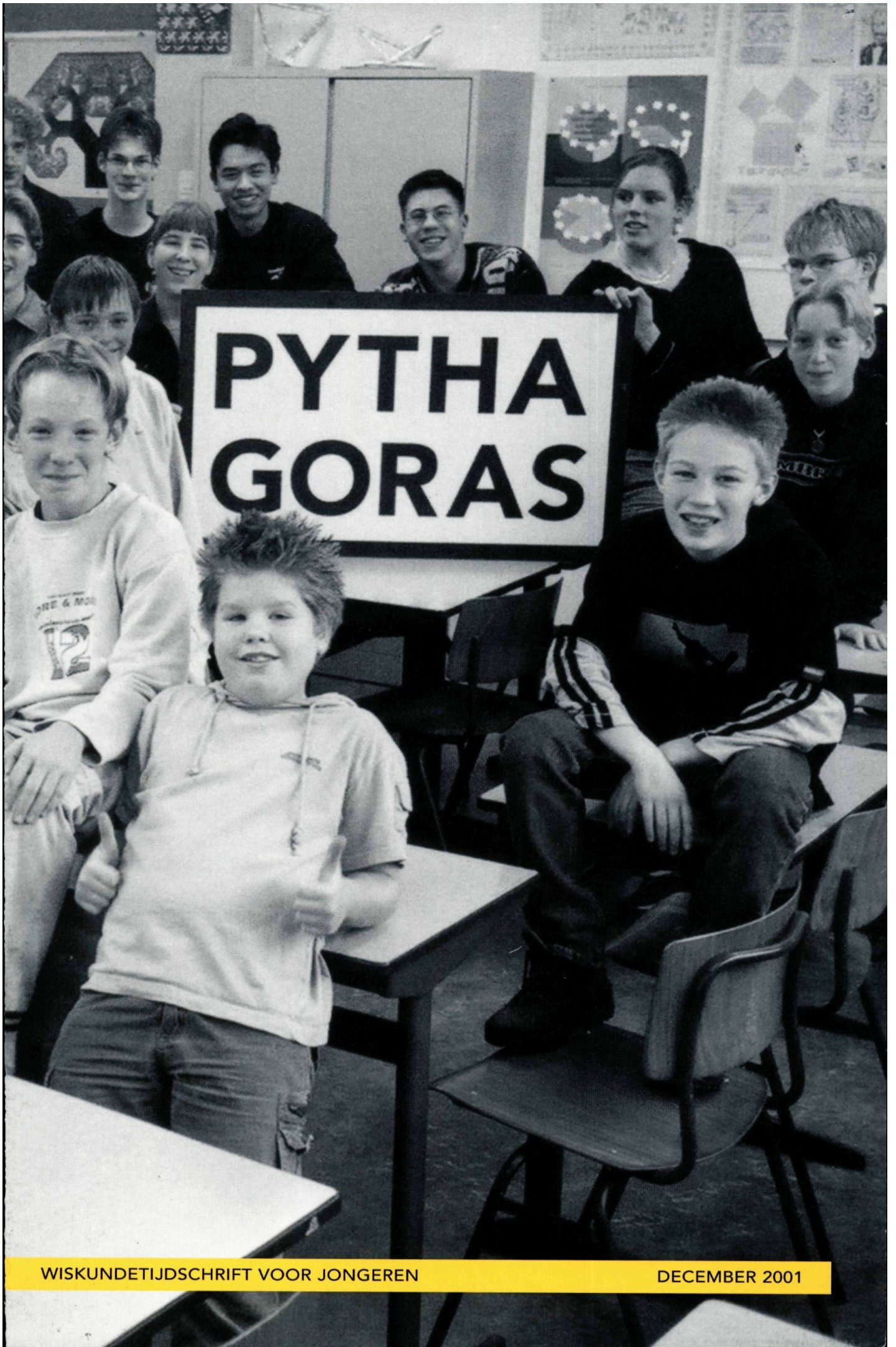






## COLOFON

### **Uitgave**

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

### **E-mail**

pythagoras@science.uva.nl

### **www**

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

### **Redactie**

Matthijs Coster  
Dion Gijswijt  
Jan Guichelaar  
Klaas Pieter Hart  
Marco Swaen  
René Swarttouw  
Chris Zaal

### **Hoofredactie**

Chris Zaal

### **Eindredactie**

Alex van den Brandhof

### **Grafisch ontwerp**

Sonja en Esther, Amsterdam

### **Drukwerk**

Giethoorn Ten Brink, Meppel

### **Uitgever**

Wiskundig Genootschap  
Postbus 80010  
3508 TA Utrecht

### **Lezersreacties en kopij**

René Swarttouw  
Vrije Universiteit  
Faculteit Exacte Wetenschappen  
Divisie Wiskunde en Informatica  
De Boelelaan 1081a  
1081 HV Amsterdam

### **Redactiesecretariaat**

Pythagoras  
Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
tel 071 5277121  
fax 071 5277101

### **Abonnee-administratie**

#### **Adreswijzigingen**

Mirjam Worst  
Drukkerij Giethoorn Ten Brink  
Postbus 41  
7940 AA Meppel  
tel 0522 855175  
fax 0522 855176

### **Niveau-rondjes**

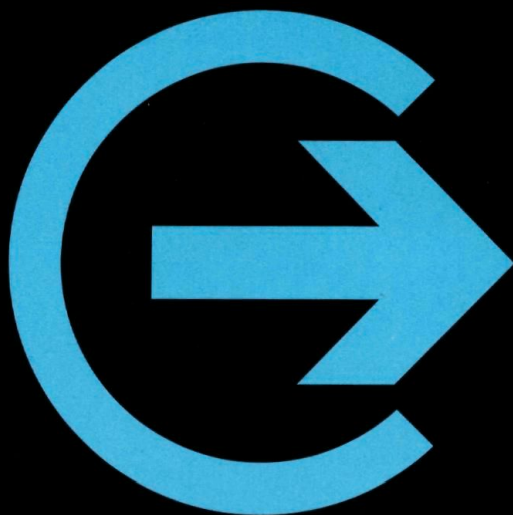
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.  
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;  
1 rondje  $\circ$ : voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;  
2 rondjes  $\circ\circ$ : hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;  
3 rondjes  $\circ\circ\circ$ : dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

## MEDEWERKERS

**dr. H.H.J.B.M. Alink** is docent wiskunde aan het Elzendaalcollege te Boxmeer. **drs. A.J. van den Brandhof** is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **Prof. dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **dr. C. Kraaikamp** is docent kansrekening aan de TU Delft. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **F. Roos** is docent natuurkunde te Tolbert. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

## COVER

Deze leerlingen van het Groene Hart Lyceum te Alphen aan de Rijn hebben allemaal een abonnement op Pythagoras. Op deze school zijn 70 leerlingen abonnee van Pythagoras.



Dit jaar brengt nogal wat veranderingen voor de organisatie Pythagoras met zich mee. Zo verhuisde met ingang van het vorige nummer het kopij- en correspondentieadres al naar de Vrije Universiteit. Met ingang van dit decembern timer heeft Pythagoras een aparte eindredacteur: Alex van den Brandhof, die voor zijn werkzaamheden als eindredacteur gesponsord wordt door de Vrije Universiteit. We wensen Alex veel succes!

1

|         |                                         |         |                                       |
|---------|-----------------------------------------|---------|---------------------------------------|
| 2 - 3   | <b>Kleine nootjes</b>                   | 25      | <b>Oplossingen</b>                    |
| 4 - 9   | <b>Pythagoras van Samos</b>             | 26 - 27 | <b>Pythagoras Olympiade</b>           |
| 10 - 14 | <b>Moorse kunst</b>                     | 28      | <b>De post</b>                        |
| 15      | <b>Vierkant en driehoek</b>             | 29      | <b>Oplossingen nr.1</b>               |
| 16 - 19 | <b>Het muizenvalbewijs van Euclides</b> | 30      | <b>Ringpuzzel</b>                     |
| 20 - 23 | <b>Het experiment van Buffon</b>        | 31      | <b>Nederlandse Wiskunde Olympiade</b> |
| 24      | <b>Problemen</b>                        | 32      | <b>Activiteiten</b>                   |

Kleine nootjes zijn  
eenvoudige opgaven  
die iedereen zonder enige  
wiskundige voorkennis kan  
oplossen.  
De antwoorden vind je in  
het volgende nummer  
van Pythagoras.

# Kleine nootjes

2

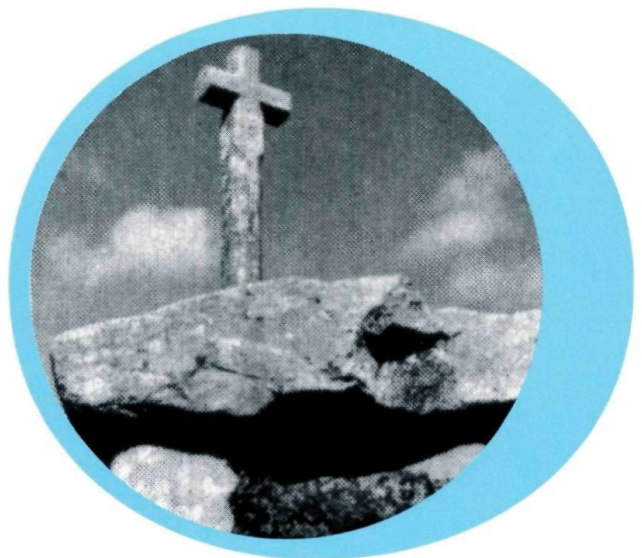


## Scheuren

Neem een krant en scheur hem doormidden. Leg de twee helften op elkaar en scheur die doormidden. Herhaal dit zo vaak mogelijk. Hoeveel keer lukt dit: hoogstens 10 keer, 11 of 12 keer of meer dan 12 keer?

## Grafsteen

Op een grafsteen van een dame staat te lezen dat zij een zesde van haar leven versleet als kind en een twaalfde als tiener. Een zevende van haar leven lag er tussen haar volwassenheid en haar trouwen; vijf jaar later werd haar dochter geboren, die vijf jaar eerder stierf dan zij. Zij werd twee keer zo oud als haar dochter. Hoe oud werd de vrouw?

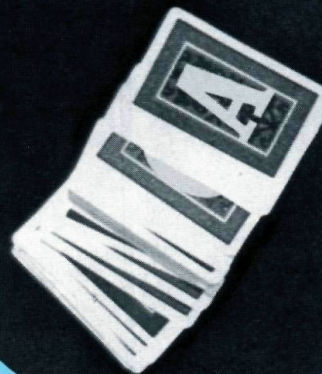




### Kaarten

Ik heb een pak kaarten met op de ene kant een letter en de andere kant een cijfer. De kaarten moeten voldoen aan een regel: als op de ene kant een klinker staat, moet op de andere kant een even getal staan.

Ik leg vier kaarten neer en zie het volgende: A, D, 9, 12. Welke kaarten moet ik omdraaien om te kijken of ze aan de regel voldoen?



### Kapper

Een handelsreiziger is op bezoek in een stad met slechts twee kapperswinkels. De ene winkel is netjes opgeruimd en de kapper is netjes geknipt. De andere winkel is niet opgeruimd en slordig, en de kapper is slecht geknipt. De handelsreiziger kiest de slordige kapper. Waarom?

### Gouden munten

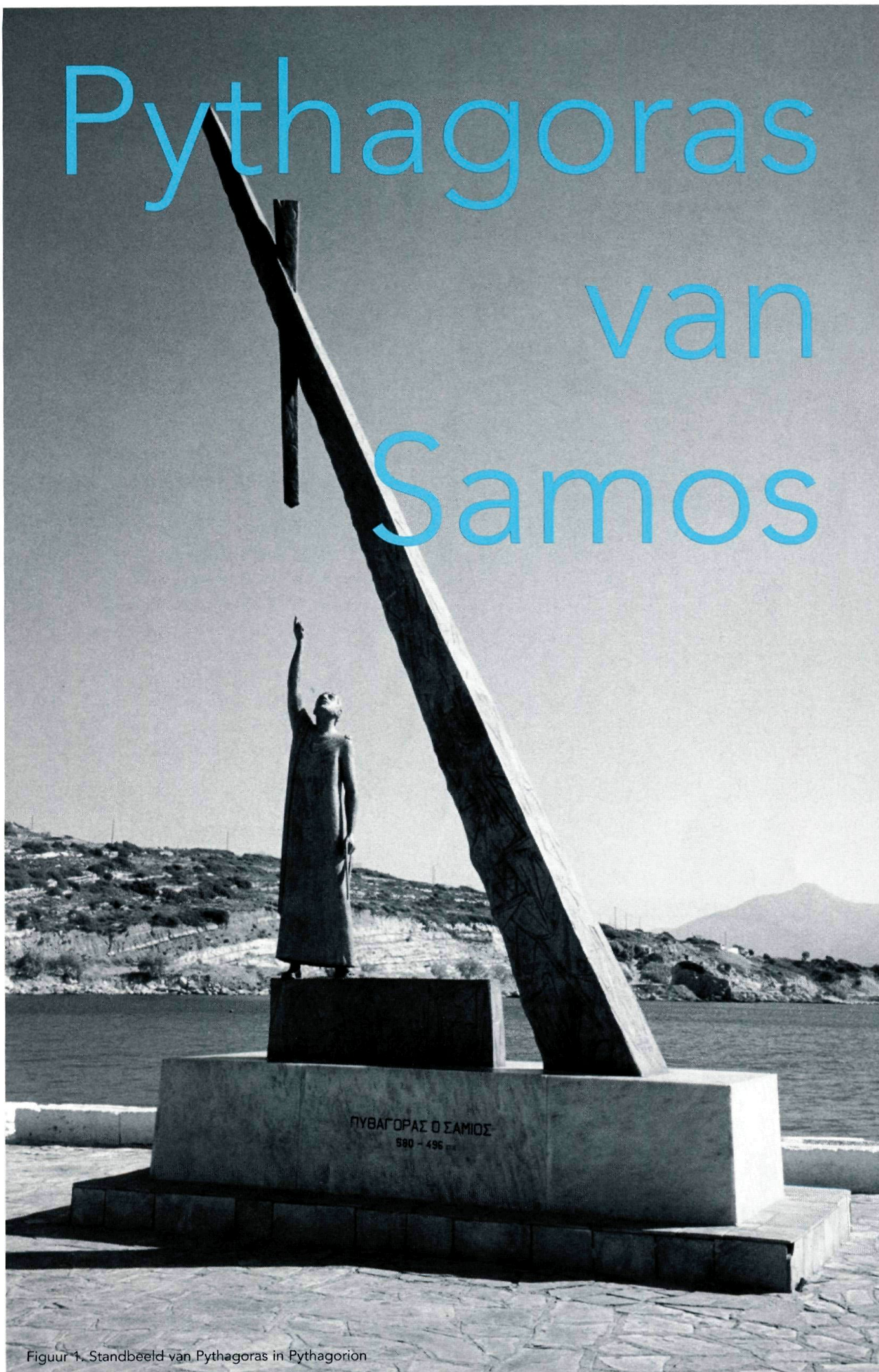
Mijn opa bewaart gouden munten in een oude sok. Hij wil echter niet dat bekend wordt hoeveel. Op een dag vroeg één van zijn kinderen hoeveel munten hij had. Hij zei: "Als ik de munten in 2 ongelijke hoeveelheden verdeel, dan is 25 keer het verschil tussen deze twee aantallen gelijk aan het verschil van de kwadraten." Hoeveel munten heeft mijn opa?





# Pythagoras van Samos

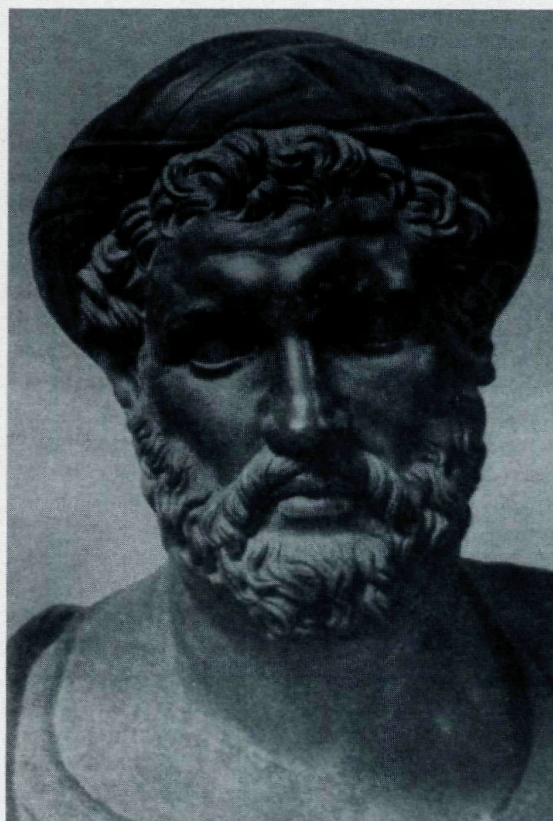
4



Figuur 1. Standbeeld van Pythagoras in Pythagorion



De Griek uit de oudheid, die in de wiskunde een zeer bijzondere plaats inneemt en waarnaar dit tijdschrift is vernoemd, is Pythagoras van Samos, doorgaans gewoon Pythagoras genoemd. Samos is een Grieks eiland gelegen in het oostelijk deel van de Egeïsche Zee. Een zee-engte van nog geen anderhalve kilometer scheidt het eiland van Turkije. Pythagoras leefde rond 550 voor Christus. Hij werd geboren in een plaats die tegenwoordig Pythagorion wordt genoemd en die gelegen is aan de zuidoostkust van het eiland. De schrijver van dit artikel heeft deze plaats bezocht en een foto gemaakt van het standbeeld, dat ter ere van Pythagoras op een der havenpielen is opgericht, zie figuur 1. Aan de voorzijde van de sokkel staat in Griekse hoofdletters zijn naam gegraveerd en daaronder is in de ons vertrouwde Arabische cijfers het tijdperk aangegeven waarin hij geleefd zou moeten hebben, namelijk van 580 tot 496.



