



COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

www

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
Marco Swaen
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofdreductie

Chris Zaal

Eindreductie

Chris Zaal
Jos Brakenhoff

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw
Vrije Universiteit
Faculteit Exacte Wetenschappen
Divisie Wiskunde en Informatica
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;
1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

J.F. Brakenhoff is student wiskunde aan de UL. **drs. A.J. van den Brandhof** is leraar wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **prof.dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio in de discrete wiskunde. **A. Goddijn** is onderwijskundige aan het Freudenthal Instituut te Utrecht. **J. Groot** is wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **W. Hoekstra** is docent wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam en verbonden aan het APS te Utrecht. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan de FEA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

COVER

Yolanda Huntelaar (grafisch ontwerper) en **Raf Snippe** (ruimtelijk ontwerper) lezen Pythagoras in hun tuinhuisje.

Eureka!

Natuur & Techniek is
het wetenschapsmagazine
waar u altijd al naar zocht



**Natuur
& Techniek**
WETENSCHAPSMAGAZINE

www.natutech.nl

probeer gratis

twee nummers,
zonder verplichtingen

Bel 0(031)76-5733770

Met *Natuur & Techniek wetenschapsmagazine* krijgt u iedere maand de nieuwste inzichten uit wetenschap en techniek. De beste wetenschappers houden u in begrijpelijke taal op de hoogte van de ontwikkelingen die u niet mag missen. Van natuurkunde tot psychologie en van technologie tot milieu. Altijd heet van de naald. Met unieke foto's uit de keuken van de wetenschap en verhelderende infographics. Het is alsof u zélf alles ontdekt. **Eureka!**

☐ Ja, ik wil een gratis proefabonnement van twee nummers, zonder verplichtingen.

_____ naam _____ m/v

_____ adres

_____ postcode _____ woonplaats

_____ geboortedatum (belangrijk voor kortingen)

_____ telefoonnummer

Doe dit kaartje, zonder postzegel, op de bus
Of: bel **0(031)76-5733770**
Of: kijk op **www.natutech.nl**

**Natuur
& Techniek**
WETENSCHAPSMAGAZINE

1 02 90 1 x 10
GNK1 1 2 3

Postzegel niet nodig



Natuur & Techniek wetenschapsmagazine

aan

Lezersservice Natuur & Techniek
Internationaal Antwoordnummer
C.C.R.I. numéro 9224
1000 WZ Amsterdam
Pays-Bas



INHOUD

Het nieuwe schooljaar 2001-2002 betekent ook weer een nieuwe jaargang van Pythagoras, alweer de 41ste.

De abonneeprijzen zijn gelijk gebleven. Veranderd is de regeling voor nieuwe abonnees. Nieuwe abonnees betalen met ingang van deze jaargang alleen voor de nog te verschijnen nummers en ontvangen niet meer de reeds verschenen nummers van de lopende jaargang. Verder proberen we op veler verzoek het laatste nummer van de jaargang (nr. 6) vóór de zomervakantie 2002 uit te brengen.

Nog een verandering: Het adres voor de kopijcorrespondentie verhuist van Dion Gijswijt naar René Swarttouw aan de VU te Amsterdam. Zie het colofon voor het adres.

Het thema van deze jaargang is: 'Experimentele wiskunde', wiskunde om spelenderwijs zelf te ontdekken, al dan niet met behulp van de computer. Gastredacteur is professor Jan van de Craats. Het eerste artikel vind je op pagina 16. Veel plezier!

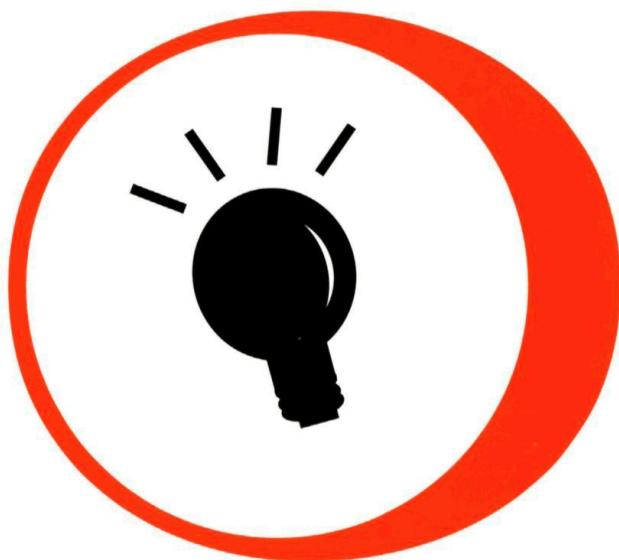
1

2 - 3	Kleine nootjes	22 - 23	De pentagorpuzzel
4 - 5	Mijn schoolbewijs	24 - 25	Pythagoras Olympiade
6 - 9	Geheimen van de vijfhoek	26	Problemen
10 - 11	Wis- en natuurlyriek	27	Oplossingen nr. 6
12 - 13	Grafieken tekenen met de GR	28 - 29	Beeldverhaal
14	GR prijsvraag	30 - 31	De post
15	Oplossingen kleine nootjes nr. 6	32	Activiteiten
16 - 21	Meetkunde met de muis		

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis
kan oplossen.
De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2

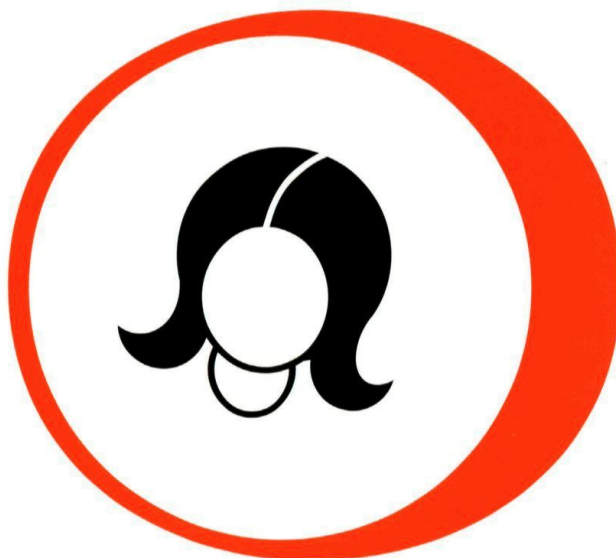


Lichtschakelaar

Op de bovenste verdieping van je nieuwe huis zijn drie gloeilampen. Op de begane grond zijn de bijbehorende drie schakelaars, die allemaal 'uit' staan. Je weet niet welke schakelaar welke lamp bedient, alleen dat er een een-op-een relatie is. Hoe kun je door slechts één keer naar boven te lopen, uitvinden welke schakelaar bij welke lamp hoort?

Lotte vertelt:

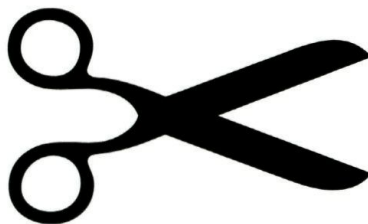
'Als ik tweemaal mijn leeftijd over twee jaar optel bij driemaal mijn leeftijd over drie jaar, dan krijg je zesmaal mijn huidige leeftijd.'
Hoe oud is Lotte?



Hoofdhaar

Kappersgronden is een bijzonder dorp: geen twee inwoners hebben precies hetzelfde aantal haren; er zijn meer inwoners dan er haren zijn op het hoofd van enige inwoner en geen enkele inwoner heeft precies 10021 haren.

Hoeveel inwoners heeft Kappersgronden maximaal?



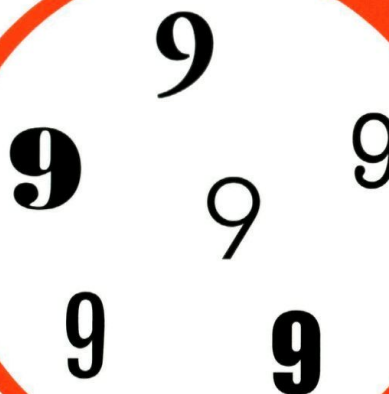
Nattigheid

Wat wordt natter en natter hoe meer het droogt?

3

Zes negens

Hoe kun je met zes keer het cijfer 9 het getal 100 maken?





Mijn schoolbewijs

bewijzen van de stelling van Pythagoras

4

In de eerste klas van mijn voortgezet onderwijs stond alleen algebra op het programma. In mijn herinnering bestond dat geheel uit 'het wegwerken van haakjes'. Het was stomvervelend. In de tweede klas kwam pas meetkunde erbij. Het boek dat wij gebruikten bevatte alleen opgaven; de theorie werd zonder ondersteuning van een boek aan de leraar overgelaten. Het was best spannend zo'n nieuw vak en aanvankelijk interesseerde het me wel. Een punt heeft geen afmetingen; een lijn heeft alleen lengte, geen breedte, enzovoort. Dat waren dingen waar ik over kon nadenken. Een punt bestond dus eigenlijk niet en een lijn evenmin. Als je een rechte lijn langs een liniaal tekent, dan is dat geen echte lijn, want onder een vergrootglas zie je dat je een heleboel zwarte vlekjes hebt getekend. Al zou je met een magisch soort potlood een lijn trekken die maar één molecuul dik was, dan was het nog geen echte lijn.

Moeilijk

Het vervelende was, dat ik de opgaven zo

moeilijk vond. Na elke les kregen we drie opgaven als huiswerk en daar besteedde ik vrijwel de hele avond aan. Soms vond ik niet meer dan één oplossing. Tijdens de volgende les werden de huiswerkopgaven door de leraar behandeld; dat wil zeggen hij schreef ze op het bord en als er vragen waren beantwoordde hij die. Op een dag, ongeveer een maand na mijn eerste meetkundelless vroeg ik aan de leraar: "Kent u die oplossingen allemaal uit uw hoofd?" Hij keek me wat meewarig aan en maakte duidelijk, dat vrijwel elke leerling uit de derde klas die opgaven zonder veel moeite kon oplossen. "En al die sommen in het boek, weet u daar ook de oplossing van?" Ik was diep teleurgesteld en het betekende voor mij het einde van mijn belangstelling voor meetkunde. Waarom zou ik zoveel uren besteden aan het zoeken naar een oplossing van vraagstukken die kennelijk reeds door duizenden, misschien wel door miljoenen mensen opgelost waren? Dat vond ik gewoon stom. Ik besteedde nauwelijks nog enige tijd aan mijn meetkundehuiswerk en wachtte

gewoon af tot de oplossingen de volgende les op het bord verschenen. Zo bleef ik toch wel op de hoogte van de eigenschappen van parallelogrammen, van ruiten, van de 'lijn der middens' en wat dies meer zij. Het waren eigenlijk allemaal dingen die ik ook zonder bewijs vanzelfsprekend vond.

Watervlooien en klokdiertjes

Pas veel, veel later begreep ik dat die eenvoudige stellingen en het bewijzen ervan op zichzelf niet zo belangrijk en interessant waren. De schoonheid lag in de systematische opbouw die Euclides, al zo lang geleden, bedacht had. Maar als twaalfjarige verplaatste mijn belangstelling zich naar het maken van gloeilampen met wolframdraadjes die ik uit kapotte lampen sloopte en aan het urenlang turen naar de wondere wereld in slootwater en stinkend bloemenwater. Dat kwam omdat mijn vriendje een microscoop had waarmee we watervlooien, pantoffeldiertjes, klokdiertjes enzovoort konden zien. En ook mijn eerste sterrenkijker, gemaakt van een brillenglas en een loep van mijn vader gaf mij veel meer voldoening dan het oplossen van opgeloste meetkundevraagstukken.

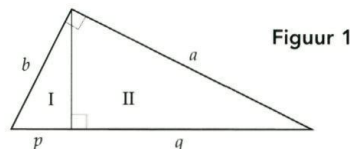
De stelling van Pythagoras

Maar er kwam een ommekeer! Dat was toen de stelling van Pythagoras aan de orde kwam. Die vond ik fantastisch. Ongelooflijk, dat je daarmee dingen kon uitrekenen die je op geen enkele andere wijze kon voorspellen. Ik vond het prachtig dat een ladder 61 meter lang is en tegen een muur van 60 meter gezet wordt maar even 11 meter de straat in kwam. Iedereen zou denken: dat zal wel zowat 1 meter zijn, maar $61^2 = 60^2 + 11^2$, daar is volgens de stelling van Pythagoras geen ontkomen aan. Ik wist toen nog niet dat ik me met mijn bewondering in zeer goed gezelschap bevond. De grote astronoom Kepler heeft eens geschreven: "In de meetkunde vinden we twee grote schatten: de ene is de stelling van Pythagoras en de ander is de gulden snede. De eerste kunnen we vergelijken met een schep goud, de

andere mogen we een kostbaar juweel noemen" (Mysterium Cosmographicum, 1596).

