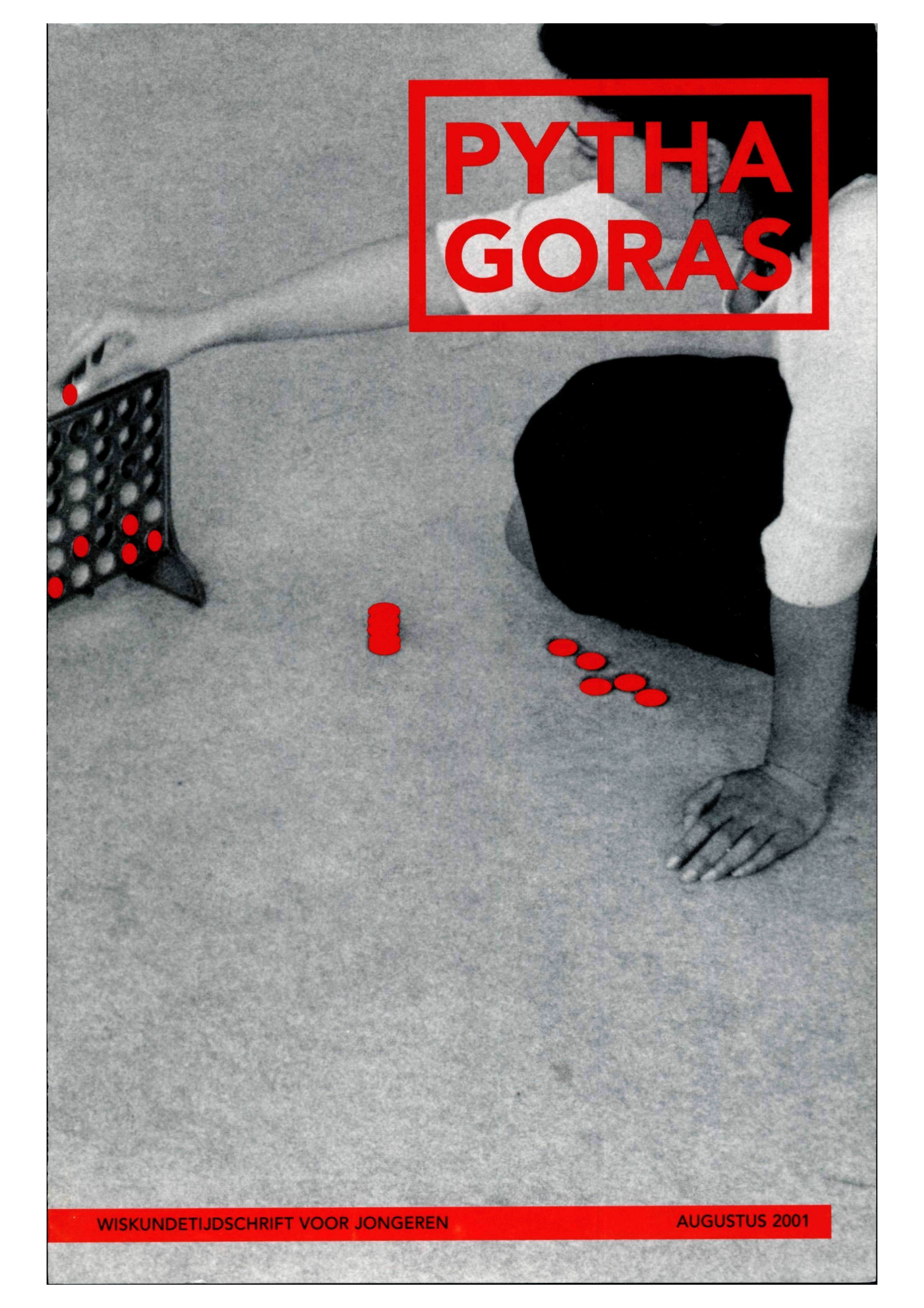




PYTHA GORAS

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

WWW

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

André de Boer
Dion Gijswijt
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofd- en eindredactie

Chris Zaal

Grafisch ontwerp

Esther, Sonja & Yolanda

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

Dion Gijswijt
Korteweg-de Vries Instituut
voor wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;
1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

H.H.J.B.M. Alink is leraar wiskunde aan het Elzendaal College te Boxmeer **drs. A.A.J. de Boer** is docent wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam **dr. L.A.M. van den Broek** is leraar wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen **drs. H.H.L.M. Donkers** is medewerker van het Instituut voor Kennis en Agent Technologie IKAT van de Universiteit Maastricht **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren **drs. J.H. de Geus** is docent wiskunde aan de C.S.G. de Populier te Den Haag **D.C. Gijswijt** is student wiskunde aan de UvA **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft **M.H. Koning** is student wiskunde aan de UU **Henk Molster** is leraar wiskunde aan het Hervorm Lyceum Zuid te Amsterdam **drs. M.F.M. Nuyens** is AIO kansrekening aan de UvA **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg **dr. J.W.H.M. Uiterwijk** is docent informatica aan het Instituut voor Kennis en Agent Technologie IKAT van de Universiteit Maastricht **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL **A. Weyzig** is woonachtig te Enschede **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.



- PYTHAGORAS AUGUSTUS 2001

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis
kan oplossen.

De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2

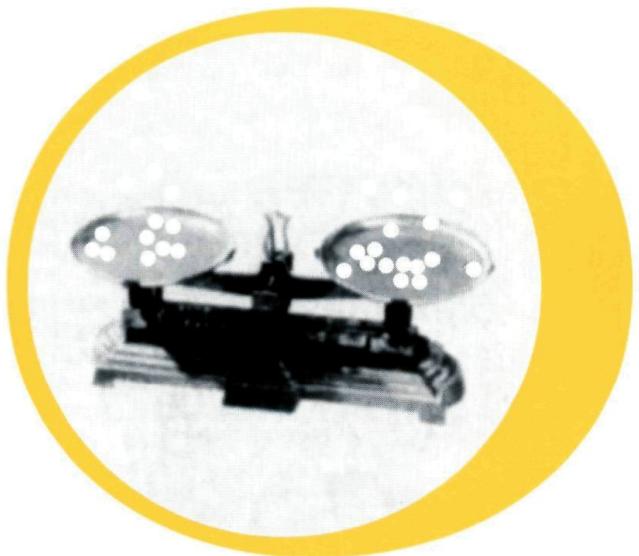


Een sportieve vakantie

In de zomervakantie zaten Thea en Sjon in een huisje. 's Ochtends gingen ze joggen, 's middags tennissen, maar niet beide op één dag, want daarvoor was het te heet. Soms deden ze zelfs een hele dag niets. Er waren 13 ochtenden waarop ze niets deden en 16 middagen waarop ze thuis in de schaduw bleven. In totaal waren er 17 dagen waarop ze gingen hardlopen of tennissen. Hoeveel dagen waren ze op vakantie?

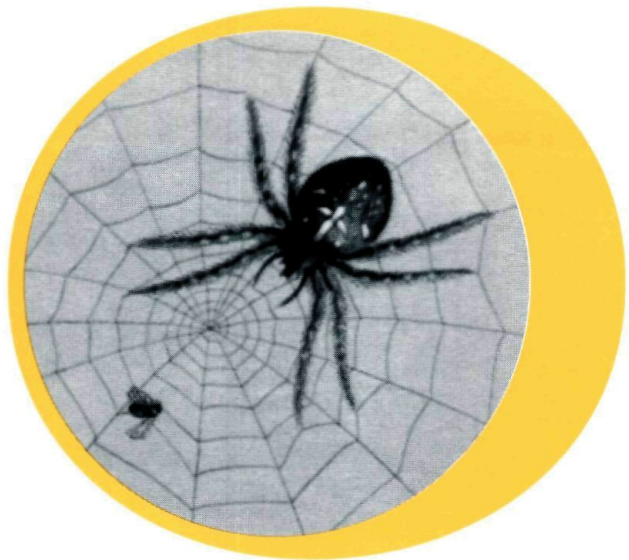
Knikkers

Je hebt tien dozen met in elke doos negen metalen knikkers. De knikkers uit één doos wegen elk 23 gram, de overige knikkers wegen elk precies 25 gram. Je hebt de beschikking over een nauwkeurige weegschaal, waarmee je het exacte gewicht in grammen kunt bepalen van elk willekeurig stel knikkers. Hoe kun je met slechts één weging uitvinden welke van de tien dozen de lichtere knikkers bevat?



Spinrag

David vertelt zijn zusje Margot dat hij op zolder een groot spinnenweb gevonden heeft met daarop maar liefst 16 spinnen en vliegen. "Hoeveel spinnen waren er?", vraagt Margot angstig. David antwoordt: "Ik telde in totaal 102 pootjes. Vertel jij mij nu maar hoeveel spinnen er waren."



Kop of munt

Een doos bevat twee kwartjes. Eén kwartje heeft aan beide zijden een kop. Het andere is een gewoon kwartje, met op de ene kant kop, de andere kant munt. Uit de doos trek je een munt en je bekijkt één kant. Aangenomen dat dit kop is, wat is dan de kans dat de andere kant ook kop is?

3

Dubbeldrank

Je hebt een glas met appelsap en een glas met een even grote hoeveelheid sinaasappelsap. Uit het eerste glas neem je één theelepel appelsap en roert dat door het glas sinaasappelsap. Dan neem je één theelepel uit dit mengsel en roert dat door het glas met de appelsap. Zit er nu meer appelsap in de sinaasappelsap of meer sinaasappelsap in de appelsap?



door Herman Alink



In het bekende computerspelletje Tetris komen zes verschillende vormpjes voor, elk bestaande uit vier vierkantjes. Deze zes vormen zijn precies alle mogelijke vlakke vormen die je kunt maken met vier vierkantjes. Twee van die zes figuren zijn spiegelbeeld van elkaar.

Wanneer je in plaats van vier vierkantjes vier kubusjes neemt, zijn er in totaal acht verschillende vormen mogelijk, waarvan weer twee spiegelbeeld van elkaar zijn. Met deze acht figuren maak je de volgende puzzel.

Materiaal

Voor deze puzzel heb je nodig 32 houten kubusjes, te kopen in een doe-het-zelfzaak of hobbywinkel. Neem niet te grote of te kleine kubusjes. Een ribbe van 2 cm geeft een mooi resultaat. Verder heb je nodig een potje houtlijm.

Zelf maken

Neem vier kubusjes en lijm die tegen elkaar. Door de kubusjes met een of meerdere vlakken tegen elkaar aan te lijmen zijn er in totaal acht verschillende ruimtelijke figuren te maken (tetrakubussen). In foto 1 zie je een volledige set tetrakubussen. Meer mogelijkheden zijn er niet.

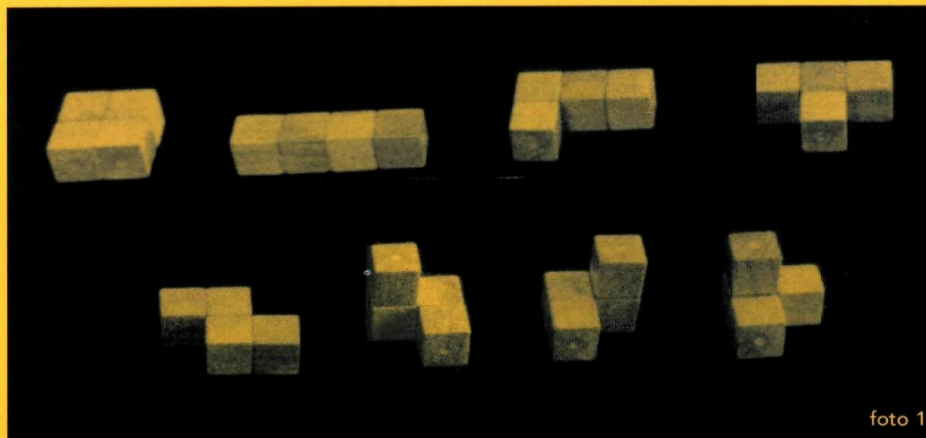
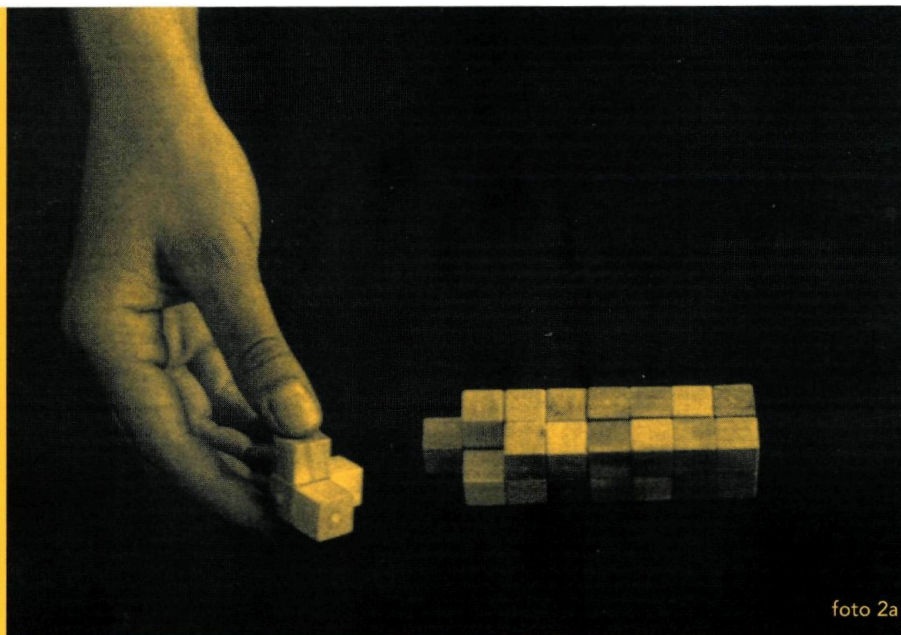