Figuur 2. 'Man met tulband': mogelijk een sculptuur van Pythagoras

### Een wijs man

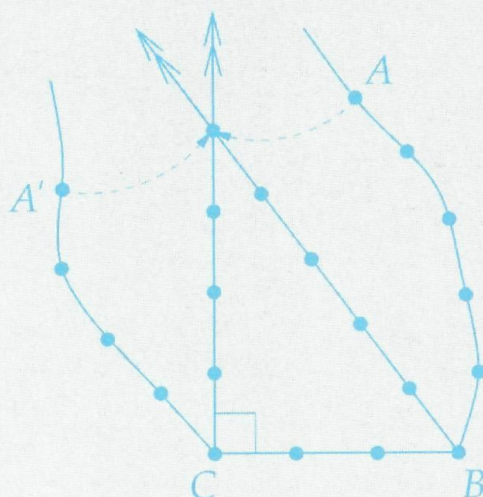
Pythagoras was niet onvermogen en kon daarom als ondernemende en weetgierige jongeman verre reizen maken door het Midden-Oosten teneinde oosterse wijsheid en kennis op te doen. Pythagoras moet toen ook het gebruik van de tulband geleerd hebben, een praktische hoofdbedekking voor de met zon overgoten gebieden. Het is niet ondenkbaar dat hij, na terugkeer in zijn moederland, deze hoofdbedekking bleef dragen. De in Griekenland gevonden sculptuur uit de periode 500-400 voor Christus, bekend als 'Man met tulband' (zie figuur 2), zou mogelijk een afbeelding van hem kunnen zijn, maar de noodzakelijke gegevens voor het bewijs ontbreken.

Pythagoras verbleef tijdens zijn verre reizen onder andere lange tijd in Egypte. Daar zag hij bij het maken van de bouwwerken de 'touwspanners' op de bouwterreinen bezig rechte hoeken te construeren. De uiteinden van een zeer lang stuk touw, waarin dertien knopen op gelijke onderlinge afstanden waren aangebracht, zie figuur 3, werden





Figuur 3. In een stuk touw worden dertien knopen op gelijke onderlinge afstanden aangebracht



Figuur 4. Van het stuk touw wordt een Egyptische driehoek gemaakt

6

door bepaalde priesters na het spannen van het touw bij de knopen  $B$  en  $C$  aan de grond gepend. Vervolgens werden de stukken  $BA$  en  $CA'$  zodanig gespannen, dat de knopen  $A$  en  $A'$  samenvielen, zie figuur 4. In dit punt  $A = A'$  werd dan een derde pen in de grond geslagen. De hoek tegenover de langste zijde is dan recht, omdat de verhouding van de afstanden tussen de drie pennen  $3 : 4 : 5$  is. Deze werkwijze is een praktische toepassing van de omgekeerde stelling van Pythagoras die zegt, dat als bij een driehoek het kwadraat van één der zijden gelijk is aan de som der kwadraten van de andere twee, de hoek tegenover die zijde recht is. Inderdaad is in ons geval  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Een driehoek met zijden waarvan de lengten zich verhouden als  $3 : 4 : 5$  wordt daarom soms ook wel de *Egyptische driehoek* genoemd. Men kent ook de *Indische driehoek*: hierbij verhouden de lengten van de zijden zich als  $5 : 12 : 13$ . De hoek tegenover de langste zijde is recht wegens  $5^2 + 12^2 = 13^2$ . Elke driehoek, waarvan de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  zich verhouden als gehele getallen en voldoen aan de betrekking  $a^2 + b^2 = c^2$ , heet een

*pythagoreïsche driehoek* en elk drietal positieve gehele getallen, dat aan die betrekking voldoet, een *pythagoreïsch drietal*. De drietallen  $3, 4, 5$  en  $5, 12, 13$  zijn daar voorbeelden van.

Teruggekomen richtte Pythagoras een 'school' op teneinde zijn verkregen kennis aan anderen over te dragen en uit te breiden. Zijn leerlingen of volgelingen vormden een hechte, wijsgerig ingestelde, religieuze broederschap en werden de pythagoreërs genoemd. De school was gevestigd in Kroton, het tegenwoordige Crotona, gelegen aan de Zuid-Italiaanse kust, maar na verloop van tijd breidde de orde der pythagoreërs zich uit over andere steden. De pythagoreërs beoefenden de getallenleer op een min of meer metafysische wijze. Bij hen was alles getal, dat wil zeggen: de wereld was volgens natuurlijke getallen geordend. Muziek, harmonie en getallen behoorden volgens de leer der pythagoreërs onverbreekbaar bij elkaar. Voor Pythagoras was de wereld één heerlijk kunstwerk en hij was de eerste die voor de wereld het woord 'kosmos' gebruikte, hetgeen in het toenmalige



ge Grieks 'sieraad' of 'kunstwerk' betekent. Een groot aantal leden leefde volgens strenge regels, was vegetariër en geloofde in de zielsverhuizing na de dood. De leringen waren grotendeels geheim en niemand mocht iets daarvan op schrift stellen. Aspirantleden moesten langdurig zwijgen en mochten niet alles van de kennis der ingewijden weten. Het gezag van Pythagoras was absoluut. De uitspraak 'Hijzelf heeft 't gezegd' sloot binnen de orde elke verdere discussie uit.

### **Volmaakt, bevriend en heilig**

De pythagoreërs erkenden alleen de gehele positieve getallen (de natuurlijke getallen), alsmede de daarvan afgeleide breuken. Zij kenden zogeheten 'volmaakte' of 'perfecte' getallen. Een getal heet volmaakt als het gelijk is aan de som van zijn echte delers (dus uitgezonderd het getal zelf). Zo is bijvoorbeeld 6 een volmaakt getal, omdat de som van de echte delers (1, 2 en 3) gelijk is aan 6. Een ander voorbeeld van een volmaakt getal is 28, want  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ . Zij kenden ook 'bevriende' getallen. Dat zijn twee verschillende getallen waarvan het ene gelijk is aan de som van de echte delers van het andere, en omgekeerd. Bevriende getallen zijn bijvoorbeeld 220 en 284, want de som van de echte delers van 220 is  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ , en die van 284 is  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ . Naast de volmaakte en bevriende getallen bestonden in de gedachtensfeer der pythagoreërs ook 'heilige' getallen. Het getal 10 was een hoogst heilig getal, het symbool van alle harmonie, dat zij 'tetraktys' noemden. Als men elkaar de hand geeft ten teken van vriendschap en trouw, zijn daar 10 vingers bij betrokken. Tijdens de gemeenschappelijke maaltijden zaten de pythagoreërs met z'n tienden aan elke tafel, en elk lid van de orde moest zich 10 jaar lang bezinnen op de tradities en het nakomen van de bestaande wetten binnen de orde, et cetera. Ook rekenkundig vonden zij het getal 10 diepzinnig, omdat het getal 10 verkregen kon worden door optelling van de vier eenvoudigste getallen:  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ .

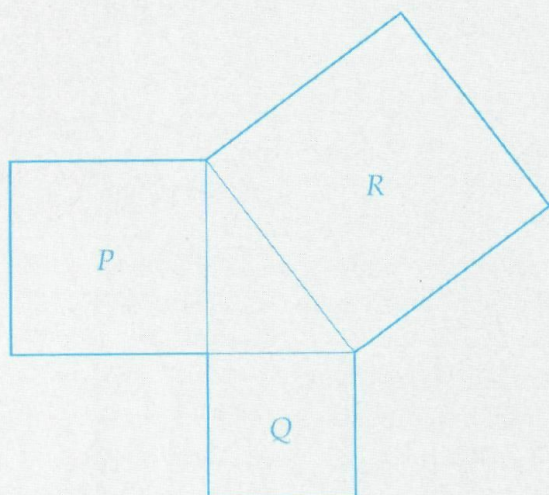
Zij kenden aan de muziek hoge waarde toe en ontdekten dat de hoofdintervallen bestonden uit verhoudingen die waren opgebouwd uit de vier eenvoudigste getallen: het octaaf (1 : 2), de kwint (2 : 3) en de kwart (3 : 4). Kortom, het getal 10 was heilig en zelfs heiliger dan de eed der pythagoreërs zelve. Een ander uitermate heilig getal was 36, vermoedelijk wegens zijn bijna verbluffende rekenkundige eigenschappen:  $36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ . Het aantal termen bedraagt hier het dubbele van het aantal begingetallen waaruit het heilige getal 10 als som is opgebouwd!

Verder is  $36 = (1 + 2 + 3)^2$ ,  $36 = (1 \times 2 \times 3)^2$ ,  $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$  en  $36 = 6 \times 6$ : het kwadraat van het kleinste volmaakte getal! Ook geldt  $36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$  en dat is de som van de eerste 6 (weer een volmaakt getal!) oneven getallen. Ook de vinger naast de pink van de rechterhand was een heel bijzondere. Die vinger is immers de vierde van de rechterhand en de negende van beide handen, en  $4 \times 9 = 36$ . Aan die vinger dient dan ook het symbool van innige verbondenheid, de ring, gedragen te worden. De rechthoekige Poseidontempel, die in Paestum nabij het hoofdkwartier Crotona is gebouwd, heeft aan elke korte zijde 6 en aan elke lange zijde 14 zuilen, dus in totaal  $2 \times 6 + 2 \times 14 - 4 = 36$  zuilen, en dat aantal heeft kennelijk met de heiligheid van het getal 36 te maken. Worden de heilige getallen 10 en 36 met elkaar vermenigvuldigd, dan krijgt men 360 en dat is juist het aantal graden van de hoek, die het hele platte vlak omvat. De pythagoreërs kenden voor het getal 36 nog meer merkwaardige eigenschappen, maar we zullen het bij de hier genoemde laten.

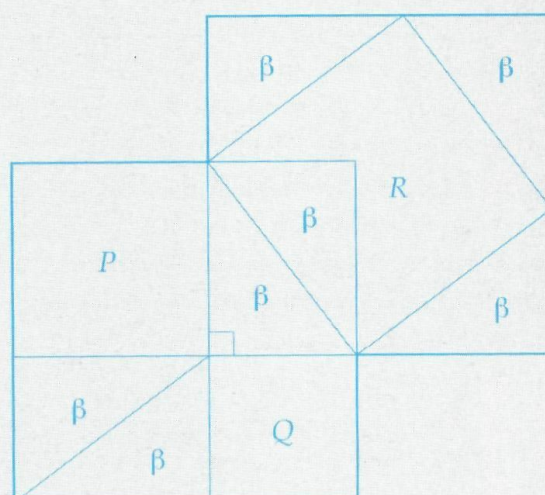
### **De stelling van Pythagoras**

De beroemde stelling van Pythagoras was reeds 2000 jaar voor Christus bij de Babyloniërs bekend. Deze luidt: de oppervlakte van het vierkant beschreven op de hypotenusa van een rechthoekige driehoek is gelijk aan de som der oppervlakten van de vierkanten beschreven op de andere zijden. In figuur 5 is dus volgens deze stelling  $P + Q = R$ .





Figuur 5. De stelling van Pythagoras:  $P + Q = R$



Figuur 6. Een bewijs van Multatuli

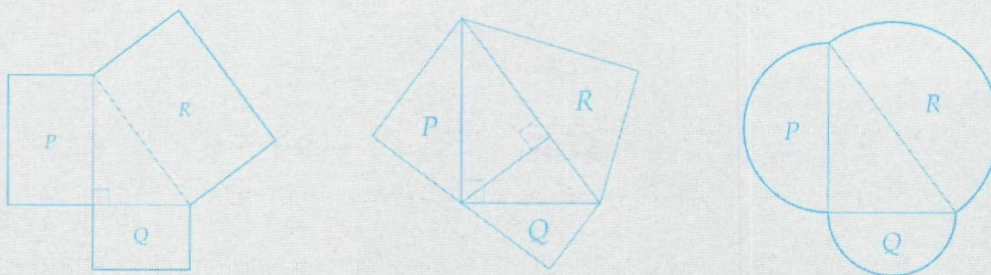
8

In boek 1 van de dertien *Elementen* van de grote Griekse didacticus en wiskundige Eukleides (circa 300 voor Christus), doorgaans aangeduid met de gelatiniseerde naam Euclides, vindt men het oudst bekende bewijs, zie het artikel *Het muizenvalbewijs van Euclides* op pagina 16. Het bewijs van Euclides berust, zoals de meeste andere oude bewijzen, op het vergelijken van oppervlakten. Er zijn in de loop des tijds tientallen bewijzen van de stelling van Pythagoras gepubliceerd. Natuurlijk mogen daarbij geen stellingen gebruikt worden die zelf met behulp van de stelling van Pythagoras zijn afgeleid. Het originele bewijs van de bekende Nederlander Multatuli, alias Eduard Douwes Dekker (1820-1887), is echter bij weinigen bekend. Daarom hier zijn bewijsvoering. Multatuli vulde de basisfiguur aan met rechthoekige driehoeken die congruent zijn met de gegeven rechthoekige driehoek en dus alle de oppervlakte  $\beta$  van de gegeven rechthoekige driehoek bezitten, zie figuur 6. Er ontstaan dan twee congruente vierkanten die elkaar gedeeltelijk overlappen. De oppervlakte van elk der beide vierkanten is gelijk, dus  $P + Q + 4\beta = R + 4\beta$ , waaruit onmiddellijk volgt dat  $P + Q = R$ .

### Variaties

Maar er is meer. Als wij van de vierkanten de zijden loodrecht op die van de driehoek met een zekere factor  $p \neq 1$  vermenigvuldigen, ontstaan op de zijden van de driehoek gelijkvormige rechthoeken waarvoor óók geldt  $P + Q = R$ , want uit  $a^2 + b^2 = c^2$  volgt dat  $a \cdot pa + b \cdot pb = c \cdot pc$ . In figuur 7 (links) is  $p = \frac{2}{3}$ . Als wij uit de rechte hoek van de rechthoekige driehoek de hoogtelijn trekken op de hypotenusa, ontstaan twee driehoekjes die gelijkvormig zijn met de gegeven driehoek, zie figuur 7 (midden). Spiegelen we de gegeven driehoek ten opzichte van de hypotenusa en de twee gelijkvormige driehoekjes ten opzichte van de rechthoeks zijden, dan ziet men onmiddellijk in dat ook hier geldt  $P + Q = R$ . Voor drie halve cirkels met middellijnen de hypotenusa en de rechthoeks zijden geldt eveneens  $P + Q = R$ . Wij hebben daartoe slechts de betrekking  $a^2 + b^2 = c^2$  met  $\frac{1}{8}\pi$  te vermenigvuldigen om dit in te zien, zie figuur 7 (rechts). De stelling van Pythagoras is blijkbaar uit te breiden tot de volgende: worden op de hypotenusa en de rechthoeks zijden gelijkvormige oppervlaktefiguren beschreven, dan geldt  $P + Q = R$ . Het algemene bewijs laten we achterwege.





Figuur 7. Links zijn gelijkvormige rechthoeken op de drie zijden van de rechthoekige driehoek geplaatst, in het midden gelijkvormige driehoeken, en rechts halve cirkels. Ook in al deze gevallen geldt  $P + Q = R$ .

