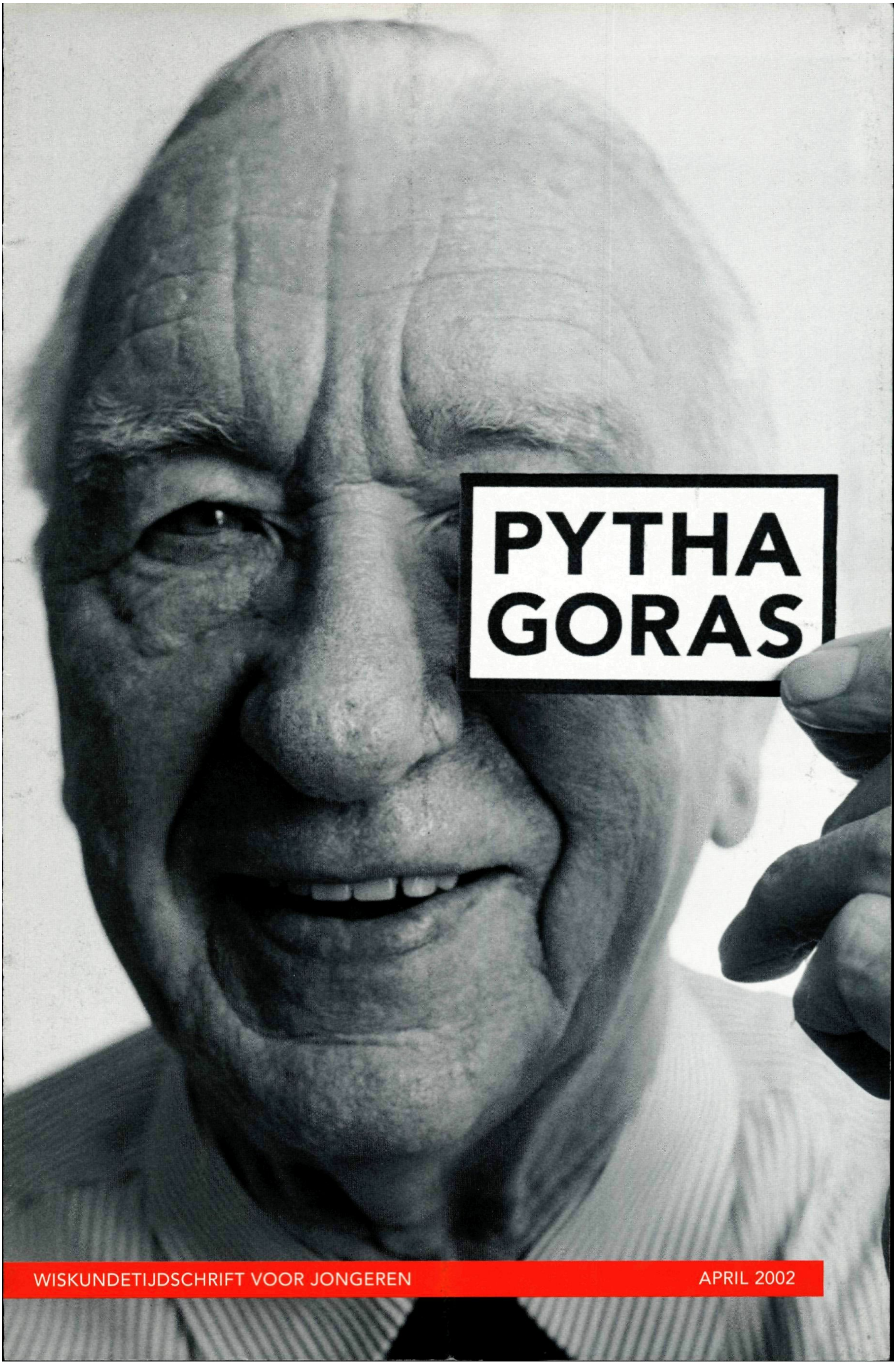


PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN APRIL 2002

COLOFON

Uitgave
Pythagoras is een uitgave van
het Wiskundig Genootschap
en verschijnt zes keer per jaar.
Een jaargang loopt van septem-
ber tot en met augustus.
ISSN: 0033-4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

www
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofdredactie
Marco Swaen

Eindredactie
Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw
Divisie Wiskunde en Informatica
Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras
gaan vergezeld van rondjes
die de moeilijkheidsgraad
aangeven.
Nul rondjes betekent:
geen enkele wiskundige
voorkennis vereist;
1 rondje $^{\circ}$: voor iedereen van-
af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes $^{\circ\circ}$: hiervoor heb je
kennis uit de vijfde of zesde
klas nodig;
3 rondjes $^{\circ\circ\circ}$: dit gaat net
iets verder dan de middelbare
schoolstof.