Mijn bewijs

Ik weet nog goed welk bewijs voor de stelling van Pythagoras door onze wiskundeleerbaar gegeven werd. Zie figuur 1.



Figuur 1

Als we de hoogtelijn vanuit de rechte hoek trekken, dan ontstaan twee driehoeken die elk gelijkvormig zijn met de hele rechthoekige driehoek. Ze hebben namelijk alle drie gelijke hoeken. Uit het feit dat I gelijkvormig is met de hele driehoek volgt $\frac{b}{p} = \frac{p+q}{b}$ dus

$$b^2 = p(p+q) = pc.$$

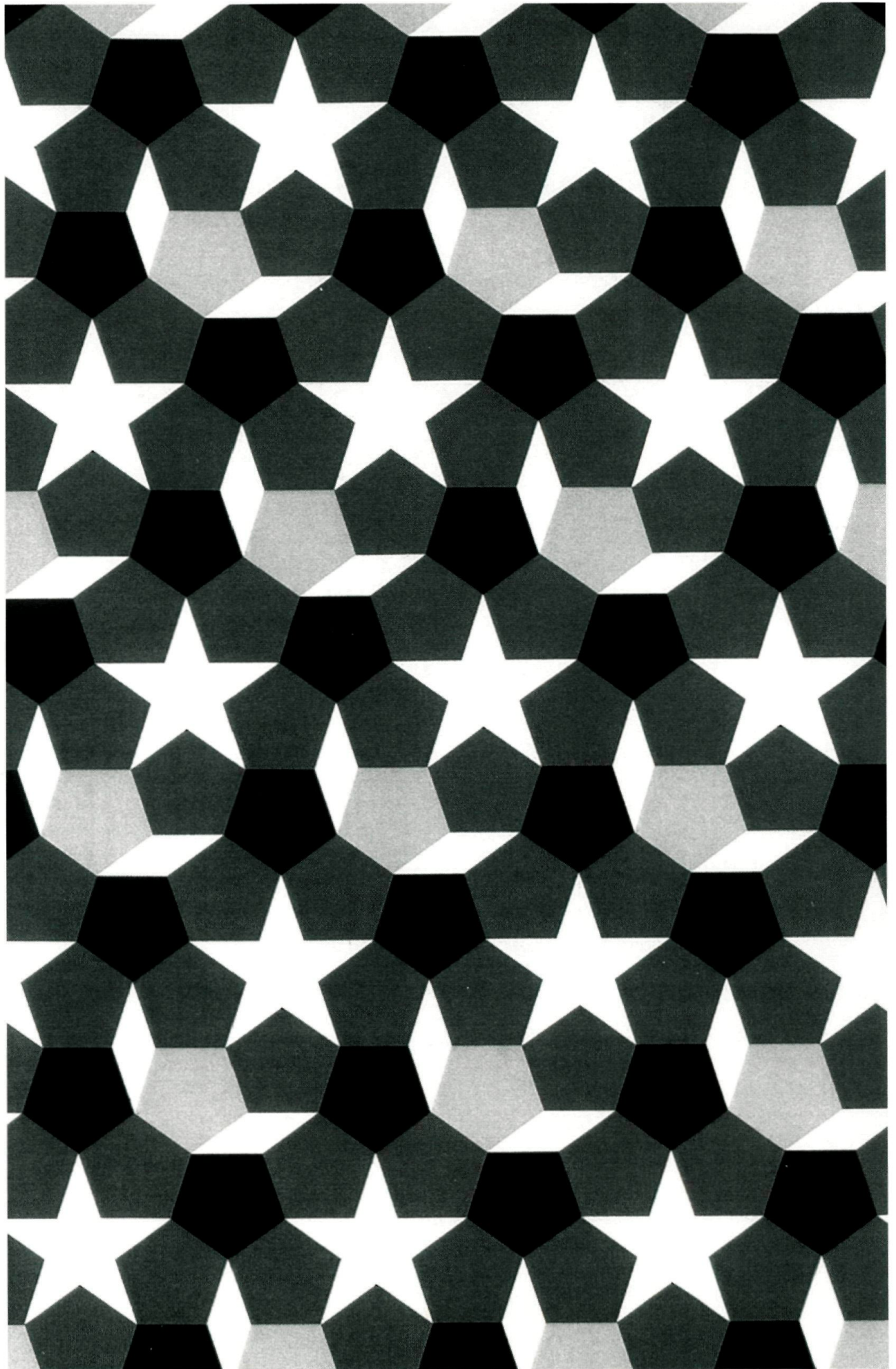
Uit het feit dat II gelijkvormig is met de hele driehoek volgt $\frac{a}{q} = \frac{p+q}{a}$ dus

$$a^2 = q(p+q) = qc.$$

Optelling geeft $a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2$ en dat is precies de stelling van Pythagoras.

Een stukje kaas

Het bewijs is kort en bondig, maar voor een leerling van twaalf jaar raadselachtig. De visuele helderheid van het bewijs van Euclides, waarin de kwadraten als vierkanten te zien zijn, delft hier het onderspit voor de logica van algebraïsche manipulaties. De beroemde filosoof Schopenhauer (1788 – 1860), kon het Euclidische bewijs niet waarderen en noemde het een muizenvalbewijs. Ik meen dat het stukje kaas in het bovenstaande bewijs, ik bedoel hiermee de betrekking $a^2 + b^2 = c^2$, veel meer verstopt zit dan bij het Euclidische bewijs. Het komt pas op het eind als een duveltje uit een doosje tevoorschijn, terwijl het bij Euclides van meet af aan zichtbaar is aan de vierkanten op de drie zijden van de rechthoekige driehoek.



door Jan van de Craats

Geheimen vn de vijfhek

7

De Gulden Snede in Pythagoras

De gulden verdwijnt, maar niet uit de wiskunde. Daar kennen we namelijk de gulden snede, een meetkundige verhouding die op allerlei plaatsen in de wiskunde een rol speelt, en dat nog wel eeuwen zal blijven doen. Er worden wel magische eigenschappen aan toegeschreven, en volgens sommigen heeft de natuur ook een voorkeur voor toepassingen die met de gulden snede te maken hebben. Maar vooral ook vanuit de zuivere meetkunde is er veel interessants over de gulden-snedeverhou-

ding te vertellen. We doen dat in deze jaargang in een serie artikelen, die we deels zullen illustreren met werk van Gerard Caris. Deze Maastrichtse kunstenaar put al meer dan dertig jaar inspiratie uit meetkundige figuren die direct met de gulden snede te maken hebben, zoals de regelmatige vijfhoek en de dodecaëder (het regelmatige twaalfvlak). Aan het werk van Caris wordt juist van 6 oktober tot 20 november een tentoonstelling gewijd in het Stedelijk Museum in Amsterdam: zeer de moeite waard!

Linkerpagina: figuur 5.
Gerard Caris, Structure 4C, 1974

Het Pentagon

Het Pentagon, het gebouw van het Amerikaanse Ministerie van Defensie bij Washington, D.C., dankt zijn naam aan de vorm ervan: een regelmatige vijfhoek. Eigenlijk is pentagon gewoon het Griekse woord voor vijfhoek, en vijfhoeken heb je in allerlei soorten en maten. Wij zullen met pentagon echter altijd *regelmatige* vijfhoek bedoelen, dus alle zijden ervan zijn even lang en alle hoeken zijn even groot. Hoe groot? Dat zie je in figuur 2. Als je in de aangegeven richting éénmaal rond loopt, sla je vijf keer een hoek α om naar links. Je bent dan in totaal 360° gedraaid, dus α is gelijk aan $\frac{1}{5} \times 360^\circ = 72^\circ$. De binnenhoeken van het pentagon zijn daarom gelijk aan $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Het pentagram

Tekenen we in een pentagon de diagonalen, dan vormen die een ster met vijf punten, een zogenaamd *pentagram*. Die figuur komt al in de oudste culturen voor, en vaak wordt er een magische betekenis aan toegekend. Ook in allerlei vlaggen, bijvoorbeeld de Amerikaanse vlag, tref je pentagrammen aan.

Met dezelfde truc als in figuur 2 kun je nagaan dat de punthoeken van het pentagram 36° meten: bij een volledige rondgang langs het pentagram draai je nu twee maal rond, dus de 'buitenhoek' meet nu $\frac{1}{5} \times 720^\circ = 144^\circ$, en de punthoek is daarom $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$. De hoeken van het pentagon zijn 108° , die van het pentagram 36° , en omdat $3 \times 36 = 108$ zijn de twee aangrenzende hoeken bij elke punt (zoals bijvoorbeeld $\angle BDC$ en $\angle ADE$ in fig. 4) ook 36° . Een gevolg hiervan is dat iedere diagonaal van het pentagon evenwijdig is met de tegenoverliggende zijde (Z-hoeken). Je ziet verder dat de diagonalen van een pentagon in het midden weer een kleiner pentagon omsluiten. Daar zou je weer een pentagram in kunnen tekenen, met daarin weer een pentagon, enzovoorts, enzovoorts.

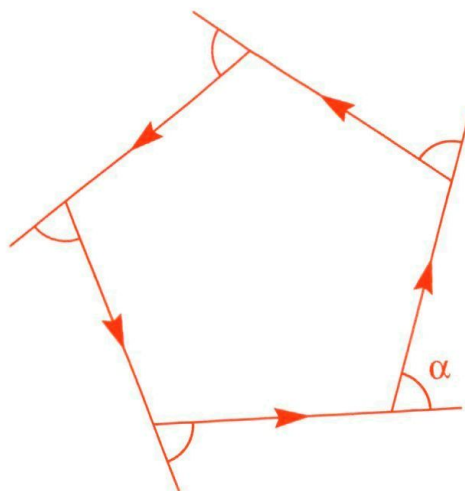
De gulden snede

We kunnen nu vertellen wat de gulden-snedeverhouding is: *de gulden snede is de verhouding tussen de lengte van een diagonaal en de lengte van een zijde van een pentagon*. Zo is bijvoorbeeld in figuur 4 $AC : CD$ de gulden-snedeverhouding, of $EC : AB$.

Maar omdat EC en AB evenwijdig zijn, geldt $EC : AB = ES : SB = CS : SA$, en we vinden de gulden snede dus ook op elke diagonaal



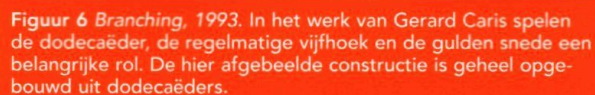
Figuur 1 Het Pentagon is gebouwd in de vorm van een regelmatige vijfhoek.



Figuur 2 Vijf maal hoek α is 360°



Ontwerp je eigen 'pentagonale' vlakvulling. Je mag er pentagons, pentagrammen, wybertjes en andere vormen die zijn afgeleid uit figuur 4 voor gebruiken. Stuur je mooiste resultaten op. De fraaiste voorbeelden zetten we op onze webpagina.



Wis- en natuurlyriek

met chemisch supplement

Een nieuw boek dat nogal wat belooft op de achterflap: "De buis van Torricelli en de stelling van Pythagoras verpakt in vrolijke verzen, zullen alfa's en bèta's verrukken en nader tot elkaar brengen. Zo zal de kloof die eeuwenlang tussen beiden bestond eindelijk gedicht worden". En met dat 'gedicht', het één na laatste woord, heb je de eerste spitsvondigheid van het boek al te pakken.

Het bewuste boek is een verzameling van 110 komische gedichten over allerlei wis- en natuurkundige onderwerpen, met nog eens krap tien over scheikundige zaken, het 'chemisch supplement'.