### Verdrinkingsdood

De beoefening van de meetkunde was bij de pythagoreërs uitermate stiefmoederlijk bedeed. Er ontstonden problemen met de irrationale wortels. Als van een rechthoekige driehoek de rechthoekszijden bijvoorbeeld 1 zijn, dan is de hypotenusa  $\sqrt{2}$  en dat is een irrationaal getal (een irrationaal getal is een reëel getal dat niet als breuk kan worden geschreven). Het verhaal wil dat kort na de dood van Pythagoras een zekere leerling, Hippasos (gelatiniseerd Hippasus) geheten, na ampele overwegingen tot de conclusie kwam, dat  $\sqrt{2}$  geen breuk kon zijn en derhalve een ander soort getal was dan de tot dan toe bekende getallen. Deze bewering en andere revolutionaire ideeën van Hippasus druisten zo zeer in tegen de heersende opvattingen en diepste gevoelens van de pythagoreërs, dat hij wegens heiligschennis als straf tot de verdrinkingsdood werd veroordeeld. Misschien had hij zijn leven nog kunnen redden als hij had kunnen aantonen dat  $\sqrt{2}$  te schrijven is als een gedurige breuk (kettingbreuk), namelijk:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\text{enz.}}}}$$

### Kettingbreuk

Waarom is  $\sqrt{2}$  te schrijven als een kettingbreuk? Wel, schrijf

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\text{enz.}}}} = x.$$

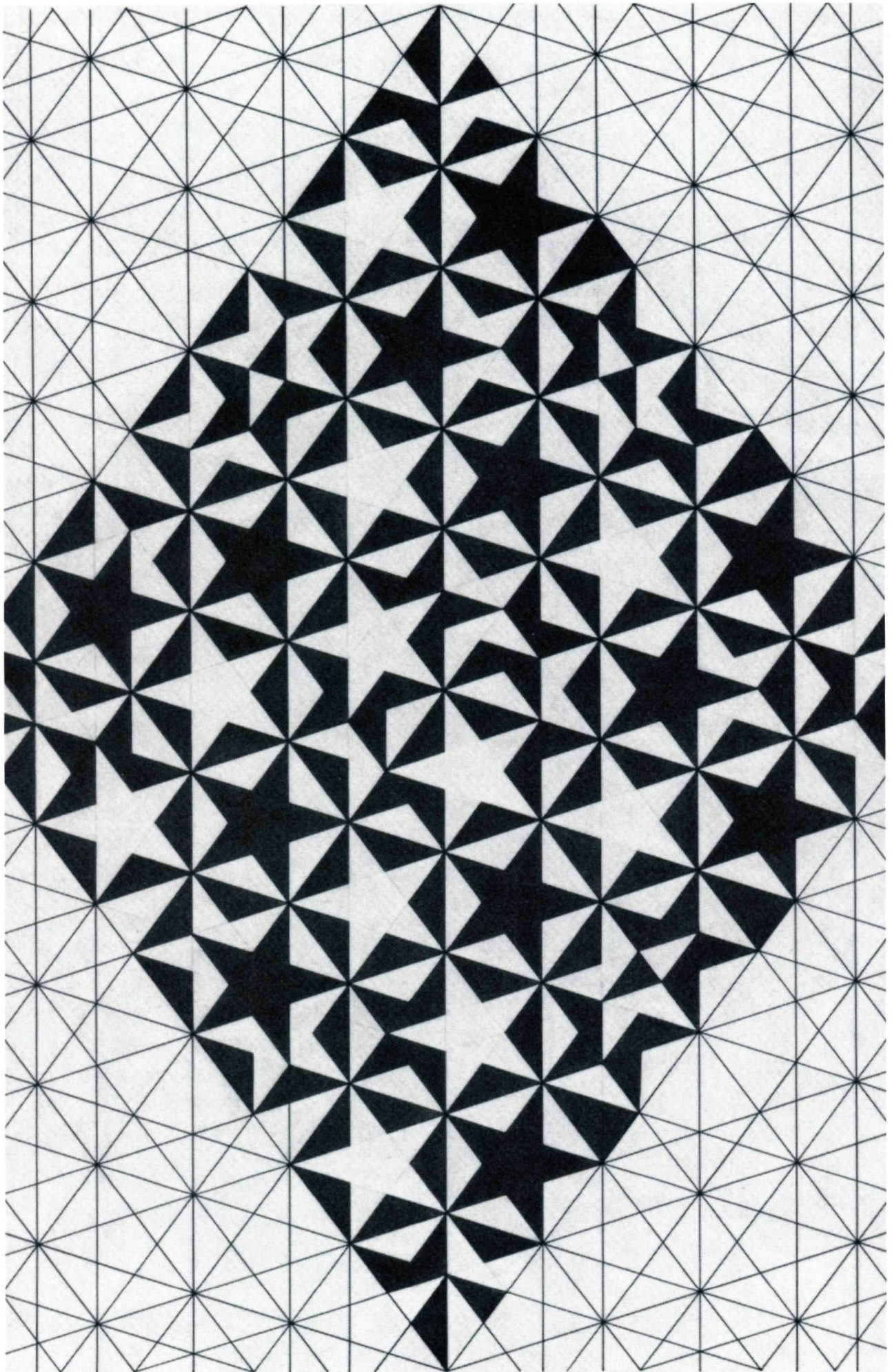
Dan geldt:  $x = 2 + \frac{1}{x}$ , ofwel  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . Deze tweedegraads vergelijking heeft  $1 - \sqrt{2}$  en  $1 + \sqrt{2}$  als oplossing. Omdat  $x$  groter dan 2 is, geldt dat  $x$  gelijk moet zijn aan  $1 + \sqrt{2}$ .

### Waarom 'de stelling van Pythagoras'?

Pythagoras zelf heeft zijn kennis van wetenschappelijke aard nooit opgeschreven, zodat vrijwel niets bekend is over zijn bijdrage tot de wetenschap in het algemeen en die tot de wiskunde in het bijzonder. De eerste pythagoreërs stelden ook niets op schrift. De hier vermelde rekenkundige eigenschappen ontleen we dan ook aan de latere pythagoreërs die wel hun kennis buiten de orde mochten uitdragen, en aan Euclides die hun getallenleer in enige boeken van zijn *Elementen* heeft opgenomen. Maar waarom dan wordt de stelling van Pythagoras hem toegeschreven en is die stelling te zijner ere genoemd? Heeft hij die stelling herontdekt? Heeft hij die stelling aan zijn volgelingen bekend gemaakt? Heeft hij die stelling (voor het eerst) bewezen? Heeft hij die stelling uitgebreid? Op al deze vragen kan geen antwoord gegeven worden. Toch schijnt niemand er bezwaar tegen te hebben deze beroemde stelling naar Pythagoras te noemen.

De auteur is in augustus van dit jaar overleden.







door Jan van de Craats

# M rse kunst

De Gulden Snede  
deel II

11

Gedurende de late Middeleeuwen was het grootste deel van Spanje en Portugal onder Moorse heerschappij, en ook nu nog zijn er veel overblijfselen van de oude Islamitische cultuur in Spanje te bewonderen. Zo zijn de oude Moorse paleizen in het Alhambra in Granada en in het Alcázar in Sevilla grotendeels intact bewaard gebleven. Voor iedereen met enig gevoel voor meetkunde zijn het ware schatkamers vanwege de prachtige ornamenten en tegelpatronen waar ze mee versierd zijn. De graficus M.C. Escher is er meerdere malen op bezoek geweest; de Moorse kunst was voor hem een belangrijke inspiratiebron.

## Tegelpatronen

In het paleis dat Koning Don Pedro van Castilië tussen 1364 en 1366 door Moorse architecten in het Alcázar in Sevilla liet bouwen, bevindt zich in een portaal tussen een patio en een ontvangstzaal een tegelpatroon dat wonderwel past in onze gulden-snedeserie. In figuur 1 zie je er een foto van. Zo'n zwart-witfoto is maar een magere afspiegeling van de werkelijkheid: in het echt zijn het witte stroken op een donkerblauwe achtergrond met daarin zwarte sterren, en ook mis je de sfeer van een koel paleis vol oosterse pracht in het zonnige Zuid-Spaanse klimaat. Het patroon is op het

Linkerpagina: **Figuur 9.** Gerard Caris, PC 24, 1995 (Oostindische inkt en Siberisch krijt op papier)



eerste gezicht weinig opvallend: haast iedereen loopt er gedachteloos aan voorbij. Maar als je goed kijkt, zie je dat de sterren tien punten hebben - een grote zeldzaamheid bij dit soort Arabische patronen. Meestal tellen de sterren daarin namelijk zes, acht, twaalf, zestien of vierentwintig punten.

Als je nog wat beter kijkt, zie je dat het eigenlijk twee pentagrammen (vijfpuntige sterren) door elkaar zijn, en dat er nog een wirwar aan kleine pentagrammen tussendoor gestrooid is. Opvallend zijn verder de grote zwarte afgesneden sterren aan de rand. We zullen laten zien dat de gulden snede in dit tegelpatroon een allesoverheersende rol speelt.

### De gulden snede

In de vorige Pythagoras hebben we de gulden-snedeverhouding gedefinieerd als de verhouding tussen de lengte van de diagonaal en de zijde van het pentagon (de regelmatige vijfhoek). Bijvoorbeeld  $DB : EA$  in figuur 2. Het bijbehorende verhoudingsgetal hebben we  $\tau$  genoemd. Wanneer de zijden van het pentagon lengte 1 hebben, hebben de diagonalen dus lengte  $\tau$ .

Op nog veel meer plaatsen in figuur 2 komt de gulden-snedeverhouding voor, bijvoorbeeld als  $DT : TB$  of als  $DP : PT$ . Omdat  $DT = EA = 1$ , geldt dat  $TB = 1/\tau$ . Wegens  $DT + TB = DB = \tau$  hebben we dus

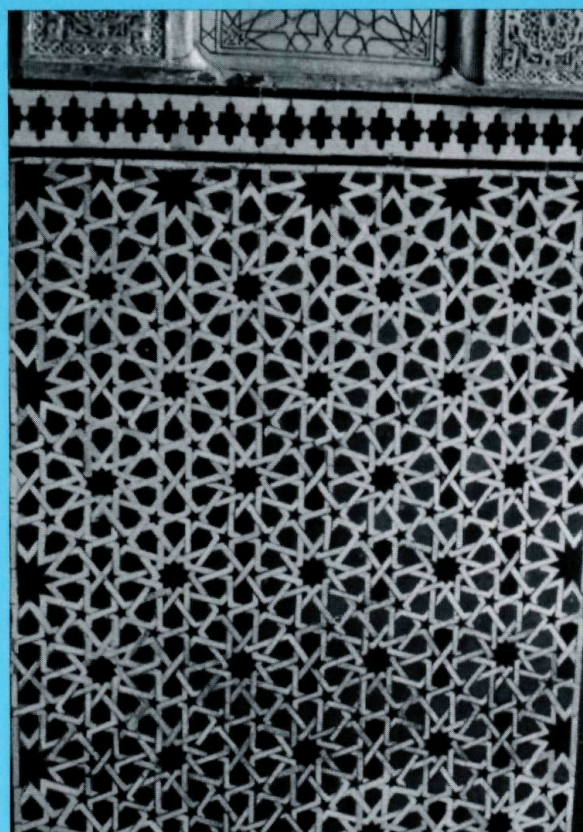
$$1 + \frac{1}{\tau} = \tau,$$

met andere woorden,  $\tau + 1 = \tau^2$ , waaruit volgt dat  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803\dots$

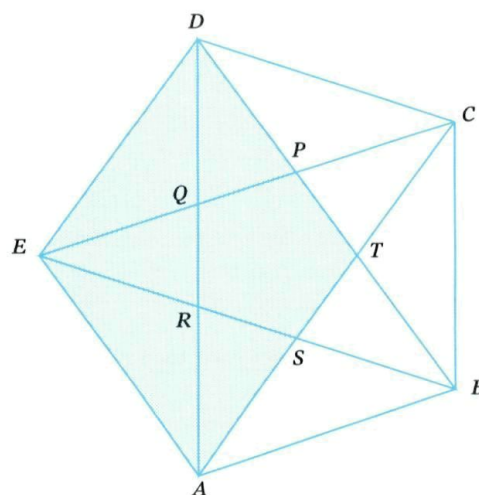
Bij de analyse van figuur 1 zullen ruiten als  $ATDE$  in figuur 2 de hoofdrol spelen. Ze hebben hoeken van  $72^\circ$  en  $108^\circ$ .

### Een vereenvoudigd patroon

Waar pentagrammen zijn, is de gulden snede. Ook in figuur 1 vind je die terug. Voor een eerste verkenning hebben we het patroon wat vereenvoudigd. De witte banden vormen in werkelijkheid een ingewikkeld vlechtwerk, maar nu nemen we even aan dat het doorlopende rechte lijnen zijn. Verder hebben we de

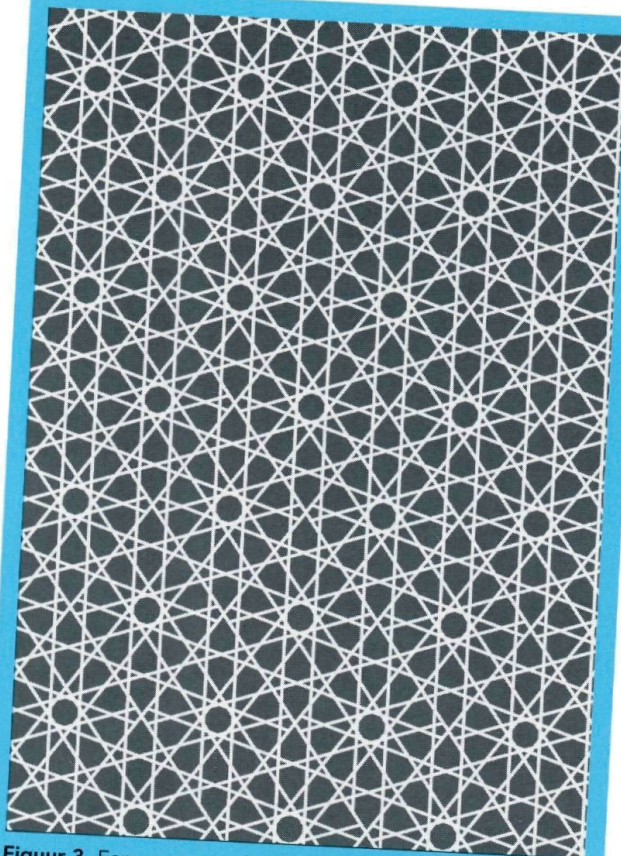


Figuur 1. Een Moors tegelpatroon in het Alcázar in Sevilla

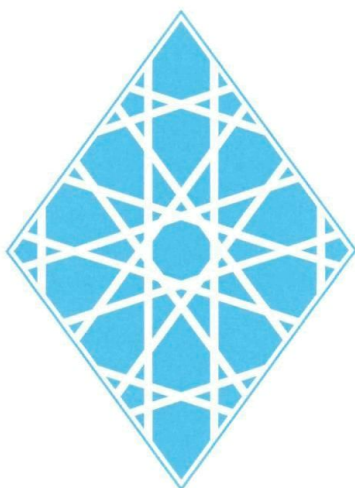


Figuur 2. De ruit  $ATDE$  in het pentagon  $ABCDE$





**Figuur 3.** Een vereenvoudigde weergave van het Moorse tegelpatroon



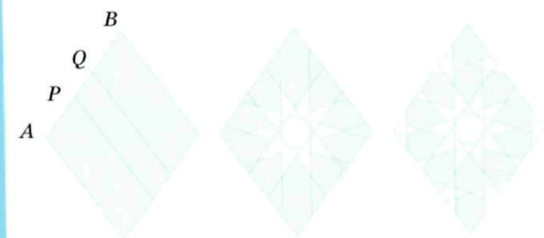
**Figuur 4.** Een ruit als bouwsteen voor figuur 3

grote sterren aan de rand door 'normale' exemplaren vervangen. Zo kregen we figuur 3. Hoe zit die in elkaar? De donker gekleurde ruit in figuur 2 geeft de sleutel tot de oplossing, want rondom elke tienpuntige ster blijkt zo'n ruit als basisvorm aanwezig te zijn.

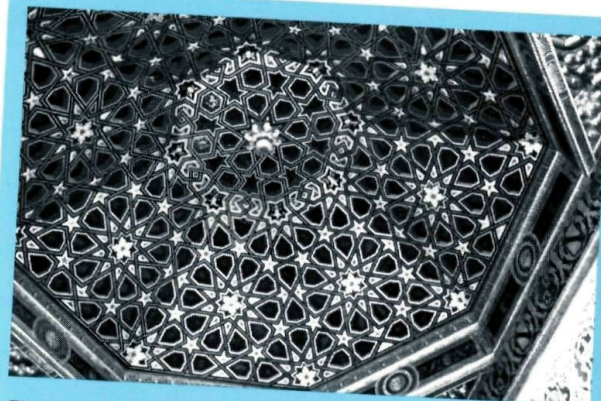
We hebben in figuur 4 zo'n ruit apart getekend. Als je zulke ruiten als wandtegels tegen elkaar plaatst, krijg je het gehele patroon. In het midden van figuur 4 zie je vijf paren evenwijdige lijnen die samen de tienpuntige ster vormen. Verder bevinden zich bij de punten nog in totaal zes extra lijnen, die samen met de randen van de ruit een regelmatige tienhoek insluiten. Maar in figuur 3 zie je dat die zes extra lijnen precies in het verlengde liggen van corresponderende 'centrale' lijnen van de aangrenzende ruiten. Hoe moeten we de lijnen in de ruit plaatsen om dit voor elkaar te krijgen? Alles wordt bepaald door de plaats van het lijnenpaar in de linkerruit van figuur 5. Daarmee liggen dan ook de lijnen in de middelste ruit vast, en als de keuze in de linkerruit goed is geweest, dan klopt de rechterruit ook automatisch.