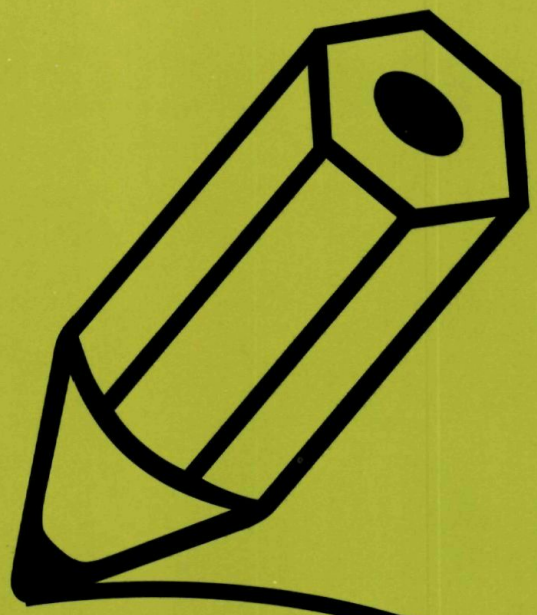
MEDEWERKERS

drs. A.J. van den Brandhof is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. L.A.M. van den Broek** is docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **prof. dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Callandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

OMSLAG

Bob de Jongste (85) is waarschijnlijk de oudste Pythagoras lezer.
Lees het artikel op bladzijde 6 over deze recreatief wiskundige.

INHOUD



2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 5 **De wisseltruc van Multatuli**

6 - 7 **Bob de Jongste**

8 - 12 **De icosaëder**

13 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**

14 - 15 **Pythagoras Olympiade**

16 - 18 **Is π normaal?**

19 **Journaal**

20 - 23 **Een islamitische jali uit India**

24 - 25 **Problemen – Oplossingen**

26 - 29 $\frac{\pi^2}{6}$

30 - 31 **Oplossingen nr. 3**

32 **Activiteiten**

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes

Sieradentransport

Rosa wil van Vera een dure armband lenen. Beiden bezoeken dezelfde fitnessclub, maar op verschillende tijden. Zowel Rosa als Vera heeft in de kleedkamer een locker, die met hangsloten op slot kan. Rosa beschikt echter niet over een sleutel van Vera's hangslot en vice versa. Hoe kan Vera veilig haar armband aan Rosa overdragen?

Inpakken en wegwezen

Op de verzendkamer van de Wehkamp maakt men zich klaar voor het weekend. Er zijn nog maar vijf pakketjes die verstuurd moeten worden. Helaas laat de jongste bediende de adreslabels op de grond vallen. Niemand heeft een idee welk label er op welk pakketje hoort. Men besluit zomaar wat te doen. Wat is de kans dat precies vier van de vijf labels op de goede pakketjes terechtkomen?

Shoppen

Lia gaat shoppen.
Ze is blut en pint 's ochtends geld.
Overdag geeft zij eenvijfde uit.
's Avonds (het is koopavond) geeft zij eenvijfde uit van wat ze over heeft.
In totaal geeft ze 36 euro uit.
Hoeveel geld heeft ze 's ochtends gepind?

Taalstrijd

Als 75% van de Belgische bevolking Nederlands spreekt en 70% Frans, hoeveel procent spreekt dan Nederlands én Frans?

