



PYTHA GORAS

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

www

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofredactie

Marco Swaen

Eindredactie

Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw
Vrije Universiteit
Faculteit Exacte Wetenschappen
Divisie Wiskunde en Informatica
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;
1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.J. van den Brandhof is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. L.A.M. van den Broek** is docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **prof. dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **T. Goris** is medewerker op het Freudenthal Instituut te Utrecht. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **drs. M. Kindt** is onderzoeker op het Freudenthal Instituut te Utrecht en docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht. **prof. dr. H.C. Tijms** is hoogleraar econometrie aan de VU. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Callandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **ir. J.W. van der Vaart** is docent wiskunde aan het Sint-Maartens College te Voorburg. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

OMSLAG

Rob en Sandra van Wijk die een prijs in de wacht sleepten bij de prijsvraag van oktober 2001

INHOUD

Er verandert dit jaar veel bij Pythagoras. Het kopijadres verhuisde met ingang van het oktobernummer naar de VU. In het decembernummer stelden we de nieuwe eindredacteur voor. In dit nummer presenteren we de nieuwe hoofdredacteur. Per 1 januari 2002 is dat Marco Swaen, een wiskundige met een brede achtergrond. Hij is gepromoveerd in de logica en is tegenwoordig wiskundedocent in het middelbaar onderwijs en aan de lerarenopleiding. De nieuwe hoofdredacteur wordt gesponsord door de UvA. De redactie wenst Marco veel succes!

1

- | | | | |
|---------|-----------------------------------|---------|--------------------------|
| 2 - 3 | Kleine nootjes | 24 - 25 | Pythagoras Olympiade |
| 4 - 7 | Tovervierkanten | 26 - 27 | Problemen – Oplossingen |
| 8 - 13 | Penrose tegels | 28 - 29 | Een verjaardagsprogramma |
| 14 - 15 | Het verdraaide bewijs van Huygens | 30 | Oplossingen nr. 2 |
| 16 - 21 | Hoofdprijs: twee auto's! | 31 | Advertentie |
| 22 | De post | 32 | Activiteiten |
| 23 | Lopers op de loop | | |

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis kan
oplossen.
De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2



Gewichten

Je hebt zes gewichten. Eén paar rode, één paar witte en één paar blauwe. In elk paar is het ene gewicht iets zwaarder dan het andere, maar verder zijn ze niet van elkaar te onderscheiden. De drie zware gewichten (van elke kleur één) wegen allemaal hetzelfde. Dat geldt ook voor de drie lichte. Hoe kun je in twee afzonderlijke wegingen op een balans uitmaken wat het zwaarste gewicht in elk paar is?

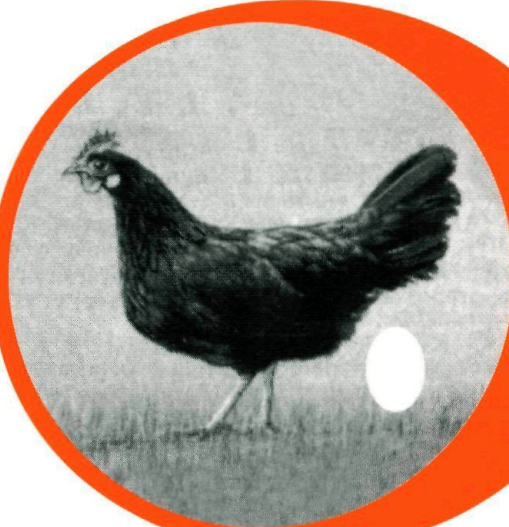
Kop of munt

Iemand gooit 50 keer met een muntstuk en 50 keer gooit hij 'munt'. Wat is de kans dat de 51-ste worp 'kop' is?
(Hans Finkelberg)



Zandlopers

Je hebt twee zandlopers.
De ene meet precies 7 minuten,
de andere precies 11 minuten. Hoe
kun je met beide zandlopers 15
minuten afmeten?



Eierdoos

Een doos met 6 eieren weegt
500 gram. Dezelfde doos, maar
dan met 2 eieren weegt 200 gram.
Hoeveel weegt de lege doos?

Vreemd voedsel

De buitenkant gooi je weg en
je kookt de binnenkant. Daarna
eet je de buitenkant op en gooi je
de binnenkant weg. Wat is het
dat je gegeten hebt?





door **Jean Belle**

4

Een schaakbord is vierkantvormig en is onderverdeeld in 64 kleinere vierkanten, de *velden* van het schaakbord. Alle rijen, alle kolommen en de beide diagonalen omvatten elk 8 velden. Als we de natuurlijke getallen 1 tot en met 64 zó op de 64 velden rangschikken dat de som van de getallen in elke rij, in elke kolom en in elke diagonaal dezelfde is, dan heet deze getallenfiguur een *tovervierkant*. Een tovervierkant hoeft natuurlijk niet per se uit $8 \times 8 = 64$ velden te bestaan. Er bestaan ook kleinere en grotere tovervierkanten. Men onderscheidt even en oneven tovervierkanten al naar gelang het aantal velden even of oneven is. Een tovervierkant wordt ook wel een *magisch kwadraat* of een *magisch vierkant* genoemd.

Een tovervierkant van C.J. Taale

De Nederlander C.J. Taale heeft vele tovervierkanten met 64 velden gemaakt. In figuur 1 zien we een van zijn tovervierkanten. De som van de getallen 1 tot en met 64 is gelijk aan $\frac{1}{2} \times 64 \times (1 + 64) = 2080$. De som van de getallen in elk van de 8 rijen is dus $2080 : 8 = 260$. Zo geldt voor de bovenste rij in figuur 1: $3 + 50 + 55 + 6 + 48 + 29 + 28 + 41 = 260$. Deze getalwaarde geldt ook voor de som van de getallen in elke kolom en op beide diagonalen. Tovervierkanten hebben vaak hoogst merkwaardige eigenschappen.

Zo ook het tovervierkant in figuur 1. Als we het vierkant in vier kleinere vierkanten verdelen met $4 \times 4 = 16$ velden, dan blijkt voor elk van deze kleinere vierkanten de som van de getallen in elke rij, in elke kolom en in elke diagonaal gelijk te zijn aan $\frac{1}{2} \times 260 = 130$. Verdelen we het tovervierkant in zestien kleinere vierkanten met $2 \times 2 = 4$ velden, dan blijkt de som van de daarin voorkomende getallen ook gelijk aan 130 te zijn.

Het kleinste tovervierkant

Het is onmogelijk om een tovervierkant met $2 \times 2 = 4$ velden te maken. Het kleinste tovervierkant is oneven en bevat $3 \times 3 = 9$ velden. Hoe moeten in dit vierkant de getallen 1 tot en met 9 worden neergezet? Dat gaan we nu uitzoeken. De som van de getallen 1 tot en met 9 bedraagt $\frac{1}{2} \times 9 \times (1+9) = 45$. Elke rij heeft dus de som $45 : 3 = 15$. Dit geldt uiteraard ook voor de drie kolommen en de twee diagonalen. Er zijn acht verschillende rangschikkingen (permutaties) van drie getallen uit de rij getallen 1 tot en met 9 die 15 als som hebben, namelijk (1,5,9), (1,6,8), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7) en (4,5,6). We zien dat de 5 hier viermaal in voorkomt. Dit getal moet dus in het midden staan. De cijfers 2, 4, 6 en 8 komen driemaal voor en moeten dus de hoekvelden bezetten, enzovoort. Zodoende krijgen we het

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figuur 2a en b.
Een regelmatig tovervierkant: bij draaiing over 180° gaat het linker vierkant over in het vierkant hier onder.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3	50	55	6	48	29	28	41
45	32	25	44	2	51	54	7
22	39	34	19	57	12	13	64
60	9	16	61	23	38	35	18
40	21	20	33	11	58	63	14
10	59	62	15	37	24	17	36
49	4	5	56	30	47	42	27
31	46	43	26	52	1	8	53

Figuur 1. Het tovervierkant van C.J. Taale

$$\begin{array}{c} 4 \times \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ a \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + 1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 10 & 15 \\ \hline 14 & 11 & 5 & 4 \\ \hline 7 & 2 & 16 & 9 \\ \hline 12 & 13 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

a
b
c

Figuur 3. De constructie van een tovervierkant

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Figuur 4. Het tovervierkant van Albrecht Dürer

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Figuur 5. Het tovervierkant van de zon

6

tovervierkant in figuur 2a.

Het maken van tovervierkanten met 5×5 , 7×7 , ... velden is volgens de hier gevolgde permutatiemethode zeer tijdrovend en bij hogere waarden praktisch ondoenlijk. Taale heeft met behulp van hulpvierkanten een methode aangegeven om dergelijke oneven tovervierkanten samen te stellen.

Regelmatige tovervierkanten

Men noemt een tovervierkant *regelmatig* als bij draaiing over 180° de som van de getallen in de velden die in elkaar overgaan, steeds dezelfde is. Deze som is gelijk aan het totaal aantal velden plus 1, omdat de velden met het kleinste en het grootste getal door de draaiing in elkaar overgaan. Het kleinste tovervierkant blijkt regelmatig te zijn. Bij draaiing over 180° gaat figuur 2a over in figuur 2b. De getallen in de velden die in elkaar overgaan, leveren steeds de som 10 op ($2 + 8 = 10$, $9 + 1 = 10$, enzovoort).

Het kleinste even tovervierkant

Zoals we al opmerkten, bestaat er geen tovervierkant met $2 \times 2 = 4$ velden. Het kleinste even tovervierkant bezit $4 \times 4 = 16$ velden. De getallen 1 tot en met 16 moeten hierin zó worden gerangschikt, dat de som in elke rij, in elke kolom en in elke diagonaal

een kwart is van de som van alle in het tovervierkant voorkomende getallen, 34 dus. We laten nu zien, hoe de zestien cijfers moeten worden geplaatst. We maken gebruik van twee hulpvierkanten *A* en *B* (zie figuur 3a en 3b), elk van $4 \times 4 = 16$ velden. In hulpvierkant *A* worden de getallen 0, 1, 2 en 3 zodanig in de rijen en kolommen geplaatst, dat de som in elke rij, elke kolom en elke diagonaal gelijk is aan 6.

Hulpvierkant *B* verkrijgt je door hulpvierkant *A* om de diagonaal van linksboven naar rechtsonder om te klappen (de n -de kolom wordt dus de n -de rij). Met behulp van deze twee hulpvierkanten kunnen we nu de velden van het kleinste even tovervierkant invullen. Als we bijvoorbeeld het getal in het veld van rij 1 en kolom 4 willen weten, zoeken we de overeenkomstige velden in de hulpvierkanten *A* en *B* op. Daarin staan respectievelijk 3 en 2. Als we dat getal 3 (uit hulpvierkant *A*) nu met 4 vermenigvuldigen, er vervolgens dat getal 2 (uit hulpvierkant *B*) bij optellen en tenslotte er nog eens 1 bij optellen, dan plaatsen we de uitkomst hiervan, 15 dus, in het veld van rij 1 en kolom 4 van ons tovervierkant. Als we de hulpvierkanten *A* en *B* als matrices beschouwen, dan kunnen we in het algemeen stellen dat voor het te construeren tovervierkant *T* het vol-

gende geldt: $4A + B + I = T$, waarbij I een 4 bij 4 matrix is bestaande uit louter enen. In figuur 3c zie je het tovervierkant T .