foto 1



Volmaakte kubussen

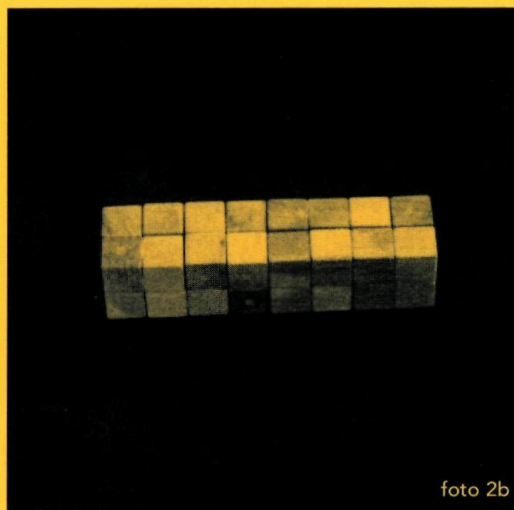
In de praktijk blijkt het helemaal niet zo eenvoudig te zijn om kubussen aan te schaffen. In de houthandel kun je houten latten kopen met een vierkante doorsnede, maar om daarvan perfecte kubussen te maken is lastiger dan je denkt. Blokkendozen zijn duur en bevatten weinig kubussen. Je zou het kunnen proberen met dobbelstenen (niet echt goedkoop). De afgebeelde puzzel is gemaakt van houten kralen à 50 cent per stuk. De gaten zijn dichtgestopt met 'vloeibaar hout'. De redactie houdt zich aanbevolen voor tips.

Vergroten

Elk van deze tetrakubussen kunnen we met een factor 2 vergroten in zowel lengte, hoogte als breedte. Als voorbeeld nemen we de langwerpige tetrakubus, bestaande uit vier kubusjes op een rij. Vergroten we deze met een factor 2, dan krijgen we een blok van 2 bij 2 bij 8 kubusjes (zie foto 2a en 2b), in totaal 32 kubusjes. Dit grote blok kunnen we opbouwen uit de volledige set tetrakubusjes.

Opdracht

De puzzel is nu om met de volledige set tetra-kubusjes elke – met een factor 2 vergrote – tetrakubus op te bouwen. Veel plezier ermee!





Het priemgetal 3

door André de Boer

6

Volgens de opvattingen van de Pythagoreeërs was 3 het eerste oneven getal; 1 was in hun ogen geen echt getal. Ook 2 vonden zij geen echt getal, omdat het een midden ontbeert. Het eerste echte getal was 3, een getal met een begin, een midden en een eind.

De Pythagoreeërs beschouwden 3 en alle andere oneven getallen als mannelijk. Even getallen werden als vrouwelijk beschouwd omdat zij zwakker waren dan de mannelijke — in tweeën gedeeld hebben even getallen, in tegenstelling tot oneven getallen, niets in het midden. Oneven getallen waren de meerdere over even getallen omdat oneven plus even altijd oneven is. En twee even getallen kunnen nooit een oneven getal opleveren, terwijl de som van twee oneven getallen even is. Omdat de geboorte van een zoon fortuinlijker beschouwd werd dan de geboorte van een dochter, werden oneven getallen geassocieerd met geluk. Vergilius schreef: "De oneven getallen stemmen de goden goed."

Eerste oneven priemgetal

Priemgetallen zijn natuurlijke getallen groter dan 1 die slechts deelbaar zijn door 1 en door zichzelf. De eerste tien priemgetallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Elk natuurlijk getal groter dan 1 dat geen priemgetal is, kun je ontbinden als een product van priemgetallen.

Bijvoorbeeld: $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$. Op die manier is elk natuurlijk getal door middel van vermenigvuldiging samengesteld uit priemgetallen. Daarom noemt men de priemgetallen vaak 'de bouwstenen van het systeem der getallen'. Er zijn dus priemgetallen en samengestelde getallen. Met uitzondering van 2 zijn alle priemgetallen oneven. Alle even getallen groter dan 2 zijn door 2 deelbaar en dus samengesteld. Het getal 3 is dus niet het eerste priemgetal, maar wel het eerste oneven priemgetal. Dat is geen diepzinnige bewering, want dit zegt niets anders dan dat 3 het eerste priemgetal is dat niet door 2 deelbaar is. Op dezelfde manier kun je zeggen dat 5 het eerste priemgetal is dat niet deelbaar is door 2 of door 3.

Deelbaarheid door 3

Een getal is deelbaar door 3 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3. Om bijvoorbeeld te zien of 735 deelbaar is door 3, tel je de cijfers bij elkaar op: $7 + 3 + 5 = 15$, en 15 is deelbaar door 3, zodat 735 deelbaar is door 3. Je kunt deze berekening versnellen door gedeeltes die deelbaar zijn door 3 weg te laten. Streep om te beginnen de cijfers die deelbaar zijn door 3 uit het getal weg: $7\cancel{3}5$. De cijfers die overblijven geven $7 + 5 = 12$ en 12 is deelbaar door 3. We concluderen dat 735 deelbaar is door 3.

Klokrekenen modulo 3

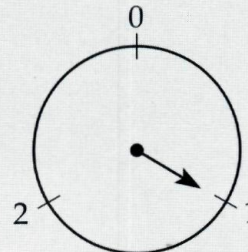
We hebben nog niet verteld waarom een getal deelbaar is door 3 precies dan wanneer de som van zijn cijfers deelbaar is door 3. Dit kun je uitleggen met behulp van rekenen modulo 3. Dat is klokrekenen op een klok met maar 3 cijfers: 0, 1 en 2. Op deze klok is 4 uur gelijk aan 1 uur (net zoals op een gewone klok 13 uur gelijk is aan 1 uur), zie figuur 1. We noteren dit als $4 \equiv 1$ ('4 is equivalent aan 1'). Met de getallen op de klok kun je rekenen als met gewone getallen. De truc is dat $10 \equiv 1$. Dit gebruiken we als volgt:

$$735 = 7 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$$

$$\equiv 7 \times 1^2 + 3 \times 1 + 5 = 7 + 3 + 5,$$

hetgeen betekent dat 735 en $7 + 3 + 5$ dezelfde stand op de klok aangeven.

Omdat $7 + 3 + 5 = 15 \equiv 0$, staat bij 735 de wijzer van de klok bovenaan, hetgeen betekent dat 735 deelbaar is door 3.



Figuur 1. Klokrekenen op een klok met maar drie cijfers. Om 3 uur staat de wijzer weer op 0. Om 4 uur staat de wijzer op 1 uur.

Opgave. Neem een priemgetal groter dan drie. Kwadrateer het en tel er 14 bij op. Laat zien dat de rest van dit getal bij deling door 12 gelijk is aan 3.

Bronnen

David Wells, *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, uitgeverij Bert Bakker, 1987.

Constance Reid, *Van nul tot oneindig*, Prisma boeken, 1965.

Feiten over 3

Het getal 3 is:

- ... het eerste geluksgetal.
- ... het tweede priemgetal.
- ... het eerste oneven priemgetal.
- ... het eerste tweelingpriemgetal. Samen met 5 vormt 3 het tweelingpriempaar (3,5).
- De drie volgende tweelingpriemparen zijn (5,7), (11,13), en (17,19). Het is niet bekend hoeveel tweelingpriemparen er zijn: eindig veel of juist oneindig.
- ... het tweede driehoeksgetal: $3 = 1 + 2$. Het eerste driehoeksgetal is 1. Het n -de driehoeksgetal krijg je door de getallen van 1 tot en met n bij elkaar op te tellen.
- ... het eerste Mersenne-priemgetal: $3 = 2^2 - 1$. Een Mersenne-priemgetal is een priemgetal van de vorm $M_n = 2^n - 1$. Het grootst bekend priemgetal is een

Mersenne-priemgetal.

Er zijn op dit moment van schrijven maar 38 Mersenne-priemgetallen bekend.

De grootste is $M_{6972593}$, een priemgetal van 2.098.960 cijfers.

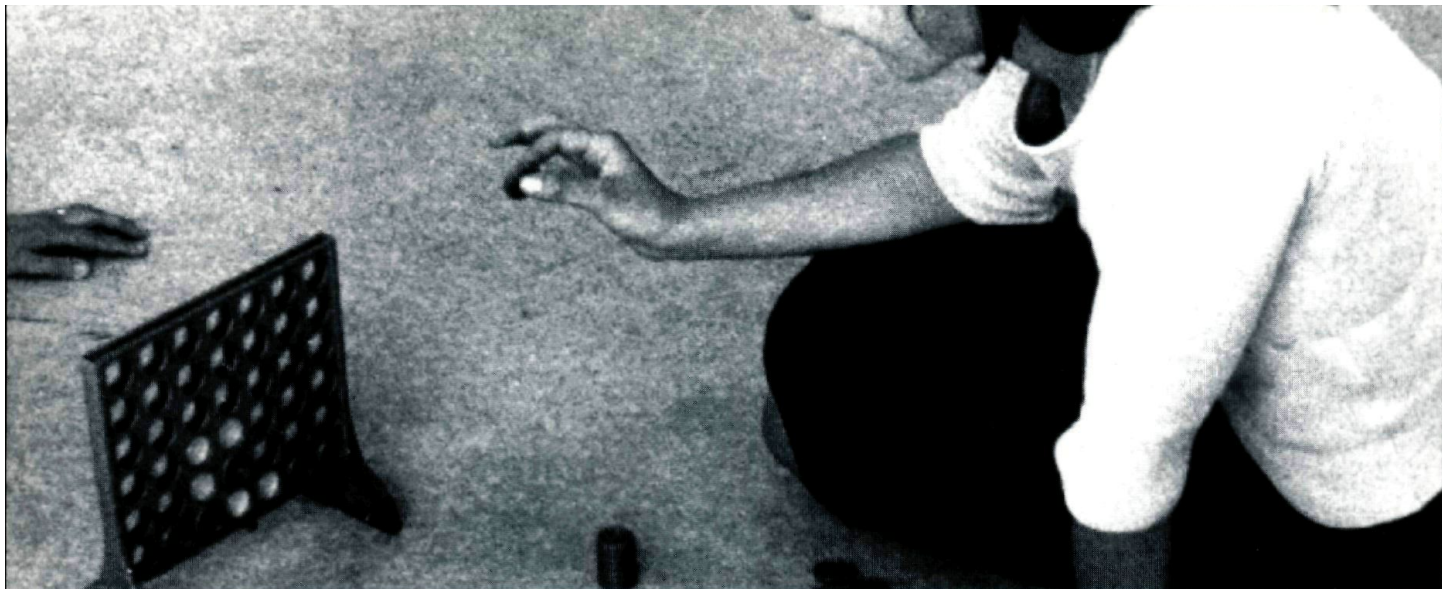
... het eerste Fermat-priemgetal.

Een Fermat-priemgetal is een priemgetal van de vorm $F_n = 2^{2^n} + 1$. Er zijn slechts vijf Fermat-priemgetallen bekend: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ en $F_4 = 65537$.

... het vierde Fibonacci-getal. De rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... staat bekend als de rij van Fibonacci. Elk getal in de rij krijg je door de twee voorafgaande getallen bij elkaar op te tellen.

... het derde Lucas-getal. De Lucas-getallen zijn 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

Elk getal in deze rij krijg je door de twee voorafgaande getallen bij elkaar op te tellen.