Het is niet eens zo'n eenvoudige opgave om na te gaan dat de correcte ligging van het eerste paar lijnen weer helemaal door de gulden snede bepaald wordt. Er geldt namelijk  $AP : PQ : QB = \tau : 1 : \tau$ . Aan het einde van dit artikel geven we er een bewijs van. Figuur 6 laat zien welk patroon ontstaat als je de aldus geconstrueerde tegels aan elkaar legt. De overeenkomst met het Moorse patroon is duidelijk, maar het is ook de moeite waard om nog even naar de verschillen te kijken. Hoe lopen de witte stroken in figuur 1 precies onder elkaar door en over elkaar heen? Ook daar zit regelmaat in. En hoe zijn de grote zwarte sterren aan de rand precies gevormd? Hoe zijn de afmetingen van het gehele paneel op die van de kleine ruiten afgestemd? En waar lopen de randlijnen van het patroon precies? Hoe meer je je in zo'n patroon verdiept, des te meer bewondering krijg je voor de ontwerper ervan en zijn kennis van de meetkunde.





**Figuur 5.** Links het lijnenpaar in de ruit, in het midden de tienpuntige ster die ontstaat door dit paar nog vier maal te draaien over  $72^\circ$ , en rechts de volledig gevulde ruit. Er geldt  $AP : PQ : QB = \tau : 1 : \tau$



**Figuur 7.** Het plafond van een vertrek in het Alcázar

### Vragen en opdrachten

1. Elke tienpuntige ster wordt omgeven door een krans van tien kleine pentagrammen. Twee ervan zijn echter verminkt: ze hebben afgesneden punten. Wat voor figuur krijg je als je die punten toch tekent?
2. De tienpuntige ster bestaat uit twee grote pentagrammen die door elkaar heen getekend zijn. Wat is de verhouding tussen de lengte van de zijden van zo'n groot pentagram en die van de kleine pentagrammen eromheen?
3. In hetzelfde paleis in het Alcázar in Sevilla bevindt zich een klein vierkant vertrek met een koepelvormig plafond waarvan je in figuur 7 een foto ziet. Wat zijn de overeenkomsten tussen het daar gebruikte patroon en het Moorse tegelpatroon in figuur 1?

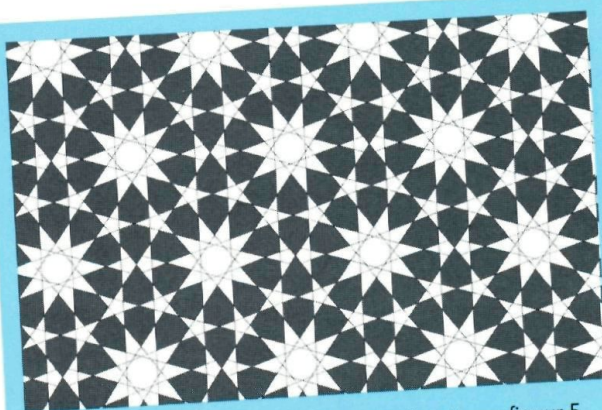
### Een kijkbewijs

Voor de ruit in figuur 5 geldt  $AP : PQ : QB = \tau : 1 : \tau$ . Om dit te laten zien, hebben we in

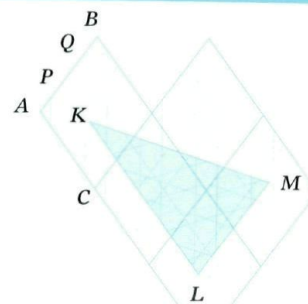
figuur 8 een grote driehoek  $KLM$  donker gekleurd. Als je er even wat langer naar kijkt, zie je dat deze driehoek gelijkvormig is met driehoek  $BCE$  in figuur 2: het is een gelijkbenige driehoek met een tophoek van  $36^\circ$ . De zijden ervan hebben dus de gulden-snedeverhouding. Verder zie je ook dat  $KL = 2 \times AC = 2 \times AB$  en  $LM = 2 \times PB$ , en dus is  $AB : PB = KL : LM = \tau : 1$ . Als  $AB = \tau$ , dan is  $PB = 1$  en  $AP = QB = \tau - 1 = 1/\tau$  en  $PQ = 1 - 1/\tau = 1/\tau^2$ , zodat inderdaad geldt dat  $AP : PQ : QB = \tau : 1 : \tau$ .

### Een tekening van Gerard Caris

De Maastrichtse kunstenaar Gerard Caris heeft veel werk gemaakt waaraan net zulke ruiten en gulden-snedeverhoudingen ten grondslag liggen als aan het Moorse tegelpatroon. We laten in figuur 9 (zie pagina 10) een tekening zien waarin regelmaat en vrije fantasie met elkaar lijken te wedijveren.



**Figuur 6.** De vlakvulling die met de derde ruit van figuur 5 gemaakt kan worden



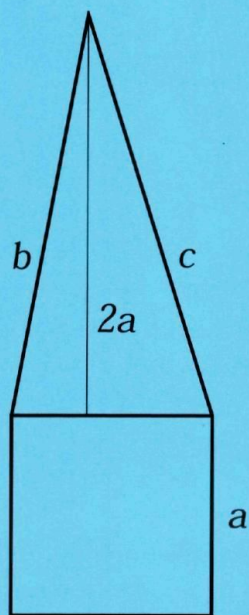
**Figuur 8.** Een kijkbewijs voor  $AP : PQ : QB = \tau : 1 : \tau$



door Frank Roos

# Vierkant en driehoek

Bovenop een vierkant wordt een driehoek getekend zoals in figuur 1. De basis van de driehoek is de bovenste zijde  $a$  van het vierkant. Als ik wil, dat de oppervlakte van de driehoek even groot is als de oppervlakte van het vierkant, dan moet de hoogte van de driehoek  $2a$  zijn.

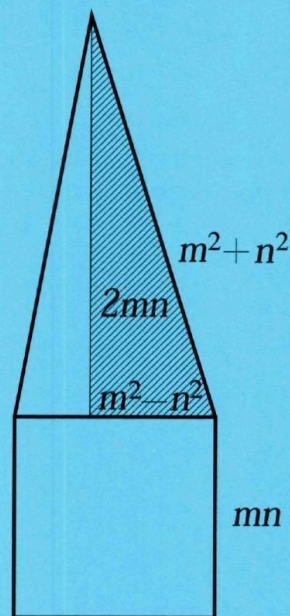


Figuur 1. Vierkant en driehoek hebben dezelfde oppervlakte:  $a^2$ . Is het mogelijk een dergelijk 'huisje' te vinden, waarbij de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  allemaal geheel zijn?

Ik ben gek op gehele getallen en ik vroeg me af, of het mogelijk is de zijden van bovengenoemde driehoek geheeltallig te kiezen, ervan uitgaande, dat  $a$  een geheel getal is.

Ik herinnerde mij de bekende Pythagoras-driehoek, die mij gehele-getallen-voorbeelden voorschotelde, als ik voor  $m$  en  $n$  gehele getallen koos ( $m > n$ ), zie de gearceerde driehoek in figuur 2.

Dat inspireerde mij om  $a$  te vervangen door  $mn$ . De andere vervangingen zijn dan duidelijk. Met  $m$  en  $n$  geheeltallig, zijn de zijden  $a$  en  $c$  in figuur 1 geheeltallig. Maar de derde zijde van de driehoek,  $b$  in figuur 1, bleef voor mij ongrijpbaar.



Figuur 2. De gearceerde figuur is een Pythagorasdriehoek, waarbij alle drie de zijden geheel zijn als  $m$  en  $n$  geheel zijn. In dit 'huisje' zijn dus  $a = mn$  en  $c = m^2 + n^2$  geheel.

Met een computerprogramma heb ik geprobeerd een geschikt voorbeeld te vinden. Onder de honderdduizenden pogingen was er geen één die voldeed.

## Vragen

Ik bleef met de volgende vragen zitten. Heb ik mijn computer niet voldoende laten zoeken? Is het eigenlijk wel mogelijk dat het vierkant en de driehoek met gelijke oppervlakken alle zijden geheeltallig hebben? Zo nee, is er dan een knappe kop die mij kan uitleggen waarom niet?



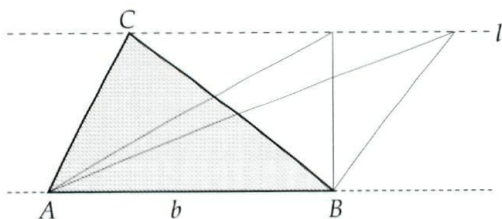
# Het muize van

door Bruno Ernst



16

Het eerste bewijs van de stelling van Pythagoras waarvan wij met zekerheid de auteur kennen is dat van Euclides (circa 300 voor Christus). In zijn 'wiskundeboek voor beginners' - nu bekend onder de naam: *De Elementen van Euclides* - is het stelling 47 van het eerste boek. Het is een interessant bewijs en vraagt een minimum aan voorafgaande wiskundige begrippen en stellingen. Euclides gebruikt alleen de congruentie van driehoeken en de stelling dat driehoeken met gelijke basis en hoogte dezelfde oppervlakte hebben, zie figuur 1.



Figuur 1. Als punt  $C$  over lijn  $l$  beweegt, verandert de oppervlakte van driehoek  $ABC$  niet

## Het principe

Als we een lijn  $l$  door  $C$  evenwijdig aan de basis  $b$  van driehoek  $ABC$  trekken, hebben alle driehoeken met basis  $b$  waarvan de top op  $l$  ligt dezelfde oppervlakte als driehoek  $ABC$ . Dat verschuiven van de top van een driehoek komt in het bewijs van Euclides enige malen voor.

## Schopenhauer

Het bewijs is beslist niet het eenvoudigste dat we kennen, maar wie alleen een gemakkelijk bewijs wil hebben om daarna verder door de stof te racen, heeft geen plezier in het spel met figuren. Hij is dan nog in goed gezelschap ook: de grote Duitse filosoof Arthur Schopenhauer geeft in zijn dissertatie uit 1813 lucht aan zijn afkeer voor het bewijs van Euclides. Daarin schrijft hij: 'Bij het bewijs van de stelling van Pythagoras worden lijnen getrokken zonder dat men weet waarom.' Volgens Schopenhauer moet



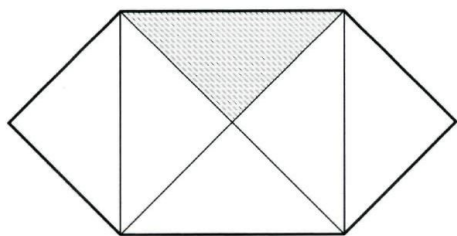
# nvalbewijs

# Euclides

## Bewijzen van de stelling van Pythagoras, deel II

17

het veel eenvoudiger kunnen en hij geeft als voorbeeld figuur 2, waarin voor het speciale geval van een rechthoekig-gelijkbenige driehoek zonder enige redenering te zien is dat daar de stelling van Pythagoras waar is, '... en dat overtuigt twintig maal meer dan het Euclidische muizenvalbewijs.'



Figuur 2. In een rechthoekig-gelijkbenige driehoek is de juistheid van de stelling van Pythagoras eenvoudig te zien

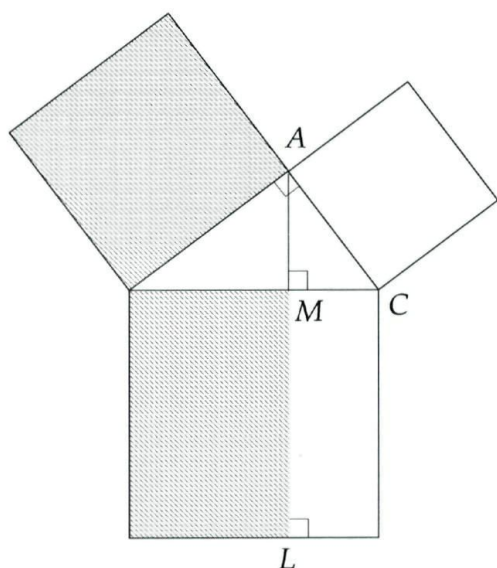
Natuurlijk beseft Schopenhauer ook wel dat het hier om een speciaal geval gaat, maar hij merkt er bij op dat zo'n aanschouwelijk bewijs ook voor een willekeurige rechthoe-

kige driehoek gevonden moet worden. Schopenhauers aversie tegen hulplijnen, waarvan hij denkt dat ze zomaar uit de lucht komen vallen, is niet terecht. Wie zich wat langer met een meetkundige figuur wil bezighouden, beleeft juist plezier aan het vinden van hulplijnen die nieuwe relaties aan het licht brengen. Ze komen beslist niet uit de lucht vallen, maar zijn het gevolg van het langzaam doordringen in de eigenschappen van de figuur.

### Hulplijn

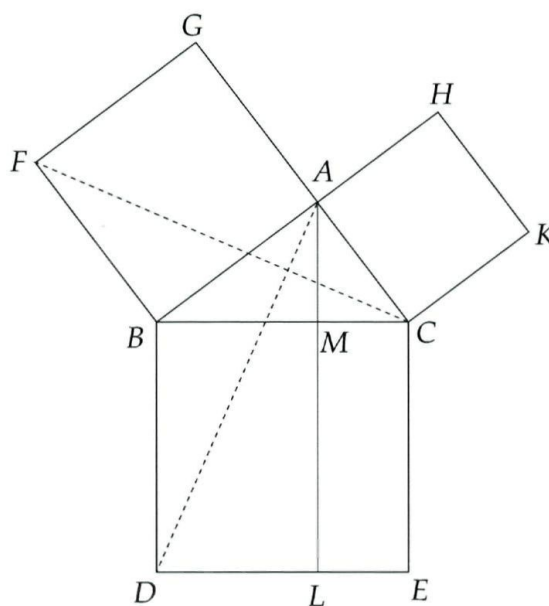
De belangrijkste hulplijn in het bewijs is de loodlijn *AML* vanuit de rechte hoek op de schuine zijde. Het vierkant op de schuine zijde wordt daardoor verdeeld in twee rechthoeken, zie figuur 3. Nu bewijst Euclides dat de oppervlakte van de linker zijde gelijk is aan de oppervlakte van het linker vierkant en evenzo de oppervlakte van de rechter rechthoek aan die van het





Figuur 3

rechter vierkant. Daar volgt dan uit dat de oppervlakte van de twee kleine vierkanten samen gelijk is aan die van het grootste vierkant. Daarmee is de stelling van Pythagoras bewezen.



Figuur 4

Kort samengevat:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \text{opp. vierkant } BFGH \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{opp. rechthoek } BDLM, \end{aligned}$$

dus de hele oppervlakte van het linker vierkant is gelijk aan de hele oppervlakte van de linker rechthoek.

Op dezelfde manier bewijzen we dat de oppervlakte van het rechter vierkant gelijk is aan de oppervlakte van de rechter rechthoek. Daarvoor moeten we wel twee nieuwe hulplijnen trekken, zoals in figuur 5.

Tellen we de resultaten bij elkaar op, dan volgt daaruit de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} \text{opp. } BFGA &= \text{opp. } BDLM \\ \text{opp. } CKHA &= \text{opp. } CELM \end{aligned}$$

---


$$\text{opp. } BFGA + \text{opp. } CKHA = \text{opp. } BCED$$

### Opmerkingen

**1.** Het is duidelijk dat de stelling én een goed bewijs al lang bekend waren. Dit wordt ook door historisch onderzoek bevestigd. Verder blijkt dat Euclides met dit bewijs de stelling vóór in zijn *Elementen* wilde inpassen zodra hij de daarvoor nodige stellingen bewezen had. Als hij Pythagoras geplaatst had na invoering van de gelijk-

### Het muizenvalbewijs

We moeten aantonen dat de oppervlakte van vierkant  $BFGA$  gelijk is aan de oppervlakte van rechthoek  $BDLM$ , zie figuur 4. Dit bewijs wakte bij Schopenhauer en bij veel leerlingen ergernis op (zie ook de opmerkingen aan het eind).

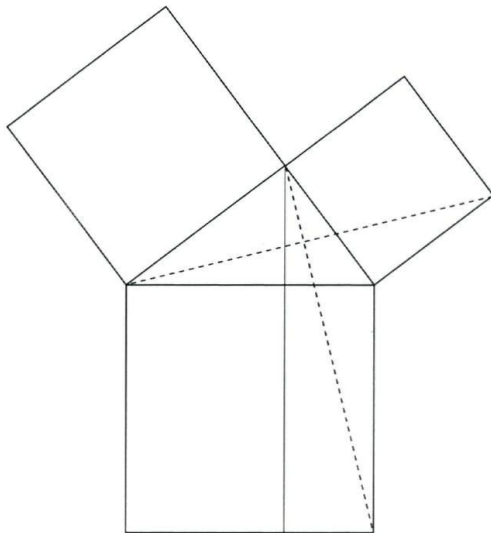
We trekken de hulplijnen  $CF$  en  $AD$ , zoals in figuur 4.

Bekijken we de twee stomphoekige driehoeken die daardoor ontstaan, dan blijken deze congruent te zijn: de stompe hoeken zijn beide gelijk aan hoek  $B$  van de rechthoekige driehoek plus  $90^\circ$  en verder is  $BF = BA$  en  $BD = BC$ .

Nu gaan we schuiven met de toppen van beide driehoeken. We beschouwen  $BF$  als basis van de bovenste driehoek en  $BD$  als basis van de onderste. Schuiven we  $C$  naar  $A$ , dan blijft de oppervlakte van de bovenste driehoek gelijk. Deze is nu gelijk aan die van het halve linker vierkant.