Opdracht. Ga na dat het hier gegeven recept altijd een tovervierkant oplevert.

Andere even tovervierkanten

Een van de oudst bekende even tovervierkanten is dat van Albrecht Dürer (1471-1528). Deze Duitse kunstenaar uit Neurenberg vereeuwigde in een kopergravure een tovervierkant van 16 velden, zie figuur 4. Maar er zijn meerdere oude tovervierkanten bekend en het is de vraag welke het eerst uitgedacht is. De Kabbalisten (aanhangers van de mystieke Joodse leer de Kabbala) kenden aan de zon, de maan en de hun bekende planeten elk een tovervierkant toe. Dat van de zon heeft $6 \times 6 = 36$ velden, zie figuur 5. Het is niet bekend wanneer en hoe ze gemaakt zijn. Vermoedelijk in de bloeiperiode (dertiende eeuw) van deze Joodse leer. In juli 1999 bezocht de schrijver van dit artikel in Centraal China de oude Chinese hoofdstad Xi'an, nu de hoofdstad van de provincie Shaanxi. In een van de zalen van het grote museum aldaar hing tegen de wand een afbeelding van een tovervierkant, zie figuur 6. Het is dat er een vertaling van de oude Chinese cijferkarakters in onze moderne tekens stond, anders had ik het niet eens opgemerkt... Het schijnt dat dit tovervierkant uit de regeerperiode 1271-1368 van een der Chinese keizers was. Wie het eerst een tovervierkant heeft samengesteld, is een vraag die voor ons wel altijd onbeantwoord zal blijven. Maar dat men al heel vroeg tovervierkanten kende, is zeker.

Een merkwaardige eigenschap

Tegen het eind van de negentiende eeuw ontdekte Ray dat er tovervierkanten bestaan waarvan de som in elke rij, in elke kolom en in elke diagonaal eveneens dezelfde is als de getallen in de velden worden vervangen door hun kwadraten. Dat van Taale in figuur 1 is een tovervierkant met deze bijzondere eigenschap. De som van de kwadraten van bijvoorbeeld de bovenste rij is

$9 + 2500 + 3025 + 36 + 2304 + 841 + 784 + 1681 = 11180$, die van de linker randkolom $9 + 2025 + 484 + 3600 + 1600 + 100 + 2401 + 961 = 11180$ en die van de diagonaal lopend van linksboven naar rechtsonder $9 + 1024 + 1156 + 3721 + 121 + 576 + 1764 + 2809 = 11180$. Steeds vind je het getal 11180.

Meer informatie

Wil je meer weten over tovervierkanten?

Raadpleeg dan het boek *De macht van het getal* van dr. F. Schuh (uitgave: N.V. Segboer's Uitgevers-Maatschappij, Den Haag, 1949). Of kijk op een van de volgende internetpagina's:

<http://www-math.mit.edu/~hderksen/magic.html>

<http://mathforum.org/alejandre/magic.square/adler/adler.whatsquare.html>

http://www.wi.leidenuniv.nl/~gusz/Flying_Circus/3.Demos/Java/MagicSquare

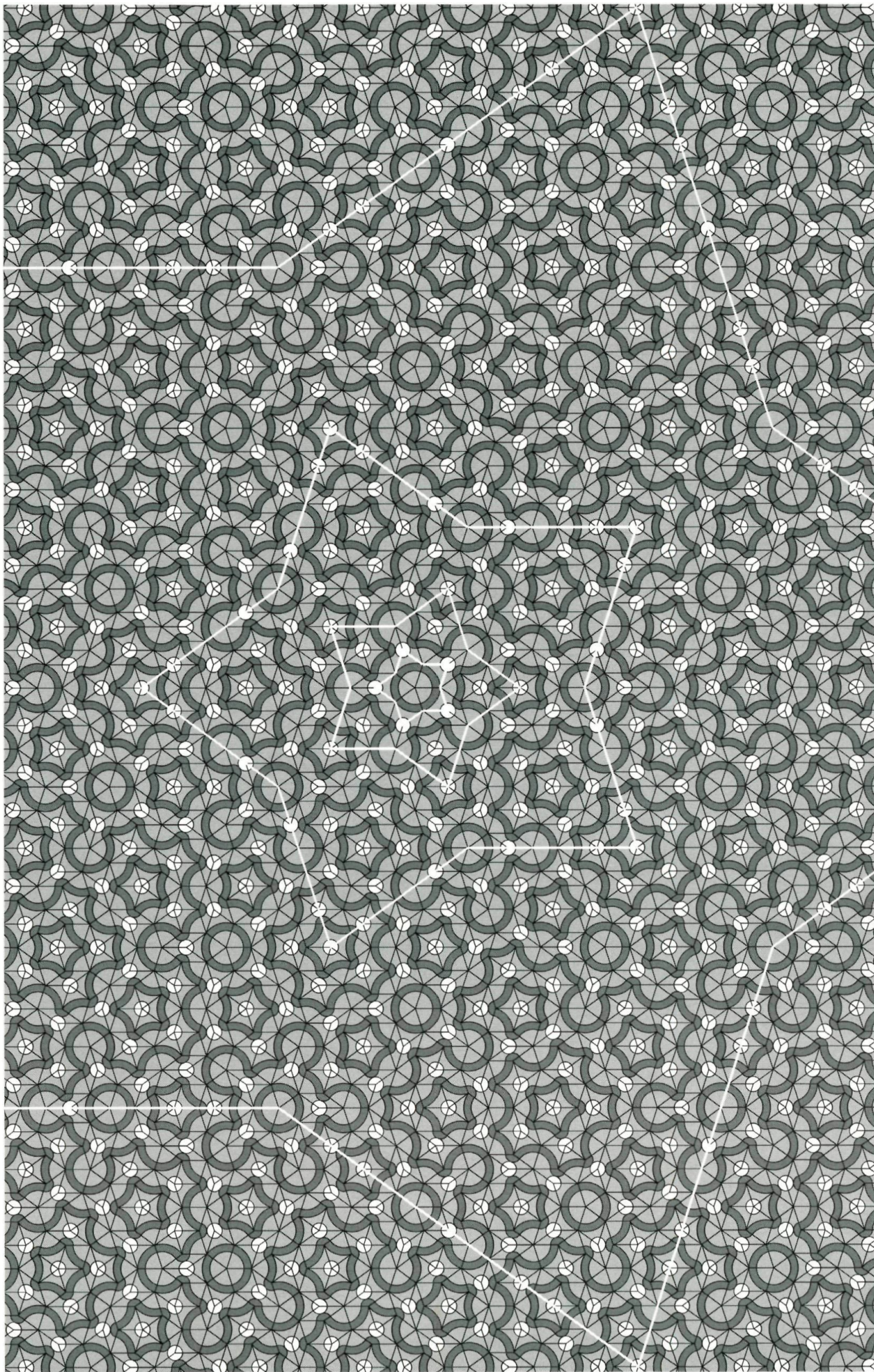
http://www.maa.org/mathland/mathland_10_14.html

De auteur is in augustus vorig jaar overleden.

7



Figuur 6. Een Chinees tovervierkant



door Jan van de Craats

Penrose-se-tegels

De Gulden Snede,
deel III

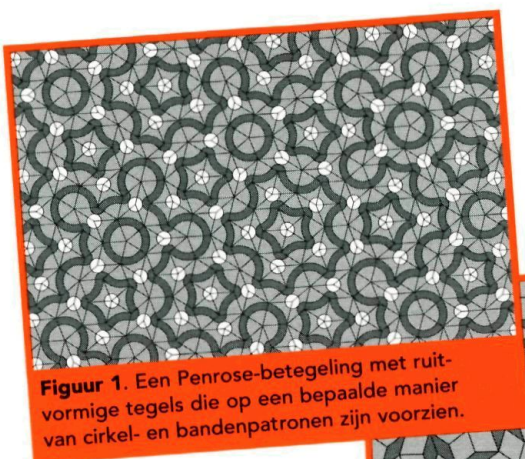
9

In figuur 1 (zie pagina 10) zie je een voorbeeld van een vlakvulling die een kleine dertig jaar geleden bedacht is door de Britse wiskundige en theoretisch fysicus Roger Penrose. Zulke vlakvullingen heten sindsdien *Penrose tilings*, ofwel Penrose-betegelingen. Ze kunnen verschillende gedaanten aannemen, afhankelijk van de

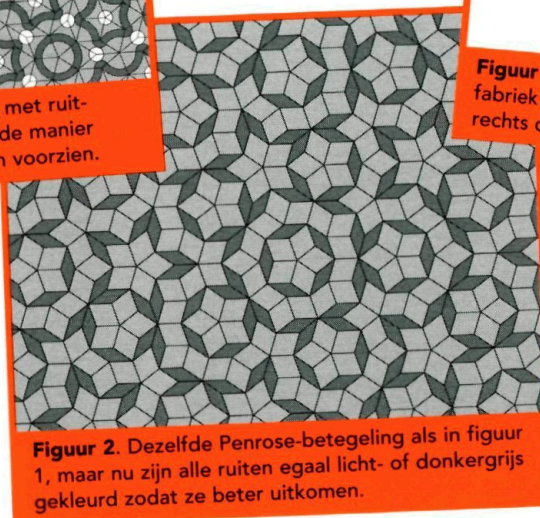
vorm van de tegels die gebruikt worden en de patronen die erop getekend zijn. In figuur 1 bestaan die patronen uit donkere banden en witte cirkeltjes, maar de tegels zelf zijn ruiten: dikke ruiten met hoeken van 72 en 108 graden en dunne ruiten met hoeken van 36 en 144 graden.

Linkerpagina: Figuur 9.

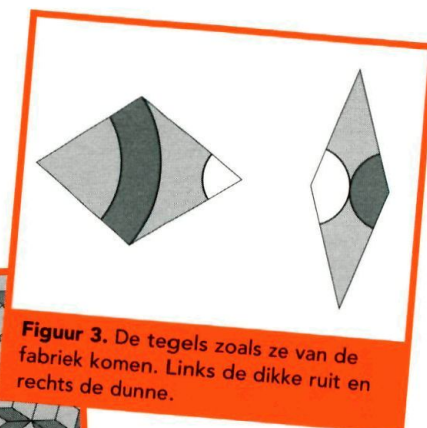
De sterren van figuur 8 als onderdeel van een oneindige, vijfvoudig symmetrische Penrose-betegeling.



Figuur 1. Een Penrose-betegeling met ruitvormige tegels die op een bepaalde manier van cirkel- en bandenpatronen zijn voorzien.



Figuur 2. Dezelfde Penrose-betegeling als in figuur 1, maar nu zijn alle ruiten egaal licht- of donkergrijs gekleurd zodat ze beter uitkomen.



Figuur 3. De tegels zoals ze van de fabriek komen. Links de dikke ruit en rechts de dunne.