Twee auteurs

Het gedicht 'Koninklijke wiskunde' is een goed voorbeeld. Dit gedicht komt uit de koker van de onderwijskundige Marjolein Kool, één van de twee auteurs. De bèta-kant van dit gedicht betreft de wiskundige begrippen sinus en matrix. De dichtvorm vormt, samen met de voorkomende personen en emoties, de lyrische alfa-kant. Dat verklaart de titel van het boek. Een leuk miniatuurtje is 'Uitgerekend' dat maar niet bekend moet worden binnen de horeca. Het had van de andere auteur, Drs. P., de van oorsprong Zwitserse Heinz Hermann Polzer, kunnen zijn. Hij is econoom, maar is voornamelijk bekend door zijn vaak absurde, plechtstatige verzen. 'Piramide I' is daar een voorbeeld van. De abruptheid van de laatste twee regels daarvan vind ik erg grappig. Persoonlijk vind ik de gedichten van

Marjolein Kool leuker dan die van Drs. P. Ze zijn gemiddeld korter, gaan dieper in op wiskundige onderwerpen, en hebben een minder hoog absurdistisch gehalte dan die van Drs. P. In een aantal gevallen staat onder een gedicht nog een korte toelichting op het onderwerp, met soms een illustratie. Het boek bevat ook afbeeldingen en enkele wapenfeiten van de bekende bèta's die in het boek voorkomen, zoals Euler, Gauss, et cetera. Het boek besluit met een zaakregister. Handig voor als je nog eens een gedicht nodig hebt over bijvoorbeeld een parallellepipedum.

Rijmelarij

Die rijmelarij is leuk en aardig, maar wordt de doelstelling van de achterflap wel gehaald? Komen de alfa's en bèta's wel nader tot elkaar? Ik heb gekeken of ik als bèta na lezing van het boek al wat meer alfa geworden was. Hoe? Door te proberen ook zo'n gedicht te schrijven. Het resultaat, 'Jantje's eindeloze ijsje' staat op de website van Pythagoras. Mijn conclusie is dat ik iets meer alfa geworden ben, maar nog niet een hele echte. Mijn gedicht kostte me meer dan drie uur en hierdoor is mijn bewondering voor de auteurs flink toegenomen. Kortom, 'Wis- en natuurlyriek' is een leuk boek met een hoop grappige, ingenieus geconstrueerde gedichten. Leuk genoeg om er toe aan te zetten zelf eens in de trant van het boek te gaan rijmen. En dat is wat mij betreft het grootste compliment.

Koninklijke wiskunde

Prins Willem Alexander doet
zijn boordje los bij sinuslijnen
Dat wulps, frivool, lichtzinnig deinen,
verhit zijn fier Oranjebloed.

Ook doet het hem bijzonder goed
als toppen op zijn blad verschijnen.
Je ziet hem in een trance verdwijnen
als hij een raaklijn schetsen moet.

"Ik denk aan vrouwen," jubelt hij
"Elk mathematisch beeld voert mij
naar ongekende hoogten toe."

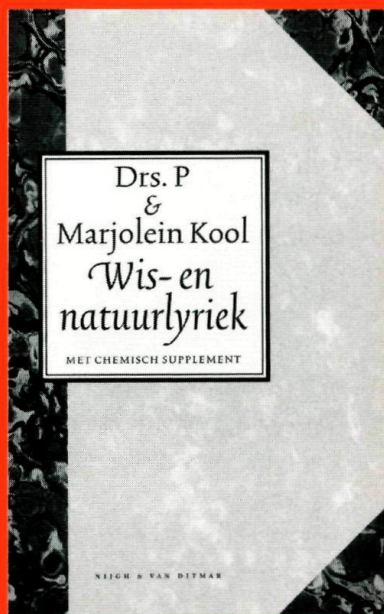
Maar toen er iemand "matrix" zei,
kreet onze kroonprins minder blij:
"Matrix? Hè nee, dat is mijn moe!"

Piramide I

Leg ergens een meetkundig vierkant neer
En plaats een loodlijn op het middelpunt
Verbind het viertal hoeken dan solide
Met een locatie die u kiezen kunt
(Mijn uitleg is beknopt maar bonafide)
En wel een punt op de voormelde lijn
Wat construeert u zo? Een piramide
U moet nu dus intens gelukkig zijn
Dat lichaam boeit ons altijd weer
Tot slot van deze mathematica
De inhoud: basis x 1/3 h

Uitgerekend

"Tijd is geld", zo sprak de ober
en dat was voor ons een strop,
want hij telde toen de datum
vlotjes bij de nota op



Besproken boek
Drs. P & Marjolein Kool,
Wis- en natuurlyriek,
met chemisch supplement.
Nijgh & van Ditmar, Amsterdam
2001.

190 pagina's, prijs f 29,90
ISBN 90 388 14011

Grafieken tekenen

met de GR

12

De grafiek van een functie is een plaatje van het functieverband. Mensen met voldoende fantasie zien in de grafiek van sommige functies ook andere plaatjes die niets met de functie te maken hebben. Zo beginnen deze mensen te rillen als ze de grafiek zien van de functie in figuur 1.

Dit artikel draait om een prijsvraag waarbij je een tekening voor de grafische rekenmachine moet ontwerpen die helemaal uit grafieken van functies is opgebouwd. In principe is elke kronkel, zolang er geen verticale stukken in zitten, te tekenen als de grafiek van een functie of de samenstelling van stukjes van grafieken van verschillende functies. Alleen moet je de kronkel soms wel in heel veel stukjes opdelen. De enige beperkingen zijn je eigen fantasie en de beperkingen van je grafische rekenmachine.

Het domein beperken

Om je een beetje op weg te helpen, krijg je eerst te zien hoe je ervoor kunt

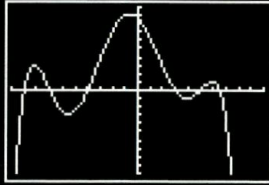
zorgen dat er maar een stukje van een grafiek getekend wordt. Met andere woorden, hoe de grafiek getekend wordt op een beperkt domein. Hiervoor maak je gebruik van zogenaamde testfuncties. Je vindt deze testfuncties onder TEST (2nd MATH). Een testfunctie is een functie die als uitkomst 1 geeft als de test klopt en 0 als de test niet klopt. In figuur 2 zie je hoe een testfunctie werkt.

Nemen we bijvoorbeeld de functie:

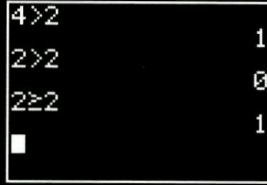
$$f(x) = x + 1 \text{ voor } x \geq 2.$$

In het functiescherm van de GR voer je dit in als $Y_1 = (X+1) / (X \geq 2)$. Dit geeft in het standaard kijkvenster de grafiek van figuur 3.

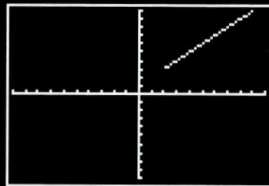
De grafiek van deze functie is de lijn $y = x + 1$, getekend voor alle x groter of gelijk aan 2, ofwel op het domein $x \geq 2$. Bijvoorbeeld als we voor x de waarde 1 kiezen, komt uit de teller de waarde 2, maar de noemer geeft de waarde 0,



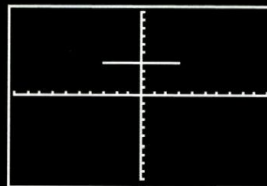
Figuur 1.
Wat zie je hierin?



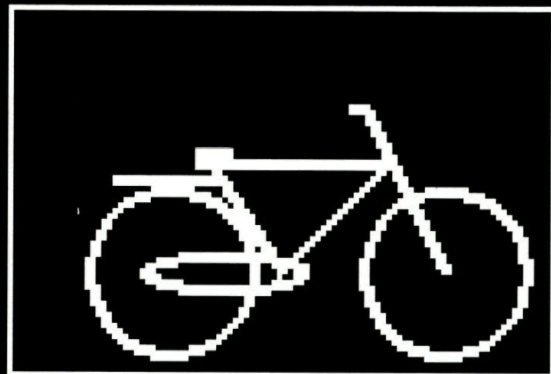
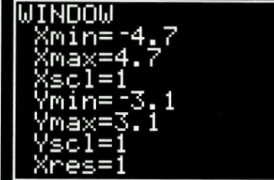
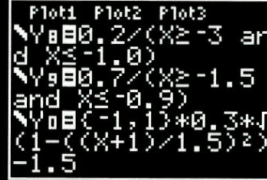
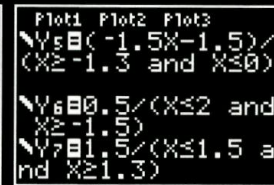
Figuur 2.
Voorbeeld van een testfunctie. De uitkomst van $4 > 2$ is 1, omdat 4 inderdaad groter is dan 2. De uitkomst van $2 > 2$ is 0, omdat 2 niet groter is dan 2.



Figuur 3.
De functie $f(x) = x + 1$ beperkt tot $x \geq 2$.



Figuur 4.
De functie $y = 4$ beperkt tot $-3 \leq x \leq 3$.



Figuur 5.

want uit de test $1 \geq 2$ komt 0. Aangezien je niet kunt delen door 0, tekent de GR daar geen punt. En dit geldt voor elke waarde voor x die kleiner dan 2 is. Voor waarden van x die groter of gelijk zijn aan 2 geeft de testfunctie in de noemer de waarde 1, dus wordt daar de grafiek getekend van de functie uit de teller. Een manier om een grafiek aan twee kanten te begrenzen, is door de twee testfuncties in de noemer te combineren met de logische functie AND (die vind je bij TEST in de tweede kolom LOGIC). Deze functie AND geeft alleen een waarde 1 als beide testfuncties waarde 1 hebben. Anders geeft hij als waarde 0. Ga voor jezelf na dat dit een 'logische' keuze is. Ga ook na wat de andere logische functies doen. De grafiek van de functie gelijk aan de horizontale lijn $y = 4$ getekend tussen $x = -3$ en $x = 3$ zie je in figuur 4.

Een fiets tekenen

Om aan een tekening te beginnen moet je eerst bepalen welke afmetingen je voor het kijkvenster wilt hebben en waar de oorsprong moet liggen. Bij de afmetingen is het verstandig om rekening te houden met het aantal pixels is het scherm (95 horizontaal en 65 verticaal) en de afmetingen zo te kiezen dat de afstand tussen twee pixels bijvoorbeeld gelijk is aan 1 of aan 0.1. Logische plaatsen voor de oorsprong zijn de linker onderhoek of het midden van het scherm. In figuur 5 staat een voorbeeld van een plaatje dat geheel is opgebouwd uit functies. Je ziet een afbeelding van de achterliggende functies en van het kijkvenster waarop het is getekend. In dit kijkvenster is dus de afstand tussen twee pixels gelijk aan 0.1 en ligt de oorsprong in het midden van het scherm. Wellicht kunnen jullie hieruit nog wat inspiratie opdoen. De gegevens zijn ook als Graph Database en als tekstfile via de website van Pythagoras te downloaden.

PRIJSVRAAG

GR-prijsvraag

De opdracht van deze prijsvraag is om een tekening te ontwerpen op de GR die volledig is opgebouwd uit grafieken van functies. Je mag dus *niet* de tekenopties, onder DRAW, gebruiken. De inzending moet bestaan uit een lijst met de gebruikte functies en de afmetingen van het kijkvenster. Dit gaat het handigst als je het venster opslaat als Graph Database (DRAW, STO 3: StoreGDB 1).

Kopieer dit bestand naar de computer met behulp van een GraphLink kabel. Als je zelf niet zo'n kabel hebt, heeft je school er waarschijnlijk wel een die je mag lenen. Het bestand dat je zo krijgt (GDB1.83D) kun je vervolgens als attachment versturen.

Prijzen

Als je wilt meedingen naar een prijs, stuur dan de Graph Database of de lijst met functies en afmetingen van het kijkvenster voor 10 december 2001 naar w.hoekstra@aps.nl. Vermeld hierbij je naam, adres, naam van je school en klas. De hoofdprijs voor de vijf beste inzendingen is een TI-83 Plus Silver Edition™. Er zijn tien tweede prijzen, elk bestaande uit een GraphLink™ tezamen met een boekenbon van 50 gulden.

De uitslag komt in het februarinummer te staan. De prijzen worden ter beschikking gesteld door Texas Instruments. Over de uitslag kan niet worden gecorrespondeerd.

