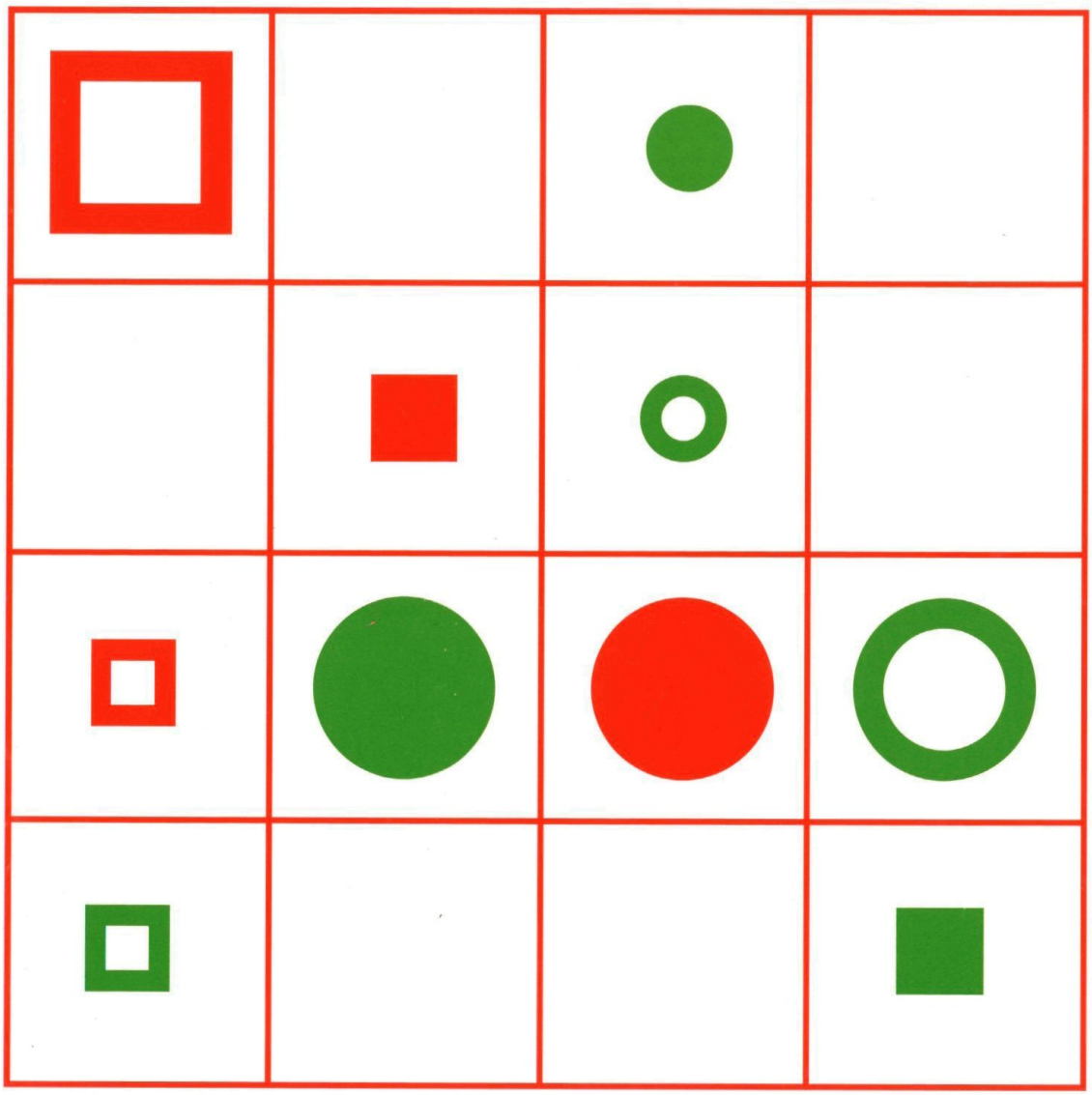
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN APRIL 2001

COLOFON

Uitgave
Pythagoras is een uitgave van
het Wiskundig Genootschap
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van septem-
ber tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

WWW
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie
Chris Zaal

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij
Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras
gaan vergezeld van rondjes
die de moeilijkheidsgraad
aangeven.
Nul rondjes betekent:
geen enkele wiskundige
voorkennis vereist;
1 rondje ^{o}: voor iedereen van
af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je
kennis uit de vijfde of zesde
klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net
iets verder dan de middelbare
schoolstof.

MEDEWERKERS

drs. S. Biesheuvel is docent wiskunde aan het Willem de Zwijgercollege te Bussum. **drs. A.A.J. de Boer** is docent wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. J.H. de Geus** is leraar wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag. **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **drs. W.S. Hoekstra** is docent wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam en verbonden aan het APS te Utrecht. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de UU. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wiskunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde aan de UL. **dr. B. Windels** is als postdoctoraal navorser voor het Fonds Wetenschappelijk Onderzoek verbonden aan de Universiteit Antwerpen. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de Universiteit Leiden.

INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 7 **Quarto**

8 - 9 **De puzzel van Dion**

10 - 12 **Puppie tellen met de GR**

13 **De post**

14 - 15 **Pythagoras Olympiade**

16 - 17 **Het geluksgetal 13**

18 - 19 **Helderzienden ontmaskerd**

20 - 21 **Oplossing prijsvraag "Opprikken"**

22 - 23 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**

24 **Problemen**

25 **Oplossingen nr. 3**

26 **Oplossingen:**
- **Nootjes nr. 3**
- **Het getal 5**

27 - 29 **Beeld & Bedrog**

30 - 31 **Van Amsterdam naar Groningen**

32 **Activiteiten**

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

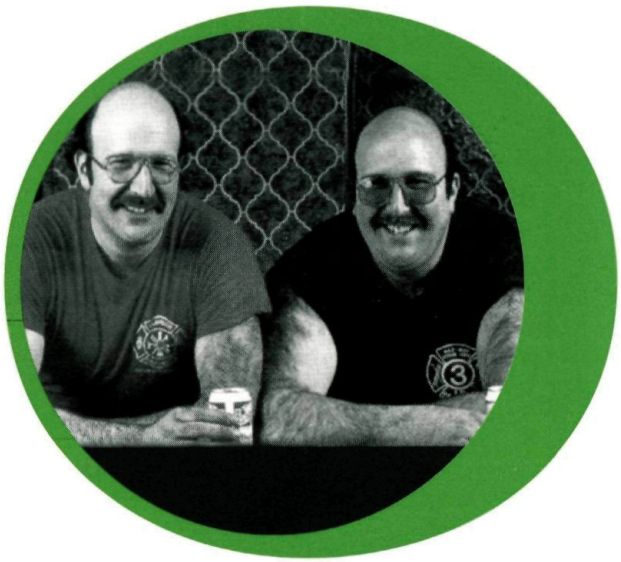
Kleine nootjes

Even slikken

Als je elk half uur een pil moet slikken, hoe lang duurt het dan om drie pillen te slikken?

Moeder en tweeling

Een vrouw krijgt op haar twintigste een tweeling. Als de moeder 30 is, zijn de tweelingbroers ieder 10, dus samen 20. Als de moeder 40 is, is de tweeling samen ook 40. Als de moeder 50 is, is de tweeling samen al 60. De tweeling heeft de moeder dus al ingehaald. Wanneer zal de tweeling tweemaal zo oud zijn als de moeder?



Wie een kuil graaft...

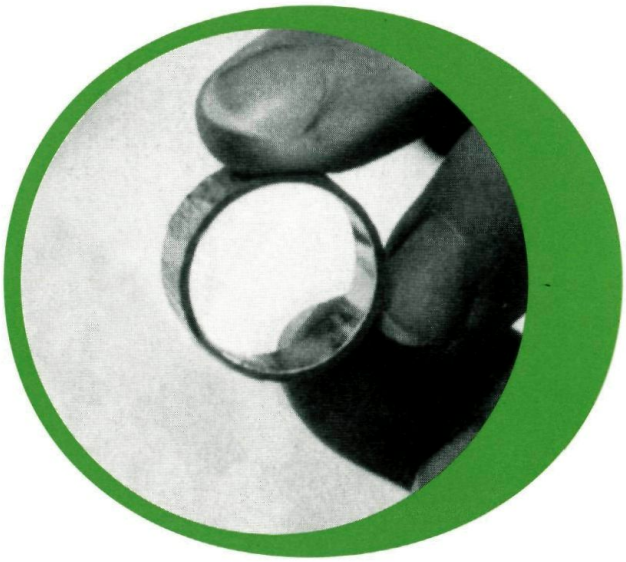
Peer, een stoere grondwerker die voor geen kleintje vervaard is, doet er acht dagen over om een gat van 8 bij 8 bij 8 meter uit te graven. Hoe lang doet hij over een gat van 4 bij 4 bij 4 meter?

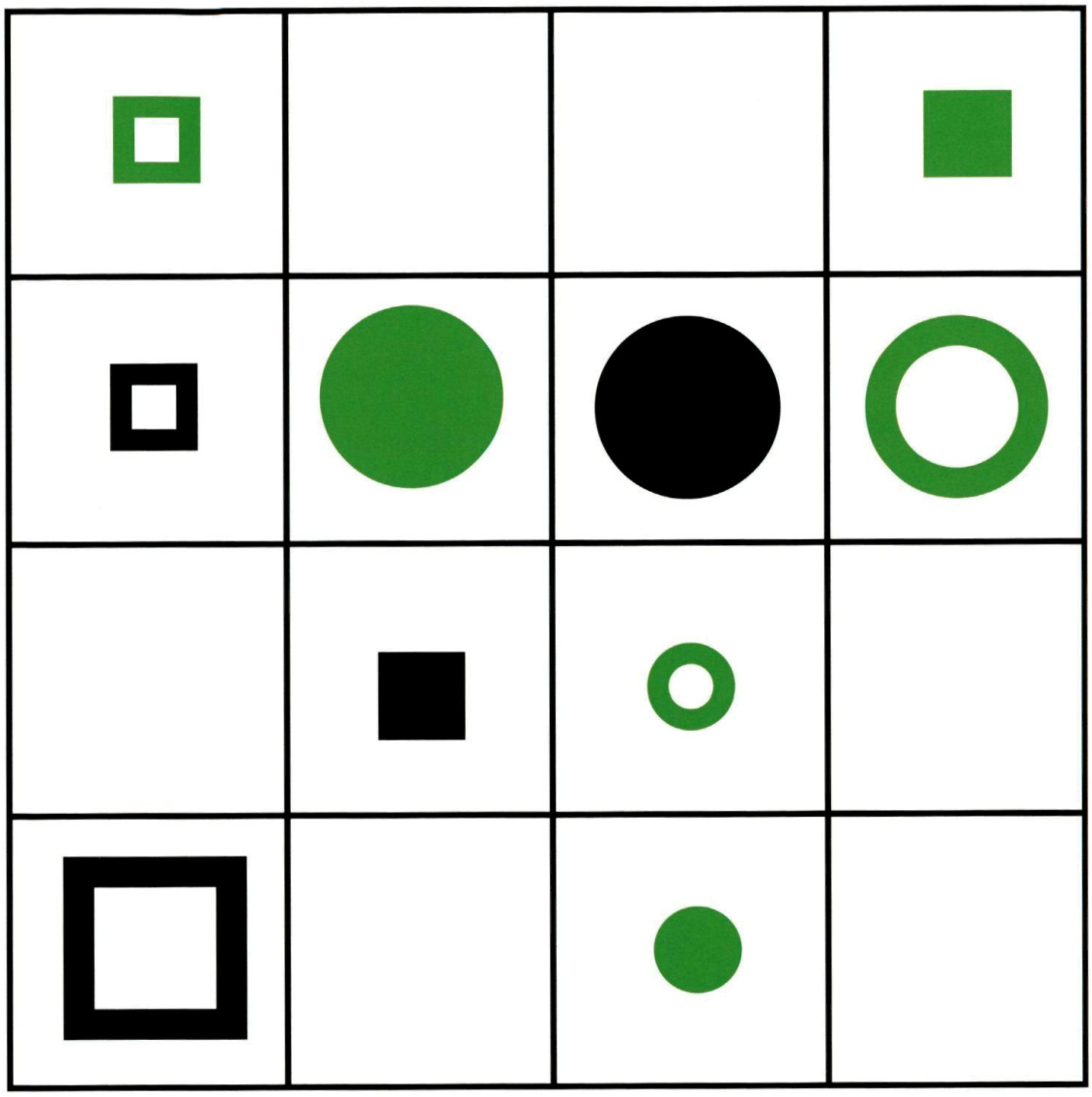
Groeten

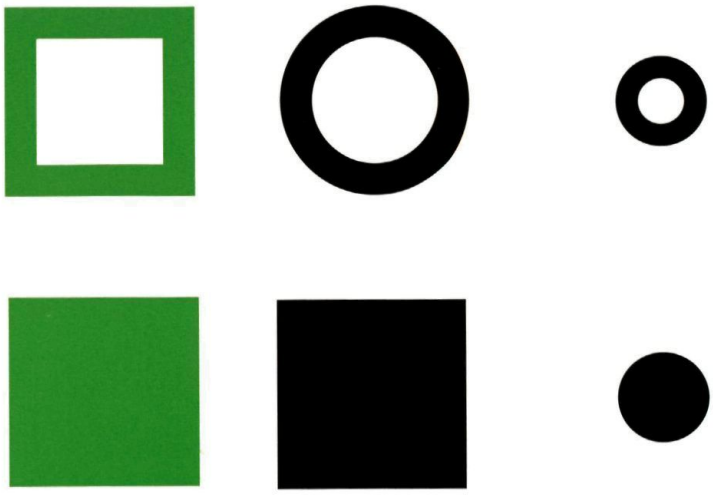
Hoe groeten pausen elkaar?

Koper en goud

Je hebt negen ringen, waarvan er één van goud is, de overige acht zijn van koper. Uiterlijk is er geen verschil. Hoe kun je de gouden ring vinden door slechts twee keer te wegen op een balansweegschaal?







Figuur 1
Een gewonnen positie voor speler 1. Welk stuk hij ook krijgt van speler 2, hij kan daarmee vier op een rij maken. Zie je waar?

door Chris Zaal

Quarto

Een kruising tussen Vier op een Rij en Set, dat is Quarto, een strategisch bordspel dat eenvoudiger te maken dan te spelen is. Probeer het maar eens.