Gekleurde tegels

Figuur 2 laat precies dezelfde betegeling zien, maar nu zijn alle tegels egaal gekleurd, zodat de vorm ervan duidelijker uitkomt. Je ziet dat er inderdaad twee soorten zijn: dikke en dunne ruiten. De cirkel- en bandenpatronen in figuur 1 zien er grillig uit, maar als je goed kijkt, kun je zien dat alle dunne ruiten op *precies dezelfde* manier gekleurd zijn, en dat hetzelfde geldt voor de dikke ruiten. In figuur 3 zijn die kleuringen aangegeven. In feite heeft de tegelfabriek dus maar twee soorten tegels geproduceerd. In Penrose-betegelingen moeten ze zo aan elkaar gelegd worden, dat de patronen over de tegelranden heen doorlopen.

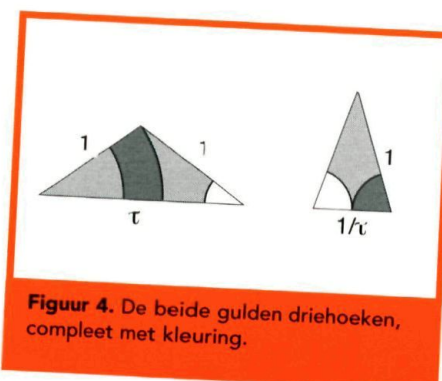
De Penrose-betegelingen van de figuren 1 en 2 roepen de volgende vragen op:

1. Hoe kun je zo'n patroon maken?
2. Kun je zo'n patroon op net zo'n soort manier ook buiten de getekende rechthoek voortzetten?
3. Kun je het *gehele*, naar alle kanten oneindig ver uitgebreide vlak op zo'n manier betegelen?

In dit artikel zullen we die vragen beantwoorden.

Periodieke vlakvullingen

In de vorige aflevering van onze serie over de gulden snede zijn we al een verwante vlakvulling tegengekomen, namelijk het Moorser tegelpatroon uit Sevilla, dat eveneens opgebouwd was uit ruiten met hoeken van 72 en 108 graden. Maar voor die vlakvulling waren de drie vragen gemakkelijk te beantwoorden. Het patroon was namelijk *periodiek*, dat wil zeggen dat eenzelfde stuk ervan zich via translaties (evenwijdige verschuivingen) telkens herhaalde. Kijk nu echter weer eens naar de figuren 1 en 2. Ook al zijn er maar twee soorten tegels, er is geen periodiciteit te zien. Het is daarom helemaal niet duidelijk of – en zo ja, hoe – je het patroon buiten de randen van de rechthoek voort kunt zetten. We zullen laten zien dat dit wel degelijk kan, maar niet door het patroon periodiek te maken. Men kan namelijk bewijzen dat Penrose-betegelingen *niet* periodiek zijn!



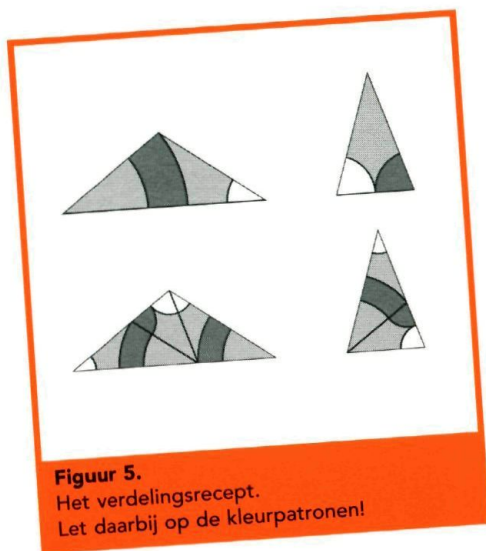
Figuur 4. De beide gulden driehoeken, compleet met kleuring.

Gulden driehoeken

De gekleurde ruiten in figuur 3 zijn allebei symmetrisch. Snijden we ze langs hun horizontale symmetrie-as door, dan krijgen we de twee gulden driehoeken van figuur 4. Als de oorspronkelijke ruiten zijden van lengte 1 hebben, dan heeft de stomphoekige gulden driehoek een horizontale zijde van lengte τ , waarbij

$$\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.618 \dots$$

het gulden-snedegetal is. De horizontale zijde van de scherphoekige gulden driehoek heeft lengte $1/\tau$.



Figuur 5.
Het verdelingsrecept.
Let daarbij wel goed op de kleurpatronen!

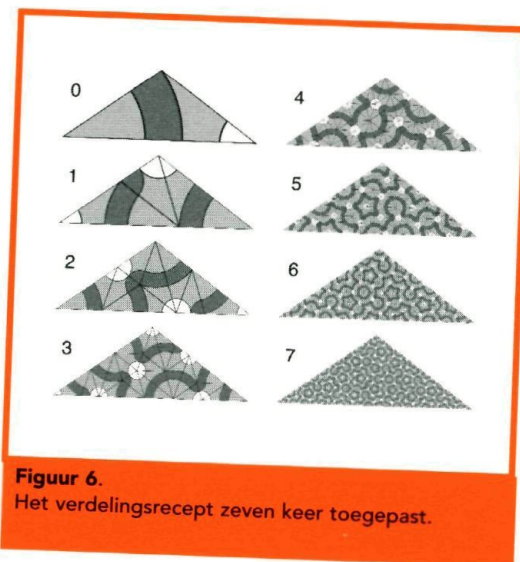
Het verdelingsrecept

Het basisidee achter de Penrose-betegeling van figuur 1 is het verdelingsrecept dat je in figuur 5 in beeld gebracht ziet. Je kunt elke gulden driehoek namelijk in kleinere gulden driehoeken onderverdelen. De stomphoekige driehoek in drieën: twee stomphoekige driehoeken en een scherphoekige, en de scherphoekige driehoek in tweeën: een van elke soort. Let daarbij wel goed op de kleurpatronen!

De verdeling in kleinere driehoeken en de kleuring ervan moeten precies bij de oorspronkelijke kleuring van de twee grote driehoeken passen. En als de grote driehoek oorspronkelijk de gespiegelde kleuring heeft, moet je ook een gespiegelde verdeling toepassen, met spiegelbeeldig aangebrachte cirkel- en ringstukken.

Verdergaande verdelingen

Pas nu het verdelingsrecept herhaaldelijk toe, uitgaande van één stomphoekige gulden driehoek. In figuur 6 zie je zeven stappen in beeld gebracht. Het verdelingsrecept zorgt er dan voor dat alle cirkel- en ringstukken goed op elkaar aansluiten.



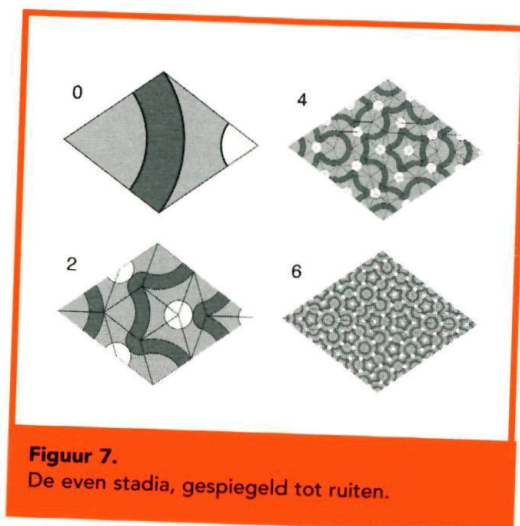
Figuur 6.
Het verdelingsrecept zeven keer toegepast.

Ruiten en sterren

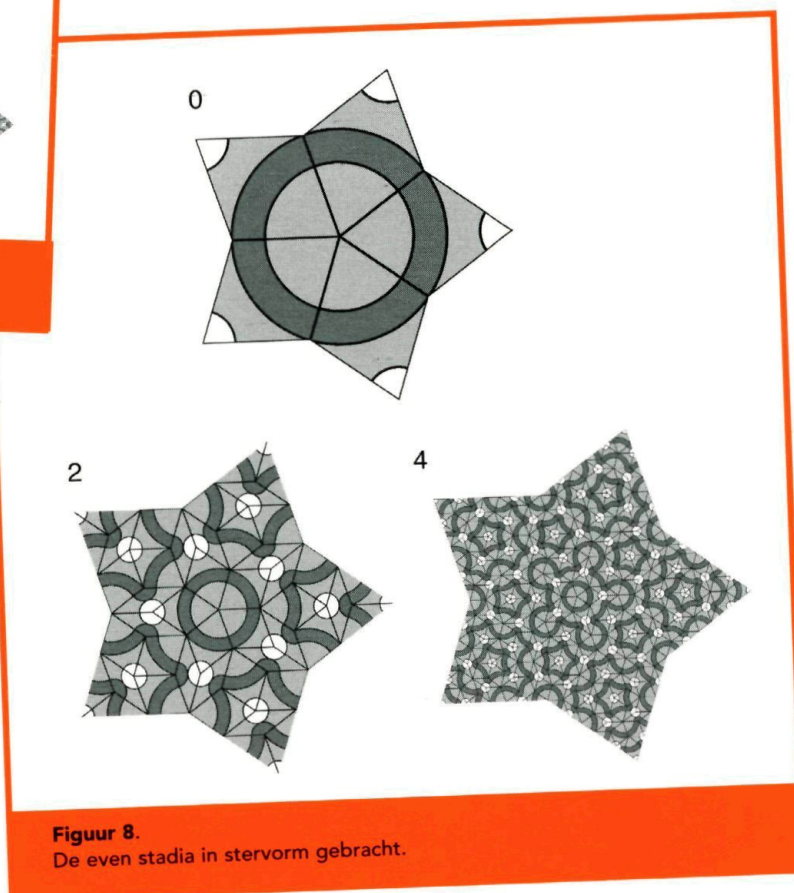
Als we de acht grote driehoeken van figuur 6 ook nog spiegelen in hun horizontale as, ontstaan er acht dikke ruiten. Kijk naar figuur 7, waarin we echter om redenen die zodadelijk duidelijk worden, alleen maar de vier even stadia (0, 2, 4 en 6) getekend hebben.

Merk op dat de kleine scherp- en stomphoekige gulden driehoeken binnen zo'n ruit in symmetrische paren voorkomen die samen ruiten vormen met de kleuring van figuur 3. In figuur 7 hebben we de scheidingslijnen ertussen weggelaten zodat er, net als in figuur 1, verdelingen in dikke en dunne ruiten ontstaan.

Wanneer we de dikke ruiten vervolgens nog vier maal over 72 graden draaien om hun linkerpunt, krijgen we de 'ruitensterren' van figuur 8, waarin het cirkel- en bandenpatroon nog steeds aansluitend over alle ruitengrenzen heen blijft lopen.



Figuur 7.
De even stadia, gespiegeld tot ruiten.



Figuur 8.
De even stadia in stervorm gebracht.

12

En nu het gehele vlak

De drie ruitensterren in figuur 8 zijn even groot, maar de deelruiten waarin ze onderverdeeld zijn, worden steeds kleiner. We kunnen ze echter ook zo opblazen, dat de kleine ruiten binnen elke ster steeds dezelfde afmetingen krijgen. Bij elk volgend stadium betekent dat een vergrotingsfactor τ . In figuur 8 moet ster 2 dan met een factor τ^2 vermenigvuldigd worden en ster 4 met een factor τ^4 . Daarna past ster 0 precies binnen ster 2 en ster 2 precies binnen ster 4.