Vier op

8

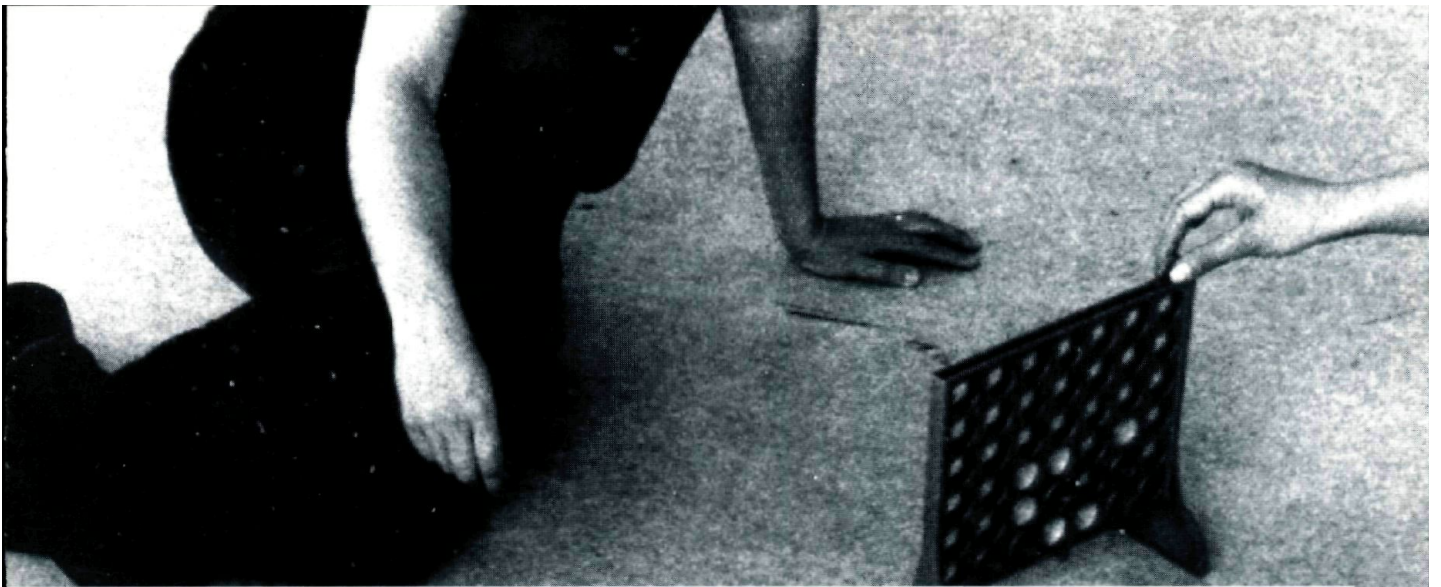
In het kader van het Pythagoras thema wiskundige spelletjes behandelen we in dit nummer een redelijk ingewikkeld spel: Vier op een rij. Om dit volledig te begrijpen is erg lastig, maar met de hulp van een computer is dat wel gelukt.

door Jos Uiterwijk en Jeroen Donkers

Vier op een rij is een spel dat je vast wel eens gespeeld hebt. Toch is het nog niet zo oud, zover als we hebben kunnen nagaan. Bij ons weten is het pas in 1974 uitgebracht, door de firma Milton Bradley (MB). Misschien heb je het zelfs wel in huis. Wat je misschien zal verbazen is dat zo'n eenvoudig spel door wetenschappers onderzocht wordt om te zien of ze het spel volledig kunnen doorgronden. We noemen dat het oplossen van een spel. Waarom ze dat zo belangrijk vinden zullen we dadelijk vertellen. Maar eerst iets over het spel.

De spelregels

Vier op een rij is een spel voor twee personen. Beide spelers hebben 21 gelijke stenen, meestal één speler rood en de andere speler geel. In de diagrammen in dit artikel zullen we zwarte en witte stenen gebruiken. Al is dat niet duidelijk vastgelegd in de spelregels, we nemen aan dat Wit begint. Het bord is een rechthoekig rechtopstaand bord met 7 kolommen en 6 rijen. Een zet



een rij

doen bestaat uit het plaatsen van een steen van jouw kleur in een kolom. De steen valt uiteraard door naar het onderste lege vakje in de kolom. De eerste speler die vier van zijn stenen op een rechte rij krijgt, hetzij horizontaal, hetzij vertikaal, hetzij diagonaal, wint.

In figuur 1 heeft Zwart zich duidelijk laten verrassen. Meestal zal het een stuk moeilijker gaan. De horizontale en verticale rijen zie je meestal wel, maar let op de diagonale rijen! In figuur 2 heeft Wit ook gewonnen.

Lukt het niet om te winnen en is het bord vol, dan is het een remise. Een voorbeeld van een remise zie je in figuur 3.

Notatie

Om gemakkelijk een spel te kunnen (na)spe- len, zullen we de vakjes aanduiden met een letter/cijfer combinatie. Zo hebben de kolom- men van links naar rechts de aanduidingen a tot en met g, terwijl de rijen van onder naar

boven met 1 tot en met 6 genummerd wor- den. In figuur 4 zie je de nummering van het hele bord. Zo hadden we de winst uit figuur 1 bijvoorbeeld kunnen krijgen door de volgen- de zetten:

1. d1 d2
2. c1 d3
3. e1 b1
4. f1 Wit wint.

Speltheoretische waarde

Nu denk je misschien dat dit wel een gemakkelijk spel zal zijn, misschien net zo iets als Boter, kaas en eieren. Als je dat een paar keer gespeeld hebt weet je hoe je het beste kunt spelen en verlies je nooit meer. Maar als je tegenstander dan ook niet de domste is win je ook nooit meer: het spel is dus theoretisch remise. We zeggen dat de speltheoretische waarde van Boter, kaas en eieren remise is. De speltheoretische waarde van een spel is dus dat wat je bereikt als je zo goed mogelijk speelt, maar je tegenstander

ook. Dat kan een 'eerstespelerwinst' zijn, een 'tweedespelerwinst' of (als de spelregels dat toelaten) een remise, zoals boter, kaas en eieren.

Om nu de speltheoretische waarde van Vier op een rij te bepalen bedacht Victor Allis, destijds nog een student aan de Vrije Universiteit in Amsterdam, om voor zijn afstudeeronderzoek een computerprogramma te schrijven dat Vier op een rij oplost. Hij was zelf een goede Vier op een rij-speler en wist met Zwart praktisch altijd van anderen te winnen. Hij was er dus van overtuigd dat de speltheoretische waarde van Vier op een rij een winst voor de tweede speler was. Hij deed dat afstudeeronderzoek onder leiding van Professor Jaap van den Herik uit Maastricht, die een expert is op het gebied van computerspelen.

Complexiteit

Het eerste wat Victor Allis deed was nagaan hoe moeilijk het spel nu eigenlijk is, in andere woorden: wat is de complexiteit van Vier op een rij? Een manier om die complexiteit aan te duiden is om te kijken hoeveel verschillende posities er mogelijk zijn. Daar zijn al snel wat eenvoudige regels bij te bedenken.

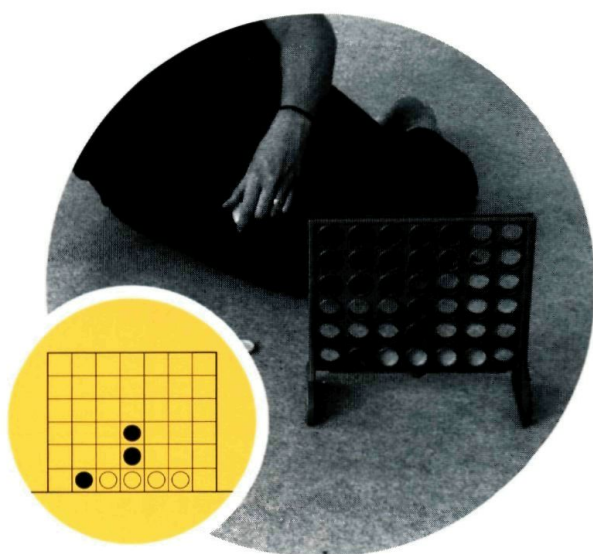
- Ieder vakje kan in één van drie toestanden zijn: leeg, zwart of wit. Wiskundig gezien betekent dat (omdat er 42 vakjes zijn) dat er maximaal 3^{42} ($3 \times 3 \times \dots \times 3$) verschillende posities kunnen zijn, en dat zijn ongeveer 10^{20} (100000000000000000000) posities.

- Omdat stenen door de zwaartekracht altijd doorvallen tot het onderste lege vakje in een kolom, kan iedere positie waarin er in een kolom gevulde vakjes voorkomen boven een leeg vakje niet voorkomen. Deze posities noemen we illegaal.

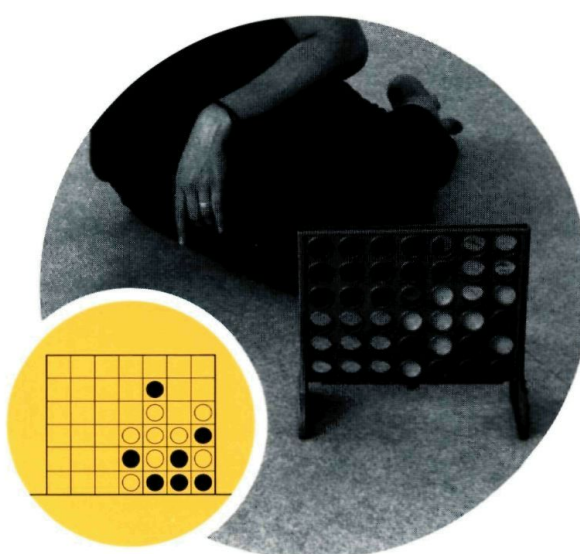
- Omdat Wit en Zwart beurtelings zetten en er nooit stenen van het bord worden weggenomen, moet iedere positie evenveel zwarte als witte stenen hebben of precies één witte meer. Alle andere posities zijn illegaal.

Victor heeft vervolgens een programma geschreven dat telde hoeveel van de mogelijke posities volgens deze regels illegaal waren. Er bleven er toen nog ongeveer 7×10^{13} (70000000000000) over. Niet al deze posities zijn legaal. Bijvoorbeeld, de positie van figuur 5 kan ook niet voorkomen, omdat Zwart hier begonnen

10



Figuur 1.
Een heel gemakkelijke winst voor Wit.



Figuur 2.
Wit heeft gewonnen.

moet zijn en dat mag niet. Zo zijn er nog meer illegale voorbeelden te verzinnen, maar alles bij elkaar lijken dat er niet al te veel te zijn en is de bovengrens van 7×10^{13} een redelijke schatting.

Brute kracht of kennis?

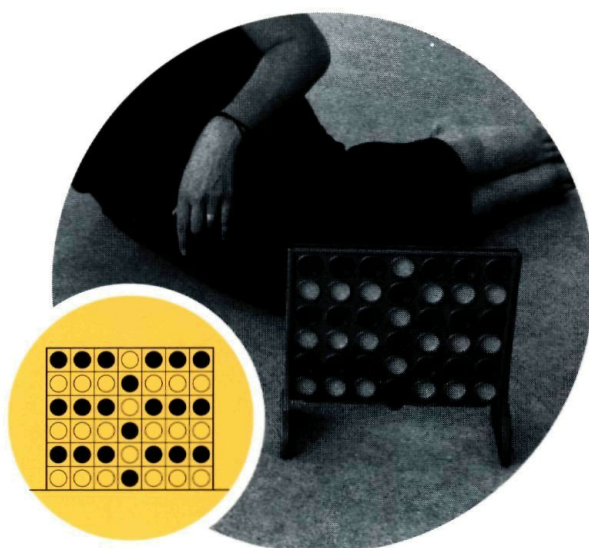
Om de speltheoretische waarde van een spel te bepalen kunnen we prima een computer gebruiken. In principe kunnen we die computer laten beginnen met de beginpositie en dan een spel helemaal laten analyseren. Hij gaat dan systematisch alle mogelijkheden af en zal uiteindelijk laten weten of de beginspeler kan winnen, altijd verliest of dat het remise wordt. Hij bouwt als het ware een gigantische boom met alle mogelijke varianten. Zo'n aanpak noemen we een brute-kracht aanpak (in het Engels: brute force). Het aantal legale posities is echter toch nog zo hoog dat zelfs voor de snelste computers dit karwei een flinke klus is. Stel dat de computer slechts 1×10^{13} posities zou moeten doorrekenen (in plaats van 7×10^{13}), en dat hij één miljoen posities per seconde zou kunnen doorrekenen. Dan zou die computer nog altijd 115 dagen full-time moeten doorrekenen om het spel te analyseren.

Nu zou dat best kunnen (sterker nog, het is gedaan!), maar Victor Allis vond het aardiger een andere aanpak te proberen. Die andere aanpak is een kennis-gebaseerde aanpak (in het Engels: knowledge based). Hierbij probeer je met behulp van kennisregels te bereiken dat je van allerlei posities op voorhand kunt aangeven dat ze gewonnen, verloren of remise zijn, zonder die posities echt uit te spelen. Je bent dan in die variantenboom als het ware aan het snoeien. Wel moet je zeker zijn dat die kennisregels helemaal correct zijn. Eén foute toepassing van een kennisregel en het resultaat is niet meer betrouwbaar!