Quarto is een spel voor twee spelers dat een beetje lijkt op boter, kaas en eieren. Het spel wordt gespeeld op een vierkant bord van vier bij vier velden. De stukken worden gekenmerkt door vier eigenschappen: rond/vierkant, groen/zwart, open/dicht en groot/klein, zie figuur 1 en 2. Elke combinatie komt precies één keer voor. Er zijn daarom precies $16 = 2^4$ verschillende stukken, evenveel als er velden zijn. Het doel van het spel is het verkrijgen van vier stukken op een rij (horizontaal, vertikaal of diagonaal), door middel van vier stukken die een of meer eigenschappen gemeen hebben. Bijvoorbeeld, met vier *grote* stukken op een rij win je, ook al bestaan ze uit vierkanten en cirkels van verschillende kleuren. Vier vierkante stukken op een rij kan ook, ook al zijn ze groot of klein en open of dicht. Enzovoort. Bij het begin van het spel staan alle stukken naast het bord. Eén voor één plaatsen de spelers een stuk op het bord, als volgt: *de tegenstander kiest een nog niet geplaatst stuk, geeft dat aan de ander, die dat stuk naar eigen inzicht ergens op het bord neerzet.* Je hebt dus geen eigen stukken, zoals bijvoorbeeld bij schaken of Vier op een rij. De stukken mag je overal neerzetten, maar wélk stuk je plaatst, wordt bepaald door de tegenstander. Zoals gezegd, winnaar is degene die 4 op een rij maakt (in één of meer eigenschappen).

Maak je eigen spel

Quarto is in de goed-gesorteerde spelletjeswinkel te koop als luxe bordspel. Het spel kost meer dan 70 gulden. De 16 houten stukken onderscheiden zich door de vier eigenschappen hoog/laag, dicht/hol, licht/donker, rond/vierkant. Maar Quarto kun je voor veel minder geld zelf maken. Dat is eigenlijk heel eenvoudig. De stukken zijn dan vlakke kaarten, met daarop 16 verschillende patronen gekenmerkt door de eigenschappen groot/klein, open/dicht, groen/zwart, rond/vierkant. Een ontwerp voor deze kaarten zie je in figuur 1 en 2. Teken zelf 16 van deze figuren, plak deze op dun karton, en knip of snijd de 16 stukken van elkaar los. Een speelbord is nog makkelijker zelf te maken – dat is gewoon een vierkant speelbord van 4 bij 4 velden waarop de kaarten passen. Die maak je eenvoudig zelf van karton.

Downloaden

Nog makkelijker dan kopiëren is het downloaden van speelkaarten en speelbord via internet. Een kant-en-klaar ontwerp kun je vinden op de homepage van Pythagoras – kijk in de downloadsectie of bij het aprilnummer. Op internet zijn ook interactieve versies van Quarto te vinden, zie de links achteraan dit artikel.

Quarto en Set

Net als bij Set onderscheiden de Quartofiguren zich door vier verschillende eigenschappen. Elke eigenschap kent alleen twee mogelijkheden en niet drie, zoals bij Set. Als je over een spel Setkaarten

beschikt, kun je daarmee ook Quarto spelen: laat uit de 81 Set-kaarten per eigenschap een van de drie mogelijkheden weg (bijvoorbeeld de rode kaarten, de gearceerde, de ovalen en die met drie figuren). Je houdt dan 16 kaarten over waarmee je Quarto kunt spelen. Je moet alleen zelf een speelbord maken waarop 4 bij 4 Setkaarten passen.

Een voorbeeld

Net als in boter, kaas en eieren kunnen de spelers elkaars kansen blokkeren, en tegelijkertijd hun eigen mogelijkheden open houden. In figuur 2 zie je een voorbeeld van een spelsituatie die gewonnen is voor degene die aan zet is.

Strategie

Omdat beide spelers geen eigen stukken hebben zoals bij schaken of dammen, is bij Quarto timing essentieel. Als het bord vol mogelijkheden is voor een 'vier op een rij' voor jou, dan geldt voor je tegenstander hetzelfde in de volgende beurt. Omgekeerd, als je tegenstander geen 'vier op een rij' kan maken in zijn beurt, dan is de kans klein dat het jou in de volgende zet lukt. Quarto is moeilijk te analyseren, omdat het aantal verschillende spelvoortzettingen duizelingwekkend groot is: voor het eerste stuk zijn er 16 mogelijkheden, en dat kun je op 16 verschillende velden plaatsen. Voor het tweede stuk zijn er 15 mogelijkheden, en dat kan op 15 verschillende velden geplaatst worden. In totaal zijn er zo $16^2 \cdot 15^2 \cdots 2^2 \cdot 1^2$ mogelijkheden, ongeveer 4×10^{26}, een 4 met 26 nullen! Veel van deze mogelijkheden komen op hetzelfde neer. Zo maakt het bijvoorbeeld niet uit welk stuk je als eerste kiest, en voor dat eerste stuk zijn er maar drie essentieel verschillende posities. In feite zijn het er zelfs twee, zie het artikel van Luc Goossens bij 'Meer informatie'. Dezelfde Luc Goossens heeft een slim programma geschreven dat Quarto helemaal kan doorrekenen. Hier twee van zijn conclusies:

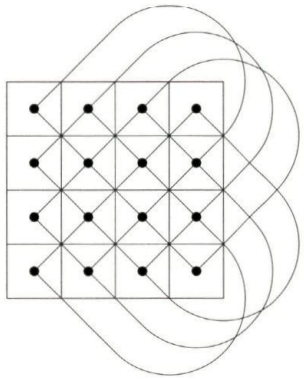
- beide spelers kunnen bij optimaal spel een remise forceren;
- het is voordelig om je tegenstander het eerste stuk te laten kiezen, de kans om te winnen is dan het grootst.

Alternatieven

Op het vier bij vier bord van Quarto zijn er vier horizontale rijen, vier vertikale en twee diagonale rijen van vier. In totaal geeft dit 10 manieren om vier op een rij te krijgen. Er zijn twee alternatieve versies van Quatro. De spelregels zijn hetzelfde, maar er zijn meer mogelijkheden om vier op een rij te maken.

ALTERNATIEF 1. Ook als 'vier op een rij' telt een 2 bij 2 vierkantje met vier stukken die één of meer eigenschappen gemeen hebben. Dit geeft 9 extra mogelijkheden om vier op een rij te maken. In totaal zijn er dan 19 mogelijkheden om vier op een rij te krijgen.

ALTERNATIEF 2. Als we over de randen van het speelbord mogen 'rondlopen',dan krijgt het speelbord de vorm van een fietsband (een 'torus') en ontstaan er 6 extra diagonalen. Dit geeft in totaal 16 mogelijkheden om vier op een rij te krijgen. Zie figuur 3.



Figuur 3
De acht diagonalen van het torus-speelveld: twee gewone diagonalen en tweemaal drie 'nevendiagonalen'.

Opdrachten

1. Bedenk een remisepositie voor Quarto, dat wil zeggen een eindstand met alle 16 stukken op het bord, zonder dat er vier op een rij voorkomen.

2. Kun je ook remiseposities bedenken voor de alternatieven 1 en 2. Is er een remisestrategie denkbaar? Hoe zou die er uit zien? Test deze met behulp van één van de Quarto-applets op internet.

Quarto interactief

http://ssel.vub.ac.be/Members/LucGoossens/quarto/quarto.htm

http://info.vub.ac.be/~bwydaegh/Applets/Quarto/Quarto.html

http://users.erols.com/hkgupta/Quarto.html

http://www-stud.uni-essen.de/~sw0472/spiel/spiel.htm

Meer informatie

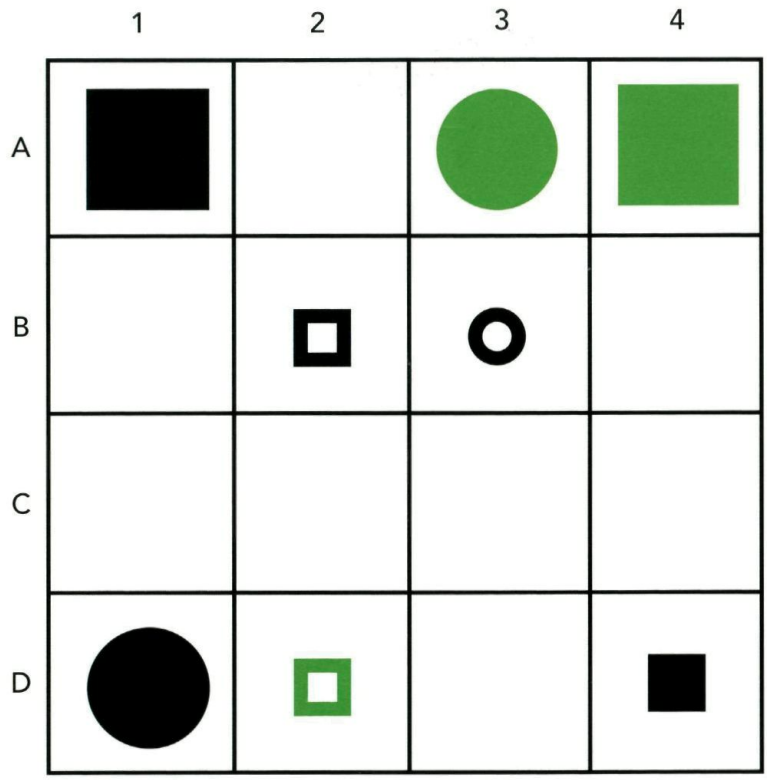
http://ssel.vub.ac.be/Members/LucGoossens/quarto/quartotext.htm

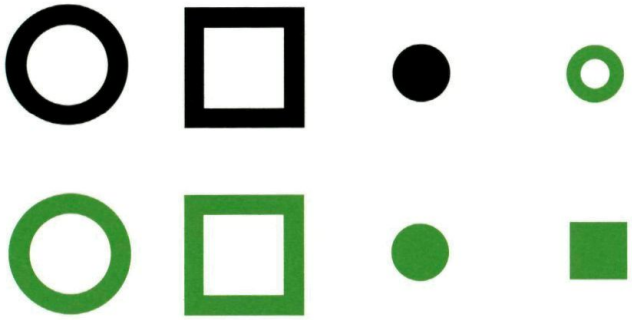
http://www.seanet.com/~ksbrown/kmath352.htm

http://www.knowitall.com/people/mag/Set/SetQuarto.html

Verantwoording

Met dank aan Luc Goossens, Jaap van den Herik, Harmen van der Ploeg en Jan Wiegerinck, voor hun hulp bij de totstandkoming van dit artikel.

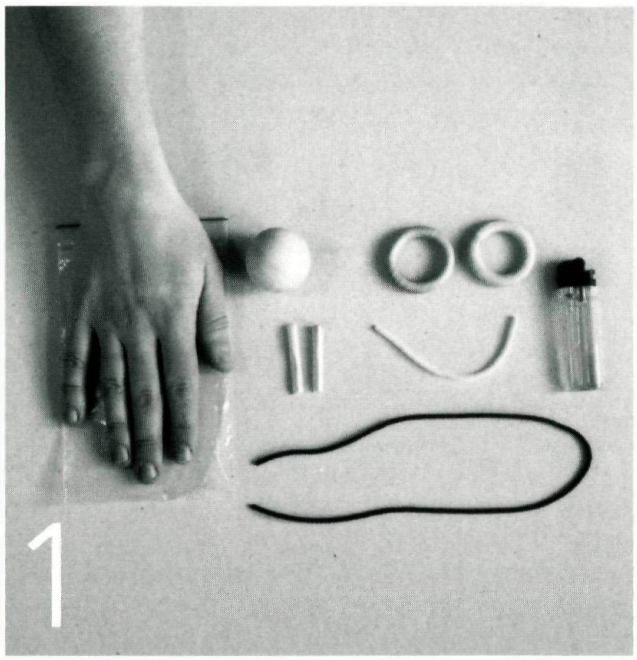


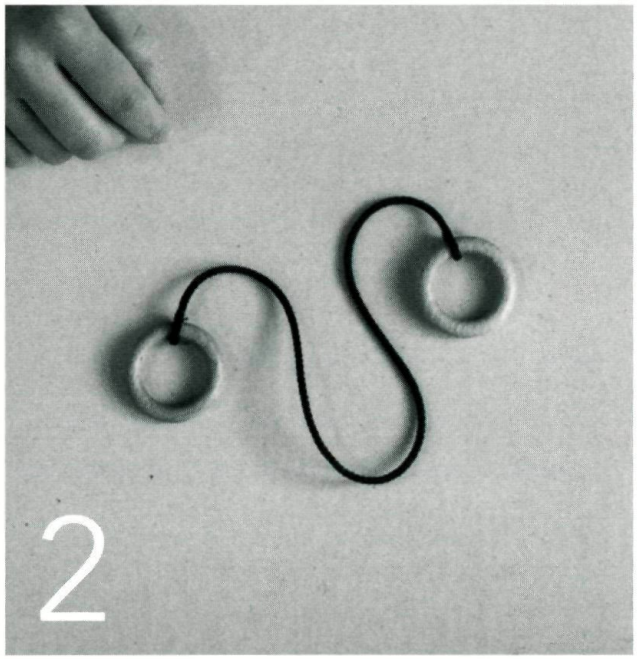


Figuur 2
Speler 2 moet het kleine groene open rondje geven aan speler 1, anders wint speler 1 direct. Speler 1 moet dit stuk op veld A2 plaatsen. Welk stuk deze daarna ook kiest, speler 2 wint altijd op C2 of C3.

door Chris Zaal

De puzzel van Dion





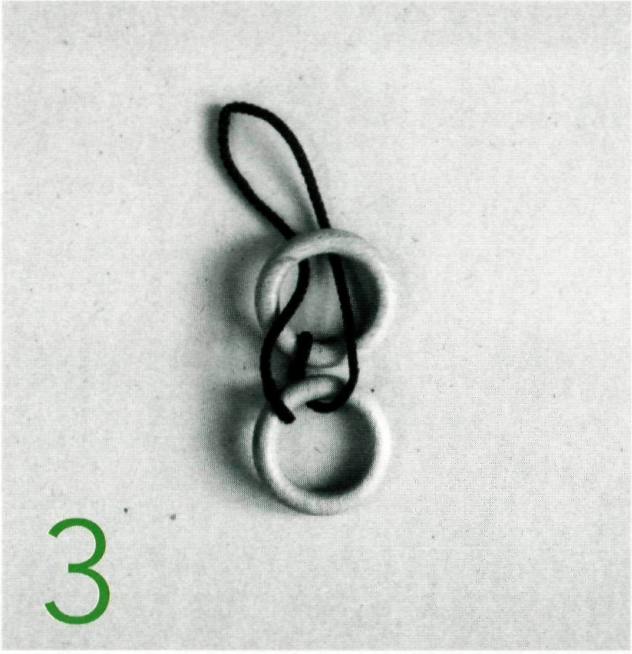
Dion Gijswijt is student wiskunde aan de UvA. Deze zomer studeert hij af. Hij is niet zomaar een student. Vijf jaar lang heeft hij de problemenrubriek van Pythagoras gevuld met wiskundige problemen die door hem zelf bedacht zijn. Vijf jaar lang originele wiskundige problemen bedenken is een bijzondere prestatie.
Zo ongewoon vindt hij het zelf niet, want nieuwe problemen bedenken is voor hem een natuurlijke 'state of mind'. Al sinds zijn twaalfde bedenkt hij wiskundige problemen. Dat begint met het oplossen van bestaande problemen, waarna hij zelf nieuwe varianten bedenkt en uitprobeert. Geïnspireerd door het thema van het vorige schooljaar bedacht hij de volgende originele touw-en-balpuzzel.