Zo schuiven we ook  $A$  naar  $M$ . De oppervlakte van de nieuwe onderste driehoek is dan gelijk aan de oppervlakte van de halve rechthoek  $BDLM$ .





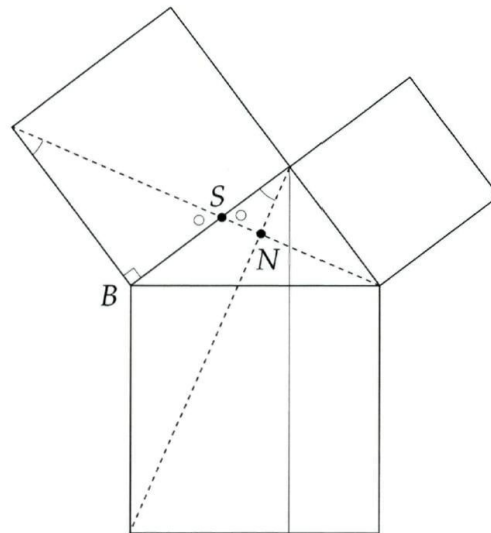
Figuur 5

vormigheid van driehoeken, had hij met een veel simpeler ogend bewijs kunnen volstaan.

2. Hoewel het bewijs in twee vrijwel identieke delen uiteenvalt, kunnen we bij het bewijs van het linkerdeel toch het rechterdeel niet missen: we moeten punt *C* in figuur 4 erbij betrekken.

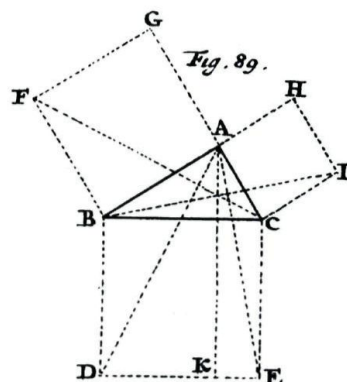
3. Merk op, dat in figuur 4 en 5 de stomphoekige driehoeken samenvallen als we één der driehoeken  $90^\circ$  draaien. Dat betekent dat de beide hulplijnen loodrecht op elkaar staan. We kunnen dit nog op een andere manier bewijzen, zie hiervoor figuur 6. De hoeken met een boogje zijn gelijk, vanwege de congruentie van de grote, stomphoekige driehoeken. Verder zijn de overstaande hoeken met een rondje gelijk. Omdat  $\angle B = 90^\circ$ , is ook  $\angle N = 90^\circ$ .

4. Tot ver in de twintigste eeuw werd dit bewijs, met behulp van één figuur, voorgeschoteld aan kinderen die voor het eerst met meetkunde in aanraking kwamen. Natuurlijk was dit hele bewijs hocus-pocus, temeer daar het hele bewijs in nauwelijks tien regels gegeven werd. Als voorbeeld geven we het bewijs, zoals het in een meetkundeboek uit 1704 werd afgedrukt, zie figuur 7. Het is een leuke puzzel, omdat wij tegenwoordig een andere notatie gebruik-



Figuur 6

ken, maar het bewijs is vrijwel letterlijk hetzelfde als in de overgeleverde tekst van Euclides en die uit leerboeken rond het midden van de twintigste eeuw.



#### PROPOSITIE 47.

*Van alle rechthoekige Triangels  $ABC$ , is 't quadraat Fig. 89. der zyde  $BC$ . over den rechten hoek  $A$ , even zoo groot, als beyde quadraten der andere zyde  $AB, AC$ .*

*Bereyd:* <sup>a</sup>Maakt op yder zyde des  $\Delta^s ABC$  een <sup>a</sup> 46. 1.  $\square$ , als  $BE, BG, AI$ : dan <sup>b</sup>trekt uyt  $A$  de rechte <sup>b</sup> 37. 1.  $AK = BD$ , ook  $AD, AE, CF, BI$ . <sup>c</sup> 1 beg: <sup>d</sup> gegev: <sup>e</sup> ber:

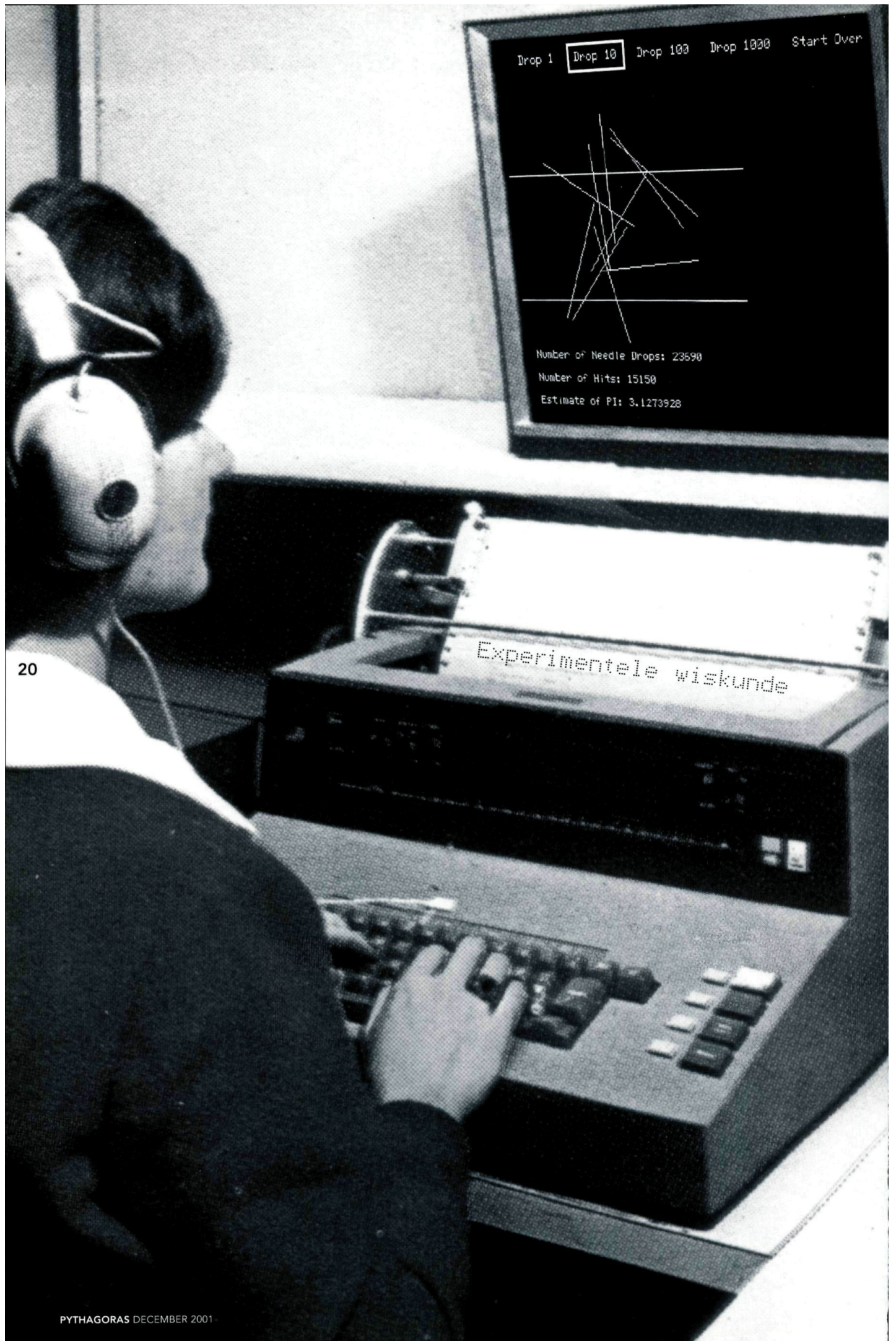
*Bew:* Dewijle de hoeken  $\angle BAC, \angle BAG$  recht <sup>e</sup> ber: zijn, daarom is  $GAC$  een <sup>f</sup> rechte linie, die <sup>f</sup> 14. 1.  $\angle = \angle FB$  is, ook is de <sup>g</sup> 28. 1. <sup>h</sup> 11. 1. <sup>i</sup> 1. 1. <sup>j</sup> 1. 1. <sup>k</sup> 1. 1. <sup>l</sup> 1. 1. <sup>m</sup> 1. 1. <sup>n</sup> 1. 1. <sup>o</sup> 1. 1. <sup>p</sup> 1. 1. <sup>q</sup> 1. 1. <sup>r</sup> 1. 1. <sup>s</sup> 1. 1. <sup>t</sup> 1. 1. <sup>u</sup> 1. 1. <sup>v</sup> 1. 1. <sup>w</sup> 1. 1. <sup>x</sup> 1. 1. <sup>y</sup> 1. 1. <sup>z</sup> 1. 1. <sup>aa</sup> 1. 1. <sup>ab</sup> 1. 1. <sup>ac</sup> 1. 1. <sup>ad</sup> 1. 1. <sup>ae</sup> 1. 1. <sup>af</sup> 1. 1. <sup>ag</sup> 1. 1. <sup>ah</sup> 1. 1. <sup>ai</sup> 1. 1. <sup>aj</sup> 1. 1. <sup>ak</sup> 1. 1. <sup>al</sup> 1. 1. <sup>am</sup> 1. 1. <sup>an</sup> 1. 1. <sup>ao</sup> 1. 1. <sup>ap</sup> 1. 1. <sup>aq</sup> 1. 1. <sup>ar</sup> 1. 1. <sup>as</sup> 1. 1. <sup>at</sup> 1. 1. <sup>au</sup> 1. 1. <sup>av</sup> 1. 1. <sup>aw</sup> 1. 1. <sup>ax</sup> 1. 1. <sup>ay</sup> 1. 1. <sup>az</sup> 1. 1. <sup>ba</sup> 1. 1. <sup>bb</sup> 1. 1. <sup>bc</sup> 1. 1. <sup>bd</sup> 1. 1. <sup>be</sup> 1. 1. <sup>bf</sup> 1. 1. <sup>bg</sup> 1. 1. <sup>bh</sup> 1. 1. <sup>bi</sup> 1. 1. <sup>bj</sup> 1. 1. <sup>bk</sup> 1. 1. <sup>bl</sup> 1. 1. <sup>bm</sup> 1. 1. <sup>bn</sup> 1. 1. <sup>bo</sup> 1. 1. <sup>bp</sup> 1. 1. <sup>bq</sup> 1. 1. <sup>br</sup> 1. 1. <sup>bs</sup> 1. 1. <sup>bt</sup> 1. 1. <sup>bu</sup> 1. 1. <sup>bv</sup> 1. 1. <sup>bw</sup> 1. 1. <sup>bx</sup> 1. 1. <sup>by</sup> 1. 1. <sup>bz</sup> 1. 1. <sup>ca</sup> 1. 1. <sup>cb</sup> 1. 1. <sup>cc</sup> 1. 1. <sup>cd</sup> 1. 1. <sup>ce</sup> 1. 1. <sup>cf</sup> 1. 1. <sup>cg</sup> 1. 1. <sup>ch</sup> 1. 1. <sup>ci</sup> 1. 1. <sup>cj</sup> 1. 1. <sup>ck</sup> 1. 1. <sup>cl</sup> 1. 1. <sup>cm</sup> 1. 1. <sup>cn</sup> 1. 1. <sup>co</sup> 1. 1. <sup>cp</sup> 1. 1. <sup>cq</sup> 1. 1. <sup>cr</sup> 1. 1. <sup>cs</sup> 1. 1. <sup>ct</sup> 1. 1. <sup>cu</sup> 1. 1. <sup>cv</sup> 1. 1. <sup>cw</sup> 1. 1. <sup>cx</sup> 1. 1. <sup>cy</sup> 1. 1. <sup>cz</sup> 1. 1. <sup>da</sup> 1. 1. <sup>db</sup> 1. 1. <sup>dc</sup> 1. 1. <sup>dd</sup> 1. 1. <sup>de</sup> 1. 1. <sup>df</sup> 1. 1. <sup>dg</sup> 1. 1. <sup>dh</sup> 1. 1. <sup>di</sup> 1. 1. <sup>dj</sup> 1. 1. <sup>dk</sup> 1. 1. <sup>dl</sup> 1. 1. <sup>dm</sup> 1. 1. <sup>dn</sup> 1. 1. <sup>do</sup> 1. 1. <sup>dp</sup> 1. 1. <sup>dq</sup> 1. 1. <sup>dr</sup> 1. 1. <sup>ds</sup> 1. 1. <sup>dt</sup> 1. 1. <sup>du</sup> 1. 1. <sup>dv</sup> 1. 1. <sup>dw</sup> 1. 1. <sup>dx</sup> 1. 1. <sup>dy</sup> 1. 1. <sup>dz</sup> 1. 1. <sup>ea</sup> 1. 1. <sup>eb</sup> 1. 1. <sup>ec</sup> 1. 1. <sup>ed</sup> 1. 1. <sup>ee</sup> 1. 1. <sup>ef</sup> 1. 1. <sup>eg</sup> 1. 1. <sup>eh</sup> 1. 1. <sup>ei</sup> 1. 1. <sup>ej</sup> 1. 1. <sup>ek</sup> 1. 1. <sup>el</sup> 1. 1. <sup>em</sup> 1. 1. <sup>en</sup> 1. 1. <sup>eo</sup> 1. 1. <sup>ep</sup> 1. 1. <sup>eq</sup> 1. 1. <sup>er</sup> 1. 1. <sup>es</sup> 1. 1. <sup>et</sup> 1. 1. <sup>eu</sup> 1. 1. <sup>ev</sup> 1. 1. <sup>ew</sup> 1. 1. <sup>ex</sup> 1. 1. <sup>ey</sup> 1. 1. <sup>ez</sup> 1. 1. <sup>fa</sup> 1. 1. <sup>fb</sup> 1. 1. <sup>fc</sup> 1. 1. <sup>fd</sup> 1. 1. <sup>fe</sup> 1. 1. <sup>fg</sup> 1. 1. <sup>fh</sup> 1. 1. <sup>fi</sup> 1. 1. <sup>fj</sup> 1. 1. <sup>fk</sup> 1. 1. <sup>fl</sup> 1. 1. <sup>fm</sup> 1. 1. <sup>fn</sup> 1. 1. <sup>fo</sup> 1. 1. <sup>fp</sup> 1. 1. <sup>fq</sup> 1. 1. <sup>fr</sup> 1. 1. <sup>fs</sup> 1. 1. <sup>ft</sup> 1. 1. <sup>fu</sup> 1. 1. <sup>fv</sup> 1. 1. <sup>fw</sup> 1. 1. <sup>fx</sup> 1. 1. <sup>fy</sup> 1. 1. <sup>fz</sup> 1. 1. <sup>ga</sup> 1. 1. <sup>gb</sup> 1. 1. <sup>gc</sup> 1. 1. <sup>gd</sup> 1. 1. <sup>ge</sup> 1. 1. <sup>gf</sup> 1. 1. <sup>gh</sup> 1. 1. <sup>gi</sup> 1. 1. <sup>gj</sup> 1. 1. <sup>gk</sup> 1. 1. <sup>gl</sup> 1. 1. <sup>gm</sup> 1. 1. <sup>gn</sup> 1. 1. <sup>go</sup> 1. 1. <sup>gp</sup> 1. 1. <sup>gq</sup> 1. 1. <sup>gr</sup> 1. 1. <sup>gs</sup> 1. 1. <sup>gt</sup> 1. 1. <sup>gu</sup> 1. 1. <sup>gv</sup> 1. 1. <sup>gw</sup> 1. 1. <sup>gx</sup> 1. 1. <sup>gy</sup> 1. 1. <sup>gz</sup> 1. 1. <sup>ha</sup> 1. 1. <sup>hb</sup> 1. 1. <sup>hc</sup> 1. 1. <sup>hd</sup> 1. 1. <sup>he</sup> 1. 1. <sup>hf</sup> 1. 1. <sup>hg</sup> 1. 1. <sup>hi</sup> 1. 1. <sup>hj</sup> 1. 1. <sup>hk</sup> 1. 1. <sup>hl</sup> 1. 1. <sup>hm</sup> 1. 1. <sup>hn</sup> 1. 1. <sup>ho</sup> 1. 1. <sup>hp</sup> 1. 1. <sup>hq</sup> 1. 1. <sup>hr</sup> 1. 1. <sup>hs</sup> 1. 1. <sup>ht</sup> 1. 1. <sup>hu</sup> 1. 1. <sup>hv</sup> 1. 1. <sup>hw</sup> 1. 1. <sup>hx</sup> 1. 1. <sup>hy</sup> 1. 1. <sup>hz</sup> 1. 1. <sup>ia</sup> 1. 1. <sup>ib</sup> 1. 1. <sup>ic</sup> 1. 1. <sup>id</sup> 1. 1. <sup>ie</sup> 1. 1. <sup>if</sup> 1. 1. <sup>ig</sup> 1. 1. <sup>ih</sup> 1. 1. <sup>ii</sup> 1. 1. <sup>ij</sup> 1. 1. <sup>ik</sup> 1. 1. <sup>il</sup> 1. 1. <sup>im</sup> 1. 1. <sup>in</sup> 1. 1. <sup>io</sup> 1. 1. <sup>ip</sup> 1. 1. <sup>iq</sup> 1. 1. <sup>ir</sup> 1. 1. <sup>is</sup> 1. 1. <sup>it</sup> 1. 1. <sup>iu</sup> 1. 1. <sup>iv</sup> 1. 1. <sup>iw</sup> 1. 1. <sup>ix</sup> 1. 1. <sup>iy</sup> 1. 1. <sup>iz</sup> 1. 1. <sup>ja</sup> 1. 1. <sup>jb</sup> 1. 1. <sup>jc</sup> 1. 1. <sup>jd</sup> 1. 1. <sup>je</sup> 1. 1. <sup>jf</sup> 1. 1. <sup>jh</sup> 1. 1. <sup>ji</sup> 1. 1. <sup>jj</sup> 1. 1. <sup>jk</sup> 1. 1. <sup>jl</sup> 1. 1. <sup>jm</sup> 1. 1. <sup>jn</sup> 1. 1. <sup>jo</sup> 1. 1. <sup>jp</sup> 1. 1. <sup>jq</sup> 1. 1. <sup>jr</sup> 1. 1. <sup>js</sup> 1. 1. <sup>jt</sup> 1. 1. <sup>ju</sup> 1. 1. <sup>jv</sup> 1. 1. <sup>jw</sup> 1. 1. <sup>jx</sup> 1. 1. <sup>ky</sup> 1. 1. <sup>kz</sup> 1. 1. <sup>la</sup> 1. 1. <sup>lb</sup> 1. 1. <sup>lc</sup> 1. 1. <sup>ld</sup> 1. 1. <sup>le</sup> 1. 1. <sup>lf</sup> 1. 1. <sup>lh</sup> 1. 1. <sup>li</sup> 1. 1. <sup>lj</sup> 1. 1. <sup>lk</sup> 1. 1. <sup>ll</sup> 1. 1. <sup>lm</sup> 1. 1. <sup>ln</sup> 1. 1. <sup>lo</sup> 1. 1. <sup>lp</sup> 1. 1. <sup>lq</sup> 1. 1. <sup>lr</sup> 1. 1. <sup>ls</sup> 1. 1. <sup>lt</sup> 1. 1. <sup>lu</sup> 1. 1. <sup>lv</sup> 1. 1. <sup>lw</sup> 1. 1. <sup>lx</sup> 1. 1. <sup>ly</sup> 1. 1. <sup>lz</sup> 1. 1. <sup>ma</sup> 1. 1. <sup>mb</sup> 1. 1. <sup>mc</sup> 1. 1. <sup>md</sup> 1. 1. <sup>me</sup> 1. 1. <sup>mf</sup> 1. 1. <sup>mh</sup> 1. 1. <sup>mi</sup> 1. 1. <sup>mj</sup> 1. 1. <sup>mk</sup> 1. 1. <sup>ml</sup> 1. 1. <sup>mn</sup> 1. 1. <sup>mo</sup> 1. 1. <sup>mp</sup> 1. 1. <sup>mq</sup> 1. 1. <sup>mr</sup> 1. 1. <sup>ms</sup> 1. 1. <sup>mt</sup> 1. 1. <sup>mu</sup> 1. 1. <sup>mv</sup> 1. 1. <sup>mw</sup> 1. 1. <sup>mx</sup> 1. 1. <sup>my</sup> 1. 1. <sup>mz</sup> 1. 1. <sup>na</sup> 1. 1. <sup>nb</sup> 1. 1. <sup>nc</sup> 1. 1. <sup>nd</sup> 1. 1. <sup>ne</sup> 1. 1. <sup>nf</sup> 1. 1. <sup>nh</sup> 1. 1. <sup>ni</sup> 1. 1. <sup>nj</sup> 1. 1. <sup>nk</sup> 1. 1. <sup>nl</sup> 1. 1. <sup>nm</sup> 1. 1. <sup>nn</sup> 1. 1. <sup>no</sup> 1. 1. <sup>np</sup> 1. 1. <sup>nq</sup> 1. 1. <sup>nr</sup> 1. 1. <sup>ns</sup> 1. 1. <sup>nt</sup> 1. 1. <sup>nu</sup> 1. 1. <sup>nv</sup> 1. 1. <sup>nw</sup> 1. 1. <sup>nx</sup> 1. 1. <sup>ny</sup> 1. 1. <sup>nz</sup> 1. 1. <sup>oa</sup> 1. 1. <sup>ob</sup> 1. 1. <sup>oc</sup> 1. 1. <sup>od</sup> 1. 1. <sup>oe</sup> 1. 1. <sup>of</sup> 1. 1. <sup>oh</sup> 1. 1. <sup>oi</sup> 1. 1. <sup>oj</sup> 1. 1. <sup>ok</sup> 1. 1. <sup>ol</sup> 1. 1. <sup>om</sup> 1. 1. <sup>on</sup> 1. 1. <sup>oo</sup> 1. 1. <sup>op</sup> 1. 1. <sup>oq</sup> 1. 1. <sup>or</sup> 1. 1. <sup>os</sup> 1. 1. <sup>ot</sup> 1. 1. <sup>ou</sup> 1. 1. <sup>ov</sup> 1. 1. <sup>ow</sup> 1. 1. <sup>ox</sup> 1. 1. <sup>oy</sup> 1. 1. <sup>oz</sup> 1. 1. <sup>pa</sup> 1. 1. <sup>pb</sup> 1. 1. <sup>pc</sup> 1. 1. <sup>pd</sup> 1. 1. <sup>pe</sup> 1. 1. <sup>pf</sup> 1. 1. <sup>ph</sup> 1. 1. <sup>pi</sup> 1. 1. <sup>pj</sup> 1. 1. <sup>pk</sup> 1. 1. <sup>pl</sup> 1. 1. <sup>pm</sup> 1. 1. <sup>pn</sup> 1. 1. <sup>po</sup> 1. 1. <sup>pp</sup> 1. 1. <sup>pq</sup> 1. 1. <sup>pr</sup> 1. 1. <sup>ps</sup> 1. 1. <sup>pt</sup> 1. 1. <sup>pu</sup> 1. 1. <sup>pv</sup> 1. 1. <sup>pw</sup> 1. 1. <sup>px</sup> 1. 1. <sup>py</sup> 1. 1. <sup>pz</sup> 1. 1. <sup>qa</sup> 1. 1. <sup>qb</sup> 1. 1. <sup>qc</sup> 1. 1. <sup>qd</sup> 1. 1. <sup>qe</sup> 1. 1. <sup>qf</sup> 1. 1. <sup>qh</sup> 1. 1. <sup>qi</sup> 1. 1. <sup>qj</sup> 1. 1. <sup>qk</sup> 1. 1. <sup>ql</sup> 1. 1. <sup>qm</sup> 1. 1. <sup>qn</sup> 1. 1. <sup>qo</sup> 1. 1. <sup>qp</sup> 1. 1. <sup>qq</sup> 1. 1. <sup>qr</sup> 1. 1. <sup>qs</sup> 1. 1. <sup>qt</sup> 1. 1. <sup>qu</sup> 1. 1. <sup>qv</sup> 1. 1. <sup>qw</sup> 1. 1. <sup>qx</sup> 1. 1. <sup>qy</sup> 1. 1. <sup>qz</sup> 1. 1. <sup>ra</sup> 1. 1. <sup>rb</sup> 1. 1. <sup>rc</sup> 1. 1. <sup>rd</sup> 1. 1. <sup>re</sup> 1. 1. <sup>rf</sup> 1. 1. <sup>rh</sup> 1. 1. <sup>ri</sup> 1. 1. <sup>rj</sup> 1. 1. <sup>rk</sup> 1. 1. <sup>rl</sup> 1. 1. <sup>rm</sup> 1. 1. <sup>rn</sup> 1. 1. <sup>ro</sup> 1. 1. <sup>rp</sup> 1. 1. <sup>rq</sup> 1. 1. <sup>rr</sup> 1. 1. <sup>rs</sup> 1. 1. <sup>rt</sup> 1. 1. <sup>ru</sup> 1. 1. <sup>rv</sup> 1. 1. <sup>rw</sup> 1. 1. <sup>rx</sup> 1. 1. <sup>ry</sup> 1. 1. <sup>rz</sup> 1. 1. <sup>sa</sup> 1. 1. <sup>sb</sup> 1. 1. <sup>sc</sup> 1. 1. <sup>sd</sup> 1. 1. <sup>se</sup> 1. 1. <sup>sf</sup> 1. 1. <sup>sh</sup> 1. 1. <sup>si</sup> 1. 1. <sup>sj</sup> 1. 1. <sup>sk</sup> 1. 1. <sup>sl</sup> 1. 1. <sup>sm</sup> 1. 1. <sup>sn</sup> 1. 1. <sup>so</sup> 1. 1. <sup>sp</sup> 1. 1. <sup>sq</sup> 1. 1. <sup>sr</sup> 1. 1. <sup>ss</sup> 1. 1. <sup>st</sup> 1. 1. <sup>su</sup> 1. 1. <sup>sv</sup> 1. 1. <sup>sw</sup> 1. 1. <sup>sx</sup> 1. 1. <sup>sy</sup> 1. 1. <sup>sz</sup> 1. 1. <sup>ta</sup> 1. 1. <sup>tb</sup> 1. 1. <sup>tc</sup> 1. 1. <sup>td</sup> 1. 1. <sup>te</sup> 1. 1. <sup>tf</sup> 1. 1. <sup>th</sup> 1. 1. <sup>ti</sup> 1. 1. <sup>tj</sup> 1. 1. <sup>tk</sup> 1. 1. <sup>tl</sup> 1. 1. <sup>tm</sup> 1. 1. <sup>tn</sup> 1. 1. <sup>to</sup> 1. 1. <sup>tp</sup> 1. 1. <sup>tq</sup> 1. 1. <sup>tr</sup> 1. 1. <sup>ts</sup> 1. 1. <sup>tt</sup> 1. 1. <sup>tu</sup> 1. 1. <sup>tv</sup> 1. 1. <sup>tw</sup> 1. 1. <sup>tx</sup> 1. 1. <sup>ty</sup> 1. 1. <sup>tz</sup> 1. 1. <sup>ua</sup> 1. 1. <sup>ub</sup> 1. 1. <sup>uc</sup> 1. 1. <sup>ud</sup> 1. 1. <sup>ue</sup> 1. 1. <sup>uf</sup> 1. 1. <sup>uh</sup> 1. 1. <sup>ui</sup> 1. 1. <sup>uj</sup> 1. 1. <sup>uk</sup> 1. 1. <sup>ul</sup> 1. 1. <sup>um</sup> 1. 1. <sup>un</sup> 1. 1. <sup>uo</sup> 1. 1. <sup>up</sup> 1. 1. <sup>uq</sup> 1. 1. <sup>ur</sup> 1. 1. <sup>us</sup> 1. 1. <sup>ut</sup> 1. 1. <sup>uu</sup> 1. 1. <sup>uv</sup> 1. 1. <sup>uw</sup> 1. 1. <sup>ux</sup> 1. 1. <sup>uy</sup> 1. 1. <sup>uz</sup> 1. 1. <sup>va</sup> 1. 1. <sup>vb</sup> 1. 1. <sup>vc</sup> 1. 1. <sup>vd</sup> 1. 1. <sup>ve</sup> 1. 1. <sup>vf</sup> 1. 1. <sup>vh</sup> 1. 1. <sup>vi</sup> 1. 1. <sup>vj</sup> 1. 1. <sup>vk</sup> 1. 1. <sup>vl</sup> 1. 1. <sup>vm</sup> 1. 1. <sup>vn</sup> 1. 1. <sup>vo</sup> 1. 1. <sup>vp</sup> 1. 1. <sup>vq</sup> 1. 1. <sup>vr</sup> 1. 1. <sup>vs</sup> 1. 1. <sup>vt</sup> 1. 1. <sup>vu</sup> 1. 1. <sup>vv</sup> 1. 1. <sup>vw</sup> 1. 1. <sup>vx</sup> 1. 1. <sup>vy</sup> 1. 1. <sup>vz</sup> 1. 1. <sup>wa</sup> 1. 1. <sup>wb</sup> 1. 1. <sup>wc</sup> 1. 1. <sup>wd</sup> 1. 1. <sup>we</sup> 1. 1. <sup>wf</sup> 1. 1. <sup>wh</sup> 1. 1. <sup>wi</sup> 1. 1. <sup>wj</sup> 1. 1. <sup>wk</sup> 1. 1. <sup>wl</sup> 1. 1. <sup>wm</sup> 1. 1. <sup>wn</sup> 1. 1. <sup>wo</sup> 1. 1. <sup>wp</sup> 1. 1. <sup>wq</sup> 1. 1. <sup>wr</sup> 1. 1. <sup>ws</sup> 1. 1. <sup>wt</sup> 1. 1. <sup>wu</sup> 1. 1. <sup>wv</sup> 1. 1. <sup>ww</sup> 1. 1. <sup>wx</sup> 1. 1. <sup>wy</sup> 1. 1. <sup>wz</sup> 1. 1. <sup>xa</sup> 1. 1. <sup>xb</sup> 1. 1. <sup>xc</sup> 1. 1. <sup>xd</sup> 1. 1. <sup>xe</sup> 1. 1. <sup>xf</sup> 1. 1. <sup>xh</sup> 1. 1. <sup>xi</sup> 1. 1. <sup>xj</sup> 1. 1. <sup>xk</sup> 1. 1. <sup>xl</sup> 1. 1. <sup>xm</sup> 1. 1. <sup>xn</sup> 1. 1. <sup>xo</sup> 1. 1. <sup>xp</sup> 1. 1. <sup>xq</sup> 1. 1. <sup>xr</sup> 1. 1. <sup>xs</sup> 1. 1. <sup>xt</sup> 1. 1. <sup>xu</sup> 1. 1. <sup>xv</sup> 1. 1. <sup>xw</sup> 1. 1. <sup>xx</sup> 1. 1. <sup>xy</sup> 1. 1. <sup>xz</sup> 1. 1. <sup>ya</sup> 1. 1. <sup>yb</sup> 1. 1. <sup>yc</sup> 1. 1. <sup>yd</sup> 1. 1. <sup>ye</sup> 1. 1. <sup>yf</sup> 1. 1. <sup>yh</sup> 1. 1. <sup>yi</sup> 1. 1. <sup>yj</sup> 1. 1. <sup>yk</sup> 1. 1. <sup>yl</sup> 1. 1. <sup>ym</sup> 1. 1. <sup>yn</sup> 1. 1. <sup>yo</sup> 1. 1. <sup>yp</sup> 1. 1. <sup>yq</sup> 1. 1. <sup>yr</sup> 1. 1. <sup>ys</sup> 1. 1. <sup>yt</sup> 1. 1. <sup>yu</sup> 1. 1. <sup>yv</sup> 1. 1. <sup>yw</sup> 1. 1. <sup>yx</sup> 1. 1. <sup>yy</sup> 1. 1. <sup>yz</sup> 1. 1. <sup>za</sup> 1. 1. <sup>zb</sup> 1. 1. <sup>zc</sup> 1. 1. <sup>zd</sup> 1. 1. <sup>ze</sup> 1. 1. <sup>zf</sup> 1. 1. <sup>zh</sup> 1. 1. <sup>zi</sup> 1. 1. <sup>zj</sup> 1. 1. <sup>zk</sup> 1. 1. <sup>zl</sup> 1. 1. <sup>zm</sup> 1. 1. <sup>zn</sup> 1. 1. <sup>zo</sup> 1. 1. <sup>zp</sup> 1. 1. <sup>zq</sup> 1. 1. <sup>zr</sup> 1. 1. <sup>zs</sup> 1. 1. <sup>zt</sup> 1. 1. <sup>zu</sup> 1. 1. <sup>zv</sup> 1. 1. <sup>zw</sup> 1. 1. <sup>zx</sup> 1. 1. <sup>zy</sup> 1. 1. <sup>zz</sup> 1. 1.

Komt de hoek  $FBC$   $\propto$   $ABD$ , ende  $BC$  is  $\propto$   $gem.$

$\propto$   $BD, FB \propto AB$ , daarom is de  $\Delta FBC$   $\propto$   $\Delta ABD$ ; maar  $\square BG$  is  $\propto$   $\Delta FBC$ , en  $\square BK$   $\propto$   $\Delta ABD$ , derhalven  $\square$  of  $\square BG$   $\propto$   $\square BK$  op de felve wijze is  $\square AI \propto \square CK$  } addt. ergo  $\square BG + \square AI \propto \square BE$ , dat  $\square$  bewysen was.

Figuur 7. Het bewijs van Euclides uit een 18<sup>de</sup>-eeuws boek







# Het experiment van Buffon

door **Cor Kraaikamp**

Neem een naald en een groot stuk papier, waarop je een aantal parallelle horizontale lijnen tekent. De afstand tussen twee opeenvolgende lijnen moet precies de lengte van de naald zijn. Nu doen we een experiment: we werpen de naald een groot aantal malen willekeurig op het papier en tellen het aantal keren dat de naald een lijn raakt. Met de hand is dit een tijdrovend werkje. Na honderd keer gooien is de lol er wel af. De computer kan dit veel sneller. Die kan in een minuut wel een miljoen gevallen afwerken. Daarom doe je tegenwoordig zo'n experiment op je grafische rekenmachine of een computer. Op pagina 23 staan een aantal internetlinks, waar je GR-programma's of Java-applets kunt vinden, waarmee je dit experiment kunt naspelen op de computer.