Overschenken

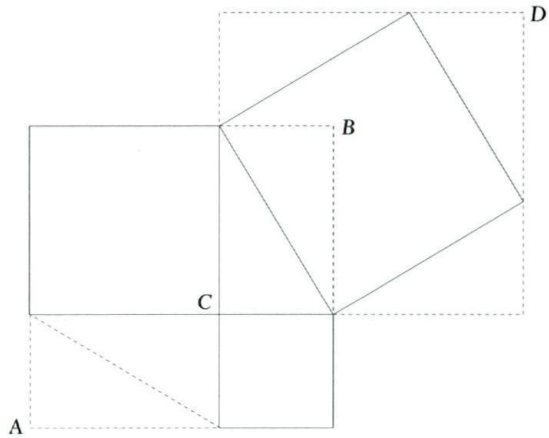
Je hebt twee emmers met een inhoud van respectievelijk 4 en 7 liter. Kun je met deze twee emmers precies 9 liter afmeten?

door **Bruno Ernst**

De wisseltruc van Multatuli

Bewijzen van de stelling van Pythagoras, deel IV

Multatuli, een pseudoniem van Eduard Douwes Dekker, was een van de belangrijkste Nederlandse schrijvers van de negentiende eeuw. Zijn belangstelling voor de stelling van Pythagoras komt in verschillende van zijn werken duidelijk naar voren.



Figuur 1

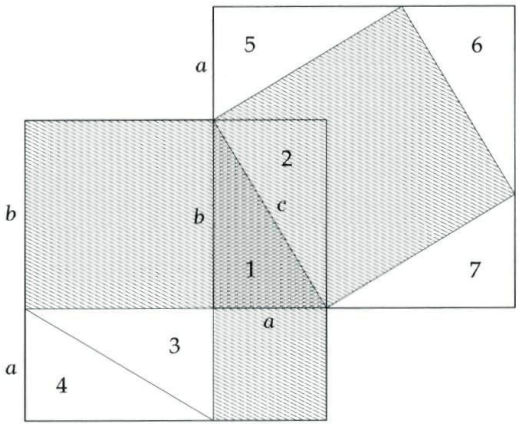
Wisseltruc

In 1867 schreef hij: "Ik vond onlangs een nieuw bewijs voor de stelling van Pythagoras. Hier is het. Door als op nevenstaande voorbeeld (hier: figuur 1) zes driehoeken te construeren – ieder gelijk aan de gegeven rechthoekige driehoek – verkrijgt men twee gelijke kwadraten AB en CD. (Opmerking: Multatuli gebruikt hier de toen in zwang zijnde notatie voor vierhoeken, namelijk het aangeven van twee overstaande punten.) Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewijst de gelijkheid van het overschot aan weerszij wat er te bewijzen was. Eenvoudiger kan het niet, dunkt me..." en even verder: "Ik hoop dat iemand vragen zal welk nut het heeft te zoeken naar eenvoudiger bewijzen voor een bekende waarheid. Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelijke voorstelling."
Multatuli formuleert zijn bewijs wel zeer bondig en dat overrompelt ons een beetje. Bij eerste lezing zal het voor de meesten niet helemaal duidelijk zijn. De essentie lijkt op een wisseltruc: hij voegt iets toe aan een figuur om het er later weer af te halen en... daarmee verschijnt de stelling van Pythagoras. Vernuftig en verrassend.

Het bewijs geanalyseerd

Ik geef hier hetzelfde bewijs, maar dan wat verder uitgewerkt, zie figuur 2.
Uitgangspunt is de rechthoekige driehoek met drie naar buiten geslagen vierkanten op de zijden. Door het trekken van evenwijdige lijnen aan de rechthoekszijden, wordt eerst rechtsboven een groot vierkant getekend. Hetzelfde doen we linksonder. Zo ontstaan twee vierkanten die elkaar gedeeltelijk overlappen.

In het linker vierkant zitten de twee kleine vierkanten op de rechthoekszijden ingesloten en in het rechter vierkant op de schuine zijde. Als we in de kleine rechthoek linksonder nog een diagonaal tekenen, vinden we in de hele figuur nog zes rechthoekige driehoeken, die alle congruent zijn met de oorspronkelijke rechthoekige driehoek.



Figuur 2

De grote vierkanten zijn gelijk, want ze hebben gelijke zijden $a + b$. Van het linker vierkant trekken we vier gelijke driehoeken (1, 2, 3 en 4) af. Dit doen we eveneens bij het rechter vierkant (1, 5, 6 en 7). Wat van elk der grote vierkanten overblijft, is natuurlijk gelijk: van het linker vierkant blijven de twee vierkanten met oppervlakten a^2 en b^2 over en van het rechter vierkant blijft c^2 over. Dus $a^2 + b^2 = c^2$.