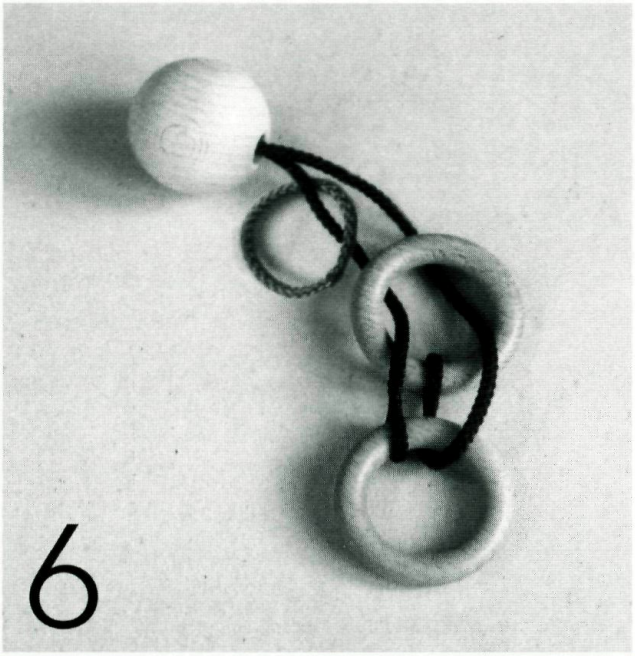
Benodigdheden
Zie foto 1. Nodig voor het maken van deze puzzel: 2 houten gordijnringen met een buitendiameter van 42 mm (Hema); twee keer 50 cm polypropyleen koord met een dikte van 3 mm, liefst in contrasterende kleuren (watersportwinkel of DHZ-zaak); 1 houten kraal met een buitendiameter van 40 mm of meer (DHZ-zaak); twee houten plugjes (om het gat van de kraal op te vullen).

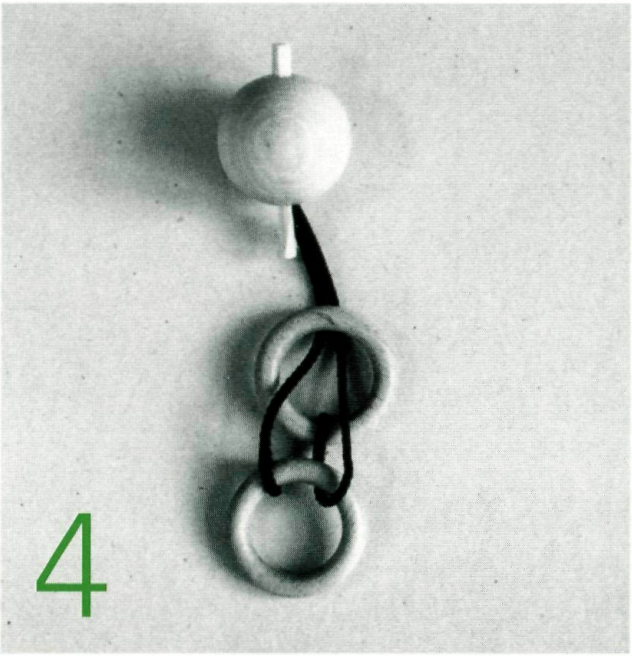
Zelf maken
Zie foto 2. Neem ongeveer 40 cm polypropyleen koord en maak aan beide uiteinden een ring vast. Dat kan met een knoopje, maar mooier is het uiteinde om een ring te slaan en met een aansteker aan zichzelf vast te smelten.

Foto 3. Sla het midden van het koord dubbel, steek het eerst door de ene ring, daarna door de andere. Bevestig dit uiteinde met een houten plugje in het gat van de bal, zonodig met wat extra hout- of 2-componentenlijm. Schuif als het kan eerst een klein metalen ringetje om het uiteinde, dat voorkomt dat je het touw er weer uit trekt. Maak de andere kant van het gat van de kraal dicht met een houten plug. Zie foto 4.
Nu is de puzzel bijna klaar. Knip een stukje polypropyleenkoord van 10,5 cm af. Sla dit om het kortste touw heen dat uit de bal komt en las met een aansteker de uiteinden aan elkaar tot een lus. Zie foto 5.
Het eindresultaat is te zien op foto 6.

5


3

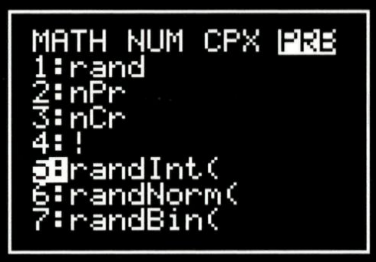

6


4

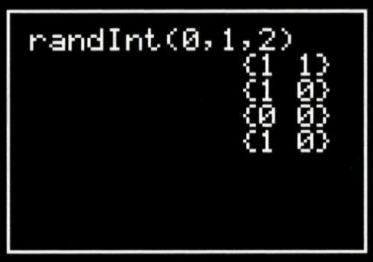
Puzzelen
Als het goed is, kun je het lusje over de ringen heen schuiven, maar niet over de bal. De opdracht is de lus helemaal los van de bal en de ringen te krijgen.
Raak je in de war, knip dan het lusje los van de puzzel. Maak van het resterende koord een nieuw lusje en begin overnieuw.
Veel plezier!

Puppies tellen met de GR

door Willem Hoekstra



Figuur 1. De functie randInt



Figuur 2. De output randInt(0, 1, 2)

Figuur 3. Het resultaat van ons simulatieprogramma

Als je in de Tweede Fase zit, ben je al uitvoerig in aanraking gekomen met de grafische rekenmachine: bij het maken van berekeningen en grafieken, het opslaan van woordjes en het spelen van spelletjes. In deze rubriek kun je kennismaken met een aantal leuke mogelijkheden van het apparaat die minder bekend zijn. Elke aflevering gaat vergezeld van een prijsvraag.

We gaan het hebben over het simuleren van kansexperimenten. Zoals bekend zijn er twee manieren om kansen te bepalen: theoretisch en empirisch. Een theoretische kans bereken je met behulp van de kansverdeling van je variabele. Bij een empirische kans voer je het experiment een groot aantal keer uit, en bereken je hieruit het percentage succesvolle uitkomsten. Soms is het niet mogelijk om het experiment een groot aantal keer uit te voeren. In zo'n situatie kan een simulatie uitkomst bieden. We zullen dit in het volgende voorbeeld zien: Een man komt bij een dierenwinkel om een hondje te kopen.

Hij wil graag een vrouwtjeshond. De verkoper weet dat een collega een nest met twee hondjes heeft. Hij belt deze collega op en vraagt of er een vrouwtje tussen zit. De collega antwoord bevestigend. Dan bedenkt de man in de winkel dat hij eigenlijk wel twee vrouwtjeshonden wil hebben. Hoe groot is nu de kans dat het nest uit twee vrouwtjes bestaat?

Simuleren

Probeer eerst eens theoretisch de bovenstaande kans te bepalen. Het is niet verbazingwekkend als je de kans inschat op 50 %, maar het is niet juist. We zullen dit aannemelijk gaan maken door de empirische kans te berekenen. Het is natuurlijk niet mogelijk om dit experiment in werkelijkheid een groot aantal keer te herhalen, maar we kunnen het wel simuleren. Hiervoor heb je een randomgenerator nodig. Op je rekenmachine is dit een optie die een willekeurig getal genereert elke keer dat je deze optie aanroept. Op de TI-83 vind je randomgeneratoren via de knop MATH en

```
ClrHome                          @Maakt het rekenscherm leeg        @
ClrAllLists                      @Maakt de lijsten leeg             @

Input "AANTAL KEER=",N           @invoer voor het aantal keer dat   @
                                 @het experiment herhaald wordt     @
ClrHome

0→I                              @I telt het aantal experimenten    @
0→S                              @S telt het aantal successen       @

Repeat I=N                       @Herhaalt tot het aantal           @
                                 @experimenten gelijk is aan N      @

randInt(0,1,2)→L1                @creeert een nest met twee hondjes @
                                 @en slaat dit op in L1             @

If L1(1)=0 or L1(2)=0            @Als een hondje een vrouwtje is    @
Then                             @dan                               @
I+1→I                            @aantal experimenten wordt 1 hoger @
Disp L1                          @het 'nest' honden wordt getoond   @
End                              @einde 'If'-statement              @

If L1(1)=0 and L1(2)=0           @Als beide honden vrouwtjes zijn   @
Then                             @dan                               @
S+1→S                            @aantal successen wordt 1 hoger    @
End                              @einde 'If'-statement              @

End                              @Einde van de 'Repeat'-loop        @

Disp "STEL 1 VROUWTJE"           @Toont de tekst met de conditie    @
Disp "P(2 VROUWTJES)=",S/N       @Berekent en toont de kans         @

Stop                             @Stopt het programma               @
```

Figuur 4. Een programma om op je grafische rekenmachine het hondjesprobleem te simuleren. Het programma kun je downloaden via de homepage van Pythagoras.

dan in de kolom PRB. Hier geeft optie 1:rand een willekeurig getal tussen 0 en 1. Wij gaan echter gebruik maken van optie 5: randInt (zie figuur 1). Deze functie genereert willekeurige gehele getallen tussen aangegeven grenzen. Bijvoorbeeld geeft randInt(1, 10) een willekeurig geheel getal uit de verzameling gehele getallen van 1 tot en met 10. Voor ons probleem hebben we twee verschillende uitkomsten nodig die even waarschijnlijk zijn (mannetje of vrouwtje). Dit kan gegenereerd worden met randInt(0,1), waarbij we bijvoorbeeld kiezen: 0 = vrouwtje en 1 = mannetje.
Door in te typen randInt(0,1,2) krijg je een lijstje met twee elementen, die beide 0 of 1 zijn. Dit komt dus overeen met een nest met twee jonge honden. Je zou nu je rekenmachine een groot aantal keer randInt(0,1,2) kunnen laten genereren (zie figuur 2) en vervolgens tellen in hoeveel nesten waarvan minstens 1 hond een vrouwtje is, het andere ook een vrouwtje is. In plaats van dit telwerk handmatig uit te voeren, kunnen we het ook met behulp van een kort programmaatje door de rekenmachine laten doen. Een voorbeeld van zo'n programma staat in figuur 4. Wanneer je dit programma een aantal keer uitvoert, zul je zien dat de kans op een tweede vrouwtje steeds in de buurt van 1/3 ligt. Je kunt het programma downloaden via de homepage van Pythagoras (kijk in de downloadsectie).

Kansberekening

Wellicht had je dat hierboven ook al theoretisch berekend. Zo niet, dan volgt hier de berekening. Er zijn drie mogelijkheden van nesten jonge hondjes waarbij er (minstens) een vrouwtje zit: vrouwtje–mannetje, mannetje–vrouwtje en vrouwtje–vrouwtje. Deze mogelijkheden hebben allemaal dezelfde kans. Van deze mogelijkheden is er één met twee vrouwtjes (vrouwtje–vrouwtje), dus de kans dat er twee vrouwtjes in een nest zitten als je weet dat er zeker één in zit is dus 1 op 3, oftewel 1/3. Een probleem als hierboven wordt ook wel 'contra-intuïtief' genoemd: wanneer je je intuïtie volgt, kom je bij dit soort problemen bedrogen uit.

PRIJSVRAAG

Een overbekend contra-intuïtief probleem is het probleem dat in Nederland bekend staat als het Willem Ruisprobleem, genoemd naar de quizmaster uit wiens show uit de jaren '80 dit probleem afkomstig is.
Tijdens een tv-quiz kan de winnaar in de slotronde uit drie deuren kiezen. Achter één deur staat een prachtige prijs, achter de andere twee deuren staat niets waardevols. De winnaar kiest een deur, maar maakt deze nog niet open. De quizmaster opent op dat moment een van de andere deuren, waarvan hij weet dat er geen prijs achter zit.
Vervolgens stelt hij de deelnemer voor de keus om óf bij z'n oorspronkelijke deur te blijven of voor de andere dichte deur te kiezen. De vraag is of de deelnemer zijn kans op een prijs vergroot, verkleint of gelijk houdt, als hij van deur verandert.
Schrijf een programma voor de TI-83 waarmee je dit probleem simuleert. Het programma moet een empirisch antwoord geven op de vraag: heeft het zin om van deur te veranderen. Zorg voor een heldere documentatie bij het programma, zodat voor een buitenstaander duidelijk is dat het programma het probleem juist simuleert.

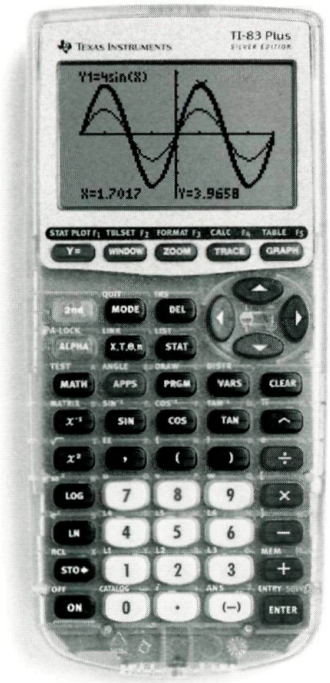
Prijzen

Als je wilt meedingen naar een prijs, stuur dan het TI-83-programma en toelichting voor 15 mei 2001 naar het volgende e-mailadres: w.hoekstra@aps.nl. Vermeld hierbij je naam, adres, school en klas. De hoofdprijs is een TI-83 Silver edition. Er zijn twee troostprijzen elk bestaande uit een GraphLink tezamen met een boekenbon van 50 gulden. De prijzen worden ter beschikking gesteld door Texas Instruments. Over de uitslag kan niet worden gecorrespondeerd.