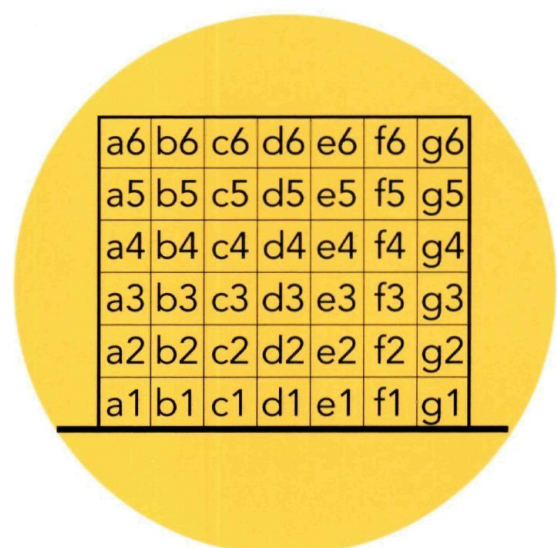
Kennisregels

Victor heeft negen kennisregels geformuleerd, ieder met een eigen voorwaarde en een eigen actie en een eigen uitkomst. De voorwaarde is dan bijvoorbeeld: in een kolom zijn minstens twee vakjes leeg; de actie is dan: zodra de tegenspeler het onderste lege vakje speelt moet je zelf direct daar bovenop spelen in dezelfde kolom; de uitkomst is dan: het tweede lege vakje van onderen in die kolom wordt zeker van jou. Het zou te ver voeren om die negen kennisregels allemaal te bespreken en om precies uit te leggen hoe

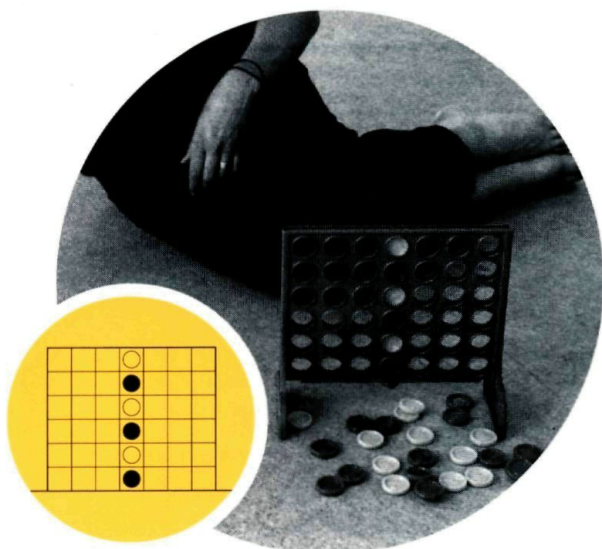
11



Figuur 3.
Remise. Geen van beide spelers heeft vier op een rij.



Figuur 4.
De nummering van de velden.



Figuur 5.

Een positie in Vier op een rij die in de praktijk nooit kan voorkomen. Dit heet een illegale positie.

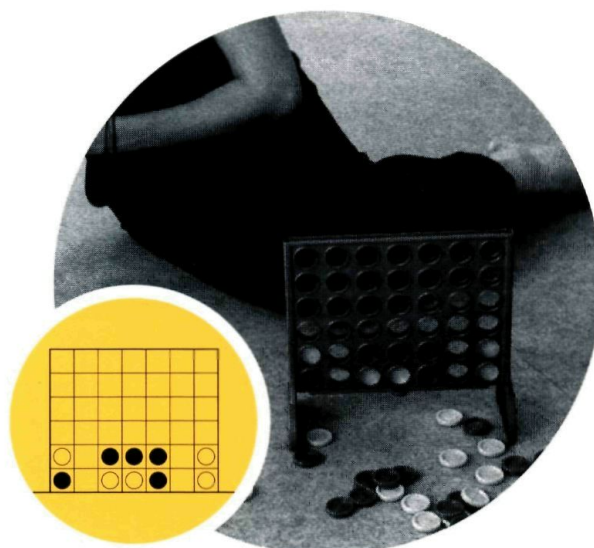
die gecombineerd mogen worden. Maar het resultaat is dat voor veel stellingen al direct de uitkomst vaststaat.

Kijk bijvoorbeeld naar de positie uit figuur 6a, met Wit aan zet. Omdat Zwart velden c2, d2 en e2 bezet, heeft hij een dreiging op veld b2 en een op veld f2. Zwart kan dan als volgt redeneren: de volgorde van spelen weet ik niet, maar zodra Wit in kolom a, c, d, e, of g speelt, speel ik in dezelfde kolom. Uiteraard kan Wit niet in kolom b of f spelen, omdat ik dan direct win. Maar uiteindelijk worden alle kolommen behalve b en f volledig opgevuld (zie figuur 6b) en moet Wit wel b1 of f1 spelen, waarna ik win. Zo is met behulp van de kennisregels direct aan te tonen dat de positie in figuur 6a een winst voor Zwart is.

Resultaten

Met behulp van alle kennisregels kon Victor direct aantonen (zonder zelfs te zoeken) dat Vier op een rij op de kleinere borden 4 bij 4 (het eerste getal is het aantal kolommen, het tweede het aantal rijen), 4 bij 6, 5 bij 4, 5 bij 6, 6 bij 4, en 6 bij 6 allemaal remise zijn. Voor 7 bij 4 moest het programma wel even zoeken, maar ook dat bleek een eenvoudige remise te zijn. Voor 7 bij 6, dus het standaard bord,

begon het echte werk. De computer had er nog zo'n 15 dagen rekentijd voor nodig om standaard Vier op een rij helemaal door te rekenen. Het aardige met spelen is dat je toch altijd weer voor verrassingen kunt komen te staan. Al was Victor aanvankelijk ervan overtuigd dat de tweede speler altijd kon winnen, toen zijn programma het spel bijna geanalyseerd had begon hij te twijfelen. Het leek erop



Figuur 6a.

Zwart staat gewonnen. Zie je waarom?

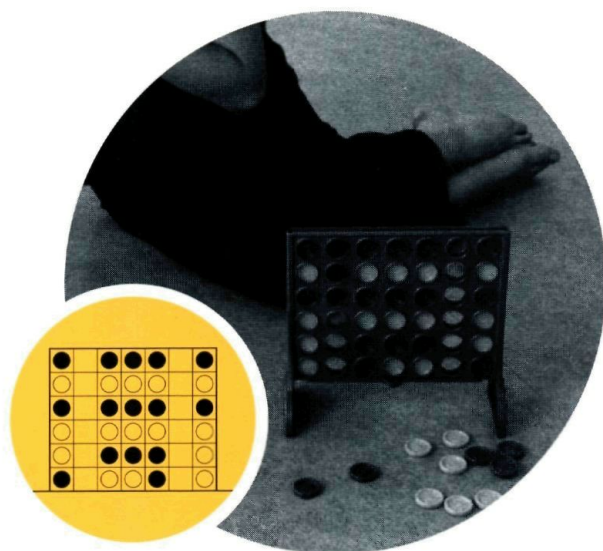
dat de eerste speler wel eens aan het vangnet van de tweede speler zou kunnen ontsnappen. Remise lag daarom voor de hand, zeker gezien de resultaten op de kleinere borden. Maar pas toen het programma volledig klaar was met zijn werk zag Victor dat de uitkomst zelfs nog anders was: de eerste speler kon zelfs altijd winnen! Ofwel, in de officiële terminologie, Vier op een rij was een 'eerstespelerwinst' spel. Wel moet die eerste speler daar heel nauwkeurig voor spelen. De beste manier om te spelen voor beide spelers is als volgt: 1. d1! d2 2. d3! d4 3. d5! b1 4. b2 (zie figuur 7).

De uitroeptekens hierbij betekenen dat de eerste speler daar geen andere keuze heeft wil hij winnen. Anders gezegd, doet hij een andere zet dan kan de tweede speler op zijn minst remise houden. Bovendien, als de

tweede speler andere zetten doet, dan kan de eerste speler gemakkelijker winnen. Natuurlijk is het in de positie in figuur 7 nog niet afgelopen, maar het programma wist te bewijzen dat de eerste speler altijd kon winnen.

Wat is het nut?

Waarom doen wetenschappers dit nu, al die energie om een simpel spelletje op te lossen? De belangrijkste reden is dat ze voor het oplossen van zo'n spel allerlei nieuwe methoden en technieken ontwikkelen, die ze ook op andere gebieden kunnen gebruiken. Zo heeft het werk van Victor Allis geleid tot het ontwikkelen van speciale zoekalgoritmen, onder andere gebruikt in computersystemen om te assisteren bij het in goede banen



Figuur 6b.

Wit is aan zet en kan alleen maar zetten in kolom b of kolom f. Zwart wint in de volgende zet.

leiden van vliegtuigen en in programma's om diagnoses te stellen voor bijvoorbeeld kapotte auto's. Je ziet, waar een spelletje niet al goed voor kan zijn.

En nu?

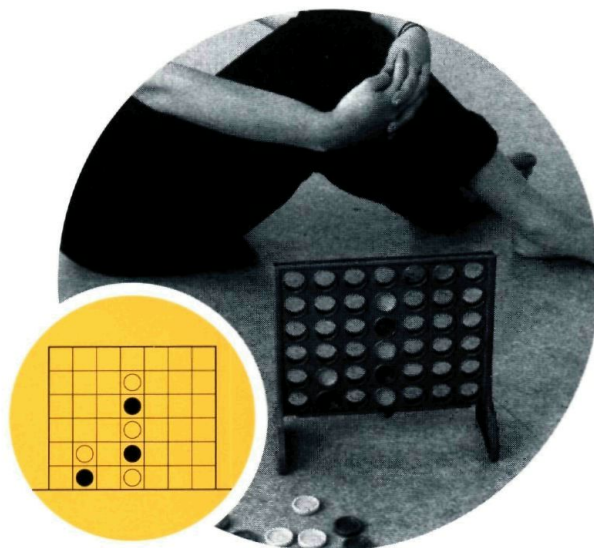
Is het nu niet meer interessant om Vier op een rij te spelen? Dat is deels wel en deels niet het geval. Al is het spel nu opgelost, het

is veel te moeilijk om die oplossing precies te onthouden. Voor mensen onderling blijft Vier op een rij dus gewoon een uitdagend spel. Tegen een computer die de oplossing kent is spelen als Zwart natuurlijk niet meer leuk (tenzij je er van houdt altijd te verliezen). Wel is het een uitdaging om met Wit van een computer te winnen. Je weet in ieder geval dat je theoretisch gewonnen staat.

Wil je naar aanleiding van dit artikel vaker Vier op een rij spelen, dan blijft het het leukste om dat met familie of vrienden te doen. Misschien heb je iets van dit artikel opgestoken en ben jij, net als de computer, een onverslaanbare Vier op een rij speler geworden, uiteraard mits je mag beginnen. Als je niemand weet te strikken om te spelen kun je natuurlijk ook op Internet terecht. Een mooi adres om Vier op een rij te spelen vind je hieronder. Het programma daar speelt trouwens niet optimaal, dus je kunt altijd winnen. Veel plezier!

Website

<http://www.creativepuzzels.nl/spel/speel1/vieroprij.htm>



Figuur 7.

Een van de winnende openingen van Wit: 1. d1! d2 2. d3! d4 3. d5! b1 4. b2. De uitroepetekens betekenen dat de eerste speler daar geen andere keuze heeft.

De post

Taalkundig tellen

In het vorige nummer stond de volgende puzzel van Hans Melissen

t a a l k
u n d i g +
t e l l e n

Is het mogelijk om aan elk van de tien letters een ander cijfer toe te kennen zo dat de optelling klopt? De redactie ontving van **Thomas Beuman** uit klas 5 van het RK Gymnasium Juvenaat H.H. en van **Ton Kool** uit Soest een bewijs dat de puzzel geen oplossing heeft. Hier is het bewijs van Thomas. Stel dat er wel een oplossing is. Omdat 'tellen' meer cijfers heeft dan 'taalk' en 'undig', moet gelden $t = 1$ en $e = 0$. Dus $l + i = 9$ of 10 en $a + d + 1 = l$ of $l + 10$. Maar als $a + d + 1 = l + 10$, dan geldt ook $a + n + 1 = l$ of $l + 10$ en dus $n = d$ of $n = d - 10$, hetgeen onmogelijk is. Dus $a + d + 1 = l$. Dus $a + d + 1 + i = l + i = 9$ of 10 . Omdat a , d en i verschillend zijn en groter dan 1 , zijn deze drie letters 2 , 3 en 4 , en $l + i = 10$. We zien dat $a + n = l$ of $l + 10$. Als $a + n = l + 10$, dan is $n = d + 11$. Dit kan niet, dus $a + n = l$ en $n = d + 1$. Dus $d = 4$ en $n = 5$. Omdat k en g beide minstens 6 zijn, moet $k + g = 15$. Dus $l + i + 1 = 10$, hetgeen in tegenspraak is met de gevonden relatie $l + i = 10$. Er zijn dus geen oplossingen.

Fibonacci-getallen

De rij $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ heet de rij van Fibonacci (zie het oktobernummer). Het n -de getal uit de rij wordt aangeduid met F_n . In het vorige nummer stond de volgende formule van Jarik Bijlsma:

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

In reactie daarop stuurde **Bram Kuijvenhoven** uit Den Haag een algemenere formule! Voor iedere n en m geldt namelijk:

$$F_{n+m+1} = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1}.$$

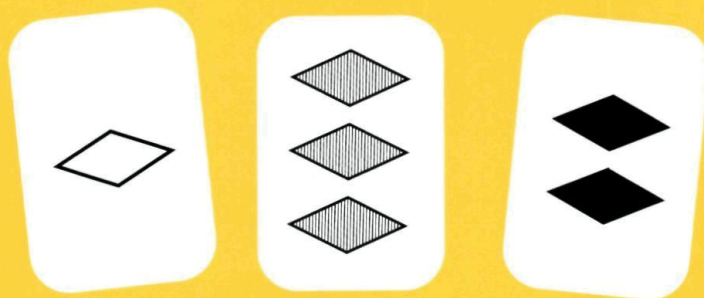
Als je in deze formule $n = m$ neemt, dan krijg je de formule van Jarik terug. Hoewel Bram een bewijs heeft dat z'n formule klopt, is dit bewijs wel lastig en gebruikt matrices. Is er iemand die een eenvoudig bewijs heeft?