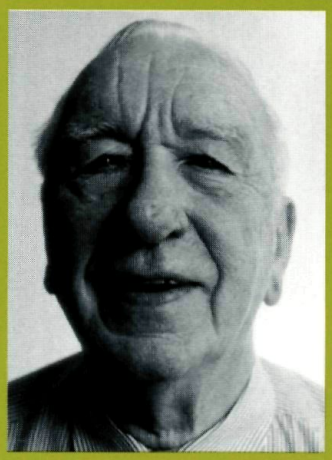
Was Multatuli de eerste?

Multatuli was ervan overtuigd dat zijn bewijs nog niet bekend was. Hij had daarvoor de bekende verzameling van professor Hoffman in de Nederlandse vertaling van 1834 tot zijn beschikking. Maar Loomis heeft dit bewijs gevonden in een boek van Delboeuf dat in 1860 in Brussel was gedrukt. Verder vermeldt hij, dat het ook te vinden is in *Curiositiés Géométriques* van E. Fourrey, in de tweede druk: Parijs 1778. Fourrey vermeldt dat dit bewijs al in 1683 was gepubliceerd.

Wellust

Maar ondanks dat blijft het voor mij het bewijs van Multatuli, die ik nog even aan het woord laat over zijn passie voor de meetkunde: "Het is heerlijke poëzie, dat opligten van 't kuisch gewaad der natuur, dat onderzoeken van haar verhoudingen, dat betasten van haar leest, dat indringen in de baarmoeder der waarheid. Zie, daar heb je de wellust der meetkunde!" (Uit een brief aan Max Rooses uit 1867.)

door **Jan Guichelaar**



NAAM: Bob de Jongste

LEEFTIJD: 85

BEROEP: Recreatief wiskundige

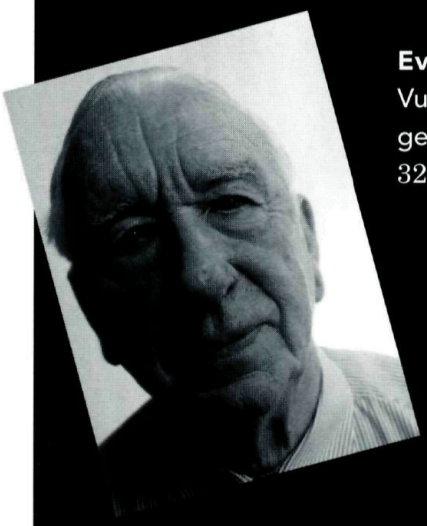
In het briefhoofd van Bob de Jongste (1917) staat 'recreatief wiskundige'. Met recht, want hij levert al jaren de vruchten van zijn liefhebberij als bijdragen aan Pythagoras. In januari van dit jaar is hij 85 jaar geworden. Ter gelegenheid daarvan wijdt de redactie van Pythagoras dit artikel aan hem.
Naast enkele wetenswaardigheden uit zijn leven en loopbaan staat in dit artikel een aantal recent door hem aangeleverde wiskundige problemen.

Leven en loopbaan

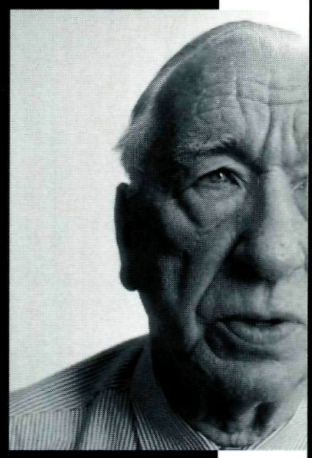
Over zijn HBS-tijd vertelt Bob de Jongste het volgende: "In de eerste klas kregen wij les van een blinde wiskundeleraar, dr. Jager Bruyning. Wij moesten onze ogen sluiten, en in onze gedachten tekenden wij de figuren die hij ons aangaf. Hij was de man die ons de liefde voor de wiskunde bijbracht."
Vervolgens kreeg Bob de Jongste les van nog een fantastische docent, die er geen been in zag om zijn leerlingen onoplosbare problemen voor te zetten, zoals de kwadratuur van de cirkel en de trisectie van een willekeurige hoek. Hij zei dan: "We weten dat het niet oplosbaar is, maar probeer het toch maar. Misschien vind je wel iets leuks."
Na zijn HBS-examen in 1936 ging Bob de Jongste werken bij de KLM, maar de Tweede Wereldoorlog stak een stokje voor een verdere carrière in de luchtvaart. Na de oorlog trouwde hij en ging hij verpakkingsmachines maken voor de farmaceutische industrie. Om zijn buitenlandse cliënten sneller te kunnen bezoeken, leerde Bob de Jongste alsnog vliegen en haalde hij zijn vliegbrevetten. Samen met ir. Peter Schilperoort van The Dutch Swing College Band ontwierp Bob de Jongste een wegwerp-vluchtcomputer die in Pythagoras van november 1991 beschreven staat. Bob de Jongste schreef daarnaast onder meer de volgende artikelen voor Pythagoras: *De verdwijnende zeeman, De gestapelde tennisballen, Kochansky en pi.*