De even sterren vormen dus een rij waarvan elke volgende ster een uitbreiding is van zijn voorganger. Door dit uitbreidingsproces onbeperkt voort te zetten, ontstaat een Penrose-betegeling van het gehele vlak, zie figuur 9 op pagina 8. En je snapt inmiddels wel hoe we figuur 1 gemaakt hebben: door uit zo'n grote ster ergens een rechthoekig stuk te knippen.

Oneindig veel andere Penrose-betegelingen

We hebben je nu één manier laten zien om een Penrose-betegeling te maken van het gehele vlak. In feite zijn er oneindig veel verschillende manieren, en ook oneindig veel verschillende Penrose-betegelingen. Sommige hebben vijfvoudige draai- en spiegelsymmetrie (zoals degene die wij gemaakt hebben), andere tweevoudige spiegelsymmetrie, maar de meeste hebben helemaal geen symmetrie. En geen van alle zijn ze periodiek!

Zelf Penrose-tegels leggen

We hebben al gezegd dat een Penrose-betegeling een betegeling van het vlak is met de ruiten van figuur 3 waarbij de kleuren van de cirkel- en ringstukken overal netjes op elkaar aansluiten. Je kunt er zelf mee experimenteren als je van onze website de twee pagina's met ruitenpatronen download, op dik papier kopieert en uitknijpt.

Quasikristallen

Penrose-betegelingen hebben in de afgelopen jaren al heel wat onderzoeksvragen opgeworpen, niet in het minst door de ontdekking in 1984 van een nieuw soort kristalstructuur in de scheikunde, de zogenaamde *quasikristallen*. Het ging daarbij om kristallen die ontstonden bij snelle afkoeling van een gesmolten legering van aluminium en mangaan. Zulke kristallen laten op lokaal niveau vijfvoudige rotatiesymmetrie zien, iets dat kristallografen nog niet eerder hadden waargenomen. Sterker nog, ze waren ervan overtuigd dat zoiets onmogelijk was. Penrose-betegelingen en soortgelijke patronen in drie dimensies lijken er echter een goede verklaring voor te kunnen geven.

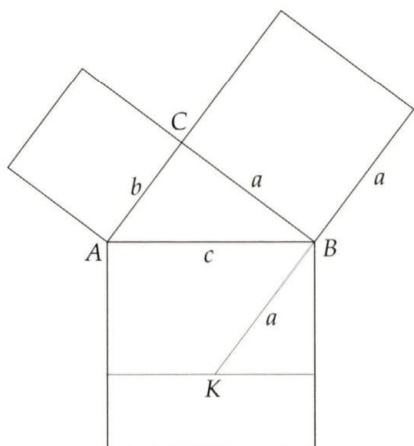
Vragen en opdrachten

1. We hebben onze Penrose-betegeling gemaakt door de *even* stadia uit figuur 6 tot ruitensterren uit te breiden. Het kan ook met de *oneven* stadia. Er ontstaat dan een andere Penrose-betegeling. Hoe ziet die betegeling eruit?
2. Tel het aantal stomphoekige en het aantal scherphoekige driehoeken in elk van de stadia van figuur 6. Kun je er algemene formules voor geven?
3. Kijk nu naar de *verhouding* tussen de aantallen stomphoekige en scherphoekige gulden driehoeken in de opvolgende stadia van figuur 6. Laat zien dat die verhouding nadert tot het gulden-snedegetal τ .
4. Ga na dat hetzelfde geldt voor de verhouding tussen de aantallen dikke en de dunne ruiten in de sterren uit figuur 8.
5. (Moeilijke vraag!) Hoe kun je uit het feit dat τ een *irrationaal* getal (dat wil zeggen: geen breuk) is, afleiden dat deze Penrose-betegeling niet periodiek kan zijn? (Een periodieke betegeling kan gevormd worden door een eindig patroon via translaties in verschillende richtingen voortdurend te herhalen.)

Het verdraaide bewijs van Huygens

Bewijzen van de stelling van Pythagoras, deel III

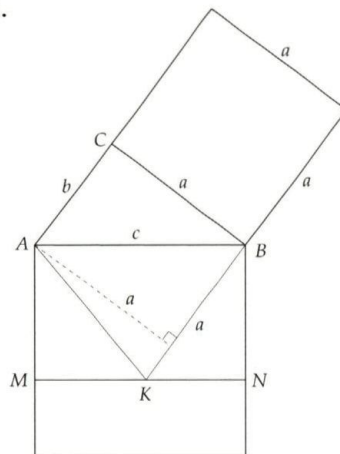
Christiaan Huygens' (1629-1695) bewijs van de stelling van Pythagoras is verwant aan het bewijs van Euclides, dat we in het vorige nummer hebben besproken. In Huygens' bewijs is het vierkant op de schuine zijde ook verdeeld in twee rechthoeken waarvan de oppervlakten gelijk zijn aan die van de andere twee vierkanten. Het vierkant wordt echter niet door een verticale lijn in twee delen gesplitst, maar door een horizontale: het is een verdraaid bewijs... verdraaid over 90° . Huygens verlengt, zoals in figuur 1, een zijde van het rechthoek met zichzelf en trekt door het eindpunt K een lijn evenwijdig aan de schuine zijde van de rechthoekige driehoek.



Figuur 1

Het bewijs

Het bewijs bestaat uit twee delen. Eerst wordt bewezen dat de oppervlakte van de bovenste rechthoek $MNBA$ (zie figuur 2) gelijk is aan de oppervlakte van het rechthoek vierkant.

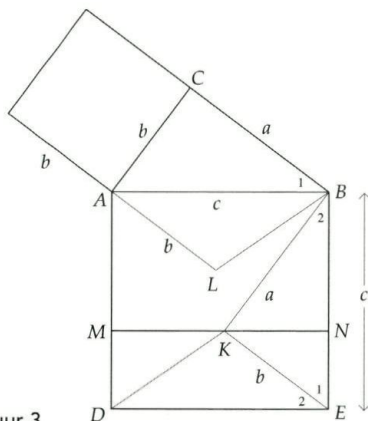


Figuur 2

Trek AK en een loodlijn vanuit A op KB , de gestippelde lijn in figuur 2. Deze loodlijn is evenwijdig aan BC en heeft dus lengte a . De oppervlakte van driehoek ABK is dus $\frac{1}{2}a^2$, waaruit volgt dat de oppervlakte van rechthoek $MNBA$ gelijk is aan a^2 en dat is weer gelijk aan de oppervlakte van het rechthoek vierkant. Het tweede deel van het bewijs verloopt heel anders. In het bewijs van Euclides was dat eenvoudiger: daar



konden we volstaan met een verwijzing naar het eerste deel van het bewijs.



Figuur 3

Verleng, zoals in figuur 3, een zijde van het linkervierkant met zichzelf en noem het eindpunt L . Verbind L met B en ook K met D en E . Nu bewijzen we eerst dat driehoek DEK congruent is met driehoek BAL . Driehoek EBK is congruent met driehoek ABC , want ze hebben de zijden met lengte a en c gemeenschappelijk en $\angle B_1 = \angle B_2$. Er geldt dus $EK = AC = b$. Daaruit volgt dat driehoek DEK congruent is met driehoek BAL , omdat $BE = c = DE$ en $\angle B_2 = 90^\circ - \angle E_1 = \angle E_2$. De oppervlakte van driehoek BAL is dus $\frac{1}{2}b^2$, analoog aan het eerste deel van het bewijs. De oppervlakte van drie-

hoek DEK is dus ook gelijk aan $\frac{1}{2}b^2$ en de oppervlakte van rechthoek $MNED$ is b^2 . Uit het eerste en tweede deel van het bewijs volgt dat $a^2 + b^2 = c^2$.

De ringen van Saturnus

Het karakteristieke van Huygens' bewijs is het begin: het verlengen van een zijde van het rechthoek met zichzelf en het trekken van een horizontale lijn door het eindpunt. Hoe Huygens op dit idee kwam, weten we niet. Hij heeft dit bewijs ook nooit gepubliceerd. Hij vond het kennelijk alleen maar een aardige puzzel en het is ook alleen maar terug te vinden in aantekeningen uit het jaar 1657. Huygens werkte aan veel belangrijker zaken die de topwiskundigen uit zijn tijd bezighielden. In 1651, hij was toen 22, kwam zijn eerste publicatie uit en die ging over de kwadratuur van nogal ingewikkelde krommen. Huygens was niet alleen een van de beste wiskundigen uit zijn tijd, maar ook op het gebied van de fysica en de astronomie deed hij baanbrekend werk. Een jaar vóór hij het hier gegeven bewijs optekende, had hij met een zelfgebouwde kijker, waarvan hij de voor die tijd bijzonder grote lens zelf geslepen had, de ringen van Saturnus ontdekt.



HOOFDPRIJS: TWEE AUTO'S!

door Jan van de Craats en Henk Tijms

Hoe zou je het vinden om op een goede dag met één lot twee auto's tegelijk te winnen? Dit overkwam een zekere Antonio Gallardo op 28 juli 1982 bij de Quebec Super Lotto in Canada. Puur geluk? Ongetwijfeld, maar hoe groot is eigenlijk de kans dat zoiets gebeurt? We zullen zien dat het heel goed nog eens zou kunnen gebeuren (als de regels inmiddels niet veranderd zijn...).

Spelregels

We beginnen met de spelregels. Het ging in feite om een extra prijs, buiten de normale lotto om. De Quebec Super Lotto verloot jaarlijks uit het niet-geclaimde prijzengeld 500 auto's als bonusprijzen onder de 2,4 miljoen ingeschreven deelnemers aan de lotto. De computer trekt daarvoor 500 maal een nummer uit de 2,4 miljoen registratienummers zonder erop te letten of een nummer al getrokken is. De ongesorteerde lijst van 500 winnende nummers wordt in de krant gezet. Op 28 juli had Antonio Gallardo de moeite genomen alle nummers na te lopen, en daarbij zijn eigen nummer twee maal aangetroffen. Dubbel bingo!

Speld in een hooiberg?

De loterijbazen haastten zich te verklaren dat Antonio de bekende speld uit de hooiberg getrokken moest hebben. Een official beweerde dat de kans ongeveer 1 op de 46 miljoen was dat het registratienummer van Antonio Gallardo twee of meer keer getrokken zou worden. Op zichzelf is dat juist,

maar het doet helemaal niet ter zake.

Het gaat om de kans dat er *één of ander* registratienummer minstens twee maal voorkomt onder de 500 random getrokken nummers, en dat is heel wat anders.

We zullen hieronder afleiden dat die kans ongeveer 5 procent is. Niet erg groot, maar toch een kans die niet te verwaarlozen is. Gemiddeld mag je verwachten dat het eenmaal in de twintig jaar raak is! (We zullen zien, over een half jaar...).

Hoe reken je zo'n kans uit? We zullen er twee formules voor geven: een exacte formule en een benaderingsformule die er op het eerste gezicht misschien wel moeilijk uitziet, maar die in de praktijk uitstekend blijkt te voldoen en die veel gemakkelijker toe te passen is.