Meetkunde met de computer

Ton Lecluse uit Soestdijk heeft een 3D-meetkundeprogramma geschreven, bedoeld voor gebruik in het wiskunde-onderwijs. Het programma heeft heel veel mogelijkheden waaronder functie-onderzoek, regelmatige veelvlakken en het kunnen bewegen van het gezichtspunt. Een gratis cdrom is te krijgen via Tons vernieuwde website: <http://www.lecluse1.myweb.nl>

door Marte Koning en Annick Weyzig

1e nationale Set-wedstrijd!



Het kaartspel Set begint langzamerhand bekend te raken in Nederland. Daarom wordt op zaterdag 15 september in de Irene Congreszaal van de Jaarbeurs te Utrecht de eerste nationale Set-wedstrijd gehouden tijdens de Ducosim zomerconventie. Voor de beste spelers zijn er prijzen, zoals een spellenpakket van Ravensburger en een heuse beker. Tevens wordt na afloop een aantal spellen verloot. Na afloop is er voor alle deelnemers een leuke herinnering.

Set

Set is een kaartspel voor een of meer personen. Het spel bestaat uit 81 kaarten, met daarop verschillende figuren. Die figuren hebben vier eigenschappen, waarbij er per eigenschap drie mogelijkheden zijn. Een Set bestaat uit een drietal kaarten waarvan elke eigenschap ofwel gelijk is, ofwel op elk van de drie kaarten verschillend is. De bedoeling van het spel is, om zo snel mogelijk Sets te herkennen in de kaarten die op tafel worden gelegd. Het spel is uitvoerig behandeld in Pythagoras, december 1999.

Ducosim Zomerconventie

Ducosim is een landelijke vereniging die het spelen van simulaties en andere bordspellen bevordert, zoals bv. 'de Colonisten van Catan'. Vier keer per jaar organiseert Ducosim spellenbeurzen waar zowel leden als niet-leden terecht

kunnen voor alles op spellengebied. Behalve de Set-wedstrijd worden er nog verschillende andere toernooien gehouden en zijn er demonstraties van de nieuwste (participatie)spellen. Verder kan je terecht bij de verkoopstands, waar een compleet spellenassortiment wordt aangeboden.

Meedoen

Om mee te doen, stuur je een brief of e-mail naar onderstaand adres. Deelname kost 5 gulden, te voldoen op de dag zelf. Dit is exclusief het entreegeld voor de Ducosim-conferentie (7,50 gulden). Schrijf je je voor 1 augustus in, dan krijg je 2,50 gulden korting. Inschrijving is ook mogelijk op de dag zelf, tot uiterlijk 12.30 uur in de zaal. Om 13.00 uur begint het programma. De wedstrijd wordt voorafgegaan door een uitgebreide uitleg van het spel en gelegenheid tot oefenen. Ook als je het spel nog nooit gezien hebt, kun je gewoon meedoen. Stuur je aanmelding naar:

Setwedstrijd
Heiligenbergerweg 94
3816 AM Amersfoort
e-mail: setwedstrijd@hotmail.com

Meer informatie

<http://dit.is/set>
<http://www.euronet.nl/~ducosim/>
<http://www.ravensburger.de>

°Pythagoras Olympiade

Kun jij de onderstaande opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 25 gulden.

Adres

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
email: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam, adres, school en klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 september 2001. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van vijftientig gulden verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing **zelf** vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het februarinummer.

Veel succes! René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

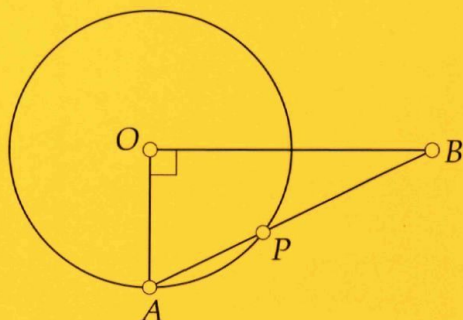
16

Opgave 73

Uitgaande van een viertal reële getallen (a, b, c, d) maken we telkens een nieuw viertal (ab, bc, cd, da) . We herhalen deze procedure totdat we het oorspronkelijke viertal (a, b, c, d) weer terugkrijgen. Toon aan dat dit alleen gebeurt als $a = b = c = d = 1$ of 0 .

Opgave 74

Punt A ligt op een cirkel met middelpunt O . Het punt B ligt zo dat OB loodrecht op OA staat, met $OB = 2 \cdot OA$. Lijnstuk AB snijdt de cirkel in P . Bereken de verhouding $\frac{BP}{PA}$.



Opgave 69

Vind alle natuurlijke getallen n zo dat $n^2 + 1$ deelbaar is door 101.

Oplossing. Als $n^2 + 1$ deelbaar is door 101, is $n^2 + 1 - 101 = n^2 - 100$ dat ook. We kunnen $n^2 - 100$ schrijven als $(n + 10)(n - 10)$ en aangezien 101 een priemgetal is, moet $n + 10$ of $n - 10$ deelbaar zijn door 101. Dit leidt tot de twee volgende algemene oplossingen:

- $n = -10 + 101k$,
- $n = 10 + 101k$,

met k een natuurlijk getal.

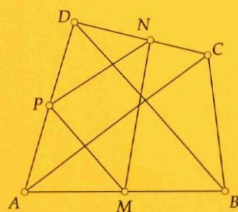
Deze opgave werd opgelost door: H. Verdonk te Den Haag en Elias Buissant des Amorie te Castricum.

Opgave 70

In vierhoek $ABCD$ is M het midden van AB en N het midden van CD . Is MN altijd kleiner dan of gelijk aan $(AC + BD)/2$, altijd groter dan of gelijk aan $(AC + BD)/2$, of is daar niets over te zeggen?

Oplossing. We noemen het midden van AD P . Het is nu duidelijk (bijvoorbeeld met behulp van gelijkvormige driehoeken) dat $PN = \frac{AC}{2}$ en $PM = \frac{BD}{2}$. De driehoeksongelijkheid zegt dat de weg van M naar N via P is nooit korter dan rechtstreeks van M naar N . Met andere woorden:

$$MN \leq PN + MP \leq \frac{AC + BD}{2}.$$



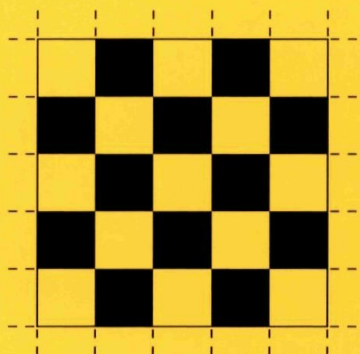
Deze opgave werd opgelost door Elias Buissant des Amorie te Castricum.

Problemen

door Dion Gijswijt

Tegels kleuren

Een groot plein is volgens een schaakbordpatroon betegeld met vierkante tegels, zie de figuur. Als je telkens horizontaal of vertikaal van een tegel naar een aangrenzende tegel stapt, dan heet het aantal stappen dat je moet doen om van een tegel naar een andere tegel te gaan de *afstand* tussen die twee tegels. Om het plein wat op te fleuren krijgen de tegels elk een kleur. Dit moet zo gebeuren dat als twee tegels op afstand ≤ 2 liggen, ze verschillende kleuren krijgen. Hoeveel kleuren zijn er minimaal nodig om dit te doen? Hoeveel kleuren zijn nodig wanneer tegels op afstand ≤ 3 verschillende kleur moeten hebben; voor afstand $\leq n$?



Pi

Zoals je misschien weet is

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bepaal de uitkomst van:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

De oudste zoon

Jan, vader van drie kinderen, maakt een praatje met buurman Harmen.

Harmen: "Zeg, hoe oud zijn jouw kinderen eigenlijk?"

Jan: "Als je hun leeftijden vermenigvuldigt krijg je 36."

Harmen: "Alsjeblieft, niet weer zo'n raadsel ..."

Jan: "De som van hun leeftijden is gelijk aan je huisnummer."

Harmen: "Ik kom er nog niet uit."

Jan: "Oké, de oudste heeft rood haar."

Harmen: "Dan weet ik het!"

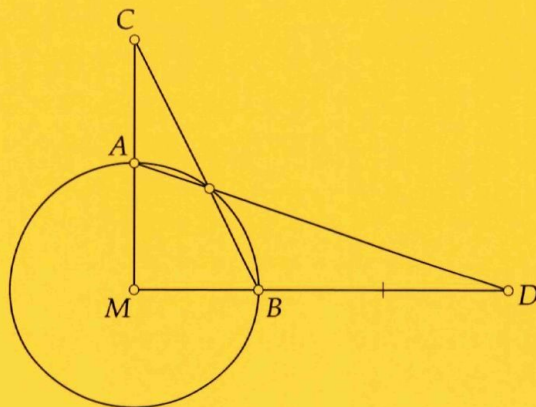
Hoe oud zijn de kinderen van Jan?

Loodrechte stralen

De lijnstukken MA en MB zijn twee loodrechte stralen van cirkel (M, r) .

Op het verlengde van MA ligt punt C zó, dat $MC = 2r$. Op het verlengde van MB ligt punt D ; $MD = 3r$. Bewijs dat het snijpunt van AD en BC op de cirkel ligt.

H.J. Spalburg



Oplossingen

nr. 5

door Dion Gijswijt

Tijdmeting

Knip de eerste lont in vijf stukken en steek elk stuk aan een kant aan. Zo gauw een stuk op is gebrand, knip je een ander stukje lont doormidden en steekt van het nieuwe stuk een uiteinde aan. Op die manier branden er telkens 5 stukjes lont. Na 12 minuten is de eerste lont opgebrand. Met de andere lont doe je daarna hetzelfde, maar dan met 12 stukjes, zodat je 5 minuten afmeet. Samen heb je dan 17 minuten afgepast.

Pentomino magie

8	17	1	15	24
14	23	7	16	5
20	4	13	22	9
21	10	19	3	12
2	11	25	6	18

Met enen alleen

Merk op dat $x \oplus y = 1/x + 1/y$, dus als x en y tussen 1 en 2 liggen, dan ligt $x \oplus y$ ook tussen 1 en 2. De getallen die met enen alleen te schrijven zijn, zijn dus altijd breuken tussen 1 en 2. Omgekeerd kun je

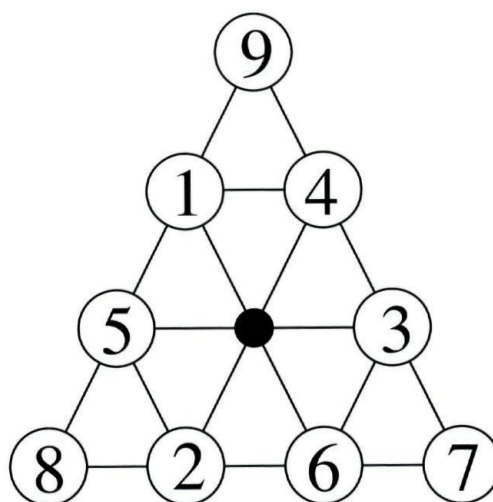
echter ook iedere breuk tussen 1 en 2 met enen alleen maken. De truc is om 'achteruit' te werken en een gegeven breuk te schrijven als de $\oplus$ van twee breuken tussen 1 en 2 met kleinere noemer. Als voorbeeld nemen we de breuk $9/7$. Omdat $9/7 = 4/7 + 5/7$, is $9/7 = 7/4 \oplus 7/5$. Nu is $7/4 = 3/4 + 4/4$, dus $7/4 = 4/3 \oplus 1$. En $7/5 = 5/3 \oplus 5/4$. Na enkele stappen vinden we op die manier:

$9/7 =$

$$(1 \oplus ((1 \oplus (1 \oplus 1)) \oplus (1 \oplus (1 \oplus 1)))) \\ \oplus (1 \oplus (1 \oplus (1 \oplus 1)) \oplus ((1 \oplus 1) \oplus \\ ((1 \oplus (1 \oplus 1)) \oplus (1 \oplus (1 \oplus 1)))))$$

In balans

Hieronder zie je een van de oplossingen:



De Prinses en *e*

20



Hoe vindt prinses Tyche uit honderd kandidaten haar prins? En wat heeft dit met het getal *e* te maken?

door Misja Nuyens

Koning Arthur is op zoek naar de meest geschikte prins om met zijn dochter Tyche te trouwen. Honderd kandidaten dingen naar haar hand. Elke dag ontvangt Koning Arthur een prins en stelt hem op de proef. De proef stelt Arthur in staat om van twee prinsen te bepalen welke de beste is. Hij kan echter geen waarde aan de prestatie van een 'losse' prins geven. De koning wil de prins kiezen die de proef het beste doet, maar er is een moeilijkheid: na het afleggen van de proef wil een prins meteen horen of hij gekozen wordt. Zo niet, dan vertrekt hij woedend naar huis en komt hij niet meer terug. Hierdoor zal Arthur lang niet altijd de beste prins kunnen kiezen: hij weet immers nooit hoe goed de prinsen zijn die de proef nog moeten doen. Nachten lang ligt Koning Arthur over dit probleem na te denken. Weet jij met welke aanpak Arthur de grootste kans heeft dat zijn dochter toch met de beste prins trouwt?