Bob de Jongste is al bijna driekwart eeuw een liefhebber van de wiskunde en probeert die liefde door zijn bijdragen aan Pythagoras op de jeugd over te brengen. Een aantal van zijn recente problemen staat hiernaast. De oplossingen ervan staan in het volgende nummer van Pythagoras.

Problemen van Bob de Jongste

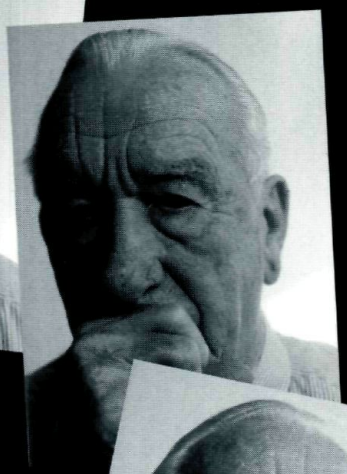


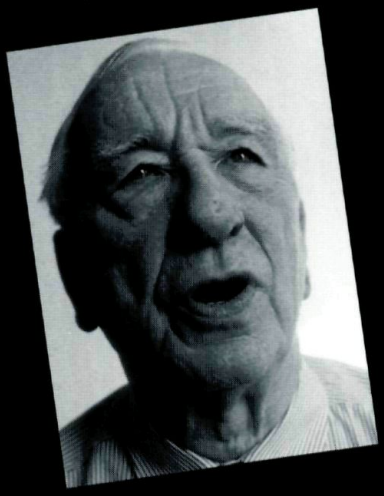
Even diep nadenken
Vul in de onderstaande rij de ontbrekende getallen in: 100 – 121 – 144 – 171 – 232 – 321 – ? – ? – 11111 – 1111001.



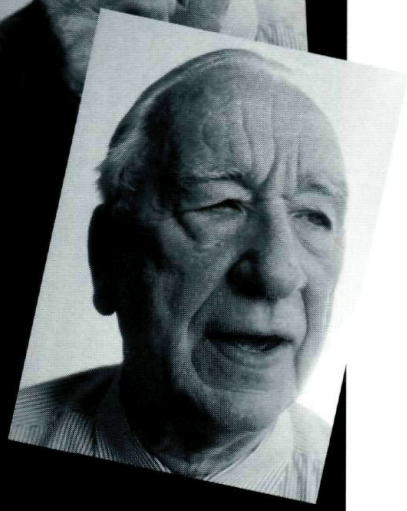
De euro
We hebben inmiddels allemaal te maken met de euro. De munten kleiner dan één euro hebben de waarden 1, 2, 5, 10, 20 en 50 eurocenten. De vraag is nu: op hoeveel manieren kun je 1 euro (100 eurocenten) samenstellen met deze munten (waarbij je de beschikking hebt over voldoende munten van elke soort)?

Schaakbord
Neem een schaakbord en zet op veld A1 een paard. Kun je met het paard van A1 in 63 sprongen naar H8 komen, waarbij je elk veld één keer bezoekt? (Een paardensprong is 2 vakjes 'rechtuit' en 1 vakje 'opzij'; bijvoorbeeld van E4 naar C3, C5, D2, D6, F2, F6, G3 of G5.)