Het verjaardagsprobleem

Eerst iets heel anders. In toepassingen van de wiskunde komt het vaak voor dat verschillende problemen in wezen op hetzelfde neerkomen. De oplossingsformules zijn hetzelfde, alleen de getallen die je invult zijn anders. Zoiets is er ook aan de hand met het lottoprobleem van hierboven, en het bekende *verjaardagsprobleem* dat ook al eens in Pythagoras behandeld is (december 1996): hoe groot is de kans dat in een willekeurige groep mensen minstens twee personen op dezelfde dag jarig zijn?

De meeste mensen schatten die kans veel te laag. Ze zijn heel verbaasd als ze horen

dat die kans al bij 23 personen groter dan een half is. Bij een voetbalwedstrijd is dus de kans al meer dan 50 procent dat er onder de twee maal elf spelers plus de scheidsrechter twee personen zitten die op dezelfde dag jarig zijn. Geloof je het niet? Laat je dan overtuigen door de afleidingen die we verderop in dit artikel zullen geven. Of gebruik je grafische rekenmachine om het probleem op te lossen. In het artikel op pagina 28 wordt uitgelegd hoe je een programma voor het verjaardagsprobleem schrijft.

De exacte formule

Hier laten we je alvast de formule zien. De kans op twee personen met eenzelfde verjaardag in een willekeurig samengestelde groep van m mensen, is gelijk aan

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{365}\right).$$

FORMULE 1

Hierbij hebben we gemakshalve aangenomen dat er geen schrikkeljaren zijn en dat alle dagen 'dezelfde kans' hebben om verjaardag te zijn, met andere woorden, dat geboortes gelijkmatig over het jaar verspreid zijn.

De benaderingsformule

Het is nog niet zo eenvoudig om deze formule op je rekenmachine in te typen, bijvoorbeeld voor $m = 23$. Daarom geven we ook de volgende formule, die weliswaar niet exact is, maar toch een heel goede benadering oplevert, althans wanneer m niet al te groot is.

$$p_m \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}m(m-1)/365}.$$

FORMULE 2

Deze laatste formule kun je wél gemakkelijk met je rekenmachine uitrekenen.

Het resultaat voor $m = 23$ is 0,5000017, vlak boven de 50 procent. Om je ervan te overtuigen dat die benaderingsformule inderdaad zo gek niet is, hebben we met de computer een tabel gemaakt waarin voor $m = 20, 21, 22, \dots, 30$ de met de exacte formule en met de benaderingsformule berekende waarden van p_m vermeld staan, allemaal op vijf decimalen afgerond.

m	p_m exact	p_m benaderd
20	0,41144	0,40581
21	0,44369	0,43749
22	0,47570	0,46894
23	0,50730	0,50000
24	0,53834	0,53053
25	0,56870	0,56041
26	0,59824	0,58951
27	0,62686	0,61773
28	0,65446	0,64499
29	0,68097	0,67120
30	0,70632	0,69633

Aliens op de planeet Pythagoras

Op de planeet Pythagoras in een ver zonnestelsel buiten onze melkweg telt een jaar d dagen. De intelligente *aliens* die er wonen hebben ook de kans uitgerekend op minstens twee gelijke verjaardagen in een groep van m soortgenoten, en als je de afleiding van formule 1 begrepen hebt, snap je direct dat zij op de volgende formule zijn uitgekomen:

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right) \left(1 - \frac{2}{d}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{d}\right).$$

FORMULE 3

Wanneer m veel kleiner is dan d , gebruiken zij de benaderingsformule

$$p_m \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}m(m-1)/d}$$

FORMULE 4

Inmiddels zul je misschien al door hebben dat je het loterijprobleem waar we mee begonnen zijn, kunt vertalen in een verjaardagsprobleem. Neem dan een 'jaar' van $d = 2,4$ miljoen dagen, en een groep van $m = 500$ personen. De exacte formule (3) bevat nu een product met 499 factoren, dus daar beginnen we niet aan met ons reken-doesje, maar de benaderingsformule (4) kan direct worden ingetikt. Het resultaat, op 7 decimalen afgerond, is 0,0506514. Als je met een computer de uitkomst van de exacte formule laat berekenen, kom je op 0,0506548, dus de benadering is in dit geval meer dan voortreffelijk.

Nóg een loterijprobleem

Dit soort loterijproblemen komt vaker voor dan je denkt, en de meeste mensen hebben een totaal verkeerde intuïtie over de grootte van de kansen die daarbij optreden. In de Boston Globe van 6 februari 1978 stond een interview met een official van de Massachusetts Daily Lottery. Deze loterij bestond toen twee jaar. Elke avond, behalve op zondag, wordt daar een getal van vier cijfers getrokken uit de tienduizend getallen 0000, 0001, ..., 9999. De journalist vroeg of het wel eens was voorgekomen dat een getal meer dan eens getrokken was. De loterijbobo zei nee, en voegde daaraan toe dat het opnieuw vallen van een eerder getrokken getal pas te verwachten was na ongeveer 5000 trekkingen.

Hartstikke fout!

Als reactie ontving de krant verschillende brieven waarin lezers te kennen gaven dat de loterijofficial hartstikke fout zat. Inderdaad waren meerdere getallen meer dan één keer getrokken in de voorbije 625 trekkingen. Met onze formules kunnen we dat gemakkelijk nagaan, want

het gaat hier weer om een verjaardagsprobleem, ditmaal met een 'jaar' van $d = 10\,000$ dagen (de lotnummers) en een groep van $m = 625$ 'personen' (de trekkingen).

In feite is de complementaire kans, dat wil zeggen de kans op *geen enkele* doublure, onvoorstelbaar klein, want met behulp van onze benaderingsformule (4) en een zakrekenmachine vinden we

$$1 - p_m \approx e^{-\frac{1}{2}(625 \times 624)/10\,000} \\ = 3,3983 \times 10^{-9}.$$

Hoewel m/d nu minder klein is dan in de vorige voorbeelden, geeft deze uitkomst toch een goede indicatie. Met behulp van de computer en de exacte formule (3) vinden we namelijk de exacte waarde

$$1 - p_m = 2,2348 \times 10^{-9}.$$

De orde van grootte van de benadering is dus wel in orde. Hoe dan ook, je kunt er gerust je hand voor in het vuur steken dat er bij 625 trekkingen doublures op zullen treden!

◦◦ Afleiding van de verjaardagsformules

We leiden een formule af voor de *complementaire kans* $q_m = 1 - p_m$, dat wil zeggen de kans dat er in een willekeurig samengestelde groep van m personen geen dubbele verjaardagen voorkomen. Uiteraard is $q_1 = 1$. Verder geldt voor iedere k met $1 \leq k \leq 365$ dat

$$q_{k+1} = \left(1 - \frac{k}{365}\right) q_k,$$

want op het moment dat we één persoon toevoegen aan een groep van k personen die allemaal al op verschillende dagen jarig zijn, zijn er al precies k dagen van het jaar 'bezet'. Wil de nieuwkomer geen doublure veroorzaken, dan mag hij of zij niet op een van deze dagen jarig zijn. Zo vinden we, door achtereenvolgens $k = 1, 2, \dots, m-1$ te nemen:

$$q_2 = \left(1 - \frac{1}{365}\right),$$

$$q_3 = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right),$$

enzovoorts, en uiteindelijk

$$q_m = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 - \frac{m-1}{365}\right),$$

waarmee formule 1 bewezen is.

Om formule 2 te vinden, maken we gebruik van het feit dat voor kleine x de benadering

$1 - x \approx e^{-x}$ geldig is. De functie $f(x) = e^{-x}$ heeft namelijk voor $x = 0$ de waarde 1 en de afgeleide -1 , dus de raaklijn heeft $1 - x$ als functievoorschrift. Voor kleine x zijn de grafiek en de raaklijn nauwelijks van elkaar te onderscheiden (zie figuur 1), en dus geldt dan $e^{-x} \approx 1 - x$. Pas dit achtereenvolgens toe op

$$x = \frac{1}{365}, \quad x = \frac{2}{365}, \dots, \quad x = \frac{m-1}{365},$$

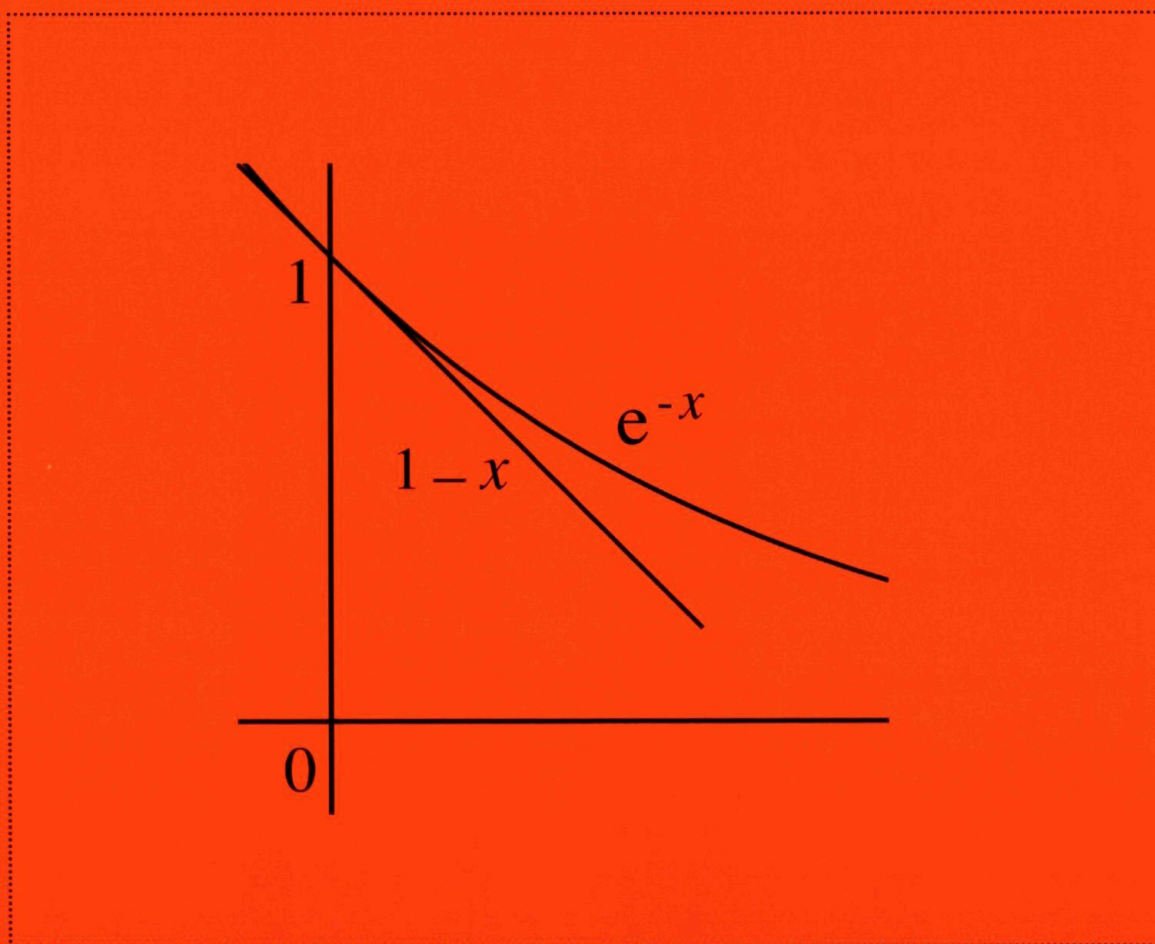
dan krijgen we

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{365}\right)$$

$$\approx e^{-1/365} e^{-2/365} \dots e^{-(m-1)/365}.$$

Het rechterlid kunnen we als één e -macht schrijven door de exponenten bij elkaar op

FIGUUR 1 Voor kleine x geldt: $1 - x \approx e^{-x}$.



te tellen. Als we dan ook nog gebruik maken van de formule

$$1 + 2 + \cdots + (m - 1) = \frac{1}{2}m(m - 1)$$

(zie figuur 2 voor een 'kijkbewijs') en de relatie $p_m = 1 - q_m$, krijgen we precies formule 2.