Tovenarij?

Koning Arthur vraagt aan zijn hofgeleerden wat hij moet doen. Ze beraadslagen lang en breed en komen met de volgende oplossing: een aantal prinsen moet de proef doen en wordt ongeacht het resultaat afgewezen. Door te onthouden welke de beste van deze *testgroep* was, heeft de koning een idee hoe goed de prinsen zijn. Wanneer er daarna een prins komt die beter is dan de beste van de testgroep, dan wordt die prins gekozen om de prinses te huwen. Wat de wijzen niet kunnen vertellen is hoe groot de testgroep moet zijn. Als de testgroep heel groot is, is de kans groot dat de beste prins in de testgroep zit en zonder pardon wordt weggestuurd.

Als de testgroep heel klein is, ligt de 'drempel', die gevormd wordt door de beste prins uit de testgroep, te laag. Op die manier zal een prins die misschien wel goed is maar niet de beste, te gemakkelijk als winnaar uit de bus kunnen komen. Ten einde raad roept de

koning de hulp in van de tovenaar Jasim. Van hem wordt gezegd dat hij beschikt over kennis van wiskunde en andere zwarte magie.

Na een dag lang onder het prevelen van magische bezweringen vellen papier volgekrast te hebben, komt de tovenaar met het antwoord: $100 / e$.

Model

Om dit probleem op te lossen heeft Jasim een wiskundig *model* gemaakt. Dat betekent dat hij door een aantal aannames kan werken in een geïdealiseerde wereld, waarin hij het probleem met zijn wiskunde op kan lossen. Ten eerste neemt hij aan dat geen twee prinsen de proef even goed zullen doen. In theorie kan hij dan een ranglijst van alle prinsen maken waarop de beste prins bovenaan staat. Deze noemt hij p_1 , de tweede p_2 , et cetera.

Zijn tweede aanname is dat de volgorde waarin de prinsen $p_1, p_2, \dots, p_{100}$ binnenkomen, willekeurig is. We zullen zien dat >>



Jasim hiermee alle gereedschappen in huis heeft om het probleem op te lossen. Eerst doet hij dat met een voorbeeld, om daarna een algemene oplossing te vinden.

Vijfig prinsen

In het voorbeeld neemt Jasim een testgroep van vijftig prinsen. Als de beste prins bij de eerste vijftig zit, dan zal hij zeker niet uitverkoren worden. Als de beste prins *niet* in de testgroep zit, hoe groot is dan de kans dat hij wel gekozen wordt? Stel dat hij als 61ste komt. Dan zal hij winnen als de prinsen die tussen hem en de testgroep komen (degenen die als 51ste tot en met 60ste arriveren) allemaal slechter zijn dan de beste van de vijftig prinsen uit de testgroep.

Dit gebeurt alleen wanneer de beste van de eerste zestig prinsen al bij de eerste vijftig zat. Vanwege de tweede aanname in het model is de kans hierop gelijk aan $50/60$. De kans dat de beste prins als 61ste komt én gekozen wordt, is dan de kans dat hij precies als 61ste binnenkomt, $\frac{1}{100}$, vermenigvuldigd met de kans dat hij gekozen wordt, $\frac{50}{60}$. Dezelfde redenering kunnen we gebruiken om voor elk geheel getal k tussen 51 en 100 de kans uit te rekenen dat de ware prins als k -de aankomt én gekozen wordt: deze kans is $\frac{1}{100} \frac{50}{k-1}$.

De kans dat de beste prins gekozen wordt wanneer de testgroep 50 prinsen

groot is, is de som van al deze kansjes en gelijk aan:

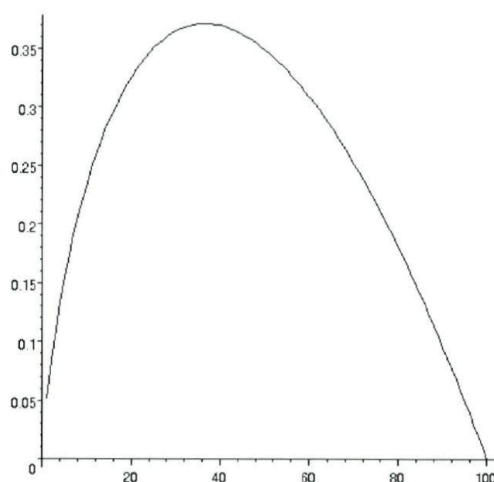
$$\frac{1}{100} \left(\frac{50}{50} + \frac{50}{51} + \dots + \frac{50}{99} \right) \approx 0.36.$$

Hoeveel echt? Als we nu niet een testgroep van 50 nemen, maar van een willekeurig grootte k tussen 0 en 100, dan wordt deze kans

$$\frac{1}{100} \left(\frac{k}{k} + \frac{k}{k+1} + \dots + \frac{k}{99} \right).$$

De vraag is voor welke k de bovenstaande uitdrukking zo groot mogelijk is.

Als we k groter maken worden de tellers van de breuken groter, maar neemt het aantal breuken juist af. Na het invullen van de getallen 1, 2, ..., 100 voor k , blijkt dat de bovenstaande som het grootst is voor $k = 37$. Zie figuur 1.



Figuur 1. Horizontaal staat de grootte van de testgroep k . Bij elke k is de kans weergegeven dat de beste prins de eerste is, die beter is dan de beste van de testgroep.

Als koning Arthur de kans zo groot mogelijk wil maken dat hij zijn lieflijke dochter schenkt aan de beste prins, dan moet hij de eerste 37 kandidaten afwijzen. Daarna moet hij de eerste prins nemen die beter is dan de beste van de bij voorbaat afgewezen 37 prinsen.

De kans dat deze strategie slaagt is dan:

$$\frac{1}{100} \left(\frac{37}{37} + \frac{37}{38} + \dots + \frac{37}{99} \right) \approx 0.38.$$

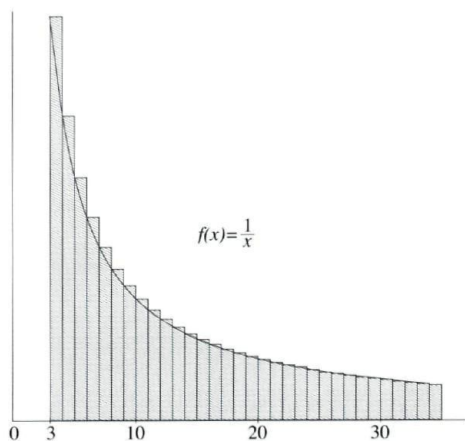
oo Algemener

Maar wat als er nu 10.000 prinsen komen, of zelfs een willekeurig aantal n ? De uitdrukking die we dan zo groot mogelijk moeten maken is:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{k}{k} + \frac{k}{k+1} + \dots + \frac{k}{n-1} \right). \quad (1)$$

Als n heel groot is, kunnen we deze getallen nauwelijks meer voor alle k uitrekenen. Wat we wel kunnen doen is de volgende benadering gebruiken, die wordt verduidelijkt in figuur 2:

$$\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n-1} \approx \int_k^n \frac{1}{x} dx.$$



Figuur 2. De som $\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{34}$ wordt benaderd door de oppervlakte onder de grafiek van de functie $y = \frac{1}{x}$ tussen 3 en 35.

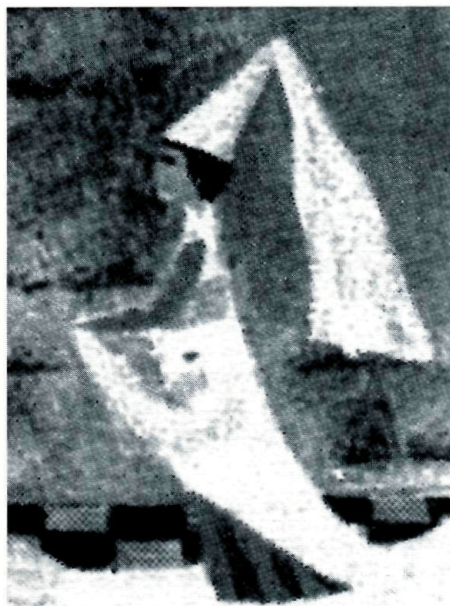
Hoe groter n en k worden, hoe beter de benadering is. De uitdrukking (1) wordt dan

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x} dx &= \frac{k}{n} (\ln n - \ln k) \\ &= \frac{k}{n} \ln \frac{n}{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

De vraag is voor welke verhouding van k en n de som (2) zo groot mogelijk is. Daartoe schrijven we $k/n = y$ en lossen op:

$$\frac{d}{dy} y \ln y^{-1} = 0.$$

Dit levert $\frac{d}{dy} - y \ln y = 1 - \ln y = 0$, met als oplossing $y = 1/e$. De ideale grootte van de testgroep is dus het totale aantal gedeeld door e . Dit is precies wat tovernaar Jasim berekend had.



Verrassing

Voor heel grote n is de kans dat de strategie slaagt zo goed als gelijk aan uitdrukking (2). Het invullen van de gevonden verhouding $1/e$ in (2) levert een kans op van $(\ln e)/e = 1/e$. Je zou misschien verwachten dat de kans dat je op deze manier de beste prins vindt kleiner wordt als n groter wordt — en uiteindelijk zelfs bijna nul. In werkelijkheid ligt de kans steeds dichterbij $1/e$.

Ander jasje

Dit probleem kun je op talloze andere manieren aankleden. In plaats van de keuze van de beste prins kun je het presenteren als het probleem van het kopen van het mooiste huis in een stad. Of als het binnenhalen van het voordeligste koopje op een veiling. Sommigen beweren zelfs dat je deze strategie kunt gebruiken voor het vinden van de juiste persoon om de rest van je leven mee te delen. Afgezien van een heleboel andere tegenwerpingen, is één van de problemen van deze toepassing dat je geen flauw idee hebt hoe groot de groep is waaruit je zou kunnen kiezen!

OPLOSSING HEXPUZZEL

NR.

QBASIC

Jaap Bak uit Amstelveen stuurde een programma in Q(uick)BASIC, dat systematisch probeert de zeven hexagons op alle mogelijke manieren in de regelmatige driehoek te passen. Het programma vond geen oplossingen en dus kan de driehoek niet gelegd worden. Jaap Bak, student wiskunde aan de VU, is overtuigd van de juistheid van zijn programma, maar mooi vindt hij zijn bewijs niet. Hij schrijft: "Mocht mijn inzending meedingen naar de prijs, dan sta ik die graag af aan iemand die een bewijs vindt dat niet gebruikt maakt van de computer."

Ook Elias Buissant des Amorie uit Castricum stuurde een computerbewijs.

Solomon Golomb

Aad van de Wetering (avdw3b@wxs.nl) wees ons op het boek *Polyominoes* van Solomon W. Golomb (ISBN 0-691-08573-0, tweede druk Princeton Science Library 1996).

Op pagina 125 staat hetzelfde probleem. Golomb schrijft daar:

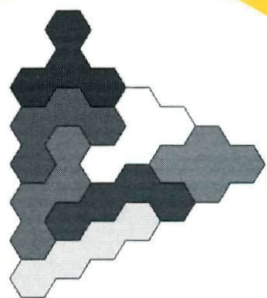
"No such tiling exists. One way to show this

is to start with the three inequivalent locations of the 'propeller', shown in figure 195. Each of these starts can be searched exhaustively (tediously by hand, or more quickly by computer) to show that no successful completion of the tiling, using one of each of the seven tetrahexes, is possible. (Did anyone find a simpler proof of impossibility?)"

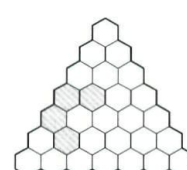
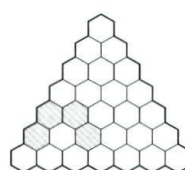
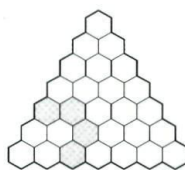
Aad schrijft: "De laatste zin is veelbetekend. Golomb heeft zelf geen bewijs kunnen vinden en nodigt lezers uit die aan te dragen. Het zou fantastisch zijn als iemand zo'n bewijs zou kunnen leveren, daarmee Golomb een grote dienst bewijzend."

"Zelf kan ik u geen bewijs leveren.

Merkwaardig is het feit dat bij verplaatsing van slechts één zeshoekje in de top er 30 oplossingen mogelijk zijn, een ervan staat afgebeeld in figuur 1. Die 30 oplossingen heb ik niet met de hand gezocht, ik heb er een programma voor geschreven dat al jaren gratis voor iedereen op een van mijn internetpagina's staat. De naam van het programma is, hoe kan het anders, Polyhexes."