Meer informatie

http://www.win.tue.nl/~jessers/aansluiting/willekeurigegetallen.htm
http://csep1.phy.ornl.gov/CSEP/RN/RN.html

De TI-83
Silver edition



De TI-83 Plus Silver Edition™ is het ideale platform voor applicaties. Met de Graph-Link™ verbind je de Silver Edition via de PC met internet en kun je applicaties laden. In het grote archiefgeheugen (1,5 Mb) passen bijna 100 applicaties en de hogere kloksnelheid (x 2,5) zorgt dat ze vlot draaien.
De volgende applicaties zijn voorgeïnstalleerd: Cellsheet™, Periodic Table, Organizer, Catalog Help, Start-Up Customisation en CBL/BBR.

Meer informatie
www.ti.com/calc/docs/83psilver.htm

door Dion Gijswijt

De post

Quiz

Maurice Alberts uit Amsterdam wees de redactie op de homepage van de wiskundige Jim Propp. Daar staat een 'zelf-referentiële' quiz. De quiz bestaat uit twintig meerkeuze vragen die slaan op de antwoorden van andere vragen uit de quiz, bijvoorbeeld:

3. Het aantal vragen met antwoord 'E' is:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

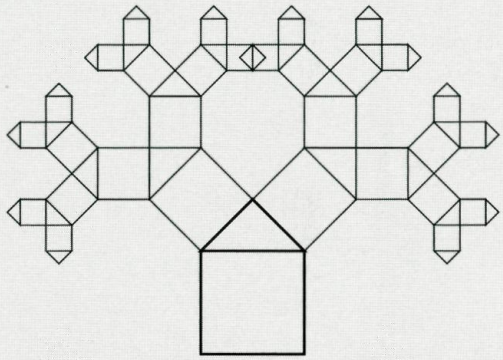
Al met al is de quiz een enorme logische puzzel en het kost heel wat hoofdbrekens om deze op te lossen. Zelf zo'n quiz maken is nog veel moeilijker! Het adres is: http://www.math.wisc.edu/~propp/srat-Q

Citaat

Van **Guido Lasters** uit Tienen ontving de redactie het volgende citaat: *Indien leerlingen mij vragen: "Wat kan ik met wiskunde doen?", antwoord ik steeds: "Wat met wiskunde gedaan kan worden, hangt af van uw IQ."*

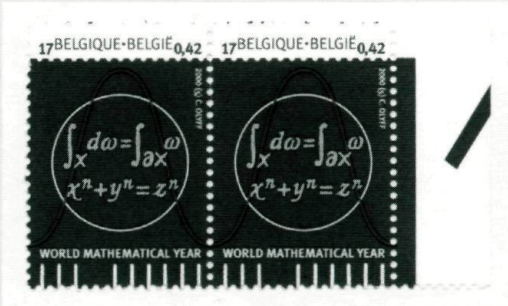
Boom van Pythagoras

"Wat zijn bomen van Pythagoras en waarom zijn ze naar Pythagoras genoemd?" vroeg **Jur** zich af. Een boom van Pythagoras krijg je door te beginnen met een 'huisje': een vierkant met een rechthoekige driehoek erop. Op de twee rechthoekszijden van het 'dak' worden kleinere huisjes geplaatst en op de daken daarvan weer kleinere huisjes enzovoort. Een voorbeeld zie je hieronder. De figuur die ontstaat is een 'fractal', een figuur die is opgebouwd uit kopieën van zichzelf. Deze abstracte boom heet de boom van Pythagoras omdat het een soort herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras is. Meer informatie kun je vinden op de homepage van Pythagoras onder het kopje 'download'.



MY2K postzegel

Het jaar 2000 was het Wereld Wiskundig Jaar. In het Engels: Mathematical Year 2000, oftewel MY2K. Nederlandse activiteiten waren onder andere: Pi in de Pieterskerk en de Nationale Doorsnee. In sommige landen zijn MY2K-postzegels verschenen. Niet in Nederland, maar wel in Belgie. De volgende zegel ontvingen we van **Peter Raedschelders** uit Kruibeke.



Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Opgave 69
Vind alle natuurlijke getallen n zo dat $n^2 + 1$ deelbaar is door 101.

Opgave 70
In vierhoek $ABCD$ is M het midden van AB en N het midden van CD. Is MN altijd kleiner dan of gelijk aan $(AC + BD)/2$, altijd groter dan of gelijk aan $(AC + BD)/2$, of is daar niets over te zeggen?

Adres
Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
email: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 mei 2001. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijfentwintig gulden verloot.
Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing **zelf** vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het decembernummer.

Veel succes! René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Opgave 65
Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen a, b, c en d geldt: als $ab = cd$, dan is $a + b + c + d$ geen priemgetal.

Oplossing. We volgen hier de oplossing van H. Verdonk. We werken $(a + c)(a + d)$ uit en krijgen $a^2 + ac + ad + cd$. Vanwege $ab = cd$ is dit gelijk aan $a^2 + ab + ac + ad = a(a + b + c + d)$. We hebben dus $(a + c)(a + d) = a(a + b + c + d)$. Als $a + b + c + d$ een priemgetal zou zijn, zou het ook een deler moeten zijn van een van de factoren aan de linkerkant, dus van $a + c$ of van $a + d$. Beide factoren zijn echter kleiner dan $a + b + c + d$, dus dit is een tegenspraak. Dus kan $a + b + c + d$ geen priemgetal zijn.

Deze opgave is opgelost door: H. Verdonk te Den Haag,Sander Oosterom van het **Buys Ballot College** te Goes, Peter Deleu te Hulste (Belgie), Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvenaat H.H.** te Bergen op Zoom en Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk. De boekenbon gaat naar Thomas Beuman.

Opgave 66
We definiëren bij elk natuurlijk getal n het getal

$$S(n) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}.$$

Bewijs dat $S(n)$ willekeurig klein wordt als het getal n heel erg groot wordt. Met andere woorden, bewijs dat $S(n)$ naar 0 gaat als n naar oneindig gaat.

Oplossing. Bij deze opgave moet je goed oppassen. Een aantal inzenders merkte op dat $S(n)$ steeds kleiner wordt maar wel positief blijft. Ze trokken daaruit de conclusie dat $S(n)$ naar 0 moet gaan. Dit hoeft echter niet waar te zijn. De termen van de rij 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, ... worden bijvoorbeeld ook steeds kleiner en blijven groter dan 0. Toch is de limiet niet 0, maar 1. Om de limietwaarde van $S(n)$ te berekenen moeten we een trucje toepassen. We berekenen het kwadraat van het product, dus

$$S^2(n) = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3^2}{4^2} \times \frac{5^2}{6^2} \times \cdots \times \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \times \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \times \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{(2n)^2}.$$

Op de laatste factor na zijn alle factoren van de vorm

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{4k^2-1}{4k^2}.$$

Dit is kleiner dan 1. De laatste factor $(2n - 1) / (2n)^2$ is kleiner dan $1 / (2n)$, zodat ook $S(n)^2 < 1 / (2n)$. We concluderen dat $S(n) < 1/\sqrt{2n}$. Aangezien $1/\sqrt{2n}$ naar 0 gaat als n naar oneindig gaat, gaat ook $S(n)$ naar 0.

Deze opgave is opgelost door H. Verdonk te Den Haag, Sander Oosterom van het **Buys Ballot College** te Goes, Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk en T. Afman uit Heerde. De boekenbon gaat naar Bram Kuijvenhoven.

door André de Boer

13

Het geluksgetal

In veel vliegtuigen vind je geen rij 13. In hotels ontbreekt vaak de 13de etage. Toch zitten er 13 kaarten van elke kleur in een kaartspel en bestaan de kwartalen van het jaar uit 13 weken.

Dertien is een beroemd ongeluksgetal. Sommigen schrijven dit bijgeloof toe aan de dertien personen die deelnamen aan het Laatste Avondmaal uit de bijbel. Anderen beweren dat het komt omdat 13 na het volmaakte getal 12 komt. De oude Babyloniërs gebruikten 12 als rekeneenheid. Onze tijdrekening herinnert er nog aan: ons jaar van 12 maanden is ingevoerd door de Babyloniërs. Daarnaast is 12 rekenkundig erg handig, omdat het deelbaar is door 2, 3, 4 en 6. Voor 13 geldt dat allemaal niet. Het is niet netjes door andere hele getallen te delen. Door al die onvolkomenheden wordt 13 met ongeluk in verband gebracht. Er bestaat zelfs een woord voor dit bijgeloof: triskaidekafobie.
Dit woord stamt uit het Grieks en betekent letterlijk '13-angst'. Sommige landen hebben een ander ongeluksgetal dan 13.
In Japan bijvoorbeeld is dat 4. 'Shi', het woord voor vier betekent in het Japans ook 'dood'. Het getal 17 wordt met Romeinse cijfers geschreven als XVII. Dat is een anagram van 'VIXI', wat in het Latijn 'ik heb geleefd' betekent. Geen aangenaam vooruitzicht. In Italië kun je dus geen Renault 17 kopen, wel een Renault 177. Hier maken ze handig gebruik van het feit dat 7 als gunstig wordt beschouwd.
Vliegtuigbouwers spelen hier ook op in met hun vliegtuigmodellen: 707, 727, 737, 747 en 757. Bij de Pythagoreeërs was 17 ook een ongeluksgetal. Het ligt namelijk tussen de 'mooie' getallen 16 en 18. Dit zijn namelijk de enige twee gehele getallen die gelijktijdig de omtrek en de oppervlakte van een rechthoek zijn: 4 x 4 en 6 x 3.

Geluksgetallen

Dertien is het zevende Fibonaccigetal en het zesde priemgetal. De ironie wil dat 13 het vijfde getal is in de rij van geluksgetal-

len. Om de geluksgetallen te vinden ga je als volgt te werk. Schrijf de gehele getallen op in een rij en schrap daaruit elk tweede getal. De oneven getallen blijven dan over:

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23...

Na 1 is het volgende oneven getal 3. Verwijder nu elk derde getal uit deze rij, te beginnen met 5:

1 3 7 9 13 15 19 21 25 27 ...

Het volgende overblijvende getal is 7. Verwijder nu elk zevende getal, te beginnen met 19:

1 3 7 9 13 15 21 25 27 31 ...

Verwijder nu elk negende getal in de rij, te beginnen met 27, enzovoorts. De getallen die je overhoudt hebben het geluk dat ze niet geschrapt zijn en heten daarom 'geluksgetallen'. Hieronder zie je de lijst van geluksgetallen tot 100:

1 3 7 9 13 15 21 25 31 33 37 43 49 51 63 67 69 73 75 79 87 93 99

Priemgetallen

Met de zeef van Eratosthenes vind je op soortgelijke wijze priemgetallen. Priemgetallen zijn gehele getallen groter dan 1 die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. Schrijf weer de rij van alle gehele getallen op, te beginnen bij 2. Schrap alle veelvouden van 2. Wat overblijft zijn de oneven getallen. Het eerstvolgende getal na 1 is 3. Schrap nu alle veelvouden van 3. Het eerstvolgende getal na 3 is 5. Schrap nu alle veelvouden van 5. Enzovoorts. Wat overblijft is een lijst van alle priemgetallen. De lijst van priemgetallen onder de 100 ziet er als volgt uit:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Opvallend genoeg hebben geluksgetallen veel eigenschappen gemeen met priemgetallen. Bijvoorbeeld, onder de 100 zijn er 25 priemen en 23 geluksgetallen. Het blijkt zelfs dat priemgetallen en geluksgetallen in elk gedeelte van de getallenrechte ongeveer even vaak voorkomen. Er bestaat een vermoeden dat elk even getal groter dan 2 de som is van twee priemgetallen. Een variant hierop is: Elk even getal is de som van 2 geluksgetallen. Net als het eerste vermoeden is dit nog niet aangetoond. Maar computerberekeningen laten zien dat het al wel opgaat voor de eerste even 100.000 getallen. Bij Euclides vinden we een klassiek bewijs van de stelling dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Het is eenvoudig aan te tonen dat er oneindig veel geluksgetallen bestaan. Maar of er oneindig veel *gelukkige* priemgetallen bestaan is nog niet bekend.

Bronnen

David Wells, *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, uitgeverij Bert Bakker, 1987.

Helderzienden

door Bart Windels

Indruk maken als goochelaar is makkelijker dan je denkt. Met een beetje wiskunde kom je al heel ver. En met nog wat extra theater denkt iedereen al snel dat je over paranormale krachten bezit...

Voer even de volgende sommetjes uit. Niet spieken hieronder!

o Denk aan een getal tussen 1 en 10;
o tel er 1 bij op;
o vermenigvuldig het resultaat met 5;
o tel er 1 bij op;
o verdubbel;
o onthoud alleen het laatste cijfer;
o tel daar 1 bij op;
o vermenigvuldig met 7.

Als je je jongere zus wil verbazen met jouw helderziendheid, laat haar dan de sommetjes hierboven uit het hoofd uitrekenen. Vraag haar zich hard te concentreren op het eindresultaat. Terwijl zij zich focust op dat getal, vertel jij over paranormale begaafdheid en over de bovennatuurlijke krachten die jou toelaten haar gedachten te lezen. Na deze theatrale voorbereidingen roep je: 'eenentwintig'. Want het eindresultaat is altijd 21, welk getal je in de eerste stap ook kiest.

Paranormaal of niet?