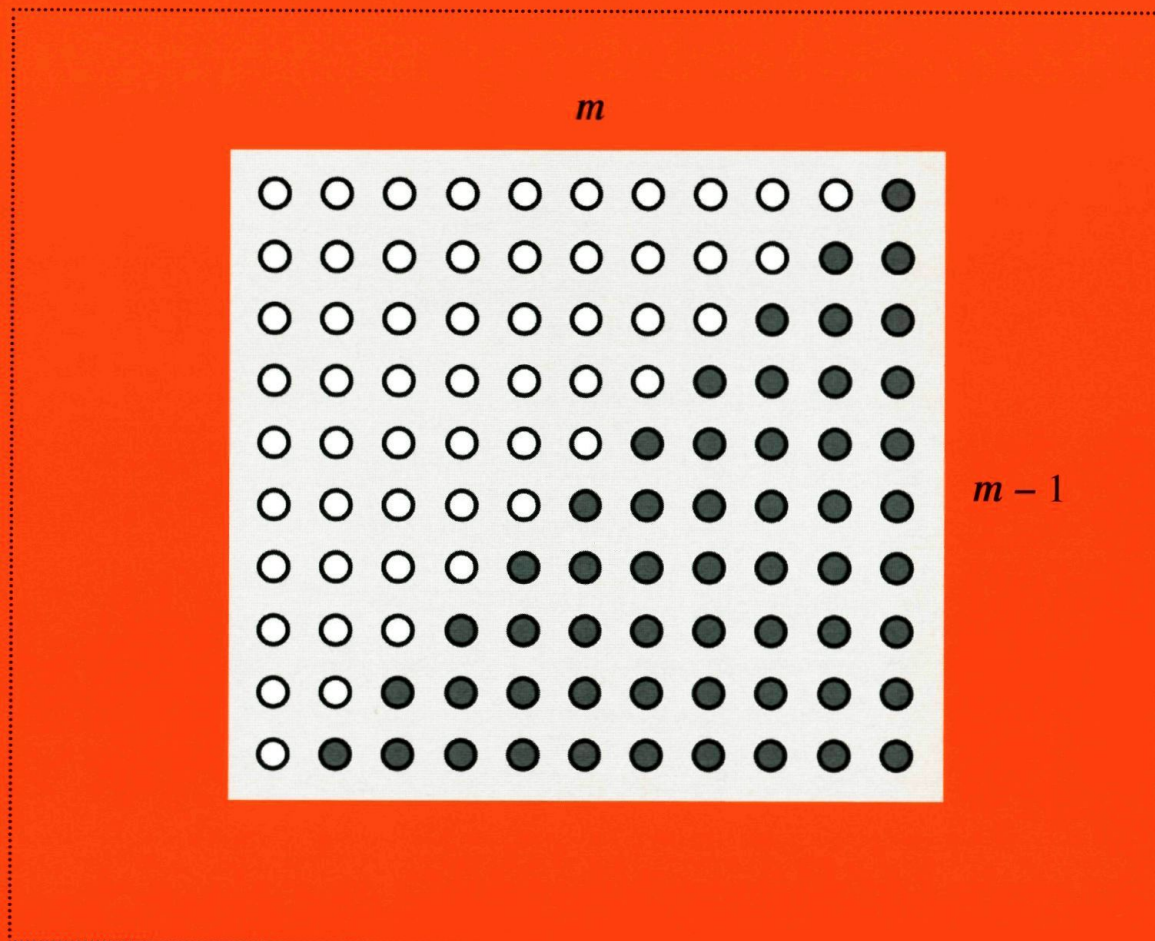
Meer informatie

Meer over verjaardagen en loterijen is te vinden in het Zebra-boekje *Poisson, de Pruisen en de Lotto* van Henk Tijms, Frank Heierman en Rein Nobel, Epsilon Uitgaven, 2000, ISBN 90-5041-059-6.

Een mooie java-applet staat op het web:
www-stat.stanford.edu/~susan/surprise

FIGUUR 2 De formule $2 \times (1 + 2 + \cdots + (m - 1)) = m(m - 1)$ in beeld gebracht.

21



De post

Vierentwintigen

Van Jos Groot en Fred Schalekamp ontvingen we reacties op 'Vierentwintigen', zie de postrubriek van het oktobernummer. Beiden vonden: $R(1) = 470$, $R(2) = 492$. Verder werd onder andere nog berekend: $R(0) = 485$, $R(1000) = 1$ en $R(2000) = 0$. Nu vraagt de redactie zich af wat het kleinste getal n is, zodat $R(n) = 0$. Dat wil zeggen, wat is het kleinste getal dat je op geen enkele manier kunt schrijven uitgaande van vier positieve getallen kleiner dan 10 en de bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $\div$.

Twee breuken

In de postrubriek van het oktobernummer vroegen we om twee breuken samen te stellen die som 1 hadden en waarbij elk van de cijfers 0 tot en met 9 links van het $=$ -teken precies één keer voorkomt. Fred Schalekamp en Aad van de Wetering schreven ieder een programmaatje en vonden daarmee dat er 97 mogelijke combinaties mogelijk zijn. Enkele fraaie resultaten:

$$\frac{1}{7} + \frac{4362}{5089} = 1, \quad \frac{17}{89} + \frac{504}{623} = 1 \text{ en } \frac{79}{83} + \frac{60}{1245} = 1.$$

De complete lijst is te vinden op de homepage van Pythagoras. De redactie vraagt zich nu af of het ook mogelijk om hetzelfde te doen met drie breuken, of zelfs met vier breuken. Wie geeft het antwoord?

Taalkundig tellen

Het volgende plaatje stond boven een artikel van Hans Melissen in het Pythagoras-nummer van februari 2001.

t a a l k
u n d i g +
t e l l e n

Zoals we in het augustusnummer al aangeven, is het niet mogelijk om aan elk van de tien letters een verschillend cijfer toe te kennen zó dat de optelling klopt, tenzij je toelaat dat de letter 't' gelijk mag zijn aan nul (zie het vorige nummer van Pythagoras). Aad van de Wetering maakte ons er op attent dat we beter iets anders boven het artikel hadden kunnen zetten:

t a a l
k u n d i g +
t e l l e n

Zo ziet het er niet alleen 'taalkundig' beter uit, maar is er wel precies één oplossing mogelijk. Zie je welke?

Is π normaal?

Al heel lang proberen wiskundigen uit te vinden of π normaal is. Dat wil zeggen, ze proberen na te gaan of elk cijfer in de decimale ontwikkeling gemiddeld een op de tien keer voorkomt, elke tweecijferige combinatie gemiddeld een op de honderd keer voorkomt, enzovoort. Peter Deleu heeft hier een kort artikel over geschreven dat te lezen is via: members.tripodnet.nl/peterdeleu/pi_normal.htm

Later in deze jaargang van Pythagoras zullen wij ook nog aandacht aan dit onderwerp besteden.

door Leon van den Broek

Lopers op de loop

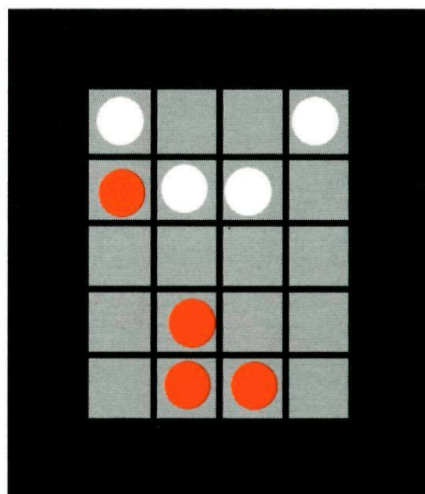
Bishops on the move is een spel voor één speler. Op een 4 bij 5 speelbord staan, op de velden A1 tot en met D1, vier zwarte lopers opgesteld. Daartegenover, op A5 tot en met D5, staan vier witte lopers. De lopers kunnen, net als op een schaakbord, diagonaal bewegen (een of meer velden, voor- of achteruit). Het doel van het spel is de zwarte en de witte lopers van kant te laten wisselen. Met een loper mogen meerdere zetten na elkaar worden gedaan. Er is één beperking: een zwarte en een witte loper mogen elkaar niet aanvallen. Dat wil zeggen dat op eenzelfde diagonaal nooit een zwarte én een witte loper mogen staan. De positie van de zwarte loper op veld D3 in figuur 2 is dus niet toegestaan, want zo valt hij de witte loper op veld B5 aan.

Zelf maken

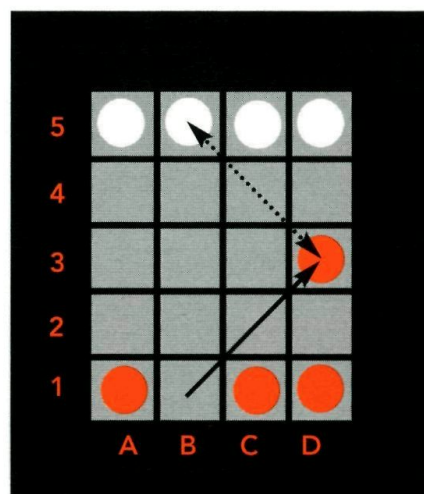
Je artistieke kwaliteiten kun je bewijzen door het spel zelf te maken. Het is echter ook voor 15 euro te koop in de betere spellenwinkel. Het ontwerp en de productie zijn van Illi Kaufmann uit Israël. Op de homepage van Pythagoras staat een applet, zodat je het spel ook op de computer kunt spelen.

Uitdaging

Het spel is helemaal niet zo eenvoudig. En wees kritisch! Als je niet uitkijkt, doe je al gauw een illegale zet. Wat is het kleinste aantal zetten dat nodig is om het spel tot een goed einde te brengen? De oplossing staat in het volgende nummer van Pythagoras.



Figuur 1. *Bishops on the move*



Figuur 2. Lopers van verschillende kleur mogen elkaar niet aanvallen. Deze spelsituatie mag dus niet voorkomen.

O

Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Aan het eind van het jaar zijn er boekenbonnen ter waarde van 120, 100 en 80 euro voor de drie leerlingen die bovenaan staan in de laddercompetitie.