Figuur 1. Voor deze figuur bestaan er 30 oplossingen, voor de gelijkzijdige driehoek geen enkele.



Figuur 2. De acht mogelijke beginposities van het 'halvemaantje'.

5

In het juninummer van Pythagoras staat op bladzijde 19 een puzzel. De zeven puzzelstukjes bestaan elk uit vier gelijkzijdige zeshoeken (moeren). De bedoeling is met deze '4-hexagons' bepaalde figuren te leggen. Of een regelmatige driehoek met deze stukjes gelegd kon worden, was de redactie niet bekend.

Deze opdracht werd tot prijsvraag gebombardeerd, met een prijs van 100 gulden voor de eerste inzender van een correcte oplossing. In de tekst van de prijsvraag waren de verwijzigingen naar figuur 4 en 5 per ongeluk verwisseld, maar gelukkig begreep iedereen wat de bedoeling was.

Niet alleen voor aaneengesmede zeshoeken heeft Aad zijn best gedaan, ook voor polyiamonds (gelijkzijdige driehoeken) en polyomino's (vierkanten) zijn op dezelfde WWW-pagina programma's beschikbaar.

Meer informatie

<http://home.wxs.nl/~avdw3b> (Aad's homepage)
<http://home.wxs.nl/~avdw3b/aad.html> (programma)
<http://home.wxs.nl/~avdw3b/polyhexes.html> (meer over polyhexes)

Pen en papier

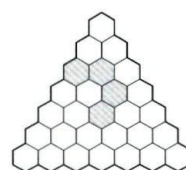
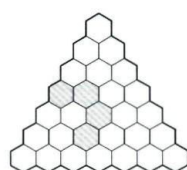
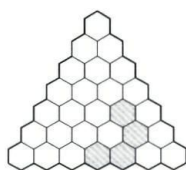
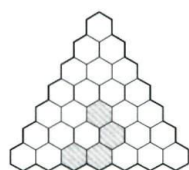
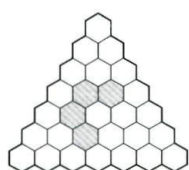
Twee dagen na het verschijnen van het juninummer kwam bij de redactie een bewijs met pen en papier binnen, van de hand van Zacharias Klaasse uit Lieren. Door systematisch alle mogelijkheden na te gaan, kwam hij tot de conclusie dat het vullen van de gelijkzijdige driehoek met de zeven 4-hexagons niet mogelijk is. Bij zijn oplossing gebruikt hij verschillende redenen waarom 'een positie staakt' (een positie is een situatie waarin een aantal stukken in de denkbeeldige driehoek geplaatst is, een positie 'staakt' wanneer er geen stukken meer in de driehoek kunnen

worden geplaatst).

In zijn bewijs gebruikt hij het volgende:

1. Als er een ruimte afgesloten wordt, dan moet die ruimte een veelvoud van vier zeshoeken groot zijn. Is dat niet het geval, dan staakt de positie.
2. Een positie staakt als er geen stukken meer voorhanden zijn die in de overgebleven ruimte passen.
3. Een stuk moet soms per sé ergens komen te liggen, omdat er geen andere stukken die ruimte op kunnen vullen. Als start van zijn redenering kiest hij het 'halvemaantje', zie figuur 2. Dat stukje kan op acht verschillende manieren in de driehoek geplaatst worden zonder dat de positie meteen al staakt. Draai- en spiegelsymmetrische posities tellen als één. Met de 'helicopter' als tweede stuk zijn er nog maar negen posities mogelijk die één voor één afvallen. Zacharias concludeert dat het niet mogelijk is om de driehoek te vormen.

De **boekenbon** van 100 gulden gaat naar Zacharias Klaasse.





door Klaas Pieter Hart

Brieven

Het gemiddelde van 4 en 6 is 5. Maar niet altijd; soms moet je getallen op een andere manier middelen en blijkt het 'gemiddelde' van 4 en 6 opeens gelijk te zijn aan

$$\sqrt{24} = 4.89 \dots$$

Je wil een brief wegen. Je hebt alleen de beschikking over een primitieve balansweegschaal, waarvan de armen niet even lang zijn. Als een brief links hangt moet er rechts 56g bij om de balans in evenwicht te brengen. Met de brief rechts moet er voor de balans links 44g bij. Hoe zwaar is de brief? Zie figuur 1.

26

Dit vraagstuk kun je oplossen met behulp van de wet "moment = kracht x arm". Laten we het gewicht van de brief x noemen en de lengte van de linker- en rechterarm respectievelijk l en r . De eerste weging zegt ons dat $x \times l = 56 \times r$. De tweede weging geeft $44 \times l = x \times r$. Hieruit volgt dat $56/x = l/r = x/44$ en dus $x^2 = 44 \times 56$.

We zien dat de brief $x = \sqrt{44 \times 56} \approx 49,64$ gram zwaar is. Dat is iets minder dan $50 = \frac{1}{2}(44 + 56)$, het gewone gemiddelde van 44 en 56. Blijkbaar is $\sqrt{44 \times 56}$ een soort gemiddelde van 44 en 56. Het wordt het *meetkundig* gemiddelde van de twee getallen genoemd. Ter onderscheid daarvan heet het 'gewone' gemiddelde het *rekenkundig* gemiddelde.

Optellen of vermenigvuldigen

Het rekenkundig gemiddelde treedt op in situaties waarin je *optelt*. Als je twee touwtjes hebt van lengte a en b , dan zijn twee touwtjes van lengte $\frac{1}{2}(a + b)$ samen even lang als de oorspronkelijke touwtjes samen. Het meetkundig gemiddelde heeft met *vermenigvuldigen* te maken. Een rechthoek met zijden a en b heeft een even grote oppervlakte als een vierkant met zijden $\sqrt{ab}$.

Cauchy

We zagen dat het meetkundig gemiddelde van 44 en 56 *kleiner* was dan het rekenkundig gemiddelde. De Franse wiskundige Cauchy ontdekte dat dit altijd geldt.

Stelling. Als $a, b > 0$ en als $a \neq b$, dan geldt $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b)$.

Het was dus geen toeval dat de brief minder dan 50g woog. Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk. Voor het geval van de brief geldt: $44 \times 56 = (50 - 6)(50 + 6) = 50^2 - 6^2 < 50^2$ en dus $\sqrt{44 \times 56} < 50$.

Voor willekeurige a en b krijg je:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

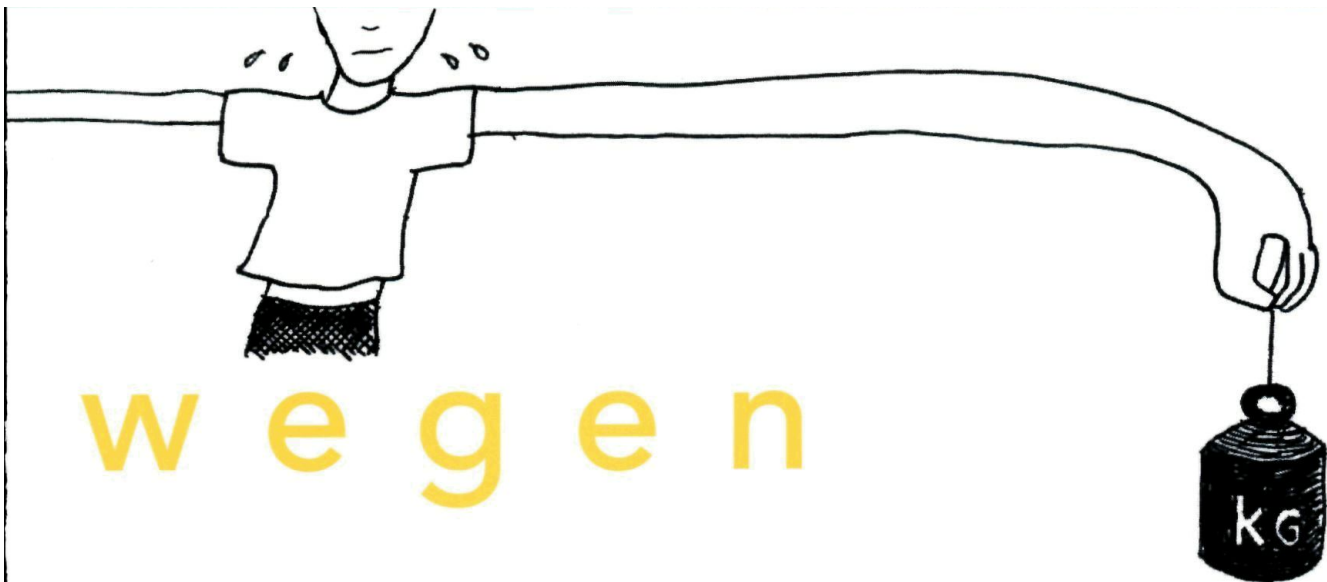
Hieruit volgt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.

De stelling staat bekend als de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde. Als $a = b$ geldt natuurlijk dat rekenkundig en meetkundig gemiddelde gelijk zijn, en wel aan $a = b$. Daarom wordt de stelling ook wel geformuleerd als: voor elke tweetal positieve getallen a en b geldt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$, waarbij gelijkheid geldt precies dan als $a = b$.

Rechthoek en vierkant

Iedereen 'weet' dat van alle rechthoeken met een gegeven omtrek een vierkant de grootste oppervlakte heeft (zie figuur 1). Met behulp van de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde kun je dat ook *bewijzen*.

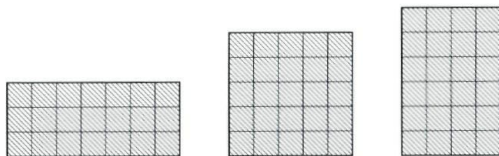
Dat gaat als volgt. Laat a en b de zijden van een rechthoek zijn met omtrek L . Dan geldt natuurlijk $L = 2a + 2b$. Onze ongelijkheid geeft:



wegen

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{16}L^2.$$

Dit zegt dat de oppervlakte van de rechthoek altijd kleiner of gelijk is aan eenzeventiende van het kwadraat van de omtrek L . Bovendien geldt gelijkheid alleen als $a = b$. Conclusie: als L niet mag veranderen, maar a en b wel, dan is de oppervlakte ab het grootst als $a = b$, dus als de rechthoek vierkant is. Deze stelling staat bekend als de 'isoperimetrische ongelijkheid' voor rechthoeken: elke rechthoek met omtrek L heeft oppervlakte ten hoogste $\frac{1}{16}L^2$.



Figuur 1. Van alle rechthoeken met een vaste, gegeven omtrek heeft het vierkant de grootste oppervlakte.

Meer getallen

Cauchy stopte niet bij twee getallen; hij zag in dat de ongelijkheid ook voor grotere aantallen geldt. Bijvoorbeeld voor vier getallen a, b, c en d :

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \\ &= \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

Voor drie getallen a, b en c paste hij een kunstgreep toe: stel $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$ en pas het geval voor vier getallen toe:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 \geq abcd.$$

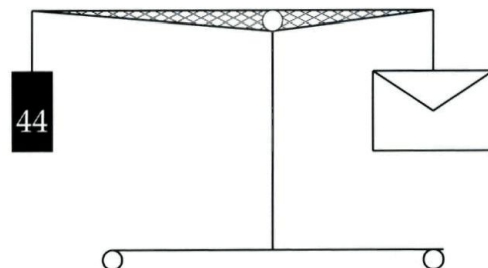
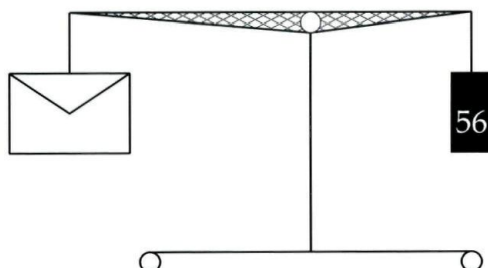
Maar $a+b+c = 3d$, dus er staat eigenlijk $d^4 \geq abcd$. Deel d weg en we vinden $d^3 \geq abc$ en dus

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

In beide gevallen treedt gelijkheid op precies dan als de getallen allemaal aan elkaar gelijk zijn.

Opgave. Hoe zou je de ongelijkheid voor rekenkundig en meetkundig gemiddelde bewijzen voor zeven getallen? En voor een willekeurig aantal getallen?

Figuur 1. Hoe zwaar is de brief?





Naam: door Henk Molster

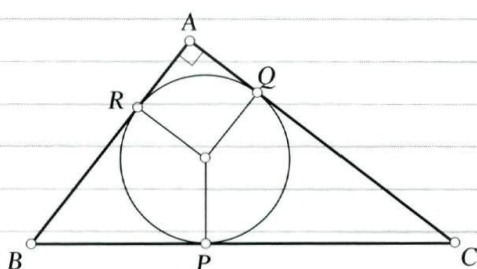
Vak: _____

Datum: _____

Klas: _____

De stelling van Wolff

Harold Wolff zit in de vijfde klas op het Hervormd Lyceum Zuid in Amsterdam. Op een dag kwam hij aanzetten met de stelling in figuur 1, die hij zelf ontdekt heeft. Het bewijs is niet zo lastig, maar de stelling is zeker elegant.