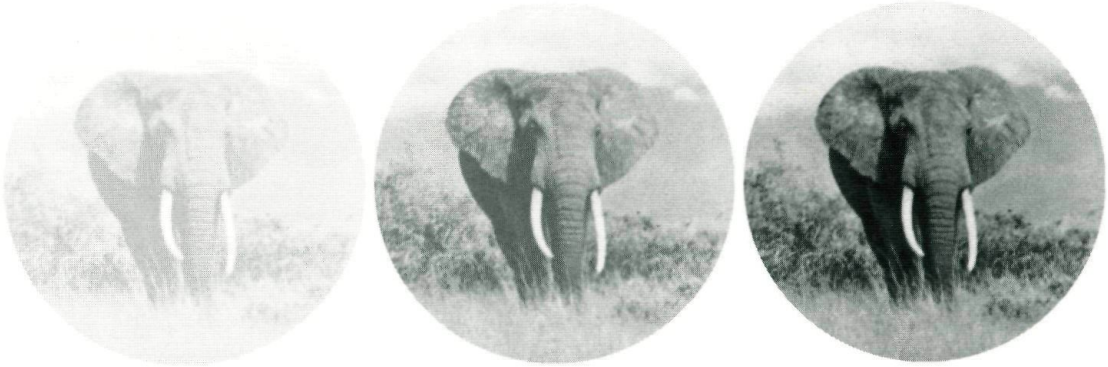
De wiskunde die achter dit soort trucjes zit, is meestal niet zo moeilijk. Laten we het getal dat jouw zusje koos even noteren met x. Je vraagt daar 1 bij op te tellen: ze vindt dus $x + 1$.
Na vermenigvuldiging met 5, komt ze op $(x + 1) \cdot 5 = 5x + 5$. Eéntje optellen levert dan $(5x + 5) + 1 = 5x + 6$, wat in de volgende stap wordt verdubbeld tot $(5x + 6) \cdot 2 = 10x + 12$. Nu doet het er niet toe hoeveel x is, want $10x$ eindigt zeker op het cijfer 0 en dus eindigt $10x + 12$ op het cijfer 2. Als je daarbij nog 1 optelt en vermenigvuldigt met 7, vind je steeds 21. Flauw hè. Toch doorzien veel mensen deze truc niet in een keer. Het getal x hoeft zelfs niet tussen 1 en 10 gekozen te worden, maar het vereenvoudigt wel het rekenwerk.

Iets doortrapter

Klaar voor het volgende sommetje?

o Denk aan een getal tussen 1 en 10;
o vermenigvuldig met 5;
o trek 2 af van het resultaat;
o verdubbel wat je nu hebt;
o trek hiervan af het getal dat je in het begin hebt gekozen;
o bereken de som van de cijfers van het

ontmaskerd



resultaat; doe dit eventueel opnieuw, tot dat je een getal van één cijfer vindt;
- o tel bij het resultaat 10 op;
- o zet dit getal om in een letter ($A = 1$, $B = 2, \ldots, Z = 26$);
- o bedenk een zoogdier dat met die letter begint (bijvoorbeeld: $K \mapsto$ kameel);
- o welke kleur heeft dat dier?

Terwijl jij aan het eindresultaat denkt, lees ik jouw gedachten, waarbij ik natuurlijk geholpen word door de geest van mijn overleden betovergrootmoeder. Dan zie ik — maar ik ben niet helemaal zeker, want de beelden zijn een beetje vaag — dan zie ik de kleur ... grijs. Klopt dat?

Gezond gokwerk

Dit is natuurlijk geen magie, maar gewoon wiskunde en wat gezond gokwerk. Stellen we het startgetal weer x, dan vind je door te vermenigvuldigen met 5, 2 af te trekken, te verdubbelen en er de oorspronkelijke x van af te trekken:

$$\begin{aligned}(5x-2)\cdot 2 - x &= 9x - 4\\ &= 9(x-1)+5\end{aligned}$$

Nu hoef je x niet te kennen om te weten dat dit getal rest 5 geeft bij deling door 9 (zie je waarom?). En dan weet je ook wellicht dat je die rest ook kan vinden door de cijfers van dat getal op te tellen (zie 'Negen', Pythagoras oktober 1999). Wat x ook was, je vindt sowieso het cijfer 5. Als je daar 10 bij optelt, krijg je het getal 15 en dus de letter O. Nu komt het kleine beetje waaghalzerij: ik reken erop dat jij als zoogdier voor de olifant gaat. De kleur daarvan is in elk geval grijs.

En nu zelf

Ga zelf eens na hoe het volgende trucje werkt. Je vraagt aan een proefpersoon om volgend sommetje te maken. Hoe kan je uit het *eindresultaat alleen* afleiden in welke maand en in welk jaar de proefpersoon is geboren?

- o Noteer het nummer van de maand waarin je geboren bent (januari = 1, ... , december = 12);
- o vermenigvuldig met 4;
- o tel hierbij 12 op;
- o vermenigvuldig met 25;
- o tel hierbij 23 op;
- o tel je leeftijd hierbij op;
- o trek 365 af;
- o vermeerder het resultaat met 42.

De oplossing vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

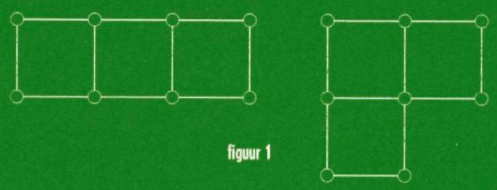
door René Swarttouw

Oplossing prijsvraag 'Opprikken'

Hoe kun je 33 vierkante posters met zo min mogelijk punaises op een bord prikken? Dat was de vraag die werd gesteld bij de prijsvraag in het oktobernummer van Pythagoras. Verder werd gevraagd of je een algemene formule kon bedenken die het aantal punaises bepaalt bij een willekeurig aantal van n posters. We bespreken de oplossingen die zijn binnengekomen

Oplossingsmethode

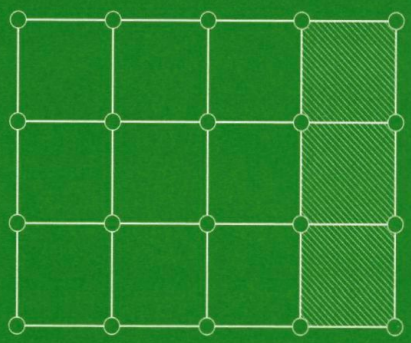
Aangezien iedere poster aan zijn vier hoekpunten moet worden vastgemaakt heb je voor 1 poster uiteraard 4 punaises nodig. De tweede poster kunnen we er dan naast prikken, wat nog eens 2 extra punaises kost. Maar hoe ga je dan verder? In ieder geval heb je weer twee extra punaises nodig om ook de derde poster te kunnen ophangen. Er zijn twee mogelijkheden, zie figuur 1.



figuur 1

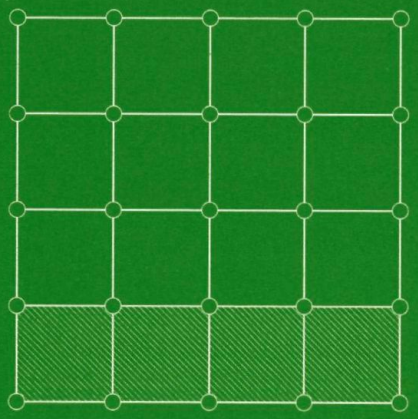
Je kunt voor allebei kiezen, maar als je een vierde poster wilt opprikken, dan ben je in de tweede situatie beter uit! Immers, het kost je dan slechts 1 extra punaise, terwijl je in de eerste situatie twee extra punaises moet gebruiken.

Zoals de meeste inzenders ook aangeven, lijken we voor het ophangen van de posters in de vorm van een vierkant het minste punaises nodig te hebben. Natuurlijk is dit alleen maar mogelijk als we 1, 4, 9, 16,... posters hebben. In de andere gevallen moeten we uitgaan van een zo groot mogelijk vierkant, en de rest van de posters zo handig mogelijk aan de zijkant plaatsen, zie figuur 2.



figuur 2

In figuur 2 zijn we uitgegaan van een 3 bij 3 vierkant, waaraan we nog drie posters hebben toegevoegd. Als we nog meer posters willen ophangen, dan gaan we verder als in figuur 3.



figuur 3

Nu is er weer een vierkant ontstaan, waar we weer volgens dezelfde procedure mee door kunnen gaan. Zo vinden we dat voor 33 posters 46 punaises nodig zijn.

De algemene oplossing

Het echte probleem was het vinden van een formule voor een willekeurig aantal posters, zeg n In het geval n een kwadraat is, is het antwoord duidelijk: er zijn $(\sqrt{n}+1)^2$ punaises nodig! Maar wat als n geen kwadraat is? Als we onze eerder besproken opprikmethode volgen, dan zien we dat we eerst een zo groot mogelijk vierkant moeten opprikken, zeg van k^2 posters. Hiervoor hebben we $(k+1)^2$ punaises nodig. Dan blijven er nog $m = n - k^2$ posters over, wat er maximaal $2k$ kunnen zijn. Als nu $1 \leq m \leq k$, dan hebben we voor deze extra posters nog eens 2 extra punaises nodig voor de eerste, en 1 extra voor elke volgende; in totaal $m + 1$ punaises extra. Als $k + 1 \leq m \leq 2k$ dan hebben we zelfs $m + 2$ extra punaises nodig, want voor de $(k + 1)$ –ste poster zijn ook 2 extra punaises nodig, voor de overige weer 1. Zie tabel 1.

n	$P(n)$	n	$P(n)$	n	$P(n)$
1	4	11	19	21	32
2	6	12	20	22	33
3	8	13	22	23	34
4	9	14	23	24	35
5	11	15	24	25	36
6	12	16	25	26	38
7	14	17	27	27	39
8	15	18	28	28	40
9	16	19	29	29	41
10	18	20	30	30	42

Tabel 1.
Het benodigd aantal punaises $P(n)$ voor n posters. De functie $P(n)$ springt steeds met 2 na kwadraten en getallen van de vorm $k(k+1)$.

Een formule

We proberen nu een algemene formule te vinden, die alleen afhangt van n. We hebben hiervoor de entierfunctie nodig. Die is als volgt gedefinieerd:

$\lfloor x \rfloor$ is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x.

De entierfunctie rondt dus x naar beneden af op een geheel getal. Met deze definitie geldt dus dat $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ en dat $m = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$.

Voor de gezochte formule zijn verschillende mogelijkheden. Het hierbovenstaande verhaal suggereert de volgende formule:

$$2 + n + 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \left\lfloor \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 - 1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor.$$

Maar het kan echter mooier, met de volgende formule van Leon van den Broek:

$$2 + n + \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + \left\lfloor \tfrac{1}{2} + \sqrt{n - \tfrac{3}{4}} \right\rfloor.$$

De tweede term zorgt voor het springen na de kwadraten, de derde term voor het springen na getallen van de vorm $k(k+1)$. De mooiste formule kwam echter van Mark en Petra uit klas 2E van het *Greydanus College* te Meppel: $\lceil (\sqrt{n}+1)^2 \rceil$ waar $\lceil \cdot \rceil$ afronden naar *boven* betekent.

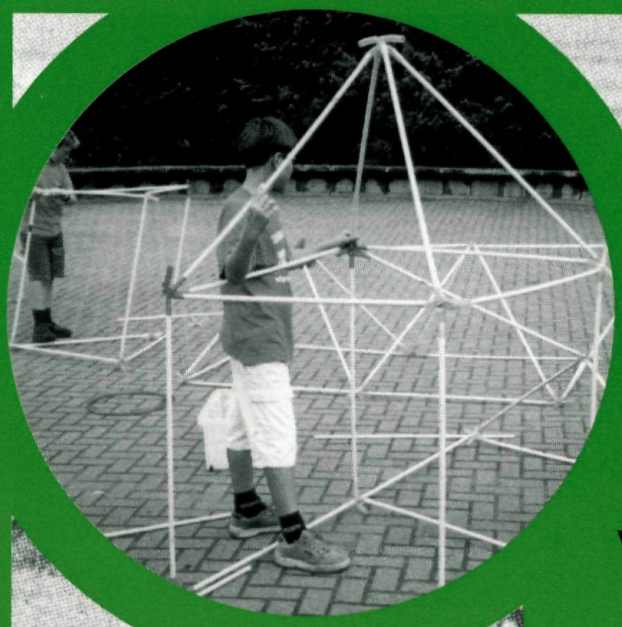
Boekenbonnen

Er gaan vier boekenbonnen van 100 gulden naar Mark en Petra uit Meppel, Gydeon Wormeerster te Apeldoorn, Zacharias Klaasse te Lieren en Tim Wouters te Opwijk (België). De klassenprijs gaat naar klas 1G van het Oranje Nassau college te Zoetermeer.

Wie levert een bewijs?

We zijn ervan uitgegaan dat de waarden in tabel 1 inderdaad het *minimale* aantal punaises beschrijven dat nodig is voor het opprikken van n tekeningen. Een rigoreus *bewijs* daarvan hebben we echter niet ontvangen. De redactie is daar erg benieuwd naar, en looft daarvoor een boekenbon uit van 100 gulden. Denk je een sluitend bewijs daarvoor te hebben, stuur dat dan voor 15 augustus 2001 naar:

René Swarttouw
Vrije Universiteit
Faculteit Exacte Wetenschappen
Divisie Wiskunde en Informatica
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam



Vierkant voo
Zomerk

Elk jaar gaan ze weer naar de wiskunde zomerkampen van de stichting Vierkant voor Wiskunde. Ze zijn tussen de 10 en 17 jaar oud en komen uit het hele land. Ze vermaken zich prima op de kampen en willen het volgend jaar wel weer komen — alleen als de vakantieplannen van hun ouders samenvallen met het kamp moeten ze een jaartje overslaan.

Al acht jaar lang organiseert stichting Vierkant voor Wiskunde kampen waar jongeren zich op een creatieve manier met wiskunde vermaken. Vierkant wil laten zien dat wiskunde heel leuk en uitdagend kan zijn. Gezien het enthousiasme van de deelnemers en begeleiders en het feit dat de meesten elk jaar terugkomen, slaagt Vierkant hier uitstekend in.
Het aantal deelnemers groeit gestaag; vorig jaar waren de kampen vol, met veertig deelnemers per kamp. Dit jaar is er plaats voor zestig deelnemers per kamp. Er is een kamp voor de jongere deelnemers (van 10 tot 13 jaar) en een kamp voor leerlingen uit het voortgezet onderwijs. Voor jongeren die van gezelligheid houden en het leuk vinden lastige problemen en puzzels op te lossen zijn deze zomerkampen een uitstekend alternatief voor een strandvakantie.
Op de kampen wordt een aantal wiskundige onderwerpen onder de loep genomen.
Aan de hand van de opdrachten in een werkboekje dat voor ieder onderwerp wordt gemaakt, gaan de deelnemers van alles over zo'n onderwerp ontdekken, berekenen, bouwen of tekenen. Hierbij wordt gewerkt in groepjes van ongeveer 5 kinderen. Ieder groepje heeft twee begeleiders. Om een idee te geven van het soort onderwerpen dat aan bod komt: de afgelopen jaren is onder meer gewerkt aan getallen, fractals, cryptologie, spiegels, veelvlakken, andere talstelsels en magische vierkanten. Elke ochtend begint als warming up met een aantal kleine ochtendproblemen, maar er zijn ook drie 'grote problemen' waar de hele week aan gewerkt kan worden. In het algemeen zijn dit een strategieprobleem, een optimalisatieprobleem en

or Wiskunde
kampen

een kunstopdracht. Verder is er natuurlijk tijd voor sport, een spannend avondspel, het zwembad, allerlei spelletjes en andere "gewone" kampactiviteiten. De kampen worden vrijdagmiddag afgesloten met een tentoonstelling van de werkstukken en kunstwerken voor de ouders. De kampen worden begeleid door een grote groep vrijwilligers (wiskundedocenten en studenten). Zij vinden het erg leuk om op deze manier met hun vak bezig te zijn.
Enkele reacties van deelnemers:
"Wiskunde hier is heel anders dan op school", "Het was leuker dan verwacht, en de wiskunde was erg interessant", "Bewijzen dat iets klopt, inplaats van aannemen dat iets klopt", "leuke wiskunde en het was erg gezellig."

