dat is de oplossing.



Ra, ra

Niets. Doden eten niets, en als de levenden niets eten, dan gaan ze dood.

Maanden

Alle twaalf maanden hebben 28 dagen (of meer).

Magische bal

Bianca gooit de bal precies omhoog. Dan vliegt de bal langs precies dezelfde weg terug (naar beneden).

Tijd

Het is 5-6-1978, 02.34 uur. In dit tijdstip komen alle cijfers voor, van 0 tot en met 9.

Bomalarm

Als je gaat vliegen, maak je de kans dat er nog een bom aan boord is niet kleiner door er zelf een mee te smokkelen. De kans dat iemand anders een bom meeneemt is onafhankelijk van je eigen gedrag. Je had net zo goed een olifant mee kunnen nemen.

Oplossingen 'Het getal 2'

1. $30_{10} = 11110_2$

2. $1_2 + 1_2 = 10_2$ en $1_2 \times 1_2 = 1_2$

3. $11110_2 + 1111_2 = 101100_2$

4. $11011_2 \times 101101_2 = 1001011111_2$

Oplossing 'ontsnapt'

1



2



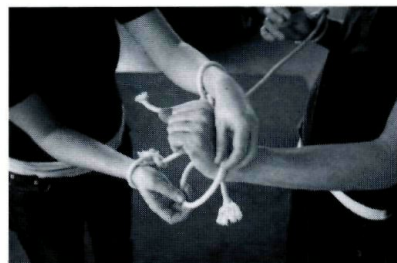
3



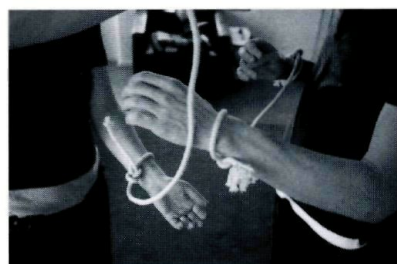
4



5



6



Activiteiten

do 1 en di 13 februari **Proefstudeerdagen**
bij alle opleidingen TU Delftopleiding Technische
Wiskunde, Mekelweg 4 te Delft
tel. 015 - 278 2988
email: [//www.informatie@its.tudelft.nl](http://www.informatie@its.tudelft.nl)

vr 2 en za 3 februari **Nationale Wiskunde Dagen**
Congrescentrum de Leeuwenhorst, Noordwijkerhout
tel. 030 - 2611611,
http: [//www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)

maandag 5 februari **Beta-collegemiddag 5/6-vwo, Universiteit Utrecht**
tel. 030 - 2532670,
http: [//www.uu.nl](http://www.uu.nl)

do 22 februari **Proefstuderen Universiteit Leiden**
http: [//www.leidenuniv.nl/studiesite/](http://www.leidenuniv.nl/studiesite/)

zaterdag 10 maart **Voorlichtingsdag Universiteit Leiden**
http: [//www.leidenuniv.nl/studiesite/](http://www.leidenuniv.nl/studiesite/)

vrijdag 16 maart **Kangoeroewedstrijd**
Wiskundewedstrijd voor klassen 1, 2, 3 en 4
http: [//www.win.tue.nl/~marco/kangoeroe](http://www.win.tue.nl/~marco/kangoeroe)

vrijdag 16 maart mastercourse **Patronen en golven**
UvA, afdeling Wiskunde / Statistiek / Natuurkunde /
Sterrenkunde. Voor docenten wis- en natuurkunde.
Deze cursus biedt goede aanknopingspunten voor pro-
fielwerkstukken en praktische opdrachten.
tel. 020 - 5255074
e-mail: kattie@wins.uva.nl (Kattie Schoot)

zaterdag 17 maart **Voorlichtingsdag 5/6-vwo Universiteit Utrecht**
tel. 030-2532670,
http: [//www.uu.nl](http://www.uu.nl)

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskundeafdelingen van de Universiteit van Amsterdam, TU Delft en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar.

Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2000-2001

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 39,50. Losse nummers f 8,50 of BF 160.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 850,

Pythagoras buitenland f 54,50.