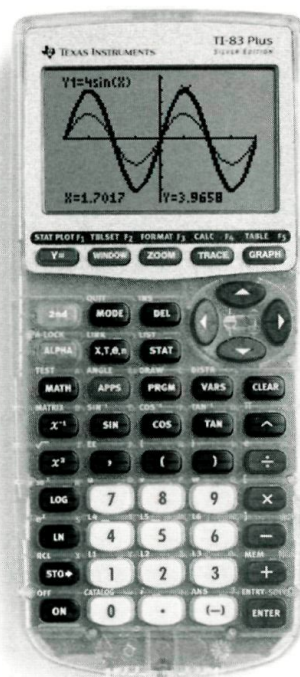
Uitslag GR-prijsvraag april 2001

1e Prijs: Jeroen Geerinck van het **Pius X-instituut** te Zele (België), 2e prijs: Rob van Wijk van het **Jacob Roelandslyceum** te Boxtel, 3e prijs: Sandra van Wijk van het **Jacob-Roelandslyceum** te Boxtel.

Uitslag GR prijsvraag juni 2001

1e Prijs: Thomas Beuman van het **RK Gymnasium Juvenaat H.H.** te Bergen op Zoom, 2e prijs: Alon Rosenthal van de **JSG Maimonides** te Amstelveen, 3e prijs: Thijs van Ommen van de **Wolfert van Borselen School** te Rotterdam.

De TI-83 Silver edition



De TI-83 Plus Silver Edition™ is het ideale platform voor applicaties. Met de Graph-Link™ verbind je de Silver Edition via de PC met internet en kun je applicaties laden. In het grote archiefgeheugen (1,5 Mb) passen bijna 100 applicaties en de hoge kloksnelheid (x 2,5) zorgt dat ze vlot draaien.

De volgende applicaties zijn voorgeïnstalleerd: Cellsheet™, Periodic Table, Organizer, Catalog Help, Start-Up Customisation en CBL/BBR.

Meer informatie

www.ti.com/calc/docs/83psilver.htm

OPLOSSINGEN NR 6

Kleine nootjes

(pagina 2 - 3)

Een sportieve vakantie

Tellen we alles op, dan krijgen we $13 + 16 + 17 = 46$ dagen. Elke dag, of het nu een hardloop-, tennis- of nietsdoen-dag is, wordt zo precies twee keer geteld. De vakantie duurde dus 23 dagen.

Knikkers

Pak 0 knikkers uit de eerste doos, 1 knikker uit de tweede, 2 uit de derde, enzovoort. In totaal heb je dan $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ knikkers, die je tezamen weegt. Meet je 900 gram, dan weet je dat je geen lichtere knikkers meegewogen hebt, zodat de lichte knikkers in doos 1 moeten zitten. Meet je minder dan 900 gram, dan kun je precies uitrekenen hoeveel lichte knikkers erbij zitten, dus ook uit welke doos deze komen. Meet je bijvoorbeeld 892 gram, dan heb je 4 lichtere knikkers meegewogen, die dus uit doos 5 komen.

Spinrag

Spinnen hebben 8 poten, vliegen 6. Er waren 16 insecten met elk dus minstens 6 poten. Dat geeft bij elkaar al $6 \times 16 = 96$ poten. De resterende $102 - 96 = 6$ poten horen bij de spinnen. Er zijn dus 3 spinnen.

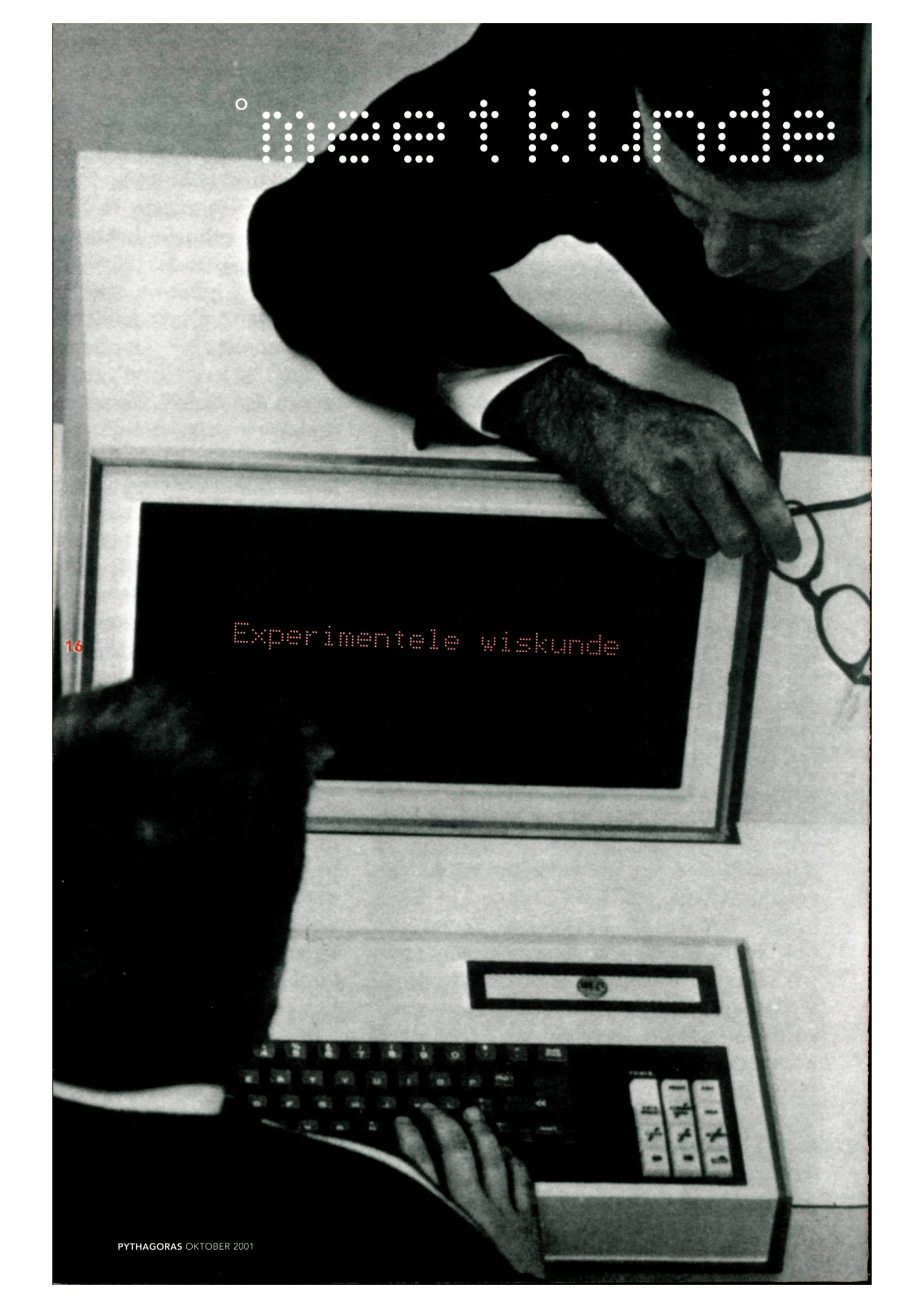
Kop of munt

Voor de trekking zijn er vier mogelijkheden, die allemaal even grote waarschijnlijkheid hebben: k/k, k/k, k/m of m/k, waarbij we aannemen dat de eerstgenoemde kant boven ligt. De vierde mogelijkheid valt af. Twee van de drie overgebleven mogelijkheden hebben een kop aan de onderkant. De gevraagde kans is dus $2/3$.

Dubbeldrank

In de theelepel die je terugschept zit een gedeelte sinaasappelsap en een gedeelte appelsap. De hoeveelheid sinaasappelsap die je overschept is precies even groot als de hoeveelheid appelsap die achterblijft.

Er zit daarom evenveel appelsap in de sinaasappelsap als er sinaasappelsap in de appelsap zit!



nse tkunde

Experimentele wiskunde

16

met de muis

In schooljaar 2001-2002 is het thema van Pythagoras: 'Experimentele wiskunde'. Het gaat om wiskunde die je zelf spelenderwijs kunt ontdekken met behulp de computer. Het idee is dat je zo stap voor stap steeds meer wiskunde leert begrijpen. Gastredacteur voor dit thema is professor Jan van de Craats.

door Aad Goddijn en Jan van de Craats

Om meetkundige figuren te tekenen gebruikten we vroeger alleen maar potlood, liniaal, passer en geodriehoek. Maar nu zijn er meetkundeprogramma's op de computer zoals CABRI, en daarmee kun je zulke figuren ook op het scherm, of via de printer, op papier krijgen. Een meetkundeprogramma is echter veel meer dan een tekenhulp. De grootste kracht ervan is dat je ermee kunt experimenteren. Daarover gaat dit verhaal: de computer als onderzoeks- en experimenteergereedschap in de meetkunde. En, zoals we zullen zien, ook als inspiratiebron om vermoedens te bewijzen. Op de meeste scholen is het programma CABRI aanwezig, of een ander programma dat zo ongeveer dezelfde mogelijkheden heeft. In het vervolg nemen we aan dat je ons verhaal op de computer met CABRI naspelt, en al doende ook zelf gaat experimenteren.

Drie rakende cirkels

We beginnen met drie elkaar rakende cirkels C_a , C_b en C_c . Hun middelpunten noemen we M_a , M_b en M_c , hun stralen r_a , r_b

en r_c . De raakpunten noemen we R_{bc} , R_{ca} en R_{ab} , zie figuur 1 (>>).

Hoe krijg je zo'n figuur op het scherm?

Begin met het kiezen van de stralen r_a , r_b en r_c , bijvoorbeeld door drie lijnstukken te tekenen. Kies vervolgens de middelpunten M_a en M_b met onderlinge afstand $r_a + r_b$. Teken daarna een hulpcirkel met straal $r_a + r_c$ en middelpunt M_a , en een hulpcirkel met straal $r_b + r_c$ en middelpunt M_b . Kies een van beide snijpunten van die cirkels als M_c en maak de figuur verder af. Veeg overbodig geworden cirkels en lijnen van het scherm met de HIDE / SHOW (VERBERG / VERSCHIJN) optie. Maak je nog niet druk over de letters die erbij gezet moeten worden; dat komt eventueel later nog wel.

De hoeken van driehoek $M_a M_b M_c$ zullen een belangrijke rol spelen. Het zal handig blijken te zijn om ze aan te geven met 2α , 2β en 2γ , zodat $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

+++ lees verder +++

Doorsteeklijnen

De hoofdrolspeler in ons verhaal is een punt P_1 dat we vrij op cirkel C_a kiezen. Vervolgens tekenen we de lijn $m_1 = P_1R_{ab}$. Die snijdt cirkel C_b behalve in R_{ab} ook nog in een tweede punt, dat we P_2 noemen. We steken als het ware van C_a naar C_b door, via het gemeenschappelijke raakpunt R_{ab} . Dit spel herhalen we: het tweede snijpunt van doorsteeklijn $m_2 = P_2R_{bc}$ met C_c noemen we P_3 , enzovoorts. In figuur 2 zie je de situatie na zes stappen, waarin dus uitgaande van P_1 achtereenvolgens $m_1, P_2, m_2, P_3, m_3, P_4, m_4, P_5, m_5, P_6$ en m_6 , getekend zijn. P_7 hebben we nog niet getekend, maar het lijkt erop — en als je het spel met CABRI naspeelt, zul je het ook zelf constateren — dat P_7 met P_1 samenvalt.