Ochtendprobleem
Alle deelnemers van een marathonloop krijgen een rugnummer. De rugnummers zijn de getallen 1, 2, 3, 4, enzovoort. Het aantal deelnemers ligt in de buurt van de 300.
Er is een deelnemer die vaststelt dat de som van alle rugnummers die kleiner zijn dan zijn rugnummer, gelijk is aan de som van alle rugnummers die groter zijn dan zijn rugnummer. Hoeveel deelnemers waren er en welk rugnummer had die ene deelnemer?

Zomerkampen
Kamp A: van 6 t/m 10 augustus voor kinderen die nu (schooljaar 2000/2001) in groep 6 – 8 van het basisonderwijs zitten of in de brugklas. Kamp B: van 13 t/m 17 augustus voor kinderen die nu (schooljaar 2000/2001) op de middelbare school zitten. Kinderen die in de brugklas zitten kunnen dus kiezen met welk kamp ze mee willen gaan. De kosten bedragen 400 gulden, inclusief accommodatie, maaltijden en materialen.

Meer informatie
Stichting Vierkant voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Univ. Leiden
Niels Bohrweg 1, 2333 CA Leiden
telefoon: 071-5277129
email: vierkant@math.leidenuniv.nl
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

°Problemen

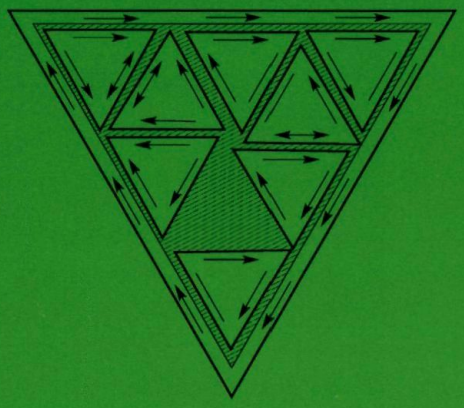
door Dion Gijswijt

Hol getal

Een geheel getal heet *hol* als tussen elk tweetal gelijke cijfers van dat getal tenminste één lager cijfer staat.
Een voorbeeld van een hol getal is 43423132051. Wat is het grootste holle getal met alleen de cijfers 0, 1 en 2? Hoeveel cijfers heeft het grootste holle getal bestaande uit de cijfers 0 tot en met 9?

Ontbrekend stukje

Negen driehoekige puzzelstukjes kunnen in een driehoek worden gepast, zó dat twee naastgelegen pijlen altijd gelijk zijn. De stukjes mogen wel worden gedraaid, maar niet gespiegeld. Een van de stukjes mist. Hoe staan de pijlen op dit ontbrekende stukje?



Quiz

De volgende quiz bestaat uit vijf meerkeuzen-vragen die elk precies één goed antwoord hebben.

1. De enige twee vragen met hetzelfde antwoord zijn:
a) vraag 1 en 3
b) vraag 3 en 4
c) vraag 4 en 5
d) vraag 2 en 5

2. Als $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ en $d = 4$, dan is het aantal vragen waarvan het antwoord gelijk is aan het nummer van de vraag gelijk aan:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

3. Welke bewering is waar:
a) $\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$
b) π is een algebraïsch getal
c) In Engeland wordt met 'π' een taart bedoeld
d) $\pi = 3{,}14$

4. Het antwoord op vraag 5 is:
a) antwoord b
b) antwoord c
c) antwoord d
d) antwoord a

5. Het antwoord op deze vraag is:

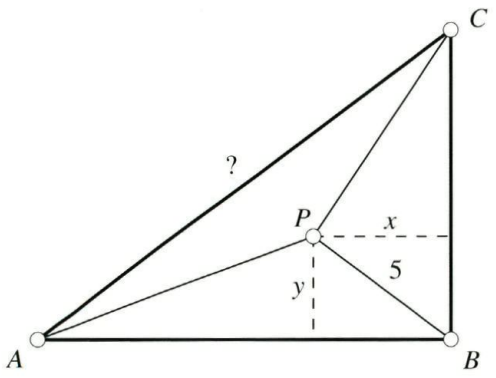
a) 'a)'
b) 'b)'
c) 'c)'
d) 'd)'

°Oplossingen nr.3

door Dion Gijswijt

Cijfersom
Elke twee cirkels snijden elkaar in 2 punten. Op deze manier worden de twaalf snijpunten opgedeeld in zes paren.
Op elke cirkel liggen precies 3 van deze paren (de snijpunten met de drie andere cirkels). Als we elk paar som 13 geven: $1 + 12$, $2 + 11$, $3 + 10$, $4 + 9$, $4 + 8$ en $6 + 7$, dan heeft elke cirkel som 39.

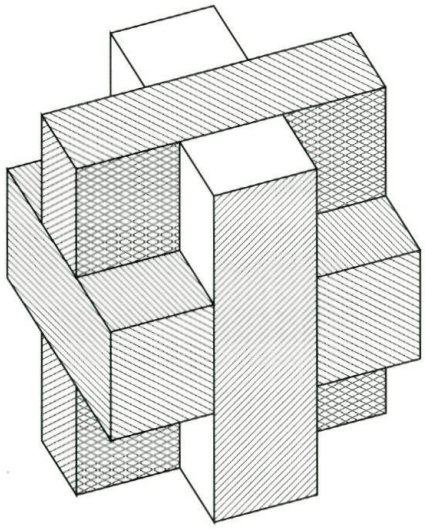
Schuine zijde
De oppervlakte van driehoek BCP is eenderde van die van driehoek ABC, dus $x = AB/3$. Netzo geldt $y = BC/3$. De lengte van BP is $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ en de lengte van AC is $\sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} = 15$.



Chocolade breken
Vincent heeft een winnende strategie. Noem een spelpositie waarbij elk stuk chocola oneven bij oneven is *oneven* en noem elke positie waarbij er één of meer even bij oneven stukken zijn en verder alleen oneven bij oneven stukken *even*. Een speler kan van een oneven positie alleen naar een even positie en een speler kan van een even positie altijd naar een oneven positie. Omdat Fokko in een oneven positie begint en een even positie achterlaat, kan Vincent ervoor zorgen dat hij bij iedere zet een oneven positie voor Fokko achterlaat. Na een paar zetten is dit de positie met enkel losse blokjes en heeft Vincent gewonnen.

Pincode
Voor elk viertal cijfers is er precies één stijgende pincode met die cijfers. Het aantal is dus $\binom{10}{4} = 210$.

Verborgen hoekpunten
Ja, dat kan. Je kunt met zes gelijke balken bijvoorbeeld een kubusvormige ruimte insluiten. Van binnenuit deze ruimte is geen van de hoekpunten van de balken te zien.



Oplossingen nr.3

Kleine nootjes

Tijdsmeting

Steek een lont van beide kanten aan, en tegelijkertijd de andere lont van één kant. Als de eerste lont opgebrand is, zijn 30 minuten verstreken. De andere lont heeft dan nog 30 minuten brandtijd. Steek dan het niet-brandende uiteinde van de tweede lont aan — de resterende brandtijd daarvan is dan precies 15 minuten. De totale brandtijd van de tweede lont is zodoende 45 minuten.

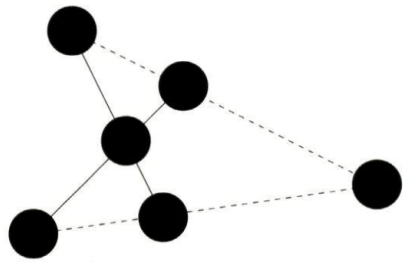
Cafébezoek

Twee van de drie vrienden hebben zowel bier, als wijn en water genomen. De derde heeft niets gedronken.

Vader en zoon

De vader is 40 jaar oud, de zoon 10 jaar.

Vier op een rij



Treinen

Op het moment van passeren zijn beide treinen even dicht bij Amsterdam.

'Het getal 5'

Opgave $F_n^5 = \frac{3n^2-n}{2}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
F_1^5 &= 1\\
F_2^5 &= 1+(1+3)\\
F_3^5 &= 1+(1+3)+(1+3+3)\\
&\vdots\\
F_n^5 &= \underbrace{1+(1+3)+(1+3+3)+\ldots+(1+\overbrace{3+\ldots+3}^{(n-1)\times})}_{n\times}\\
&= n+3\cdot(1+2+\ldots+(n-1))\\
&= n+3\cdot\tfrac{1}{2}n\cdot(n-1) \text{ (zie december 2000 p. 22)}\\
&= n+\tfrac{3}{2}n^2-\tfrac{3}{2}n\\
&= \tfrac{3}{2}n^2-\tfrac{1}{2}n = \tfrac{3n^2-n}{2}.
\end{aligned}
$$

Opgave $F_n^5 = F_n^3 + 2\cdot F_{n-1}^3$

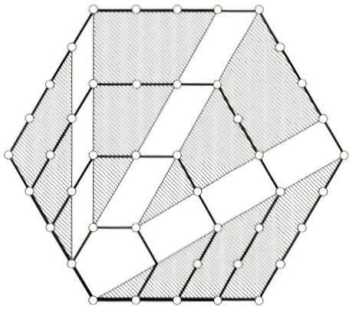
Oplossing

$$
\begin{aligned}
F_n^3 + 2\cdot F_{n-1}^3 &= \tfrac{n^2+n}{2} + 2\cdot\tfrac{(n-1)^2+n-1}{2}\\
&= \tfrac{n^2+n}{2} + 2\cdot\tfrac{n^2-2n+1+n-1}{2}\\
&= \tfrac{n^2+n}{2} + 2\cdot\tfrac{n^2-n}{2}\\
&= \tfrac{n^2+n}{2} + \tfrac{2n^2-2n}{2}\\
&= \tfrac{3n^2-n}{2} = F_n^5.
\end{aligned}
$$

Opgave

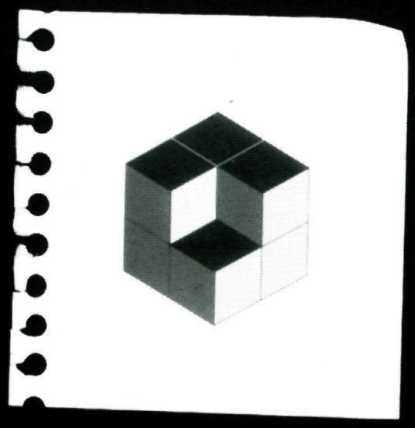
Wat is de relatie tussen zeshoeksgetallen en driehoeksgetallen?

Oplossing In het plaatje kun je zien dat er één driehoeksgetal van graad n en 3 van graad $(n-1)$ in het n-de zeshoeksgetal passen, dus: $F_n^6 = F_n^3 + 3\cdot F_{n-1}^3$



Beeld & bedrog

door Simon Biesheuvel



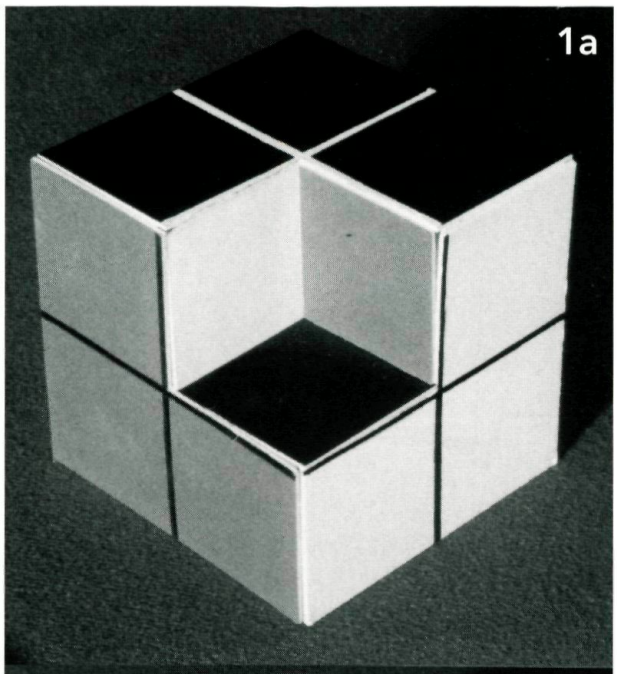
Hierboven zie je een papiertje met een tekening erop geplakt. Een dergelijke tekening heeft jarenlang op de voorkant van een serie wiskundeboeken gestaan. In deze figuur kun je meerdere driedimensionale figuren herkennen. De eenvoudigste is te omschrijven als een stapel van acht kubussen waarvan er een is weggehaald. Dit is de figuur in afbeelding 1 op de volgende bladzijde. Vrij eenvoudig te omschrijven is ook de figuur in afbeelding 2: weer een stapel van acht kubussen, maar nu is de achtste zo gekanteld dat de onderkant van het kubusje te zien is. Al best moeilijk voor veel mensen – maar sommigen zien deze direct– is afbeelding 3. De ruimtelijke figuur daarin is te omschrijven als de hoek van een kamer, rechts boven je, met daarin een kubusje geplakt.