Opgave 79

Er staan 25 bekers omgekeerd op een tafel. Je mag er steeds 4 tegelijk omkeren. Een beker mag meerdere malen omgekeerd worden. Kun je zo alle bekers rechtop krijgen?

Opgave 80

Laat x een reëel getal zijn ongelijk aan nul. Bewijs:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam*, *adres*, *school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 maart 2002. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt!

Op pagina 25 staan de oplossingen van de opgaven uit het oktobernummer. Veel succes!
René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Opgave 75

Het punt P is een willekeurig punt binnen een regelmatige n -hoek. Bewijs dat de som van de afstanden van P tot de zijden onafhankelijk is van de keuze van P .

Oplossing. We verdelen de regelmatige n -hoek in n driehoeken die als hoekpunten telkens P en twee opeenvolgende hoekpunten van de n -hoek hebben. De totale oppervlakte van deze driehoeken is gelijk aan

$$\frac{1}{2}a \cdot d_1 + \frac{1}{2}a \cdot d_2 + \dots + \frac{1}{2}a \cdot d_n = \frac{1}{2}a(d_1 + d_2 + \dots + d_n)$$

waarbij a de lengte van de zijde van de n -hoek is en de d_i 's de afstanden tot de zijden zijn. Deze totale oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van de n -hoek en dus onafhankelijk van de keuze van P . Aangezien a ook constant is, is de som van de afstanden van P tot de zijden ($= d_1 + d_2 + \dots + d_n$) ook onafhankelijk van de keuze van P .

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Birgit van Dalen van de **Vlaardingse Openbare Scholengemeenschap**, Peter Deleu te Hulste (België), Tim Govaert, Edugo, Oostakker (België), Bram Kuivenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk.

De boekenbon gaat naar Birgit van Dalen.

Opgave 76

In vierkant $ABCD$ met zijde 1 worden op de zijden AB , BC , CD en DA respectievelijk punten P , Q , R en S gekozen. Bewijs dat

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 \leq 4.$$

Oplossing. We noemen $AP = a$, $BQ = b$, $CR = c$ en $DS = d$. Volgens de stelling van Pythagoras is dan $PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 = (1-a)^2 + b^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-c)^2 + d^2 + (1-d)^2 + a^2$. Dit is een som van vier termen van de vorm $x^2 + (1-x)^2$. Dit is de vergelijking van een dalparabool met een minimumwaarde van $\frac{1}{2}$ bij $x = \frac{1}{2}$ en een maximumwaarde aan de randen van toegestane interval ($0 \leq x \leq 1$), namelijk 1 voor zowel $x = 0$ als $x = 1$.

Aangezien de gevraagde uitdrukking een som van vier van deze termen is die onafhankelijk van elkaar zijn, geldt

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 \leq 4.$$

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvena** te Bergen op Zoom, Birgit van Dalen van de **Vlaardingse Openbare Scholengemeenschap**, P. Dekker van het **Erasmuscollege** te Rotterdam, Peter Deleu te Hulste (België), Tim Govaert, Edugo, Oostakker (België), Bram Kuivenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk, Jelmer Renema van het **Groene Hart Lyceum** te Alphen aan de Rijn.
De boekenbon gaat naar Jelmer Renema.

° Problemen

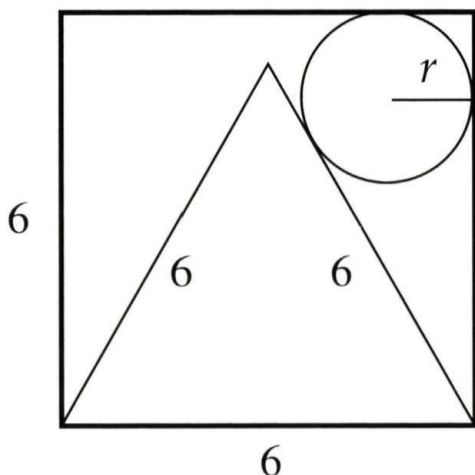
door **Dion Gijswijt**

Munten

In een zak zitten 26 munten. Als je 20 willekeurige munten uit de zak pakt, dan heb je minstens 1 munt van 1 eurocent, 2 munten van 2 eurocent en 5 munten van 5 eurocent. Hoeveel zijn de 26 munten samen waard?

Cirkel, driehoek en vierkant

Gegeven zijn een vierkant, een gelijkzijdige driehoek en een cirkel. De zijde van het vierkant is 6. Kun je de straal r van de cirkel berekenen?



Gijzelaars

Een op hol geslagen wiskundeleraar heeft tien leerlingen gegijzeld. Deze leerlingen weten dat hun het volgende te wachten staat:

Zodra hun leraar het lokaal binnenkomt, worden ze achter elkaar in een rij geplaatst en krijgen aselekt een rode of een blauwe pet op hun hoofd. Elke leerling zal de kleur van zijn eigen pet niet weten, maar alleen de kleuren van de petten van de mensen

die vóór hem in de rij staan. Ieder zal eenmaal mogen raden naar zijn eigen kleur. De leerling die achteraan in de rij staat, zal als eerste moeten raden. Daarna is de leerling vóór hem aan de beurt, enzovoort. Zegt een leerling de juiste kleur, dan wacht hem de vrijheid. Heeft de leerling het fout, dan wordt hij geëxecuteerd.

Zolang de leraar nog niet het lokaal binnen is, kunnen de leerlingen met elkaar overleggen. Door een goede afspraak te maken, zullen met kans $\frac{1}{2}$ negen van de tien leerlingen overleven, en met kans $\frac{1}{2}$ zelfs allemaal. Welke afspraak moeten de leerlingen maken, alvorens hun leraar het lokaal binnenstapt?

Een koppige munt

Lisa heeft twee munten, een normale munt, waarbij de kans op 'kop' $\frac{1}{2}$ is, en een munt die er normaal uitziet, maar vreemd genoeg altijd op 'kop' terecht komt. Lisa wil weten welke de normale munt is. Ze kiest willekeurig een van de twee munten en gooit deze op. De uitkomst is 'kop'. Nogmaals opgooien geeft weer 'kop', dus ze weet nog niet op het de normale of de vreemde munt is. Dan pakt ze de andere munt en gooit deze op (een slimme zet!). Wat is nu de kans op 'munt', en hoe groot zou de kans op 'munt' zijn als ze de eerste munt voor de derde maal zou hebben opgegooid?

Dit probleem komt uit het boekje *Kop of munt, kansrekening in het dagelijks leven* van Wouter Schuurman en Hans de Kluiver, uitgeverij Bert Bakker. Onder de inzenders van een juiste oplossing worden drie van deze boekjes verloot.

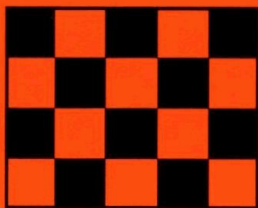
Oplossingen

nr.2

door **Dion Gijswijt**

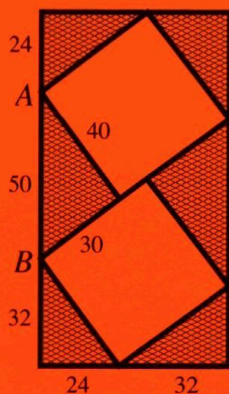
Tetris puzzel

Kleur de vakjes van de 4 bij 5 rechthoek volgens een schaakbordpatroon zwart en wit. Ieder stukje, behalve het 'T'-stukje, bedekt altijd precies twee zwarte en twee witte vakjes. Het 'T'-stukje bedekt altijd één zwart vakje en drie witte vakjes of één wit vakje en drie zwarte. De vijf Tetris-vormen samen bedekken dus niet evenveel zwarte als witte vakjes. Een 4 bij 5 rechthoek kan dus nooit worden gemaakt.



Glas-in-lood

Het raam is 56 bij 106 centimeter. Dat de lengte van AB gelijk is aan 50 centimeter, volgt uit de stelling van Pythagoras. Omdat de verschillende driehoeken in de figuur gelijkvormig zijn, volgen de andere lengtes met behulp van verhoudingen.



Lucas en Fibonacci

Alleen 1 en 3 komen in beide rijen voor. Noem het n -de getal van de rij van Lucas en Fibonacci L_n respectievelijk F_n . Er geldt:

$$F_4 < L_3 < F_5 \text{ en } F_5 < L_4 < F_6,$$

dus L_3 en L_4 komen niet in de rij van Fibonacci voor. Omdat $F_4 + F_5 < L_3 + L_4 < F_5 + F_6$, geldt dus

$$F_6 < L_5 < F_7,$$

We kunnen zo doorgaan: $F_5 + F_6 < L_4 + L_5 < F_6 + F_7$, dus

$$F_7 < L_6 < F_8,$$

enzovoort. Zo zien we dat geen van de getallen $L_3, L_4, L_5, L_6, \dots$ in de rij van Fibonacci kan voorkomen.

Kaartpuzzel

De eerste situatie kan niet worden bereikt, want na elke beurt is er een kleur die geheel onder ligt. De tweede situatie kan wel worden bereikt: draai eerst de kaarten met blauw boven om, vervolgens de kaarten met groen boven en tot slot de kaarten met rood boven.

Een verjaardagsprobleem

GRAMMA

Als je morgen op school een klas van 30 leerlingen binnenstapt en uitzoekt of er misschien twee leerlingen op dezelfde dag jarig zijn, is er een flinke kans dat je succes hebt, wel zo'n 70%. Dat betekent dat je bij uitvoering van dit toevalsexperiment in honderd klassen ongeveer zeventig positieve resultaten kunt verwachten. Positief betekent hier dat er ten minste twee leerlingen uit eenzelfde klas op dezelfde dag jarig zijn.

Je kunt zo'n experiment ook in je eentje op een computer uitvoeren. Daarvoor heb je dan wel een geschikt simulatieprogramma nodig. Als je dat niet hebt, kun je je ook redden met de grafische rekenmachine. Over dat laatste gaat dit artikel.

Toevalsgetallen

Een grafische rekenmachine – hier de TI 83 – kan op verzoek toevalsgetallen produceren en die kun je dan gebruiken om willekeurige dagen van het jaar voor te stellen. De eenvoudigste manier is om de dagen nummers te geven van 1 tot en met 365. In het menu PRB (onder MATH) kies je *randint* (*random integer* betekent *geheel toevalsgetal*). Als je nu intoetst 1,365,30, dan 'trekt' de GR dertig keer een getal uit de nummers van 1 tot en met 365. Bij elke trekking doen alle getallen weer mee, zodat je dubbele uitkomsten kunt krijgen. Om snel te kunnen overzien of er dubbelkeuzes zijn, kun je die getallen opbergen in een lijst en daarna sorteren. Via de toetsen STO en L1 komen ze in een lijst en via STAT en SortA worden ze in volgorde van klein naar groot geplaatst. Op het scherm verschijnt na deze handelingen:

```
randint(1,365,30) → L1  
SortA(L1)
```

Als er Done op het scherm komt, weet je dat de laatste opdracht uitgevoerd is en

kun je via STAT Edit de lijst van 30 dagen met de cursor doorlopen en constateren of je succes hebt. Op deze manier één experiment doen, gaat best, maar als je dit nog eens 99 keer moet doen...