Draaiende lijnen

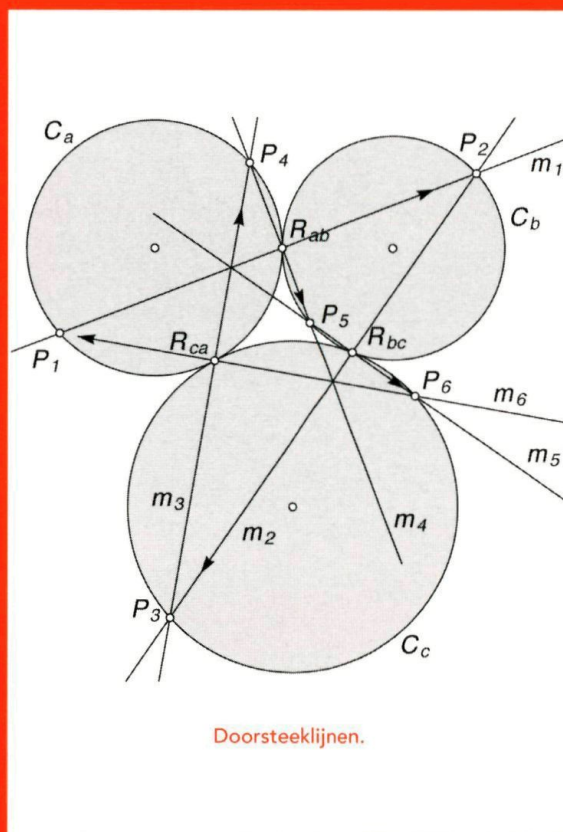
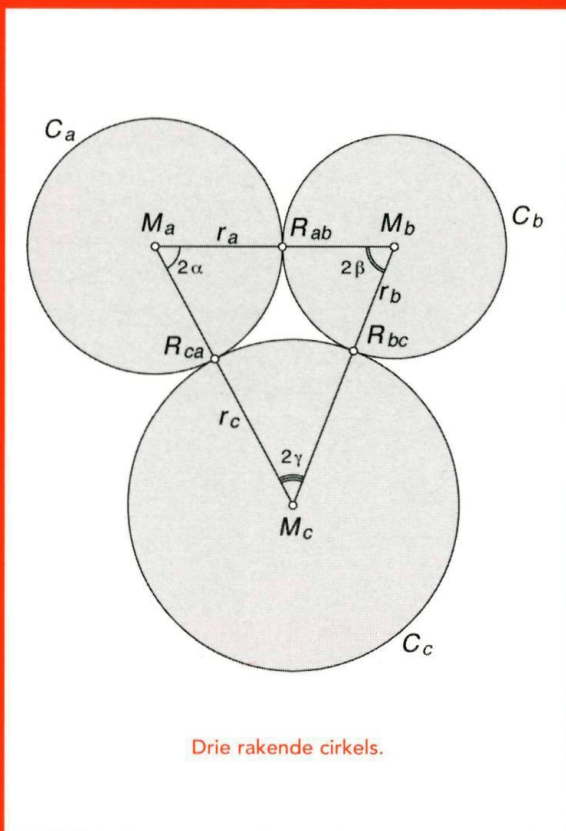
Nu komen de experimenteermogelijkheden van CABRI goed van pas. Je kunt het punt P_1 , waar de hele doorsteekconstructie mee begonnen is, namelijk met de

muis beetpakken, en langs de cirkel C_a verslepen. De punten P_i en de lijnen m_i worden dan automatisch meegetrokken, en je zult zien dat de 'sluitingseigenschap' $P_7 = P_1$ in elke positie behouden blijft. Met andere woorden, voor alle posities van P_1 op C_a geldt dat m_6 door P_1 gaat. Zie figuur 3.

Met de optie ANIMATIE van CABRI kun je het zelfs automatiseren: je ziet P_1 dan langs C_a bewegen, en in een statige processie draaien de lijnen m_i allemaal mee.

Vermoedens

De eerste vraag die opkomt, is natuurlijk of het echt waar is dat P_7 altijd met P_1 samenvalt. En of je dat ook kunt bewijzen, want zolang je het niet bewezen hebt, is het alleen nog maar een vermoeden. Als je nog wat langer naar de draaiende lijnen kijkt, krijg je nog veel meer vermoedens. Je ziet bijvoorbeeld dat de zes lijnen m_1 tot en met m_6 allemaal dezelfde kant op draaien, en ook allemaal even snel lijken te gaan: m_1 en m_4 draaien om R_{ab} , m_2 en



Figuur 1

Figuur 2

m_5 om R_{bc} en m_3 en m_6 om R_{ca} .

Verder lijkt het erop alsof m_1 loodrecht staat op m_4 , m_2 loodrecht op m_5 , en m_3 loodrecht op m_6 . Zou dat echt waar zijn? En kijk eens naar de 'even' lijnen m_2 , m_4 en m_6 in figuur 2.

Het lijkt erop dat die met hun drieën door één punt gaan, en evenzo voor de 'oneven' lijnen m_1 , m_3 en m_5 . Ook in figuur 3 lijkt het te kloppen, maar je moet wel even goed kijken. Is dat echt waar, en zo ja, wat voor banen beschrijven die twee punten dan? Ook daar kan CABRI mee helpen via de SPOOR AAN optie.

Gebruik je die optie, dan lijkt de indruk onontkoombaar dat die twee punten beide de cirkel door R_{bc} , R_{ca} , en R_{ab} beschrijven. Met CABRI kun je die cirkel tekenen; wij hebben het in figuur 4 gedaan. Het lijkt te kloppen, maar mag je zulke figuren geloven? Natuurlijk willen we een bewijs hebben, dat wil zeggen een redenering waaruit blijkt dat al deze vermoedens inderdaad waar zijn.

De hoek tussen twee lijnen

Je ziet dat alles draait om hoeken tussen lijnen. In letterlijke zin! Het is daarom handig om eerst vast te leggen hoe we de hoek tussen twee lijnen meten.

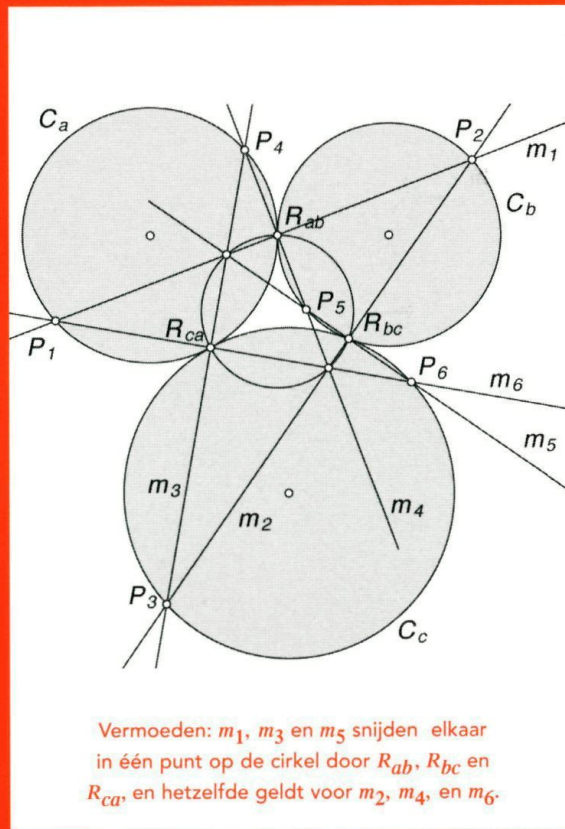
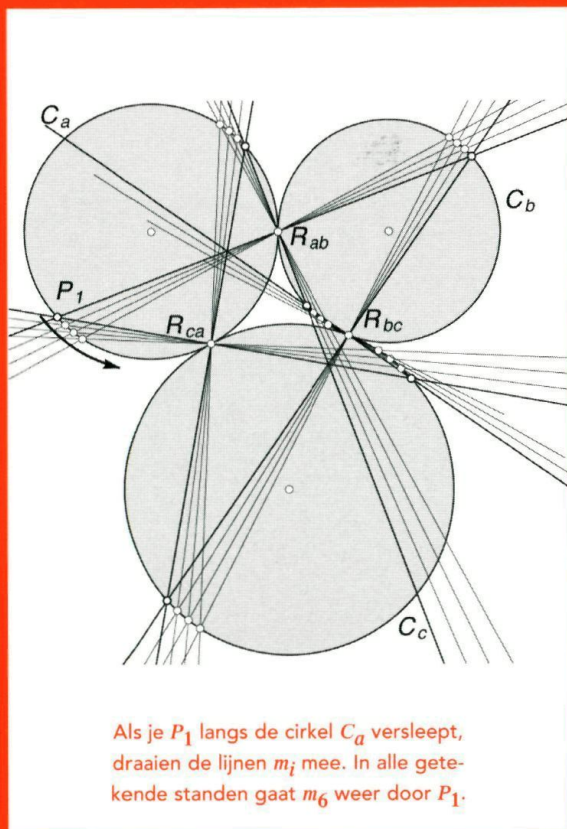
Gewoon met de gradenboog van de goedriehoek, jawel, maar we geven er ook een richting aan:

De hoek $\angle(m, n)$ tussen de lijnen m en n is de kleinste hoek waarover je m tegen de wijzers van de klok in moet draaien om m met n te laten samenvallen.

Wanneer m en n samenvallen of evenwijdig zijn, definiëren we $\angle(m, n) = 0$.

De hoek tussen twee lijnen ligt dus altijd tussen 0 en 180 graden, en als m en n elkaar snijden, geldt altijd $\angle(m, n) + \angle(n, m) = 180^\circ$. Zie figuur 5.

Wanneer we afspreken dat we hoeken modulo 180° meten, kunnen we in figuur 5 ook $\angle(n, m) = -57^\circ$ nemen, en in het algemeen geldt dan dat $\angle(m, n) = -\angle(n, m)$ voor elk paar lijnen. En de stelling dat de



Figuur 3

Figuur 4

som van de hoeken van een driehoek 180 graden is, kun je nu vertalen in de eenvoudige en fraaie stelling:

Voor elk drietal lijnen geldt:

$$\angle(m, n) + \angle(n, p) + \angle(p, m) = 0.$$

Let hierbij goed op de volgorde!

Draaiende lijnen in een cirkel

We passen dit toe op de situatie van figuur 6, waarin een variabel punt P met een constante hoeksnelheid over een cirkel met middelpunt M rondloopt. Er ligt ook een vast punt A op de cirkel. De lijn $p = PA$ draait dan om A , maar met de halve hoeksnelheid! Als P één volledige rondgang maakt, draait de lijn p slechts een halve ronde, maar daarna ligt p wel weer helemaal op zichzelf. Je kunt dat met CABRI controleren, maar het volgt ook direct uit de bovenstaande stelling, toegepast op de zijden MA , AP en PM van de gelijkbenige driehoek PMA :

$$\angle(MA, AP) + \angle(AP, PM) + \angle(PM, MA) = 0.$$

Wegens de gelijkbenigheid van driehoek AMP zijn de eerste twee hoeken gelijk, en dus geldt (let op de tekens!):

$$\begin{aligned} 2 \times \angle(MA, AP) &= -\angle(PM, MA) \\ &= \angle(MA, PM). \end{aligned}$$

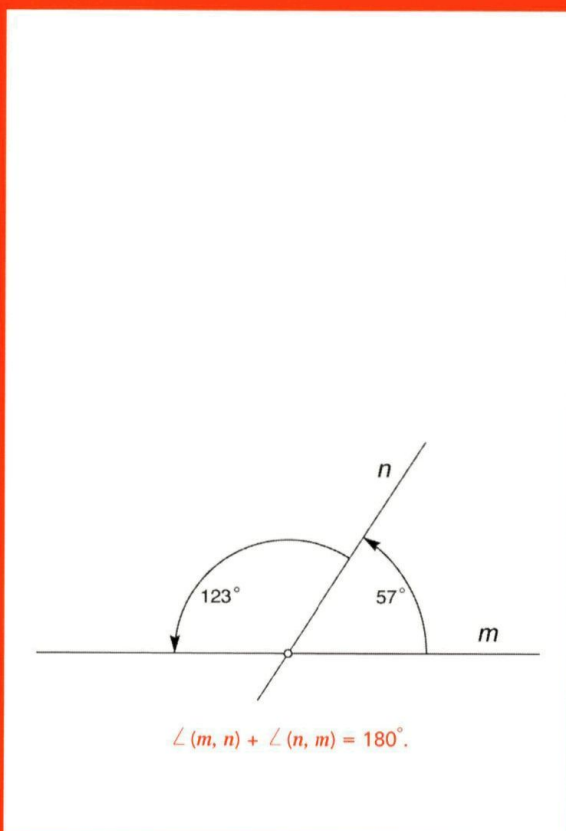
Zie je ook wat er gebeurt als p het vaste punt A passeert? De lijn p wordt op dat moment de raaklijn in A aan de cirkel.