## Getallenmagie

In alle Java- of GR-programma's die je tegenkomt, wordt met behulp van dit experiment een getal benaderd; een getal dat na een tijdje in de buurt komt van 3,14. Dit getal moet de meeste lezers bekend voorkomen! Het getal dat uitgerekend wordt is:

$$\frac{2 \times \text{totaal aantal worpen}}{\text{aantal worpen waarin de naald een lijn raakt}}.$$

Dat is tweemaal het omgekeerde van:

$$\frac{\text{aantal worpen waarin de naald een lijn raakt}}{\text{totaal aantal worpen}}.$$

Dit is een *schatting* voor de kans  $p$  dat een naald een lijn raakt. Blijkbaar heeft  $2/p$  iets te maken met het getal  $\pi$ . Dat is inderdaad zo. Er geldt  $p = 2/\pi$ , zodat ons experiment

inderdaad een schatting geeft voor het getal  $\pi$ . Hoe dat kan, zullen we in de rest van dit artikel uitleggen.

## Wiskundige beschrijving

Om in te zien dat  $p = 2/\pi$ , nemen we aan dat één van de horizontale lijnen de  $x$ -as is, dat de naald lengte 1 heeft, en dat  $(x, y)$  het middelpunt van de geworpen naald is. Dan is

$$z = y - \lfloor y \rfloor$$

de afstand van dit middelpunt  $(x, y)$  tot de dichtbijzijnde horizontale lijn onder  $(x, y)$ . Hierbij is  $\lfloor y \rfloor$  het grootste gehele getal  $\leq y$ . Het getal  $z$  is een willekeurig getal uit het interval  $[0, 1)$ . Hiermee bedoelen we dat als  $0 \leq a < b \leq 1$ , er geldt dat

$$P(a < z < b) = b - a.$$

Met andere woorden, de kans dat  $z$  in het interval  $(a, b)$  ligt, is gelijk aan de lengte  $b - a$  van dit interval. We zeggen ook wel dat  $z$  *uniform verdeeld is op*  $[0, 1)$ . Laat verder  $\theta$  de hoek zijn die de geworpen naald maakt met de positieve  $x$ -as. Dan wordt – juist omdat je de naald willekeurig werpt –  $\theta$  willekeurig uit het interval  $[0, \pi)$  'getrokken'. We zeggen ook wel dat  $\theta$  *uniform verdeeld is op*  $[0, \pi)$ . Verder mogen we ervan uitgaan dat  $z$  en  $\theta$  'niets met elkaar te maken' hebben – ze zijn 'onafhankelijk'.

## Kansrekening

Wanneer raakt de geworpen naald een horizontale lijn? Figuur 3 leert ons dat de naald een horizontale lijn raakt als



$$z \leq \frac{1}{2} \sin \theta \text{ of } 1 - z \leq \frac{1}{2} \sin \theta.$$

Hieruit volgt dat de naald een horizontale lijn raakt precies als het punt  $(\theta, z)$  in een van de twee gearceerde gebieden van figuur 4 ligt. Omdat het punt  $(\theta, z)$  willekeurig 'getrokken' wordt uit de rechthoek  $[0, \pi) \times [0, 1)$ , volgt dat de kans  $p$  gegeven wordt door

$$p = \frac{\text{opp. van de gearceerde gebieden}}{\text{totale opp. van } [0, \pi) \times [0, 1)} \\ = 2 \frac{\text{opp. onderste gearceerde gebied}}{\pi}.$$

Nu is de oppervlakte van het onderste gearceerde gebied gelijk aan

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta \, d\theta = 1.$$

Zodoende vinden we dus  $p = 2/\pi$ .

Het naalden-experiment geeft een praktische benadering voor de kans dat een naald een horizontale lijn raakt. Hierboven hebben we uitgerekend dat de theoretische kans  $p$  daarvoor gelijk aan  $2/\pi$  is. Dan is  $2/p$  inderdaad gelijk aan  $\pi$ . In de bovengenoemde programma's wordt daarom niet  $p$  maar  $2/p$  geschat. Dat is de reden waarom we op ons scherm de decimalen van  $\pi$  zien verschijnen.

### Convergentie

Als je Buffons experiment met de hand uitvoert, dan krijg je na honderd of duizend keer gooien een schatting voor  $\pi$  die niet erg goed is. Met een beetje geluk heb je alleen het eerste cijfer (3) en het tweede cijfer (1) correct. De convergentie is dus erg slecht. Waarom is dit zo? Bedenk dat de kans dat een naald een horizontale lijn raakt binomiaal verdeeld is. Als je honderd keer gooit, dan heb je (afgerond) alleen de eerste twee cijfers van  $\pi$  goed als de naald

22



Georges-Louis Leclerc,  
graaf van Buffon (1707-1788)

Figuur 1



Het resultaat van dertig keer gooien:  
17 naalden liggen op een lijn. Als schatting  
voor  $\pi$  geeft dit  $60/17=3,526$ .

Figuur 2



een lijn 64 of 65 keer raakt. De kans hierop is gelijk aan:

$$\binom{100}{64} p^{64} (1-p)^{36} + \binom{100}{65} p^{65} (1-p)^{35}$$

Met behulp van je rekenmachine vind je dat deze kans ongeveer 0,16 is. Niet erg bemoedigend! Met behulp van een computer gaat het al veel beter. Daarvoor moet je een groot aantal malen, zeg  $n$  keer, een paar  $(\theta, z)$  willekeurig uit de rechthoek  $[0, 1) \times [0, \pi)$  'trekken' en nagaan hoe vaak zo'n paar  $(\theta, z)$  in het gearceerde gebied van figuur 4 ligt. Als je  $n$  groot neemt, zeg  $n = 100.000$  of  $n = 1.000.000$ , dan geeft  $2n$  gedeeld door het laatste aantal een veel betere schatting voor  $\pi$ .

## De graaf van Buffon

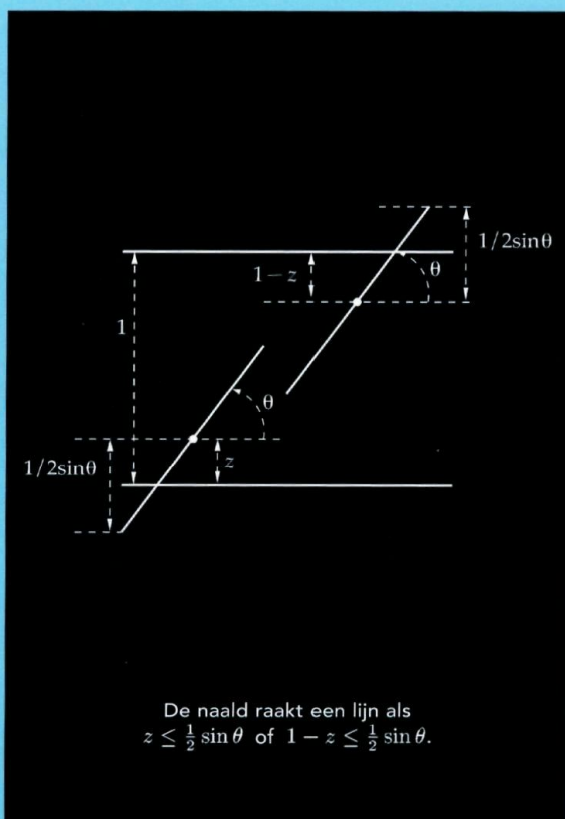
Het naalden-experiment is in de achttiende eeuw bedacht door Georges-Louis Leclerc, graaf van Buffon (1707–1788). In de loop van de tijd is er veel geschreven over Buffons experiment. Men heeft geprobeerd het experiment aan te passen om sneller een goede benadering van  $\pi$  te krijgen. Men is bijvoorbeeld gaan werpen met langere (of juist kortere) naalden, met 'noodles' (in plaats van 'needles'). Zoeken op het internet geeft je een heleboel sites met uitleg over 'verbeterde' Buffon-experimenten.

### Internet

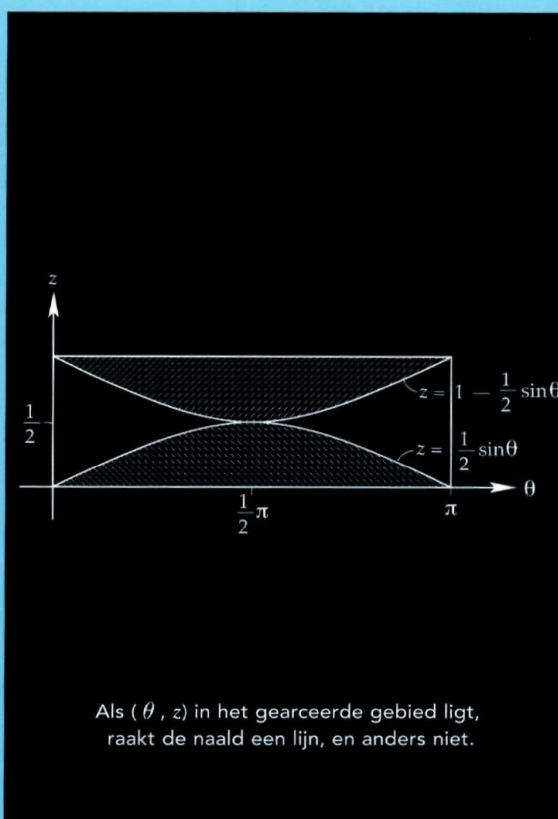
<http://www.hsu.edu/faculty/lloyd/ti/ti83/83.html\#83stat> (GR)

<http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html> (Java)

<http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html> (Java)



Figuur 3



Figuur 4

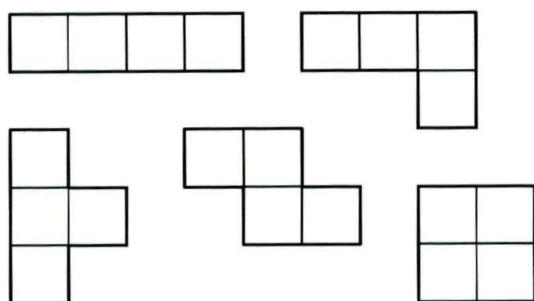


# Problemen

door **Dion Gijswijt**

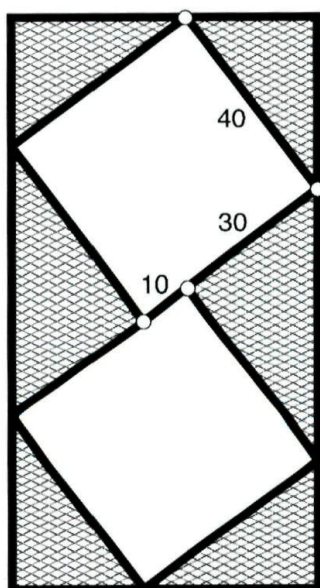
## Tetris puzzel

Is het mogelijk om met de volgende vijf Tetris-vormen een 4 bij 5 rechthoek te maken? (De vormen mogen worden omgedraaid.)



## Glas-in-lood

Hier zie je een glas-in-loodraam. De twee witte vierkanten hebben een zijde van 40 centimeter. Ze overlappen in het midden 10 centimeter, zie de afbeelding. Wat zijn de afmetingen van het raam?



## Lucas en Fibonacci

De rij getallen 1,3,4,7,11,... waarbij elk getal in de rij (behalve de eerste twee) de som is van de twee getallen ervoor, heet de rij van Lucas. Een nauw verwante rij is de rij van Fibonacci, waarbij de eerste twee getallen beide aan 1 gelijk zijn: 1,1,2,3,5,8,... Bepaal alle getallen die zowel in de rij van Lucas als in de rij van Fibonacci voorkomen.

## Kaartpuzzel

Je hebt zes kaarten die elk aan beide kanten een van de kleuren rood, blauw, groen en paars hebben. Iedere mogelijke combinatie van twee verschillende kleuren komt één keer voor. De kaarten liggen als volgt op tafel.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| R | R | R | B | B | G |
| B | G | P | G | P | P |

Je mag nu telkens alle kaarten die met dezelfde kleur boven liggen omdraaien. Je mag dus bijvoorbeeld alle kaarten met blauw boven omdraaien. Kun je op deze manier de volgende situaties bereiken?

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| B | G | R | B | P | P |
| R | R | P | G | B | G |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| B | G | P | B | P | P |
| R | R | R | G | B | G |



# Oplossingen

## nr.1

door **Dion Gijswijt**

### TAM-puzzel

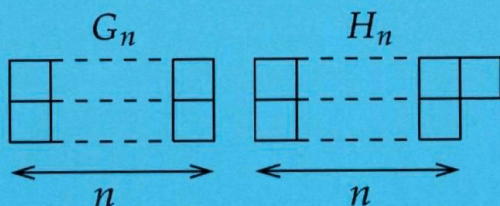
Er zijn meerdere oplossingen mogelijk. We geven er één. De nummers boven de pijltjes geven aan van welke spelregel gebruik wordt gemaakt.

$A \xrightarrow{4} TAM \xrightarrow{4} TTAMM \xrightarrow{3}$   
 $TTAAMM \xrightarrow{1} AAMM \xrightarrow{1} MM \xrightarrow{2}$   
 $MMT \xrightarrow{3} MMTA \xrightarrow{4} MMTTAM \xrightarrow{3}$   
 $MMTTAAM \xrightarrow{1} MMTTM \xrightarrow{1}$   
 $MMM \xrightarrow{1} M.$

Het is mogelijk om van elk woord elk ander woord te maken.

### Tuinpad aanleggen

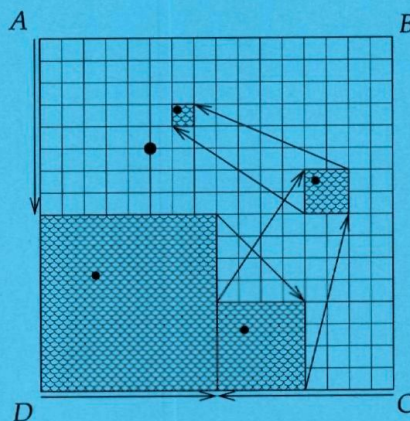
Als  $F_n$  het aantal mogelijke betegelingen is van een pad van  $30n$  cm lang, dan is  $F_1 = 1$  en  $F_2 = 2$ . Als we het aantal betegelingen van een pad van  $30(n+2)$  cm lang (en 30 cm breed) tellen, dan is het aantal met de laatste tegel wit gelijk aan  $F_{n+1}$ , en het aantal met de laatste tegel zwart gelijk aan  $F_n$ . Dus  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Dus  $F_3 = 1 + 2 = 3$ ,  $F_4 = 2 + 3 = 5$ , enzovoorts. Het gevraagde aantal is  $F_{10} = 89$ . Als het pad 60 centimeter breed moet worden, dan noemen we  $G_n$  het aantal manieren om een pad van  $30n$  cm lang te leggen en  $H_n$  het aantal manieren voor een pad van  $30n$  cm lang plus een extra  $30 \times 30$  vierkant aan het eind.



Dan geldt:  $H_n = H_{n-1} + G_n$  en  $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2} + 2H_{n-2}$ . Met wat rekenwerk volgt dan dat  $G_{10} = 78243$ .

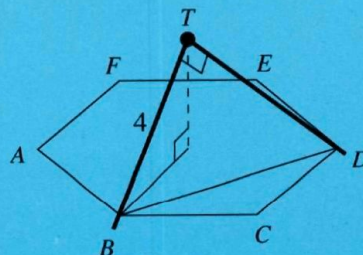
### Kikkersprongen

De kikker moet richting  $D$ ,  $C$ ,  $B$  en tenslotte richting  $A$  springen. Dit is makkelijk te zien door terug te werken. In plaats van de kikker te laten springen, laten we de hele pool achterwaarts springen, waarbij deze telkens tweemaal zo breed wordt.



### Tent

De top  $T$  van de tent vormt met de punten  $B$  en  $D$  een 'geodriehoek', dus wegens de stelling van Pythagoras geldt dat  $BD = 4\sqrt{2}$ . Hieruit is gemakkelijk te berekenen dat de zijden van de zeshoek gelijk zijn aan  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ . Nu geldt voor de hoogte  $h$  dat  $h^2 + 32/3 = 16$  wegens de stelling van Pythagoras. Dus  $h = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .





# ° Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Aan het eind van het jaar zijn er boekenbonnen ter waarde van 120, 100 en 80 euro voor de drie leerlingen die bovenaan staan in de laddercompetitie.

## Opgave 77

De getallen  $x$ ,  $y$  en  $z$  zijn reële getallen met  $x + y + z = 0$ .

Gegeven is dat  $x^3 + y^3 + z^3 = 2001$ .

Wat is het product  $xyz$ ?

## Opgave 78

Gegeven is dat  $a$ ,  $b$  en  $c$  gehele, on-even getallen zijn. Bewijs dat de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  geen breuken als oplossing heeft.