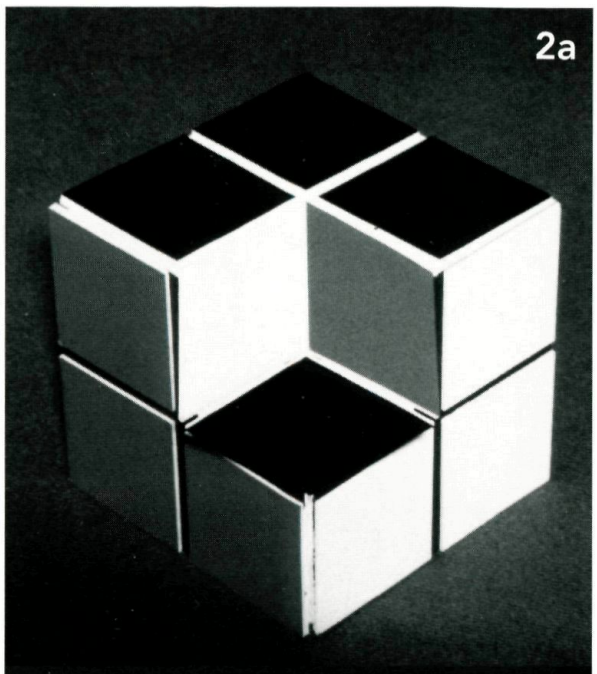
Hol in hol

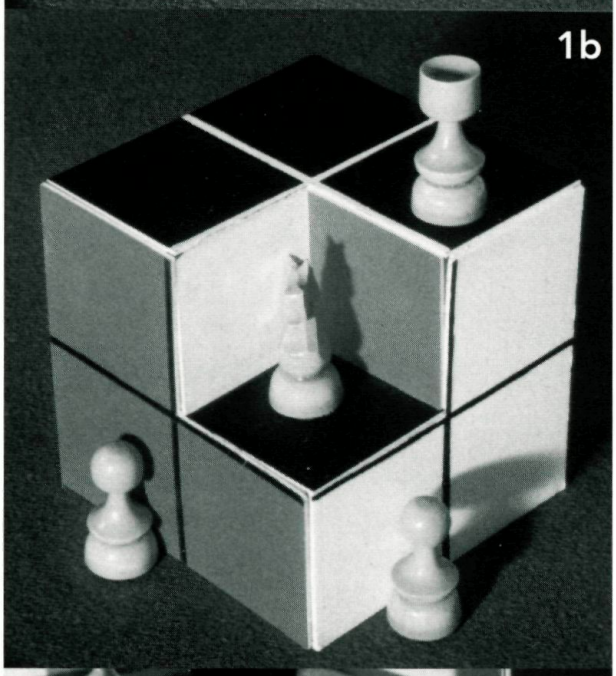
De laatste is de figuur in afbeelding 4. Van deze heb ik nog nooit gehoord dat iemand hem heeft waargenomen als hij of zij naar de tekening keek. Hij is te omschrijven als dezelfde hoek van de kamer als in afbeelding 3, maar nu is er een klein hoekje ingeplakt. Dat is net zo'n hoekje als de kamer zelf, maar dan 180 graden gedraaid. Deze ruimtelijk figuur heb ik nog nooit waargenomen als ik naar de afbeelding keek. Toch weet ik zeker dat die mogelijk moet zijn, de afbeelding bewijst het. 'Gezien' heb ik hem echter nooit. Hoe heb ik hem dan toch ontdekt? Afbeelding 1 toont een grote kubus, noem die bol, met een deuk er in. Een deuk is hol. Dus kort opgeschreven: bol met hol erin. Afbeelding 2 toont dan een bol met bol erin. De derde is hol met bol erin. Als je de ruimtefiguren zo in een schema zet, is het heel logisch dat er een vierde is die hol is met hol erin. Zo is de laatste bedacht uit het logisch en kort opschrijven van de al bekende drie mogelijkheden. Maar ook nadat ik deze figuur zelf gemaakt en uitvoerig bekeken heb, heb ik hem nooit in de tekening kunnen herkennen.

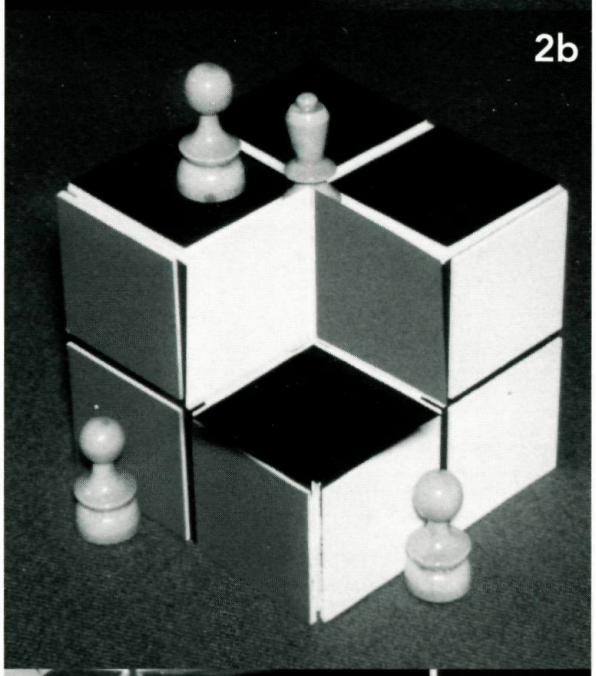
Fotogalerij

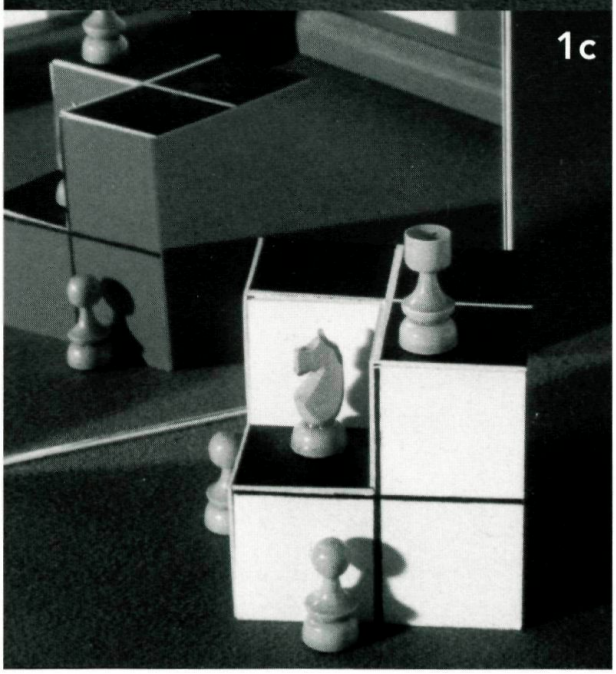
Van elk voorwerp is een tweede foto gemaakt met schaakstukken erop, zodat je beter kunt zien welk voorwerp het is. Vanuit een ander standpunt is nog een derde foto genomen met een spiegel erachter, waardoor het voorwerp nog duidelijker wordt. Het is leuk om te proberen een foto te kiezen en te proberen die te laten 'verspringen', zodat je achter elkaar de drie andere ruimtelijke figuren waarneemt.