Terug naar de doorsteeklijnen

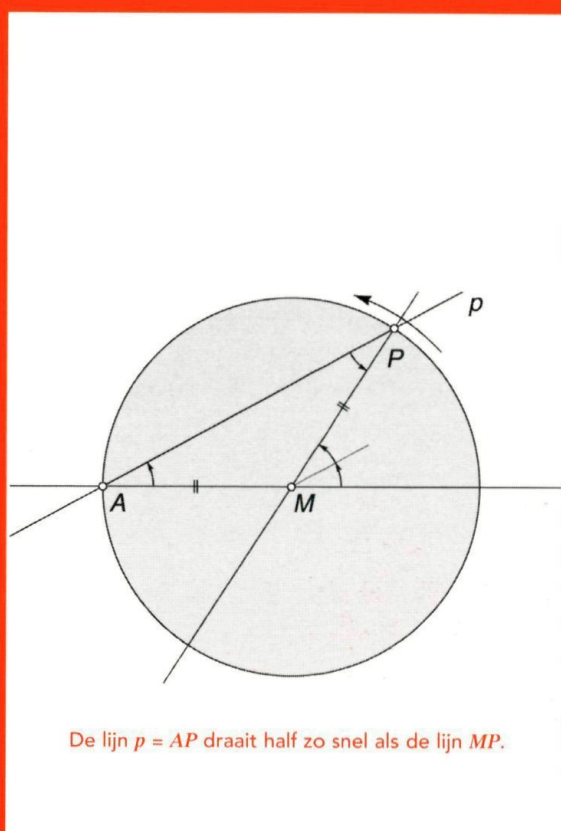
Nu wordt het tijd om de oogst binnen te halen. Kijk weer naar de figuren 2 en 3. Stel dat P_1 met een constante hoeksnelheid ω over cirkel C_a rondloopt.

Dan draait m_1 met een hoeksnelheid $\frac{1}{2}\omega$ om R_{ab} .

En dus loopt P_2 weer met snelheid ω over C_b . En dus draait m_2 dan met snelheid $\frac{1}{2}\omega$ om R_{bc} , enzovoorts, enzovoorts. Alle punten P_i lopen dus met dezelfde hoeksnelheid ω over hun eigen cirkel (en in dezelfde richting!), en alle lijnen m_i draaien met dezelfde hoeksnelheid $\frac{1}{2}\omega$ om hun respec-



Figuur 5



Figuur 6

tievelijke draaipunten R_{bc} , R_{ca} of R_{ab} .

In het bijzonder loopt m_2 een vaste hoek voor op m_1 .

Hoe groot is die hoek? Dat zie je het makkelijkst als je voor P_1 een bijzondere stand kiest, bijvoorbeeld zo, dat m_1 door het middelpunt M_a van C_a gaat (zie figuur 7).

De situatie is dan vergelijkbaar met die van figuur 6, en we zien dat $\angle(m_1, m_2) = \beta$.

Op een soortgelijke wijze zien we dat $\angle(m_2, m_3) = \gamma$, enzovoorts.

We maken er een overzichtelijk lijstje van:

$$\angle(m_1, m_2) = \beta,$$

$$\angle(m_2, m_3) = \gamma,$$

$$\angle(m_3, m_4) = \alpha$$

$$\angle(m_4, m_5) = \beta,$$

$$\angle(m_5, m_6) = \gamma,$$

$$\angle(m_6, m_7) = \alpha.$$

Enzovoorts.

Maar omdat $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ hebben de lijnen m_1 en m_7 dezelfde richting.

Allebei gaan ze door R_{ab} , en dus moeten

ze wel samenvallen. Dat betekent dat ook P_1 en P_7 samenvallen, en dat is precies wat we wilden bewijzen.

Zelf bewijzen

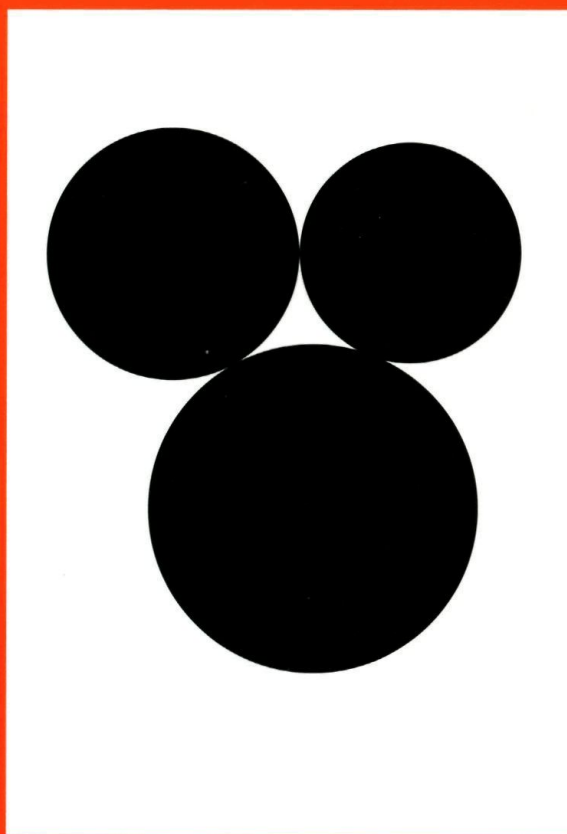
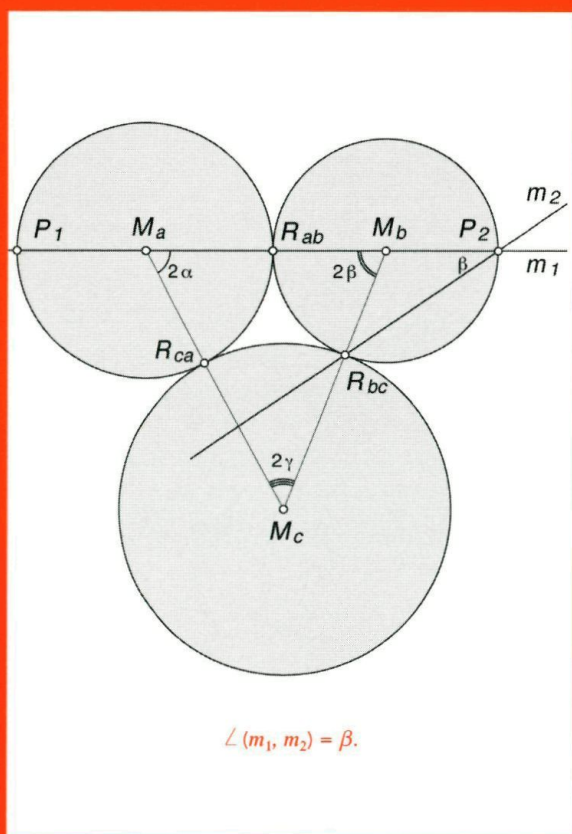
We hebben in het begin van ons stuk nog een heleboel andere vermoedens geformuleerd, onder andere over het door één punt gaan van m_1 , m_3 en m_5 , respectievelijk m_2 , m_4 en m_6 . Misschien heb je zelf nog wel meer vermoedens gekregen.

Het belangrijkste vermoeden, de sluitingsstelling, hebben we hierboven bewezen.

Met dezelfde methodes kun je nu zelf de andere vermoedens te lijf gaan. Er zijn natuurlijk nog allerlei varianten en uitbreidingen te bedenken: hoe zit het als twee van de drie cirkels binnen de derde cirkel liggen, en die cirkel dus niet uitwendig maar inwendig raken? Hoe zit het met meer dan drie cirkels? Bij al die onderzoeksvragen kan CABRI je op weg helpen om vermoedens en ideeën voor bewijzen te vinden. Maar de bewijzen zelf moet je uiteindelijk zelf bedenken.

Veel succes ermee!

21



De **P**entagor **P**uzzel

door Chris Zaal

22

Ontdek de vele mogelijkheden van deze pentagon-puzzel, waarmee je vijfhoeken van verschillende grootte kan maken.

Op de website www.trigam.ch worden verschillende puzzels te koop aangeboden. Een ervan is de Pentagor-puzzel, bestaande uit 17 stukjes. In deze puzzel kom je op velerlei manieren de gulden snede tegen.

Zelf maken

De Pentagor-puzzel zie je in figuur 4. Neem deze figuur over op hout of karton, en snij de aangegeven stukjes zorgvuldig uit. De figuur kun je ook downloaden vanaf de homepage van Pythagoras (kijk bij het oktobernummer). Met deze stukjes kun je regelmatige vijfhoeken van verschillende grootte maken.

Puzzelopdrachten

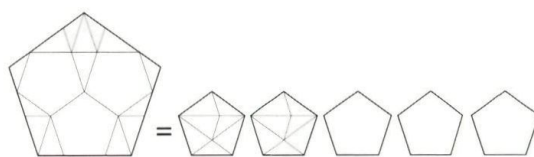
Met de 17 stukjes van de Pentagor-puzzel kun je vijf vijfhoeken maken van gelijke grootte, zie figuur 1. Een eerste puzzelopdracht bestaat eruit de 17 stukjes weer samen te voegen tot een grote vijfhoek — zonder naar figuur 4 te kijken, natuurlijk. Op hoeveel manieren kan dit? Met vier van de vijfhoeken kun je een iets kleinere vijfhoek maken, zie figuur 2. Dit is de tweede puzzelopdracht. Het is mogelijk nog kleinere vijfhoeken te leggen, zie figuur 3. Oplossingen vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

De makers

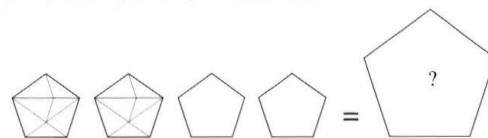
Deze Pentagor-puzzel is gemaakt door de natuurkundigen Jean Bauer en Jean-Philip Lebet. Voor hun bedrijf Trigam SA. hebben zij al meer dan twintig verschillende spellen en puzzels ontworpen. De Trigam-puzzels zijn prachtig om te zien, maar niet echt goedkoop. De houten uitvoering van de Pentagor-puzzel kost \$ 36.80.

Meer informatie

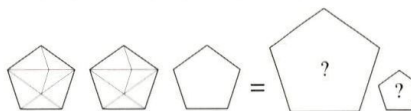
<http://www.trigam.ch>



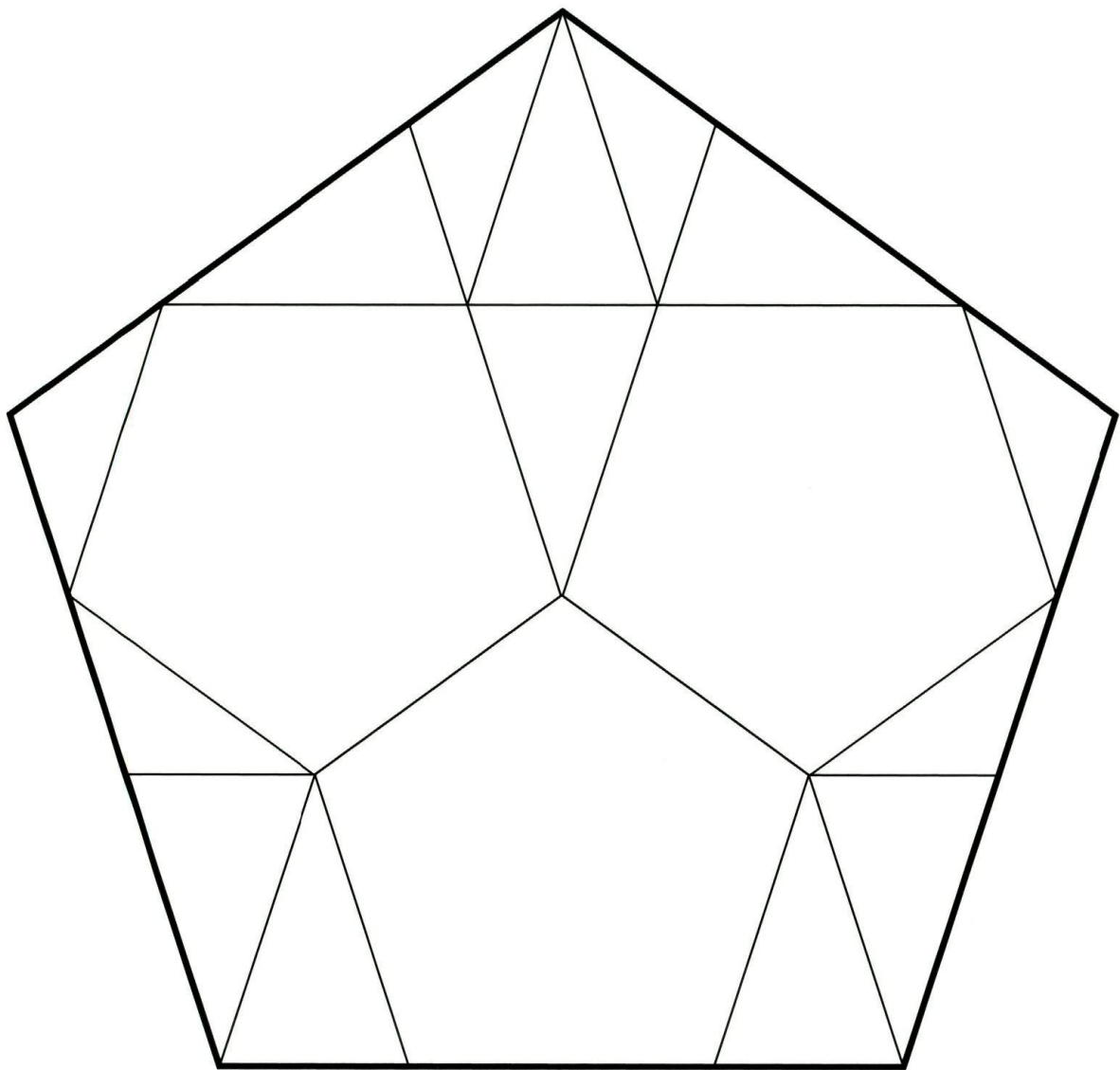
Figuur 1. Met de stukjes van de pentagor-puzzel kun je vijf even grote vijfhoeken maken.