Pythagoras én Archimedes f 69,50,

Pythagoras én Archimedes België BF 1470,

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Prijs: f 27,50/ BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

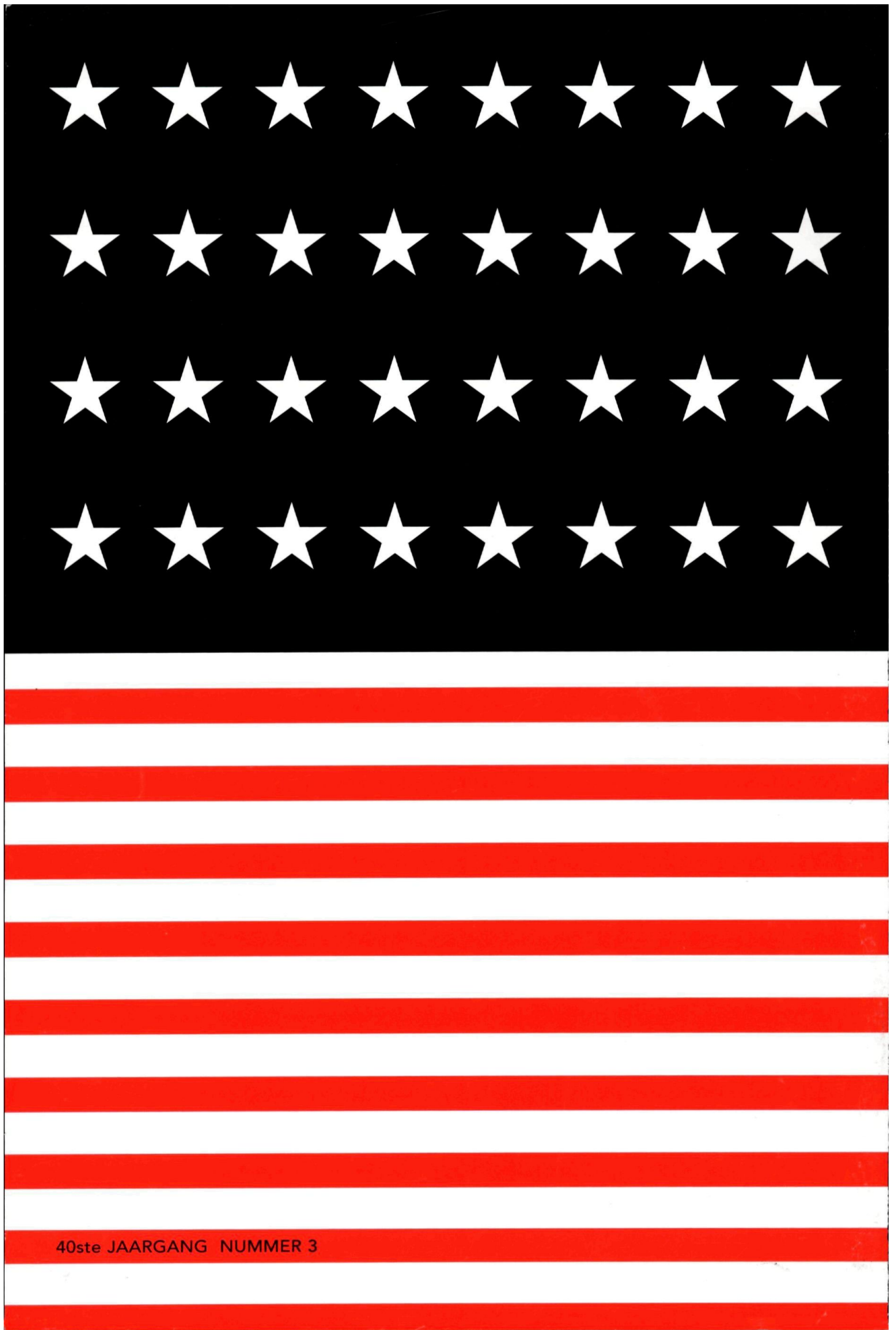
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Prijs: f 32,50 /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.

Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37, 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) jaargang 39 (37,50 excl. verzending) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).



40ste JAARGANG NUMMER 3