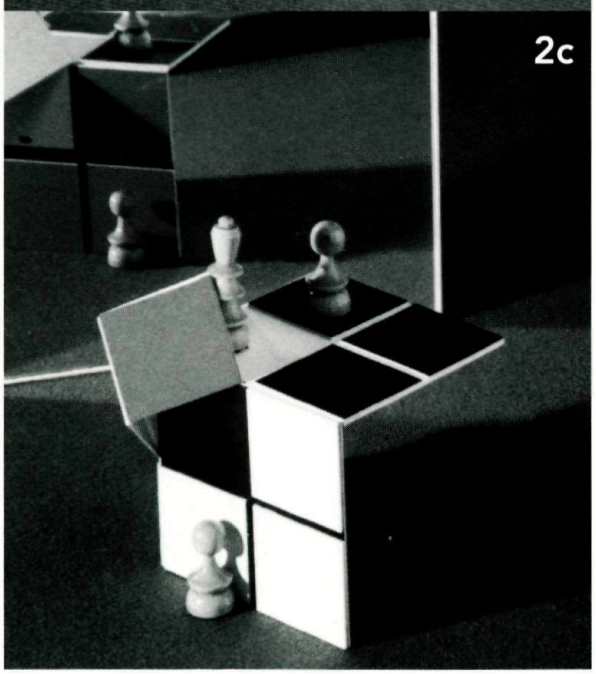

1a

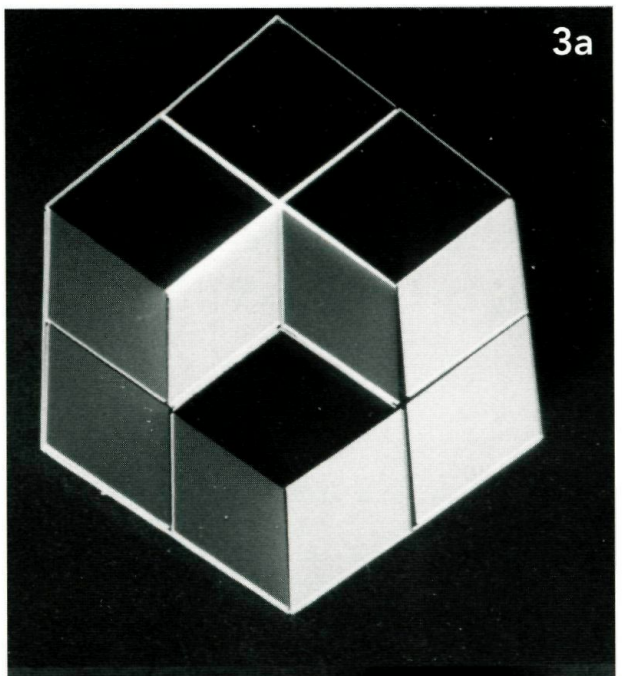

2a

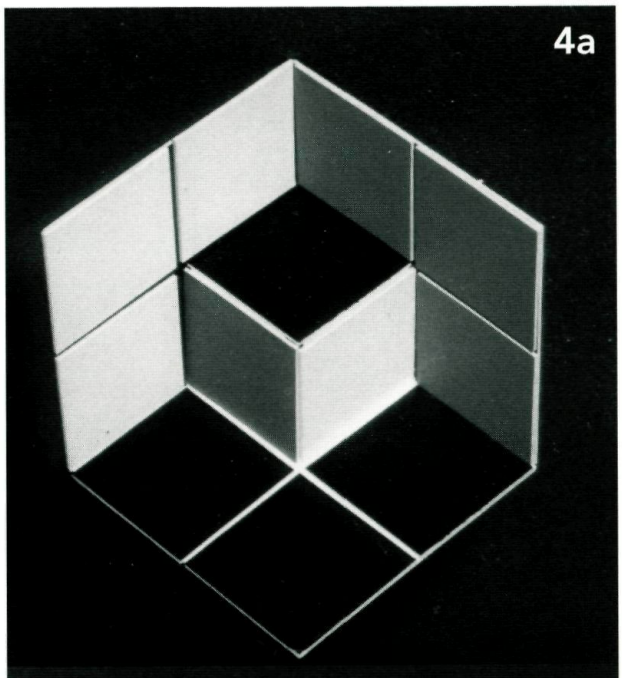

1b

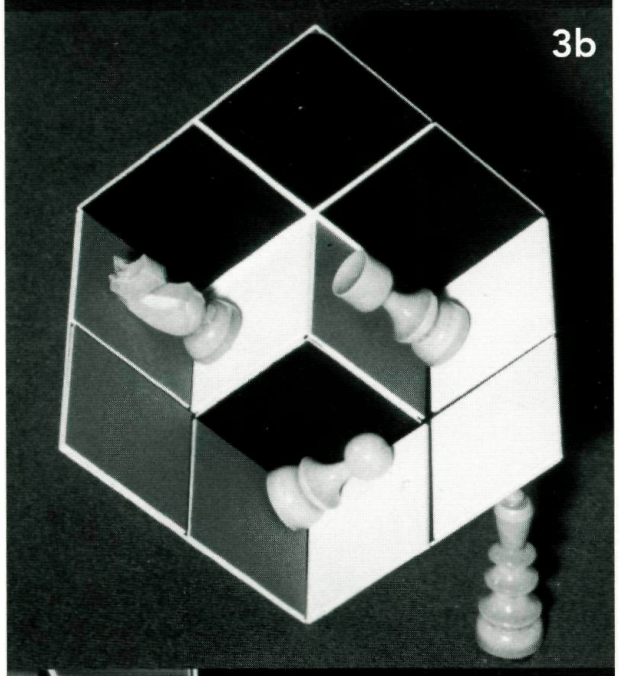

2b

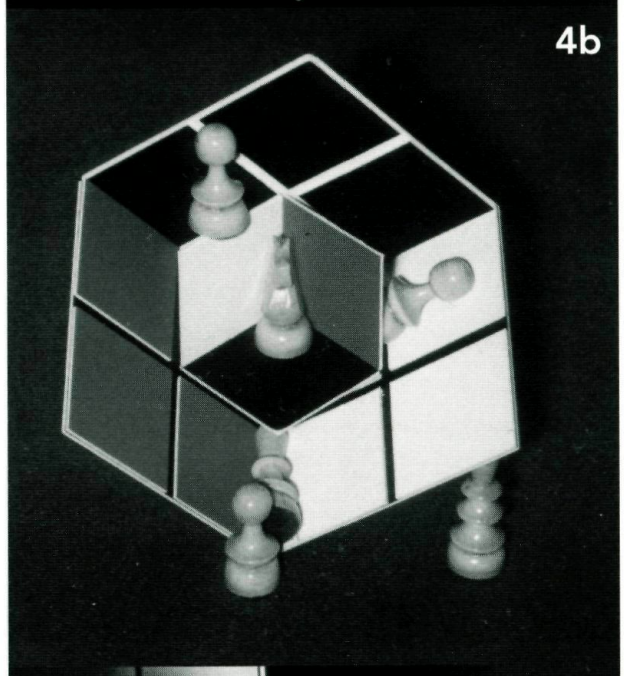

1c

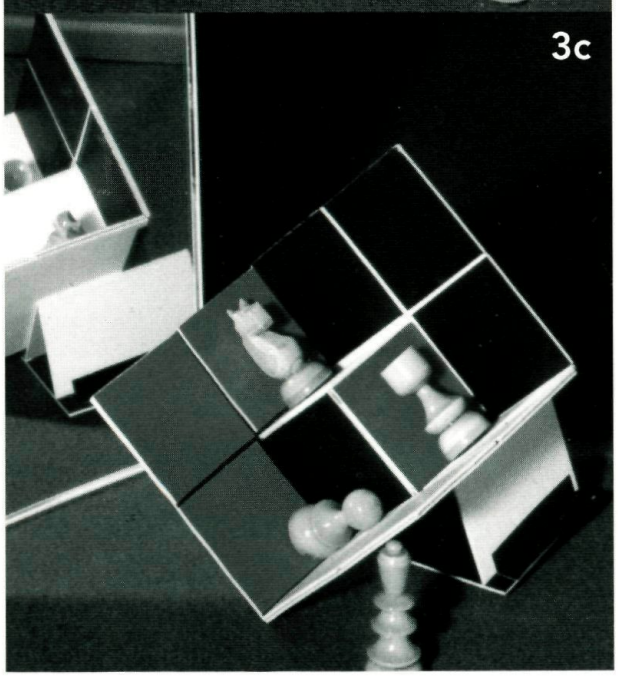

2c

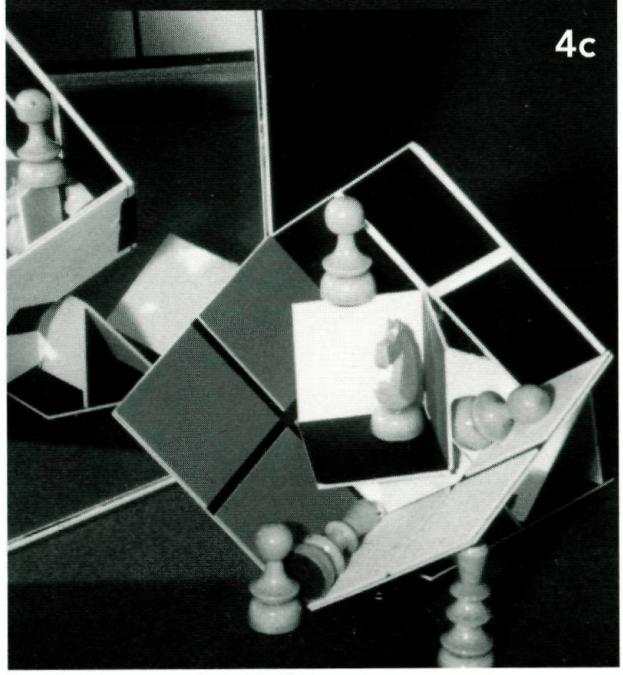

3a


4a


3b


4b


3c


4c

Van Amsterdam

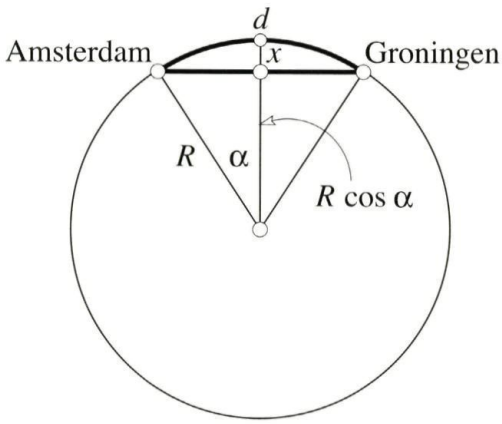
Voor kleine hoeken kun je de waarden van sinus en cosinus makkelijk schatten. We zullen zien hoe dat gaat en hoe je die schattingen kunt gebruiken.

Een tijdje geleden hoorde ik van iemand de volgende quizvraag:
Je boort een kaarsrechte tunnel van de Dam in Amsterdam naar de Martinitoren in Groningen (onderlinge afstand ongeveer 150 kilometer). Hoe diep ligt die tunnel dan in het midden onder de grond? Is de diepte:

a) minder dan 10 meter;
b) meer dan 10 meter en minder dan 100;
c) meer dan 100 meter.

Een berekening

Deze lengte kun je rechttoe-rechtaan berekenen. We zoeken de lengte van het lijnstukje x in figuur 1. De hoek α is $d/2R$ radialen. Uit figuur 1 lezen we af dat $x = R - R\cos\alpha$.



Figuur 1.

Met behulp van de volgende gegevens kunnen we x bepalen: de afstand van de Dam naar de Martinitoren is hemelsbreed $d = 146{,}911$ kilometer, de straal van de aarde is $R = 6378{,}388$ kilometer. Dan is $\alpha = d/2R = 0{,}0115163$ radialen. Met behulp van een rekenmachine kun je $x = R - R\cos\alpha$ dan zo uitrekenen.

Zonder rekenmachine

Nu had ik geen rekenmachine bij me, maar toch kon ik de vraag oplossen. De hoek α is nogal klein. Dan geldt dat $\cos\alpha$ ongeveer gelijk is aan $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. In formulevorm schrijven we dit als:

$$\cos\alpha \approx 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Oftewel $1 - \cos\alpha \approx \frac{1}{2}\alpha^2$, waarbij het $\approx$-teken 'ongeveer gelijk' betekent. We vinden dus:

$$\begin{aligned} x &= R\,(1 - \cos\alpha) \\ &\approx R \cdot \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{d^2}{8R} \approx \frac{150^2}{8 \times 6400} \\ &= \frac{225}{512} \approx 0{,}450 \text{ kilometer} \end{aligned}$$

Hierbij heb ik voor het gemak d afgerond tot 150 en R tot 6400. De gezochte afstand is dus ongeveer 450 meter. Antwoord c) zal dus wel goed zijn.

Hoe kan dat nou?

Hoe kwam ik erbij dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$? Bekijk figuur 2. Hierin zie je dat als de hoek α klein is, $\sin\alpha$ en α bijna aan elkaar gelijk zijn. Dus geldt dan $\sin\alpha \approx \alpha$. We passen de hoekverdubbelingsformule voor de cosinus toe: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$.

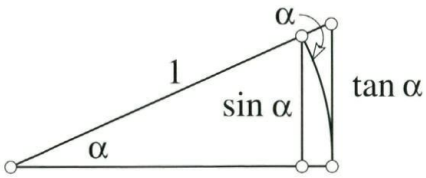
door Klaas Pieter Hart

naar Groningen

Door $a = \frac{1}{2}\alpha$ in te vullen krijgen we

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Dus:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\approx 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$



Figuur 2.

Mag dat zomaar?

Uit een plaatje hebben we dus afgelezen dat $\sin\alpha \approx \alpha$ en daaruit hebben we afgeleid dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. Maar wat betekent $\approx$ nu precies? Eigenlijk willen we weten hoe goed die benaderingen zijn. Dat is met een beetje werk redelijk eenvoudig te doen.

Om te beginnen geldt $\sin\alpha < \alpha$. Uit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ volgt dan meteen dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

Uit figuur 2 kunnen we ook aflezen dat $\alpha < \tan\alpha$. Het afgebeelde cirkelsegment heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\alpha$ (immers, de oppervlakte van een cirkelsegment met booglengte π heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\pi$).

De oppervlakte van de grote driehoek is $\frac{1}{2}\tan\alpha$. Hieruit volgt dat $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, zodat $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$. Omdat we al gezien hadden dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, vinden we $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$.

Conclusie:

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\sin\alpha$ en α ten hoogste $\frac{1}{2}\alpha^3$ is. Met de bewering $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$ zitten we er dus op z'n hoogst $0{,}0005$ naast!

Controle

Via de formule $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ kunnen we de benadering van $\cos\alpha$ controleren:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^3\right)^2.$$

De rechterkant is gelijk aan

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4 - \tfrac{1}{128}\alpha^6.$$

Conclusie:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\cos\alpha$ en $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ ten hoogste $\frac{1}{8}\alpha^4$ is.

Als we de precieze waarden voor d en R in de benadering $x \approx \frac{d^2}{8R}$ zouden invullen, dan zou de fout niet meer zijn dan $R \cdot \frac{1}{8}\alpha^4 = 1{,}36$ centimeter. Inderdaad, met $d = 146{,}911$ en $R = 6378{,}388$ is de theoretische diepte $x = R(1 - \cos\alpha) = 422{,}964$ meter. De benadering is $x \approx d^2/8R = 422{,}968$ meter. Een verschil kleiner dan 1cm! Dit verschil valt in het niet tegen alle mogelijke afrondfouten die bij het meten van de afstand Amsterdam – Groningen en het bepalen van de straal van de aarde gemaakt worden. De benaderingsformule kan dus zonder problemen toegepast worden.

Activiteiten

vr 6 en za 7 april **Voorlichtingsdagen TU Delft,** alle opleidingen
opleiding Technische Wiskunde, Mekelweg 4 te Delft
informatie: 015 - 278 2988 of informatie@its.tudelft.nl

do 19 en vr 20 april **Nederlands Mathematisch Congres**
Vrije Universiteit Amsterdam
http://www.cwi.nl/conferences/NMC2001/

vrijdag 20 april **Open Dagen Universiteit Leiden**
Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen
http://www.leidenuniv.nl/studiesite/

vrijdag 20 april **Themadag beta-opleidingen voor leerlingen 4vwo**
Universiteit Utrecht
tel. 030-2532670,
http://www.uu.nl

za 26 mei **Akten en bevoegdheden,** het ontstaan van het beroep
van reken- en wiskundeleraar in Nederland.
7e symposium van de Historische Kring Reken- en
Wiskunde Onderwijs.
Hogeschool Domstad, Utrecht
tel. 020-6121382 of 030-2611611 (Ed de Moor)

ma 6 t/m vr 10 augustus **Vierkant voor wiskunde zomerkamp A**
voor kinderen die nu (schooljaar 2000/2001) in groep 6--8
van het basisonderwijs zitten of in de brugklas. Lunteren
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

ma 13 t/m vr 17 augustus **Vierkant voor wiskunde zomerkamp B**
voor kinderen die nu (schooljaar 2000/2001)
op de middelbare school zitten. Lunteren
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, vrije Universiteit amsterdam en Universiteit Leiden.

Universiteit van Amsterdam

vrije* Universiteit *amsterdam

Universiteit Leiden

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855175,
per fax: 0522 855176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17,
NL- 7940 VB Meppel.

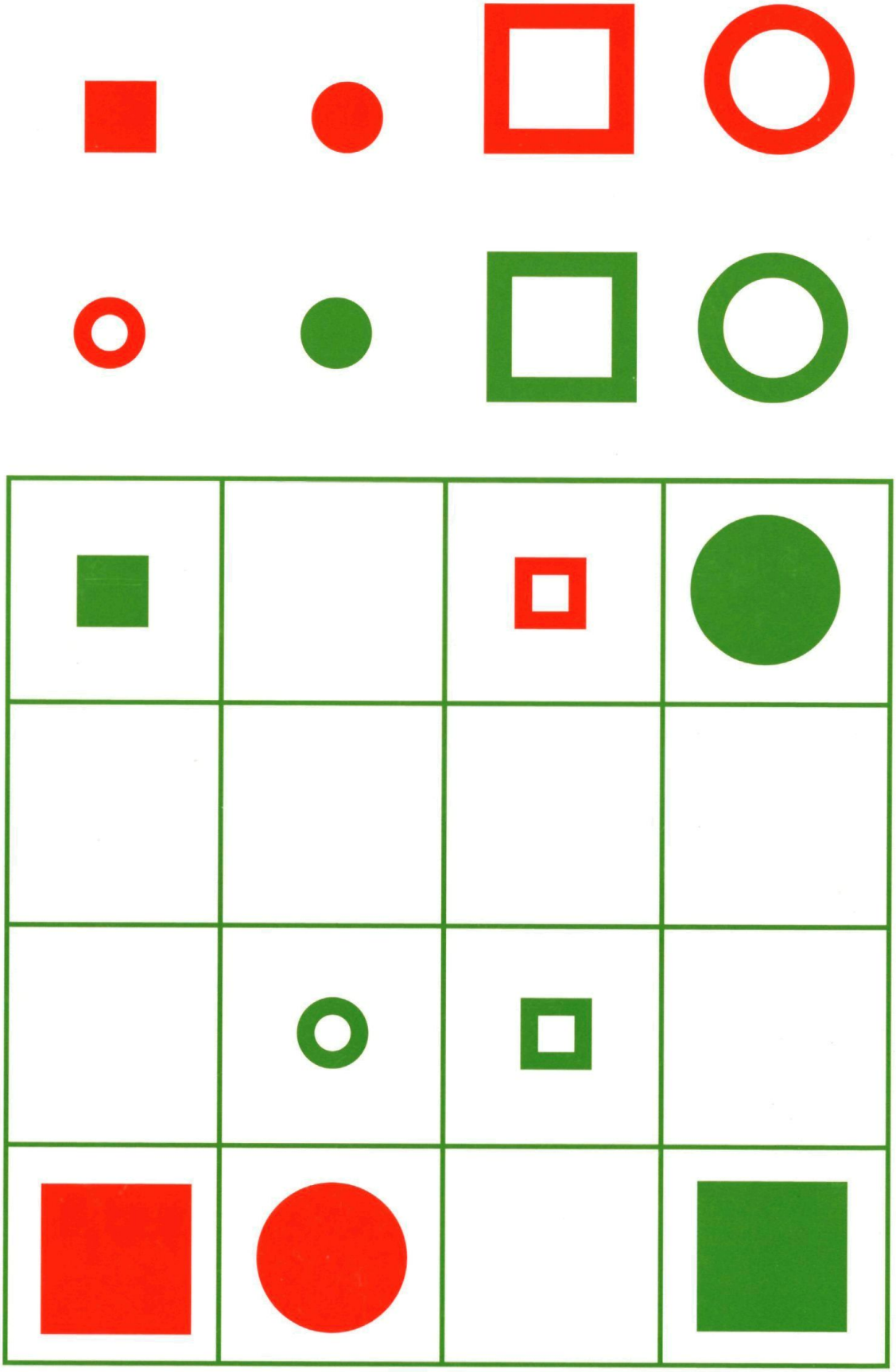
Tarieven 2000-2001
Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost *f* 39,50. Losse nummers *f* 8,50 of BF 160.
Overige prijzen per jaar:
Pythagoras België BF 850,
Pythagoras buitenland *f* 54,50.
Pythagoras én Archimedes *f* 69,50,
Pythagoras én Archimedes België BF 1470,
Pythagoras én Archimedes buitenland *f* 83,50.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen
Voor scholen zijn er bulkabonnementen.
Prijs: f 27,50/ BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.
Prijs: *f* 32,50 /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.
Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37, 38 (fl 25,- excl. verzendkosten) jaargang 39 (37,50 excl. verzending) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (fl 7,50 excl. verzendkosten).



40ste JAARGANG NUMMER 4