Figuur 2. Met vier vijfhoeken maak je een iets kleinere vijfhoek. De vraag is: Hoe?



Figuur 3. Met minder stukjes maak je nog kleinere vijfhoeken. Hoe?



23

Figuur 4. De pentagor-puzzel

°Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!

Opgave 75

Het punt P is een willekeurig punt binnen een regelmatige n -hoek. Bewijs dat de som van de afstanden van P tot de zijden onafhankelijk is van de keuze van P .

Opgave 76

In vierkant $ABCD$ met zijde 1 worden op de zijden AB , BC , CD en DA respectievelijk punten P , Q , R en S gekozen. Bewijs dat

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 \leq 4.$$

Dit zijn dus eigenlijk twee opgaven.

24

Adres

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
email: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 november 2001. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van twintig euro verloot. Let op: Het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het augustusnummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Laddercompetitie

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Voor de bovenste drie leerlingen van de laddercompetitie zijn er aan het eind van het jaar hoofdprijzen van 120, 100 en 80 Euro. In het volgende nummer volgt de eindstand van schooljaar 2000-2001.

Opgave 71

Gegeven zijn positieve en gehele getallen a , b en c waarvoor geldt:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 1000.$$

Wat is $a + b + c$?

Oplossing. Uit de gegevens volgt $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 1001$. De getallen $(a + 1)$, $(b + 1)$ en $(c + 1)$ moeten groter dan 1 zijn. Omdat 1001 op verwisseling van volgorde na slechts op één manier te schrijven is als product van drie gehele getallen groter dan 1, namelijk als $7 \cdot 11 \cdot 13$, weten we dat $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = 7 + 11 + 13 = 31$. Er volgt $a + b + c = 28$.

Deze opgave werd opgelost door: P. Dekker, P.J. Evertse-school te Rotterdam, Jet van Duin, Groene Hart Lyceum te Alphen aan de Rijn, Bram Kuivenhoven, Atlas College te Rijswijk, Thomas Beuman, RK Gymnasium Juvenaat H.H. te Bergen op Zoom, Birgit van Dalen, Vlaardingse openbare scholengemeenschap (VOS) te Vlaardingen, H. Verdonk te Den Haag, Peter Deleu te Hulste (België), Elias C. Buissant des Amorie en Jaap Bak te Amstelveen.

De boekenbon gaat naar P. Dekker.

Opgave 72

Kan een macht van 2 in een andere macht van 2 veranderd worden door de volgorde van zijn cijfers (in de decimale schrijfwijze) te veranderen?

Oplossing. Het antwoord is nee, als ten minste alleen naar positieve machten van 2 gekeken wordt. Als twee machten van 2, zeg 2^a en 2^b met $a > b$, dezelfde cijfers hebben, kan $a - b$ hooguit 3 zijn. Anders is $2^a \geq 16 \cdot 2^b$ en heeft 2^a minstens een cijfer meer. Dus we hebben de mogelijkheden $2^a = 2 \cdot 2^b$, $2^a = 4 \cdot 2^b$ en $2^a = 8 \cdot 2^b$.

Omdat de som van de cijfers van beide getallen gelijk is, hebben ze dezelfde rest bij deling door 9 en dus is het verschil van de twee getallen deelbaar door 9. Maar het verschil is gelijk aan 2^b , $3 \cdot 2^b$ of $7 \cdot 2^b$ en geen van deze getallen is deelbaar door 9. Daarom kan een positieve macht van twee niet in een andere positieve macht van twee veranderd worden door de volgorde van zijn cijfers te veranderen. Sommige inzenders merkten op dat het antwoord op de vraag ja is, als we ook naar negatieve machten van 2 kijken. Zo is bijvoorbeeld $2^9 = 512,0$ en $2^{-3} = 0,125$. Ook voldoen $2^8 = 256,00$ en $2^{-4} = 0,0625$. Hoewel dit niet de bedoeling van de vraag was, kan zij wel zo opgevat worden en dus hebben we deze inzendingen ook goed gerekend. Kan iemand nog meer van dit soort voorbeelden vinden?

Deze opgave werd opgelost door: P. Dekker, P.J. Evertse-school te Rotterdam, Jet van Duin, Groene Hart Lyceum te Alphen aan de Rijn, Thomas Beuman, RK Gymnasium Juvenaat H.H. te Bergen op Zoom, H. Verdonk te Den Haag, Peter Deleu te Hulste (België), Elias C. Buissant des Amorie en Jaap Bak te Amstelveen. De boekenbon gaat naar Jet van Duin.

° Problemen

door Dion Gijswijt

TAM-puzzel

We bekijken 'woorden' van de drie letters T, A en M. Zo'n woord mag je met behulp van de volgende spelregels veranderen.

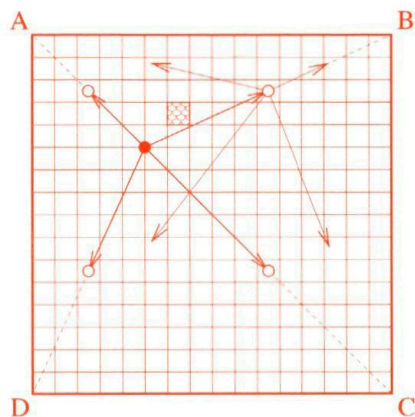
Je mag:

- twee gelijke letters die naast elkaar staan wegstrepen,
- een *M* veranderen in *MT*,
- een *T* veranderen in *TA* en
- een *A* veranderen in *TAM*.

Als je bijvoorbeeld begint met *A*, dan kun je achtereenvolgens *TAM*, *TAAM*, *TM* en *TMT* maken. De opgave is nu om van *A* het woord *M* te maken. Welke woorden kun je allemaal van *A* maken?

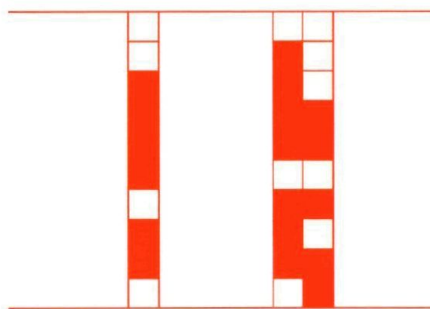
Kikkersprongen

In de figuur zie je een vierkante tuin met zijde 16 meter en hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D*. Een kikker bevindt zich 5 meter rechts en onder punt *A*. De kikker probeert in het poeltje rechtsboven hem te komen. Helaas kan hij alleen in de richting van een van de hoekpunten van de tuin springen, waarbij hij altijd precies halverwege neerkomt. Hoe kan de kikker in 4 sprongen in het water uitkomen?



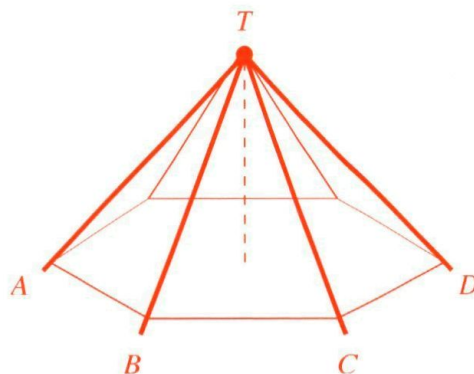
Tuinpad aanleggen

Jarik wil een tuinpad aanleggen van de achterdeur naar de schuur. Hij heeft daarvoor witte tegels van 30 bij 30 cm en zwarte tegels van 30 bij 60. Het pad moet 30 cm breed worden en 3 meter lang. Uit hoeveel mogelijke betegelingen kan Jarik kiezen? En als het pad 60 cm breed moet worden?



Tent

Een zeshoekige tent heeft stokken van 4 meter lang. Elke stok staat loodrecht op de stok twee posities verder. Zo staat bijvoorbeeld de stok bij *A* loodrecht op de stok bij *C*. Wat is de hoogte van de tent?



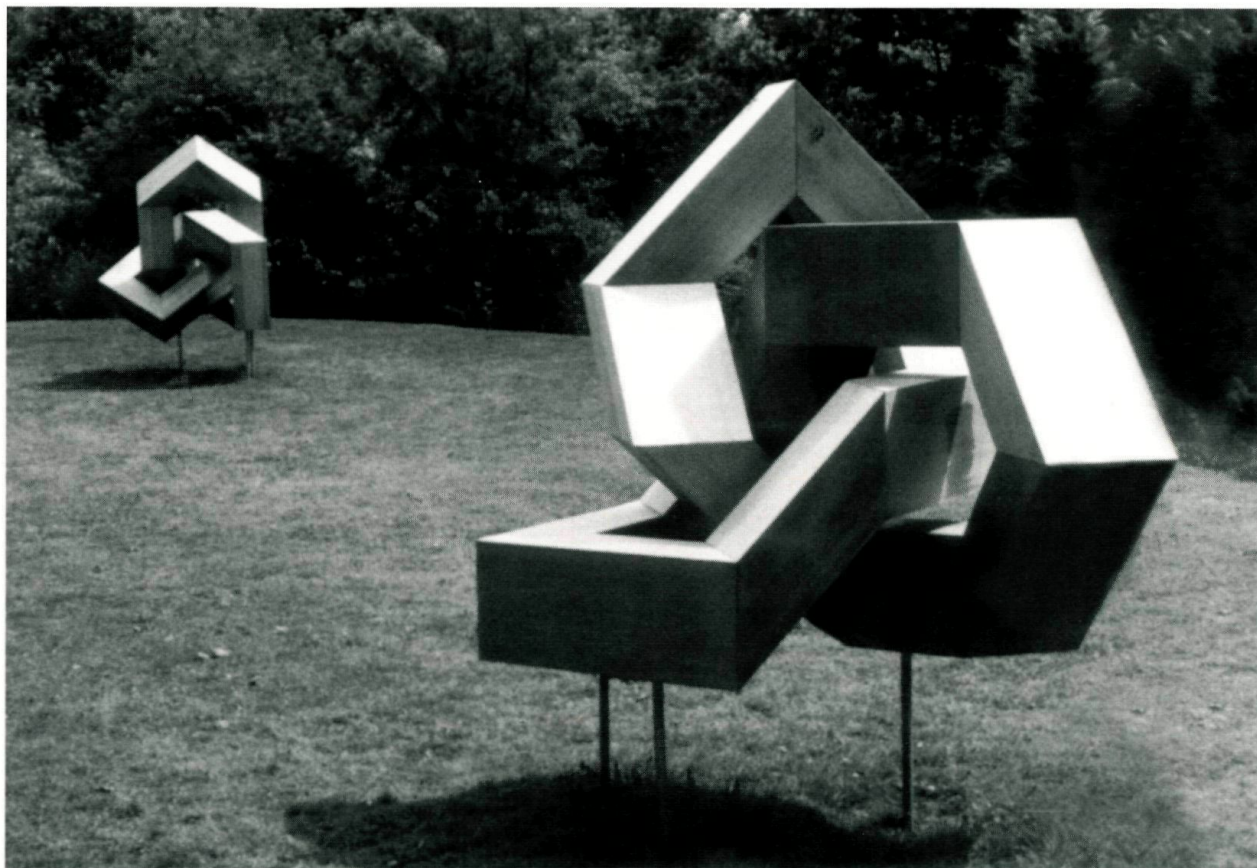
nr.6

Tegels kleuren

Er geldt:

De oudste zoon is 9 jaar, de andere twee zijn 2 jaar oud. Als je alle mogelijkheden afgaat waarbij het produkt 36 is, zijn er twee gevallen met dezelfde som, namelijk 13. De buurman woonde op nummer 13 en kon uit het feit dat er een oudste was afleiden welke van de twee gevallen hij moest hebben.