Figuur 1.

Stelling. Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met ingeschreven cirkel met raakpunten P , Q en R .

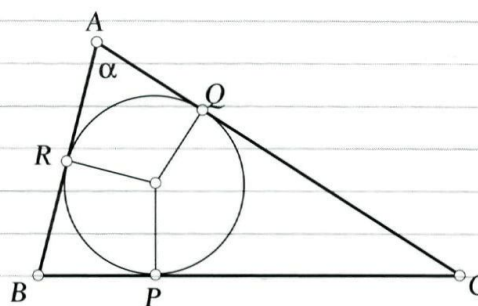
Dan geldt: $\text{opp. } \Delta ABC = BP \cdot PC$.

Deze stelling komt als som voor in de doorwerking van hoofdstuk 3 van de wiskundemethode Netwerk, deel B2.

Algemener.

De stelling in figuur 1 geldt alleen voor rechthoekige driehoeken. Later heeft Harold zijn stelling generaliseerd voor

willekeurige driehoeken. Die stelling zie je in figuur 2. Deze stelling is eveneens juist, maar het bewijs is een stuk lastiger dan het bewijs van de eerste stelling.



Figuur 2.

Stelling. Gegeven is een driehoek ABC met ingeschreven cirkel met raakpunten P , Q en R .

Dan geldt:

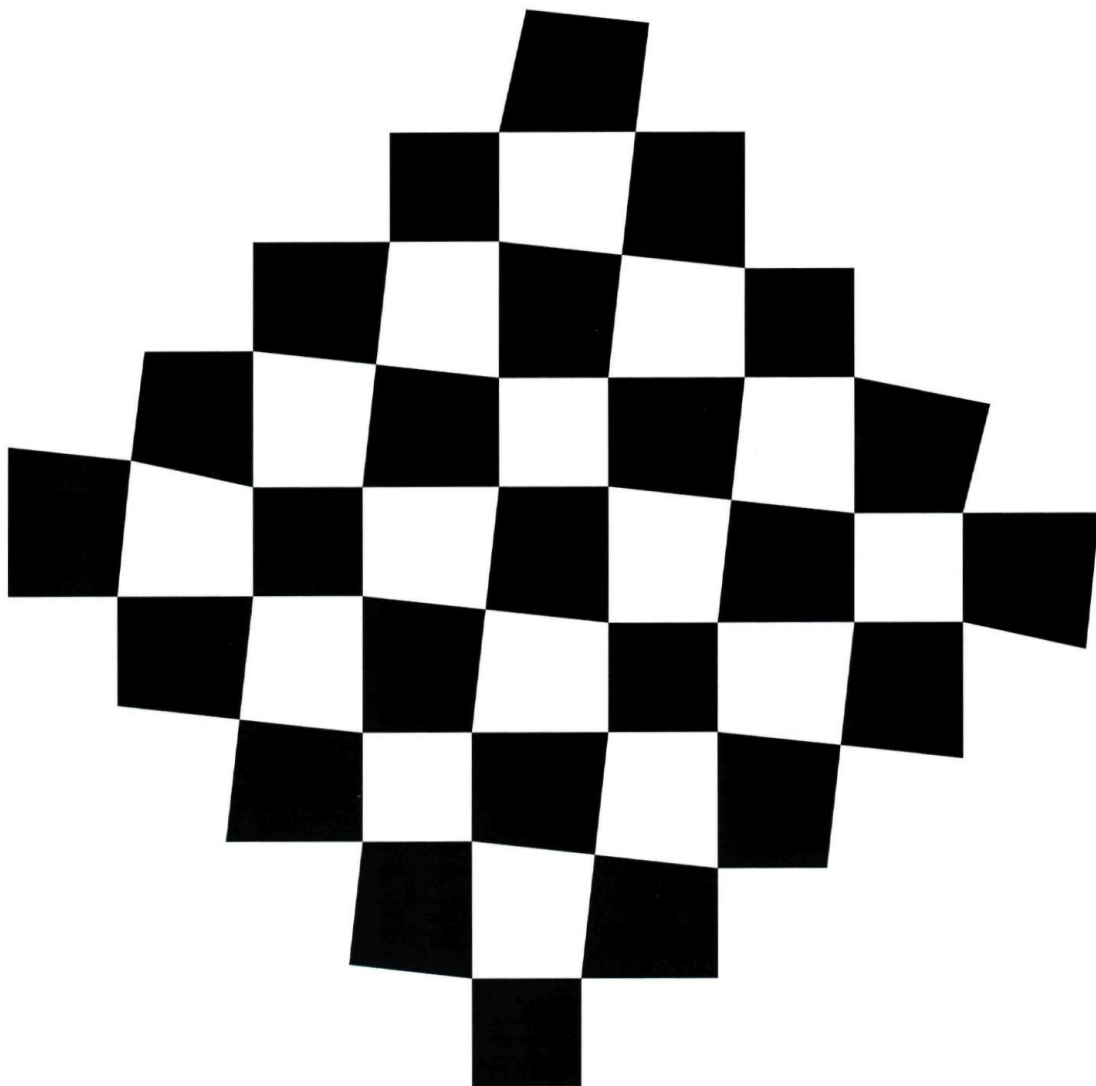
$$\text{opp. } \Delta ABC = BP \cdot PC \cdot \sin \alpha (1 - \cos \alpha).$$

Het is bijzonder aardig te zien dat leerlingen in staat zijn zelf ontdekkingen te doen. Wij zijn erg benieuwd of iemand deze stelling ooit gezien heeft en zo ja, waar? Kortom: is dit echt 'de Stelling van Wolff'?

Reacties graag naar: hmolster@planet.nl

Beeld & Bedrog

Hoeveel vierkanten kun je vinden in de volgende figuur?



Bron

Gianni A. Sarcone & Marie J. Waeber
<http://www.archimedes-lab.org>

SCHOLENPRIJS WISKUNDE OLYMPIADE

door Leon van den Broek

Op 24 april 2001 was het feest op de Wageningse school Pantarijn. Deze school was winnaar van de scholenprijs van de Wiskunde Olympiade. Hoogtepunt van het feest was de uitreiking van de individuele prijzen door prof. dr. Jan van de Craats en de overhandiging van de Shell-wisseltrofee door een leerling van het Elzendaal College te Boxmeer (de winnaar van vorig jaar). De som van de scores van de vijf beste leerlingen van Pantarijn bedroeg 86 punten en dat was het hoogste totaal van de 166 scholen die aan de Eerste Ronde meededen. Het Elzendaal College, de winnaar van vorig jaar, eindigde dit jaar als goede tweede.

De prijsuitreiking werd omlijst door een fractalshow, liederen met begeleiding van de schoolband en korte speeches. Als presentje was er voor alle aanwezigen het stokje van Sam Loyd (beschreven in Pythagoras nr 1, jrg 39), een duivelse puzzel die als hij eenmaal aan je knoopsgat zit, er niet makkelijk weer vanaf gaat. Alle prijswinnaars hadden genoeg punten om mee te mogen doen aan de Tweede Ronde medio september, waar ze zich met de besten van het hele land kunnen meten.

Opgave A5

Van een houten kubus wordt een kleinere kubus gemaakt door van elk van de zes zijvlakken 1 cm af te zagen. Hierdoor wordt de totale inhoud van de kubus met 1538 cm^3 verminderd. Hoeveel cm^3 was de kubus voor de operatie?

Opgave B1

In de figuur staat een grote rechthoek getekend die onderverdeeld is in negen kleinere rechthoeken. In vijf van de kleine rechthoeken staat een getal dat de omtrek van die rechthoek aangeeft. Bepaal de omtrek van de grote rechthoek.

	18	
18	22	20
	16	

De prijswinnaars (v.l.n.r.) Jurrin Stiekema (17), Willem Haverkort (16), Karin van den Dries (19), Ivo de Vrijer (15), Piers Titus van der Torren (19) en Ruud Boesten (15 punten) (Ruud en Ivo waren ex aequo vijfde).



Oplossingen nr.5

Kleine nootjes

Appels en peren

Trek een stuk fruit uit de container met opschrift 'appels & peren'. Hierin zitten óf appels óf peren, dus je weet precies wat in deze container zit: appels als je een appel trekt, of peren als je een peer trekt. De rest is dan ook duidelijk. Trek je bijvoorbeeld een appel, dan bevat de container met het opschrift 'peren' zowel appels als peren (omdat alleen appels niet meer kan), en zitten de peren in de container met opschrift 'appels'.

Snoek

Kop en staart zijn even lang, en het middengedeelte is driemaal zo lang als de kop. De kop past dus vijfmaal in de hele lengte en is dus 20 cm lang.

Grazende schapen

Het weiland biedt 10 schapen voer voor 20 dagen, dat is 200 schapendagvoedingen. Hetzelfde weiland biedt 15 schapen voer voor 10 dagen, in totaal 150 schapendagvoedingen. Het verschil wordt geleverd door het groeiende gras, dat in tien dagen dus 50 schapendagvoedingen extra oplevert, oftewel 5 schapenvoedingen per dag. Als je 25 schapen in het weiland loslaat, dan kun je 5 schapen steeds het groeiende gras laten opgrazen, de overige 20 eten het gras dat er al stond: 100 schapendagvoedingen. Dat is in 5 dagen op, zodat 25 schapen maximaal 5 dagen kunnen grazen.

Vreemde reiziger

Een postzegel

Fotofinish

De juiste uitslag is: 1. Carel, 2. Bruno en 3. Axel.

Het getal 4

$$a^b = b^a$$

We nemen aan dat $a > b$. Schrijf $b = ka$, $k > 1$. Dan volgt $a^{ka} = (ka)^a$. Hieruit volgt achtereenvolgens $a^k = ka$, $a^{k-1} = k$ en $a = k^{\frac{1}{k-1}}$. De functie $k \rightarrow k^{\frac{1}{k-1}}$ is dalend en heeft limiet $\lim_{k \downarrow 1} k^{\frac{1}{k-1}} = e$. Dus $a < e$ en de enige niet-triviale oplossing is $a = 2$, $b = 4$.

Magisch vierkant van orde 2

Beschouw het magisch vierkant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dan moet gelden: $a + b = a + c$ en dus $b = c$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat de getallen in een magisch vierkant verschillend zijn. Er bestaan dus geen magische vierkanten van orde 2.

Magisch vierkant van orde 3

Dit is een magisch vierkant van orde 3:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

In essentie is dit het enige tovervierkant van orde 3. Alle andere worden verkregen door spiegelingen in de symmetrieassen van het vierkant. Zie voor een bewijs:

<http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.html>

Activiteiten

- tot en met 23 september** Beeldtentoonstelling **Schaal & Maat**
Bos van Ypeij, Tytsjerk
Met onder andere werk van Rinus Roelofs en
Koos Verhoeff
- ma 6 t/m vr 10 augustus** Vierkant voor wiskunde zomerkamp A
Voor kinderen die schooljaar 2000/2001 in groep 6 – 8
van het basisonderwijs zitten of in de brugklas.
Plaats: Lunteren
<http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>
- donderdag 9 augustus** Voorlichtingsbijeenkomst 6-vwo
Universiteit Leiden
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>
- ma 13 t/m vr 17 augustus** Vierkant voor wiskunde zomerkamp B
Voor kinderen die schooljaar 2000/2001 op de middelba-
re school zitten. Plaats: Lunteren
<http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>
- vr 24 en za 25 augustus** Vakantiecursus 2001 **Experimentele wiskunde**
TU Eindhoven
Voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en
HBO en andere belangstellenden
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2001/>
- vr 31 augustus en
za 1 september** Vakantiecursus 2001 **Experimentele wiskunde**
CWI, Amsterdam
Voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en
HBO en andere belangstellenden
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2001/>
- september/oktober** Tentoonstelling **Gerard Caris**
Stedelijk Museum Amsterdam
Overzichtstentoonstelling van een door vijfhoeken
gegrepen kunstenaar
- zaterdag 15 september** 1e nationale **Set-wedstrijd**
Irene congreszaal, Jaarbeurs Utrecht
Zie ook de aankondiging op pagina 29.
Aanmelden via: setwedstrijd@hotmail.com
<http://dit.is/set/>
- vrijdag 28 september** KUN Wiskundetoernooi voor scholieren
Katholieke Universiteit Nijmegen
Met onder andere een optreden van professor
Arthur Benjamin
<http://www-math.sci.kun.nl/math/wistoernooi/>

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, vrije Universiteit amsterdam en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van WVO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar.

Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2000-2001

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 39,50. Losse nummers f 8,50 of BF 160.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 850,

Pythagoras buitenland f 54,50.

Pythagoras én Archimedes f 69,50,

Pythagoras én Archimedes België BF 1470,

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50.

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Prijs: f 27,50/ BF 650 per jaar. Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Prijs: f 32,50 /BF 750 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden.

Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36, 37, 38 (f 25,- excl. verzendkosten) jaargang 39 (37,50 excl. verzending) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'onmogelijke stelling' (f 7,50 excl. verzendkosten).