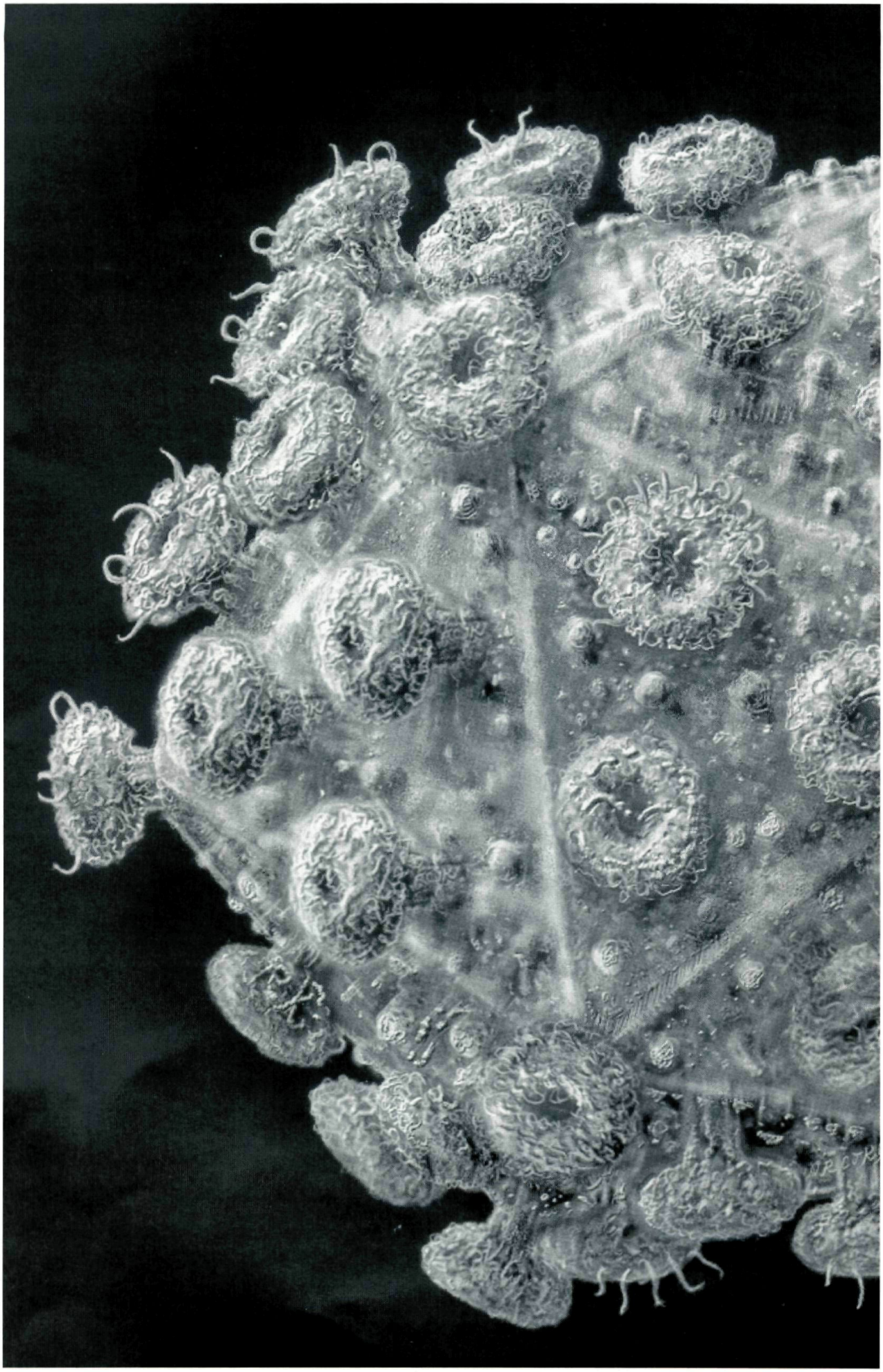


Eieren leggen
Vier zwarte hennen en drie witte hennen leggen in vijf dagen evenveel eieren als drie zwarte hennen en vijf witte hennen in vier dagen. Wat zijn de beste legkippen, de zwarte of de witte?



Patiënten
Als in het patiëntenbestand van een groot ziekenhuis 70% van de patiënten heupklachten heeft, 75% met het hart tobt, 80% problemen heeft met de maag en 85% last heeft van spataderen, hoeveel procent van de patiënten heeft dan tenminste alle vier de kwalen?