Programma

Voor zo'n toevalsexperiment met herhaling kun je echter ook een programma schrijven. Dat is dan even wat meer werk, maar als je dat eenmaal klaar hebt, gaat het herhalen snel. Een voorbeeld van zo'n programma zie je in figuur 1.

```
PROGRAM: DATUM  
ClrHome  
Disp "personen:"  
Input N  
0 → H  
ClrList L1  
randInt(1,365,N) → L1  
SortA(L1)  
1 → T  
While T < N and H = 0  
If L1(T) = L1(T+1)  
1 → H  
T+1 → T  
End  
Disp H
```

Figuur 1

Als je wat ervaring hebt met programmeren, zal je dit vlot kunnen lezen. De eerste regel zorgt voor een schone lei. De groeps-grootte wordt opgegeven via N. Het grijze blok is de kern van het programma; daar wordt de lijst van toevalsdta gemaakt die vervolgens wordt langsgelopen. De telvariable T houdt de plaats in de lijst bij; zodra twee opvolgende data gelijk zijn, krijgt H de waarde 1 en stopt het programma. Gebeurt dit niet, dan wordt de hele lijst afgewerkt. Tenslotte krijg je een 1 ('succes') of een 0 ('mislukking') op het scherm. Op de TI 83 kan dit via het menu PRGM NEW worden ingevoerd en PRGM EXEC zorgt vervolgens

voor de uitvoer. Je hoeft dan slechts de Enter toets te gebruiken om een herhaling van het experiment te krijgen. Die herhaling kan ook worden geprogrammeerd, waarbij het aantal successen wordt bijgehouden. Zo krijg je aan het eind een schatting voor de kans bij een vooraf gegeven N-waarde, zie figuur 2.

```
PROGRAM: HERDATUM
ClrHome
Disp "experimenten:"
Input A
Disp "personen:"
Input N
0 → P
For(X,1,A)
```

Kernprogramma DATUM

```
If H=1
P → P+1
ClrHome
Output(2.1,P)
Output(2.5,"VAN DE")
Output(2,12,X)
End
Output(4,1,"PERCENT")
Output(4,13,100P/A)
```

Figuur 2

Het bijna-verjaardagsprobleem

De vraag naar de kans dat twee of meer personen in een groep gelijktijdig jarig zijn, kan ook worden verruimd. Bijvoorbeeld: wat is de kans dat twee of meer personen *binnen 1 dag van elkaar* jarig zijn? Dat de exacte berekening van deze kans hier een stuk lastiger is dan in het gewone verjaardagsprobleem, blijkt al gauw als je daarmee aan de slag gaat. Het grappige is dat een verandering van het programma op de GR om een 'bijna-verjaardagsexperiment' te simuleren, veel minder lastig is. Op het eerste gezicht zou je wellicht denken dat je slechts de regel

$$\text{If } L1(T) = L1(T+1)$$

hoeft te vervangen door

$$\text{If } L1(T+1) - L1(T) < 2$$

Dan houd je echter geen rekening met het feit dat 31 december en 1 januari ook slechts 1 dag verschillen. Hoe los je dat probleem op? Eigenlijk zou je een cirkelvormige lijst moeten hebben met 365 dagen, maar dat gaat natuurlijk niet. Wat wel kan is om – als 1 januari op de lijst voorkomt – die lijst te verlengen met het getal 366. Voor het programma betekent dit, dat eerst de lijst met N toevalsgetallen zo nodig wordt uitgebreid, alvorens er wordt gecheckt of er een paar getallen is dat hoogstens 1 verschilt. Dat kan via het programmablokje uit figuur 3.

```
0 → D
1 → T
While L1(T)<2
L1(T)+365 → L1(T+N)
D+1 → D
T+1 → T
End
```

Figuur 3



De variabele D houdt bij hoeveel langer de lijst geworden is. Dit programmablokje komt dan onmiddellijk na het sorteren van de lijst. In de daaropvolgende tekst hoef je dan maar twee dingen te veranderen. Behalve dat het beslissingscriterium hier moet worden

$$\text{If } L1(T+1) - L1(T) < 2$$

moet je er ook voor zorgen dat de langer geworden lijst doorlopen wordt. Dat doe je met

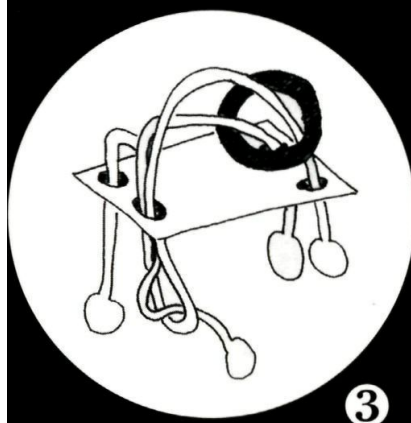
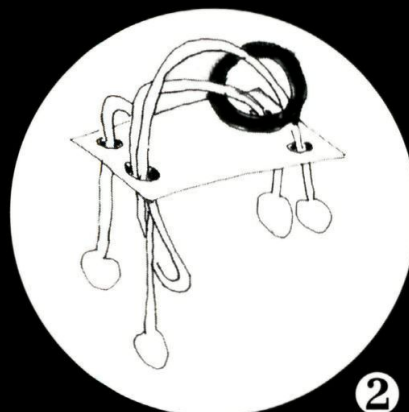
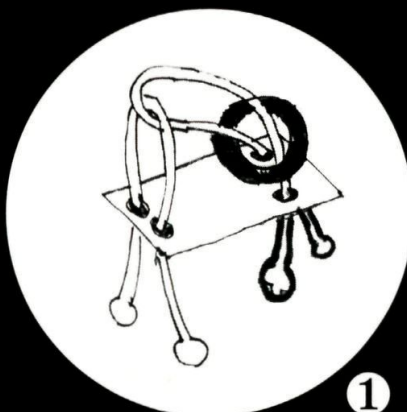
$$\text{while } T < N + D$$

Na deze aanpassingen kan het experiment worden uitgevoerd en kunnen kansen worden geschat. Zo kun je bijvoorbeeld vinden dat in een klas van 30 leerlingen de kans bijna 98% is dat er twee of meer leerlingen binnen 1 dag van elkaar jarig zijn.

Omgekeerd: om een fifty-fifty kans te hebben dat twee personen binnen 1 dag van elkaar jarig zijn, heb je slechts 14 personen nodig. De programma's DATUM, HERDATUM en BIJNADAT kun je downloaden van de homepage van Pythagoras.

OPLOSSINGEN NR 2

Oplossing Ringpuzzel



Oplossingen Kleine nootjes

Scheuren

Hoogstens 10 keer.

Grafsteen

Stel de leeftijd van de dame gelijk aan x . Uit de gegevens volgt:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 5 = x$$

Hieruit volgt dat $x = 93\frac{1}{3}$.

De vrouw werd dus 93 jaar.

Kaarten

Je hoeft alleen de kaarten met de A en de 9 om te draaien. Om dit in te zien, moet je even bedenken dat de gegeven regel ook als volgt kan worden geformuleerd: *als op de ene kant een oneven getal staat, moet op de andere kant een medeklinker staan.*

Je moet dus nagaan of tegenover de A inderdaad een even getal staat én of tegenover de 9 inderdaad een medeklinker staat. De D en de 12 hoef je niet om te draaien, want daar tegenover mag alles staan.

Kapper

De handelsreiziger kiest de slordige kapper, want de andere kapper, die netjes geknipt is, wordt blijkbaar door deze kapper geknipt.

Gouden munten

Noem de twee hoeveelheden a en b .

Er moet gelden dat $25(a - b) = a^2 - b^2$.

Deel beide kanten door $a - b$. Dat kan, omdat $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Je krijgt:

$a + b = 25$. Opa heeft dus 25 munten.

(advertentie)

Je zit in 5 of 6 vwo.

Je vindt wiskunde een leuk vak.

Toch wil je meer dan wiskunde alleen. Overweeg dan eens om Bedrijfswiskunde & Informatica (BWI) te gaan studeren.

BWI bestaat uit een mix van wiskunde, informatica, en bedrijfskunde. In combinatievakken en projecten leer je de wiskunde en de informatica optimaal in te zetten om bedrijfsproblemen op te lossen. Er is ook een duale variant, waarbij je werken en studeren combineert.

Benieuwd naar deze bèta-opleiding met toekomst?
Kom dan eens langs op de Vrije Universiteit:
9 februari 2002 algemene voorlichtingsdag
22 maart 2002 facultaire kennismakingsdag

Meer informatie?

- Studieadviseur Rene Swarttouw
rene@cs.vu.nl, tel. 020 - 444 7787

- Faculteit der Exacte Wetenschappen,
afdeling PR en Voorlichting
e-mail: vpr@few.vu.nl, tel. 020 - 444 7517

vrije Universiteit amsterdam



Activiteiten

- vrijdag 22 en zaterdag 23 maart 2002 **Finale Wiskunde A-lympiade**,
Garderen
<http://www.fi.uu.nl/Alympiade>
- zaterdag 9 maart 2002 **Studiefestival Universiteit Leiden**
Pieterskerk, Leiden
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>
- zaterdag 16 maart 2002 **Voorlichtingsdag 5/6-vwo**
Universiteit Utrecht
Tel: (030) 253 26 70,
e-mail: studievoorlichting@csc.usc.uu.nl
- 21, 22 februari en 15 maart 2002 **De wondere wereld van kegelsneden tot in het oneindige**
Masterclass Projectieve Meetkunde
Universiteit Leiden
<http://www.math.leidenuniv.nl/~hfinkeln>
- vrijdag 22 maart 2002 **Kangoeroewedstrijd**
op alle middelbare scholen in Nederland
<http://www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe>
- donderdag 4 en vrijdag 5 april 2002 **38e Nederlands Mathematisch Congres**
TU/e, Eindhoven
<http://www.win.tue.nl/nmc2002>
- zaterdag 6 april 2002 **Voorlichtingsdag KUN**
<http://www.kun.nl/gaan-studeren>
- vrijdag 12 april 2002 **Open Dagen Universiteit Leiden**
Open huis bij de wiskundeopleiding
<http://www.leidenuniv.nl/studiesite/>
- donderdag 25 april 2002 **Conferentie ICT in de wiskundeles APS**
Utrecht
<http://www.aps.nl/wiskunde/X3.htm>
- zaterdag 25 mei 2002 **De roerige jaren zestig**
Symposium VIII van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
Hogeschool Domstad te Utrecht
e-mail: e.demoor@fi.uu.nl

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskundeafdelingen van de Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit Amsterdam en Universiteit Leiden.



Universiteit van
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit
Leiden

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2001-2002

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost € 17,92. Losse nummers kosten € 3,86.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België € 21,07

Pythagoras buitenland € 24,73

Pythagoras én Archimedes € 31,54

Pythagoras én Archimedes België € 36,44

Pythagoras én Archimedes buitenland € 37,89

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Bulkabonnement Nederland: € 12,48 per jaar.

Bulkabonnement België: € 16,11 per jaar.

Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.

De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Leerlingabonnement Nederland: € 14,75 per jaar.

Leerlingabonnement België: € 18,59 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (€ 11,34 excl. verzendkosten) jaargang 40 (€ 17,92 excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke driehoek' (€ 3,40 excl. verzendkosten).