Noem het snijpunt van BC en AD punt S. Nu is $y : AM = ED : MD$. Uitwerken geeft $y = r - \frac{x}{3}$. Ook geldt: $x : MB = CF : CM$, dus $x = r - \frac{y}{2}$. Uit deze twee vergelijkingen kunnen we x en y bepalen: $y = \frac{4}{5}r$ en $x = \frac{3}{5}r$. Je ziet dat $x^2 + y^2 = r^2$. Dus ligt S op de cirkel.



28

beeld



Het knoopje van Verhoeff

door Chris Zaal

Van 30 juni tot en met 23 september 2001 was in het bos van Ypeij te Tytsjerk (Friesland) de beeldtentoonstelling 'Schaal en Maat' te bewonderen. Daar werden kunstwerken getoond van onder andere de 'wiskunstenaars' Rinus Roelofs, Frank van de Linden, Piet van Mook en Koos Verhoeff.

Koos Verhoeff is een gepensioneerd professor in de wiskunde, die geboeid is geraakt door de kunstzinnige mogelijkheden van de wiskunde. Met behulp van de computer heeft hij vele driedimensionale objecten ontworpen. Voor de tentoonstelling in Friesland heeft Verhoeff drie identieke kunstobjecten laten vervaardigen, die door de verschillende manier van plaatsing onderling lijken te verschillen. Je ziet ze in de foto's: grote houten knopen. Deze beelden zijn gemaakt door laatstejaarsstudenten van de mbo-opleiding Friese Poort, afdeling Bouwkunde.

verhaal

29

De eenworteltweebalk

De knopen bestaan elk uit 15 balkjes met een rechthoekige doorsnede. De balkjes zijn met elkaar verbonden door middel van een verstek van 45 graden. Het bijzondere van deze balkjes is de doorsnede, die Verhoeff zodanig gekozen heeft, dat het verstekvlak *vierkant* is. Je kunt hieruit afleiden wat de hoogte-breedteverhouding van de rechthoekige doorsnede is. Kun jij die berekenen? Door het vierkante verstekvlak zijn er in principe vier verschillende standen waarin je twee balkjes op elkaar kan laten aansluiten: als je het ene balkje vasthoudt, kun je het andere in het verstekvlak ronddraaien over een hoek van 90 graden. Dit geeft drie verschillende aansluitmogelijkheden. De stukjes verschillen verder alleen nog in vorm. Er zijn drie identieke stukjes waarvan de verstekvlakken parallel zijn. De zijaanzichten daarvan hebben de vorm van een parallellogram. De andere twaalf stukjes zijn ook allemaal gelijk. Hun verstekvlakken staan loodrecht op elkaar en de zijaanzichten hebben de vorm van een trapezium.

De post

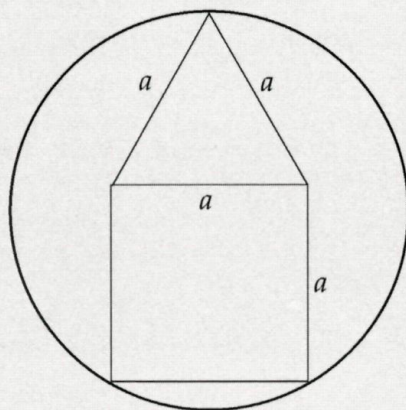
door Chris Zaai

Uit een TNO-krantje

Van G.P.M. Léger uit Delft ontvingen wij een leuke opgave. De vraag is om van de cijfers 0 tot en met 9 twee breuken te maken die bij elkaar opgeteld 1 opleveren. Daarbij geldt dat elk cijfer moet worden gebruikt en elk cijfer vóór het =-symbool maar één keer mag voorkomen.

De wet van Wraj

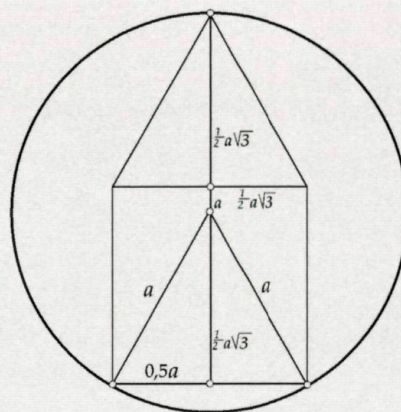
De volgende opgave heeft al een keer in Pythagoras gestaan. Gegeven is een huisje als in figuur 1. Bewijs dan dat de straal van de omgeschreven cirkel gelijk aan a is.



Figuur 1

Op een vierkant met zijde a staat een gelijkzijdige driehoek.

Wouter Jans en Rick Admiraal, scholieren van het **Jac. P. Thijsse College** te Castricum hebben een oplossing gevonden. Hun docent wiskunde Lidy Wesker was hier erg trots op en ze stuurde ons het bewijs van haar leerlingen. De oplossing zie je in figuur 2.



Figuur 2

Construeer in het vierkant een gelijkzijdige driehoek. De afstand van de top van deze driehoek tot de top van het huisje is $(a - \frac{1}{2}a\sqrt{3}) + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = a$. De cirkel met straal a gaat daarom door de top en is de omgeschreven cirkel.

Vierentwintigen

In het oktobernummer 1999 van Pythagoras stond een artikel over vierentwintigen. Het getal 24 is het flippogetal. De flippo's bevatten een rekenopdracht: op de flippo staan vier gehele positieve getallen onder de 10, waarmee je het getal 24 moet maken. Daarbij mag je alleen gebruik maken van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder mag je ook gebruik maken van haakjes. Voorbeeld: met de getallen: 4, 5, 9, 9 kun je 24 maken: $4 \times (5 + (9 : 9)) = 24$. Herman Aalink, docent wiskunde van het **Elzendaalcollege** te Boxmeer vroeg zich af met welke viertallen je 24 kunt krijgen. Je kunt niet met elk viertal 24 maken. Neem maar eens: 1, 1, 1, 1 of 8, 8, 8, 9. Op school begon hij leerlingen te vragen oplossingen aan te reiken voor die combinaties die hij tot dan toe niet had. Het werd een rage. Vorig

jaar kwam de 6-VWO leerling *Ronald Wind* met een computerprogramma – geschreven in Visual Basic – waarmee alle mogelijkheden gevonden zouden kunnen worden. Volgens het programma zijn er 404 verschillende viertallen waarmee 24 gemaakt kan worden. De volgorde van de cijfers maakt niet uit: 1, 1, 1, 8 en 8, 1, 1, 1 tellen als hetzelfde viertal. Ronald heeft ook voor andere getallen dan 24 het aantal viertallen uitgerekend, waarmee je dat getal kan maken, die aantallen noemt hij $R(n)$. Zie tabel 1.

n	$R(n)$	n	$R(n)$
1	438	11	417
2	476	12	444
3	472	13	386
4	464	14	410
5	462	15	416
6	469	16	425
7	461	17	353
8	455	18	405
9	453	20	385
10	447	24	404

Tabel 1

Het getal $R(n)$ geeft het aantal viertallen aan waarmee je n als uitkomst kunt krijgen, door gebruik te maken van +, -, x en /. Er zijn dus 404 verschillende viertallen waarmee je 24 kunt maken. Voor zover wij hebben kunnen nagaan, klopt het programma, maar zijn de vermelde resultaten in tabel 1 niet allemaal correct. In het bijzonder kloppen de getallen $R(1)$ en $R(2)$ volgens ons niet. Wie kan de getallen van Ronald verifiëren? Het programma van Ronald kan je vinden op: <http://www.digitpaint.nl/24>

Fibonacci-getallen

De rij van Fibonacci is de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., zie voor meer informatie het oktobernummer van vorig jaar. Met F_n wordt het n -de getal uit deze rij aangeduid. *Birgit van Dalen* uit Maassluis en *Wouter Waalewijn* uit Utrecht stuurden ons allebei een bewijs van de formule

$$F_{n+m+1} = F_n \cdot F_m + F_{n+1} \cdot F_{m+1}$$

die in het vorige nummer stond. Ze maakten gebruik van volledige inductie. Ze bewezen de formule eerst voor $n = 1$ en $n = 2$ en bewezen, bij vaste m , daarna dat als de formule klopt voor $n = k - 1$ en $n = k$, dat hij dan ook waar is voor $n = k + 1$. Hieruit volgt dat de formule klopt voor alle n . (De formule is waar voor $n = 1$ en $n = 2$, dus ook voor $n = 3$. De formule is dan waar voor $n = 2$ en $n = 3$, dus ook voor $n = 4$, enz.) Probeer eens of je dit bewijs zelf kunt vinden. Als je meer over volledige inductie wilt weten kun je in het artikel 'Het dominoprincipe' uit het augustusnummer van jaargang 1998/1999 meer informatie vinden. Het artikel staat ook op de website. We ontvingen ook nog een bewijs van J.J. Versluys en van René Pannekoek.

Errata nr. 6

Er is een fout geslopen in de stelling van Wolff uit het vorige nummer. De gegeneraliseerde formule moet zijn:

$$\text{opp. } \triangle ABC = BP \cdot PC \cdot \sin \alpha / (1 - \cos \alpha)$$

Verder wordt op pagina 4 beweerd dat er precies zes Tetris-vormpjes zijn. Het zijn er natuurlijk zeven.

Activiteiten

- 6 oktober t/m 4 november **Tentoonstelling Gerard Caris**
Stedelijk Museum Amsterdam
Overzichtstentoonstelling van een door vijfhoeken
gegrepen kunstenaar
- zondag 7 oktober **Wetenschapsdag 2001**
Wetenschappelijke instellingen openen deze dag hun deuren
voor het publiek. Zie ook de programmakrant die verspreid
wordt op scholen en bibliotheken.
<http://www.weten.nl>
- donderdag 11 oktober **KUN docentendag**
Katholieke universiteit Nijmegen
<http://www.sci.kun.nl>
- zaterdag 13 oktober **Kubusdag**
Bijeenkomst van de puzzelclub Cubism For Fun
Veldhoven
info: Joop van der Vaart, e-mail: plaataf@wanadoo.nl
- zaterdag 27 oktober **Studiefestival Universiteit Leiden**
Pieterskerk, Leiden
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>
- zaterdag 10 november **Voorlichtingsdag 5/6-vwo**
wiskundeopleiding Universiteit Utrecht
tel (030) 253 14 22 of beek@math.uu.nl
- zaterdag 10 november **Ars et Mathesis-dag**
Utrecht
<http://www.arsetmathesis.nl>
- zaterdag 17 november **Jaarvergadering en studiedag NVvW**
Hogeschool Domstad, Utrecht
<http://www.nvww.nl>
- vrijdag 23 november **Voorronde Wiskunde A-lympiade 2002**

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde-afdelingen van de Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit Amsterdam en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2001-2002

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 39,50/17,92 Euro. Losse nummers kosten f 8,50 / 3,86 Euro.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 850,- / 21,07 Euro

Pythagoras buitenland f 54,50 / 24,73 Euro

Pythagoras én Archimedes f 69,50 / 31,54 Euro

Pythagoras én Archimedes België BF 1470,- / 36,44 Euro

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50 / 37,89 Euro

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Bulkabonnement Nederland: f 27,50 / 12,48 Euro per jaar.

Bulkabonnement België: BF 650,- / 16,11 Euro per jaar.

Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.

De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Leerlingabonnement Nederland: f 32,50 / 14,75 Euro per jaar.

Leerlingabonnement België : BF 750,- / 18,59 Euro per jaar.

Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd.

Het leerling-abonnement is een doorlopend abonnement.

Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboorte-datum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (f 25,- / 11,34 Euro excl. verzendkosten) jaargang 40 (f 39,50 / 17,92 Euro excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke stelling' (f 7,50 / 3,40 Euro excl. verzendkosten).