Kikkers vangen
Hoeveel tijd hebben 100 ooievaars nodig om 100 kikkers te vangen, als 5 ooievaars in 5 minuten 5 kikkers vangen?



door **Jan van de Craats**

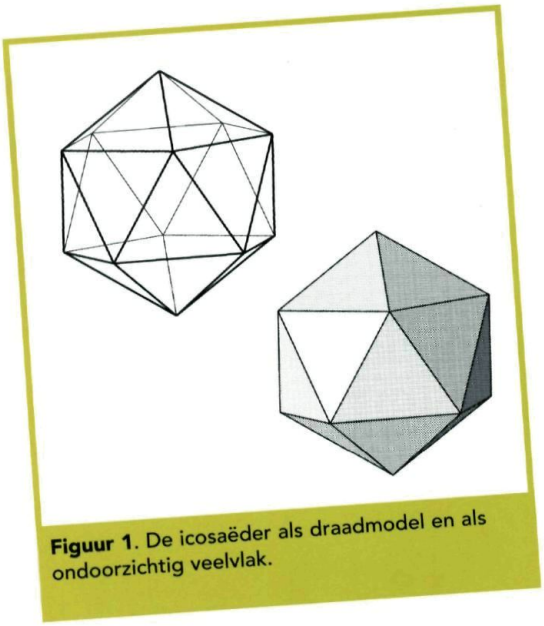
De icosaëder

De Gulden Snede,
deel IV

Icosaëder is het Griekse woord voor twintigvlak, maar in de wiskunde is het gebruikelijk om er het *regelmatige* twintigvlak mee aan te geven. De icosaëder is dan een veelvlak met twintig gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken. Verder heeft hij twaalf hoekpunten en dertig ribben, die allemaal even lang zijn. In figuur 1 zie je de icosaëder als draadmodel en als ondoorzichtig veelvlak getekend.

Misschien vraag je je af wat de icosaëder met de gulden snede te maken heeft. Dat wordt snel duidelijk als je ziet dat je hem kunt opsplitsen in twee regelmatige vijfzijdige piramiden, een aan de bovenkant en een aan de onderkant, en een middenlaag van tien gelijkzijdige driehoeken. Er gaan dus regelmatige vijfhoeken in de icosaëder schuil, en waar regelmatige vijfhoeken zijn, is ook de gulden snede aanwezig.

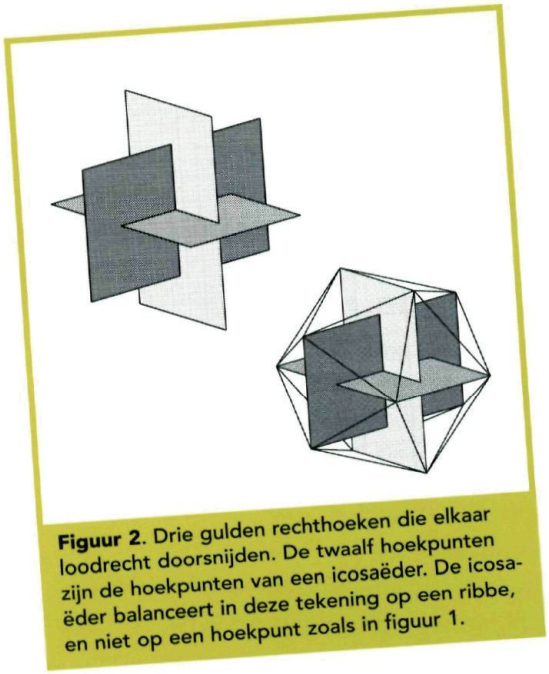
Linkerpagina:
Het HIV-virus, dat aids veroorzaakt, heeft de vorm van een icosaëder. (Bron: *Akademie Nieuws*, jaargang 14, nr. 65, december 2001)



Figuur 1. De icosaëder als draadmodel en als ondoorzichtig veelvlak.