26

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade  
Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

e-mail: [pytholym@math.leidenuniv.nl](mailto:pytholym@math.leidenuniv.nl)

## Eindstand 2000 – 2001

Op de eerste plaats is Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk geëindigd. Hij ontvangt een boekenbon van 250 gulden. De tweede plaats wordt gedeeld door vier personen: Thomas Beuman van het **Gymnasium Juvenaat H.H.** in Bergen op Zoom, P. Dekker van de **P.J. Evertseschool** in Rotterdam, Sander Oostrom van het **Buys Ballot College** in Goes en Tim Wouters van **Vrij Katholiek Onderwijs** in Opwijk (België). Zij winnen allen een boekenbon van 150 gulden. Gefeliciteerd.

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 januari 2002. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het augustusnummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.



### Opgave 73

Uitgaande van een viertal reële getallen  $(a, b, c, d)$  maken we telkens een nieuw viertal  $(ab, bc, cd, da)$ . We herhalen deze procedure totdat we het oorspronkelijke viertal  $(a, b, c, d)$  weer terugkrijgen. Toon aan dat dit alleen gebeurt als  $a = b = c = d = 1$  of  $0$ .

**Oplossing.** We noemen het eerste viertal  $(a_0, b_0, c_0, d_0)$ , het volgende  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$ , enzovoort. We zien dat  $a_1 b_1 c_1 d_1 = (a_0 b_0 c_0 d_0)^2$  en met inductie dat  $a_n b_n c_n d_n = (a_0 b_0 c_0 d_0)^{2^n}$ . Laat  $m$  het kleinste natuurlijke getal zijn met  $(a_m, b_m, c_m, d_m) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$ , dan is  $(a_0 b_0 c_0 d_0)^{2^m} = a_0 b_0 c_0 d_0$  en dus  $a_0 b_0 c_0 d_0 = 1$  of  $0$ . Als  $a_0 b_0 c_0 d_0 = 0$ , dan is minstens een van het oorspronkelijke viertal gelijk aan  $0$ . Na drie stappen zijn ze dan allemaal gelijk aan  $0$  en dit blijft ook zo, dus  $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (0, 0, 0, 0)$ . Als  $a_0 b_0 c_0 d_0 = 1$ , zien we dat  $a_1 c_1 = b_1 d_1 = a_0 b_0 c_0 d_0 = 1$ . Als nu geldt dat  $a_n c_n = 1$  en  $b_n d_n = 1$  voor zekere  $n$ , dan is ook  $a_{n+1} c_{n+1} = b_{n+1} d_{n+1} = a_n b_n c_n d_n = 1$  en dus  $a_n c_n = 1$  voor alle  $n > 0$  met inductie. Aangezien het oorspronkelijke viertal weer terugkeert, is ook  $a_0 c_0 = a_m c_m = 1$ . Als we nu een paar stappen uitschrijven en de gevonden gelijkheden gebruiken, zien we dat  $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (b_0^2, c_0^2, d_0^2, a_0^2)$ , waaruit we zien dat  $(a_8, b_8, c_8, d_8) = (a_0^{16}, b_0^{16}, c_0^{16}, d_0^{16})$ . Dus is  $(a_{16m}, b_{16m}, c_{16m}, d_{16m}) = (a_0^{16m}, b_0^{16m}, c_0^{16m}, d_0^{16m}) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$ , omdat de periode  $m$  is en met  $a_0 b_0 c_0 d_0 \neq 0$  kan dit alleen als  $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (1, 1, 1, 1)$ .

Deze opgave werd door niemand bevredigend opgelost.

### Opgave 74

Punt  $A$  ligt op een cirkel met middelpunt  $O$ . Het punt  $B$  ligt zo dat  $OB$  loodrecht op  $OA$  staat, met  $OB = 2 \cdot OA$ . Lijnstuk  $AB$  snijdt de cirkel in  $P$ . Bereken de verhouding  $\frac{BP}{PA}$ .

**Oplossing.** We noemen de straal van de cirkel  $r$ . Volgens Pythagoras is dan  $AB = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = r\sqrt{5}$ .

We trekken  $AO$  en noemen het tweede snijpunt met de cirkel  $C$ . Omdat de driehoeken  $AOB$  en  $APC$  nu gelijkvormig zijn ( $\angle APC = 90^\circ$  omdat  $AC$  een middellijn is), geldt  $\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AB}$  en dus  $AP = \frac{AC \cdot AO}{AB} = \frac{2r^2}{r\sqrt{5}} = \frac{2}{5}r\sqrt{5}$ . Hieruit volgt dat  $BP = BA - PA = \frac{3}{5}r\sqrt{5}$  en  $\frac{BP}{PA} = \frac{3}{2}$ .

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Bram de Beer van **HRO** in Ouderkerk aan de IJssel, Bruin Benthem te Zutphen, P. Dekker van het **Erasmus College** te Rotterdam, Peter Deleu te Hulste (België), Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk, Kim Peerenboom van het **Lorentz Casimir Lyceum** te Son en Breugel en Tim Wouters van **Vrij Katholiek Onderwijs** te Opwijk (België).

De boekenbon gaat naar Kim Peerenboom.



door **Dion Gijswijt**

# De post

## Magisch pentominovierkant

In de problemenrubriek van het juninummer werd gevraagd om van vijf pentomino's waarvan de vierkantjes een getal dragen een magisch vierkant te leggen. Voor de leerlingen van 2IW van het *Technisch Instituut Depoorter* te Ronse (België) was dit een koud kunstje. Ze stuurden de volgende oplossing.

28

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    |    | 65 |
| 24 | 5  | 6  | 12 | 18 | 65 |
| 15 | 16 | 22 | 3  | 9  | 65 |
| 1  | 7  | 13 | 19 | 25 | 65 |
| 17 | 23 | 4  | 10 | 11 | 65 |
| 8  | 14 | 20 | 21 | 2  | 65 |
| 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 |

Vorig jaar hadden de leerlingen namelijk al samen met hun lerares *Odette de Meulemeester* alle mogelijkheden onderzocht om een vierkant te vullen met vijf van de twaalf pentomino's. Ze kwamen in totaal op 107 mogelijkheden.

## Taalkundig tellen

In het augustusnummer gaven we een bewijs dat de puzzel van *Hans Melissen* uit het juninummer geen oplossing heeft.

t a a l k  
u n d i g +  
t e l l e n

Het is niet mogelijk om aan elk van de tien letters een ander cijfer toe te kennen zo dat de optelling klopt. De redactie was daarom nogal verbaasd toen ze zowaar een **juiste oplossing** van deze puzzel ontving van *Jaap Bak*. Hoe kan dat? Wel, in de opgave was impliciet verondersteld dat de letter 't' niet nul mag zijn. Als 't' wel nul mag zijn, dan is er de volgende juiste oplossing.

0 3 3 2 1  
5 8 9 4 7 +  
0 6 2 2 6 8

Hier kunnen de 1 en de 7 nog worden verwisseld voor een tweede oplossing.

## Vier op een rij

*Peter Deleu* maakte ons attent op een programma dat *Vier op een rij* speelt en daarbij gebruik maakt van de vondsten van Victor Allis (zie het augustusnummer). Het programma heet *Velena* en is te vinden op het volgende adres:

<http://www.ce.unipr.it/~gbe/velena.html>.

Zelf heeft hij ook een programma in Java geschreven dat te vinden is op zijn website: <http://members.tripodnet.nl/peterdeleu/>.



# OPLOSSINGEN NR 1

## Oplossingen Kleine nootjes

### Lichtschakelaar

Zet twee van de drie schakelaars vijf minuten aan. Zet dan een van de twee uit en loop snel naar boven. De lamp die brandt, hoort bij de schakelaar die aan staat. Van de twee andere niet-brandende lampen, is er een nog warm. De nog warme lamp hoort bij de schakelaar die je voordat je naar boven ging uitgedaan hebt.

### Nattigheid

Een handdoek

### Lotte vertelt

Stel Lottes leeftijd gelijk aan  $x$ . Lotte zegt dan dat  $2(x + 2) + 3(x + 3) = 6x$ . Uitwerken geeft  $5x + 13 = 6x$ , dus  $x = 13$ .

### Hoofdhaar

Er zijn maximaal 10021 inwoners, met respectievelijk 0, 1, 2, ..., 10020 haren op hun hoofd. Meer inwoners kan niet, want dan krijg je een inwoner die evenveel of meer haren op zijn hoofd heeft dan er inwoners zijn.

### Zes negens

$99\frac{99}{99} = 100$  of  $9 \times 9 + 9/9 + 9 + 9 = 100$

# ADVERTENTIE

Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren, zoekt:

## vrijwilligers (m/v)

Voor de bureauredactie zoekt Pythagoras per direct vrijwilligers met affiniteit voor wiskunde, die hun steentje willen bijdragen aan de totstandkoming van een enthousiasmerend tijdschrift.

### Taken:

- het verrichten van administratieve werkzaamheden
- het afhandelen van (lezers)correspondentie
- het ondersteunen van de eindredactie met het opmaakklaar maken van de door de redactie aangeleverde kopij
- het opzetten en uitvoeren van promotie-acties

**Standplaats:** Amsterdam (VU) of Leiden (UL)

### Vergoeding:

Voorlopig wordt alleen een reis- en onkostenvergoeding geboden

### Gevraagd:

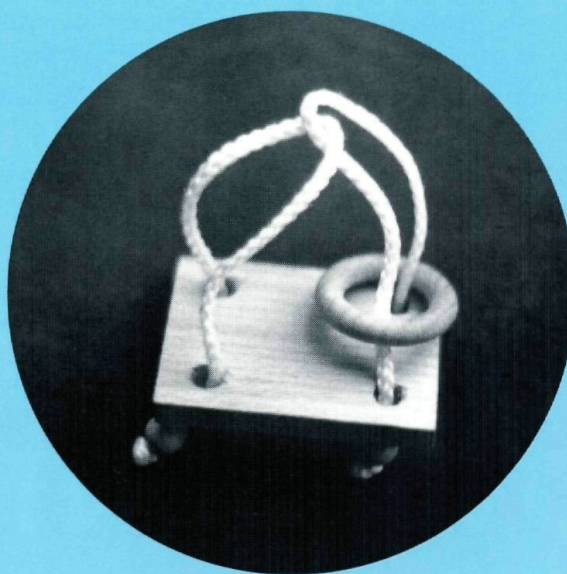
- affiniteit met de doelstelling van Pythagoras: jongeren kennis laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde
- goede beheersing van de Nederlandse taal
- communicatieve vaardigheden
- kunnen omgaan met computers (tekstverwerking)

### Meer informatie:

Chris Zaal, 071-5277121,  
zaal@math.leidenuniv.nl



# R I N G P U Z Z E L



30

door **Herman Alink**

Voor deze puzzel heb je nodig: een stukje hout (dikte ongeveer 1 cm), een nylonkoord (lengte 48 cm, doorsnede 3 mm), vier houten kralen (diameter 15 mm) en een houten ring (diameter 3 à 4 cm). Deze zijn allemaal bij de betere doe-het-zelfzaak te vinden.

## **Zelf maken**

Zaag het stukje hout in de vorm van een rechthoek met zijden van 4 en 6 cm. Boor op de vier hoekpunten een gat met een diameter van 8 mm. Knip het stuk nylonkoord in twee koorden van elk 24 cm lang. Leg in een uiteinde van een van de nylonkoorden een knoop en rijg er een kraal aan. Deze kraal is te groot om door de geboorde gaten te kunnen en heeft zelf een te klein gat om de gelegde knoop door te

laten. Haal nu het nylonkoord door twee van de geboorde gaten en bevestig (door middel van een knoop) aan het andere uiteinde van de draad ook een kraal. Het nylonkoord zit nu vast aan het stukje hout; aan de onderzijde twee kralen en aan de bovenzijde een lus. Haal deze lus door de houten ring. Het tweede stuk koord wordt - na het onder het eerste stuk koord gehaald te hebben - op dezelfde manier door de twee andere boorgaten bevestigd.

## **Aan de slag**

De houten ring zit nu vast. Het is uiteraard de bedoeling deze los te halen zonder doorknippen of losknopen. De oplossing staat in het volgende nummer van Pythagoras. Veel plezier!



# NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 2002

door **Dion Gijswijt**

**Deelname aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade staat open voor iedereen. Veel wiskunde hoeft je daarvoor niet te kennen; met behulp van je gezonde verstand zijn alle opgaven goed te maken.**

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd in twee ronden voor leerlingen van havo en vwo. De eerste ronde wordt op school georganiseerd. De beste leerlingen gaan door naar de tweede ronde, die medio september in Eindhoven gehouden wordt. Uit de winnaars van de tweede ronde wordt een team van zes leerlingen samengesteld dat Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2003 in Japan mag vertegenwoordigen. Zowel in 2000 in Korea als in 2001 in de Verenigde Staten wist het Nederlandse team twee bronzen medailles en een eervolle vermelding te winnen.

## **Eerste ronde**

De eerste ronde vindt plaats op **vrijdag 18 januari 2002**. Je krijgt twee uur de tijd om de antwoorden te vinden bij negen opgaven. Er zijn opgaven in twee verschillende niveaus (A en B). Op deze pagina zie je enkele voorbeelden van de eerste ronde van vorig jaar.

## **Meer informatie**

Nadere inlichtingen over de Wiskunde Olympiade kun je krijgen bij de secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade:

Fred Bosman / Citogroep,

Postbus 1034

6801 MG Arnhem

telefoon: 026 3521294 / fax: 026 3521356

e-mail: fred.bosman@citogroep.nl.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft ook een website:

<http://olympiads.win.tue.nl/nwo/>

## **Voorbeeldopgaven**

Hier vind je enkele voorbeelden van opgaven uit de eerste ronde. De eerste komt uit categorie A, de tweede uit categorie B.

1. De negen cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 worden allemaal precies eenmaal gebruikt om drie getallen van drie cijfers op te schrijven. Wat is de kleinst mogelijke som van de drie getallen onder de voorwaarde dat in elk van de drie getallen het middelste cijfer het grootste is?

2. Bepaal het aantal factoren 2 in  $2001! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2000 \times 2001$ .



# Activiteiten

zaterdag 5 januari **Winnen met wiskunde**

Wintersymposium Wiskundig Genootschap  
Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Amersfoort  
<http://www.cs.rug.nl/~bakker/WG/>

vrijdag 18 januari **1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002**

op alle middelbare scholen in Nederland  
<http://olympiads.win.tue.nl/nwo>

zaterdag 19 januari **Mathematische modelleercompetitie Maastricht**

<http://www.math.unimaas.nl>

vrijdag 1 en zaterdag 2 **Nationale Wiskunde Dagen**

februari Congrescentrum de Leeuwenhorst, Noordwijkerhout  
<http://www.fi.uu.nl/nwd>

zaterdag 9 maart **Studiefestival Universiteit Leiden**

Pieterskerk, Leiden  
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>

zaterdag 16 maart **Voorlichtingsdag 5/6-vwo**

Universiteit Utrecht  
tel (030) 253 26 70 of [studievoorlichting@csc.usc.uu.nl](mailto:studievoorlichting@csc.usc.uu.nl)

vrijdag 22 en zaterdag 23 **Finale Wiskunde A-lympiade**, Garderen

maart <http://www.fi.uu.nl/Alympiade>

vrijdag 22 maart **Kangoeroewedstrijd**

op alle middelbare scholen in Nederland  
<http://www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe>

donderdag 4 en vrijdag 5 **38e Nederlands Mathematisch Congres**

april TU Eindhoven  
<http://www.win.tue.nl/nmc2002>

vrijdag 12 april **Open Dagen Universiteit Leiden**

Open huis bij de wiskundeopleiding  
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>



### Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskundeafdelingen van de Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit Amsterdam en Universiteit Leiden.



Universiteit van  
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit  
Leiden

### Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

### Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

**telefonisch:** 0522 855175,

**per fax:** 0522 855176,

**via Internet:** [www.science.uva.nl/misc/pythagoras/](http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/)

**schriftelijk** (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

### Tarieven 2001-2002

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost f 39,50/17,92 Euro. Losse nummers kosten f 8,50 / 3,86 Euro.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België BF 850,- / 21,07 Euro

Pythagoras buitenland f 54,50 / 24,73 Euro

Pythagoras én Archimedes f 69,50 / 31,54 Euro

Pythagoras én Archimedes België BF 1470,- / 36,44 Euro

Pythagoras én Archimedes buitenland f 83,50 / 37,89 Euro

### Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

### Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Bulkabonnement Nederland: f 27,50 / 12,48 Euro per jaar.

Bulkabonnement België: BF 650,- / 16,11 Euro per jaar.

Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.

De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

### Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Leerlingabonnement Nederland: f 32,50 / 14,75 Euro per jaar.

Leerlingabonnement België : BF 750,- / 18,59 Euro per jaar.

Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd.

Het leerling-abonnement is een doorlopend abonnement.

Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboorte-datum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

### Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (f 25,- / 11,34 Euro excl. verzendkosten) jaargang 40 (f 39,50 / 17,92 Euro excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke stelling' (f 7,50 / 3,40 Euro excl. verzendkosten).