Drie gulden rechthoeken

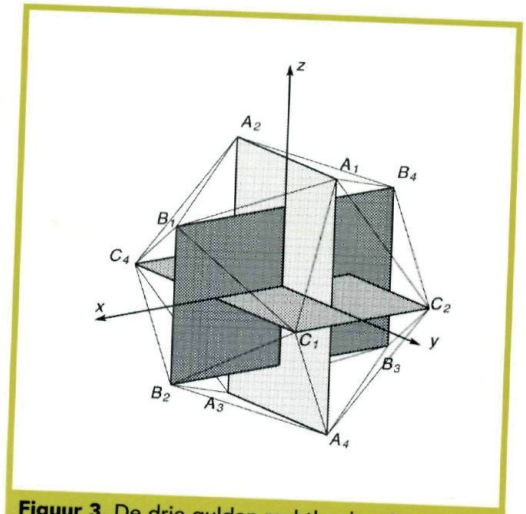
De gulden snede in de icosaëder is met name te vinden in *gulden rechthoeken*. Een gulden rechthoek is een rechthoek waarvan de zijden de gulden-snedeverhouding $1 : \tau$ hebben (met $\tau = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,618$). In figuur 2 zie je drie gulden rechthoeken die elkaar loodrecht doorsnijden. De drie-maal-vier hoekpunten van die rechthoeken blijken precies de hoekpunten te zijn van een icosaëder!



Figuur 2. Drie gulden rechthoeken die elkaar loodrecht doorsnijden. De twaalf hoekpunten zijn de hoekpunten van een icosaëder. De icosaëder balanceert in deze tekening op een ribbe, en niet op een hoekpunt zoals in figuur 1.

Coördinaten

Dit is gemakkelijk te controleren als je een rechthoekig coördinatenstelsel kiest zoals in figuur 3, met assen langs de snijlijnen van de rechthoeken. De berekeningen worden het eenvoudigst wanneer je de gulden rechthoeken zijden geeft van lengte 2 en 2τ. Dan is $A_1 = (0,1,\tau)$, $B_1 = (\tau,0,1)$ en $C_1 = (1,\tau,0)$, enzovoort.



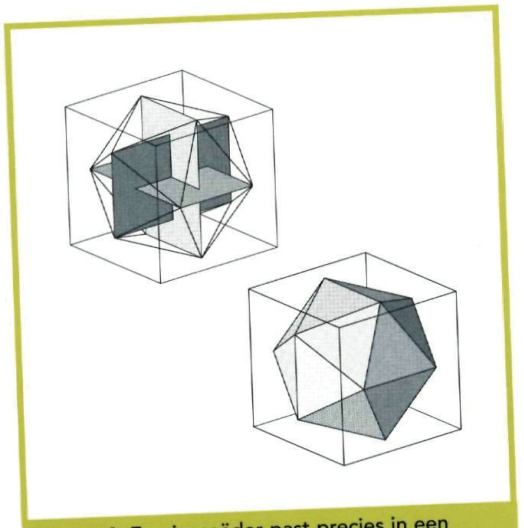
Figuur 3. De drie gulden rechthoeken in een rechthoekig coördinatenstelsel.

Omdat $A_1A_2 = 2$, moeten alle ribben van de icosaëder lengte 2 hebben. Voor alle ribben die in figuur 3 tevens zijde van een gulden rechthoek zijn, zoals A_1A_2 , B_1B_2, enzovoort, is dat in orde. Alle andere ribben in figuur 3 zijn onderling even lang, want ze gaan allemaal van een hoekpunt van de ene gulden rechthoek naar die van een nabijgelegen gulden rechthoek. We hoeven dus alleen maar te controleren dat één zo'n ribbe, bijvoorbeeld A_1B_1, ook lengte 2 heeft. We gebruiken daarvoor de *driedimensionale stelling van Pythagoras*, die zegt dat de afstand tussen twee punten met coördinaten (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) gelijk is aan

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

Pas je dit toe op de coördinaten van A_1 en B_1, en maak je bovendien gebruik van de relatie

$$\tau^2 = \tau + 1$$



Figuur 4. Een icosaëder past precies in een kubus waarvan de ribben τ maal zo groot zijn als de ribben van de icosaëder.

die voor het gulden-snedegetal τ geldig is, dan volgt direct dat inderdaad $A_1A_2 = 2$, reken maar na.
Het is leuk om ook in figuur 1 die drie gulden rechthoeken op te zoeken. Je zult dan zien dat er niet één zo'n drietal is, maar niet minder dan vijf!

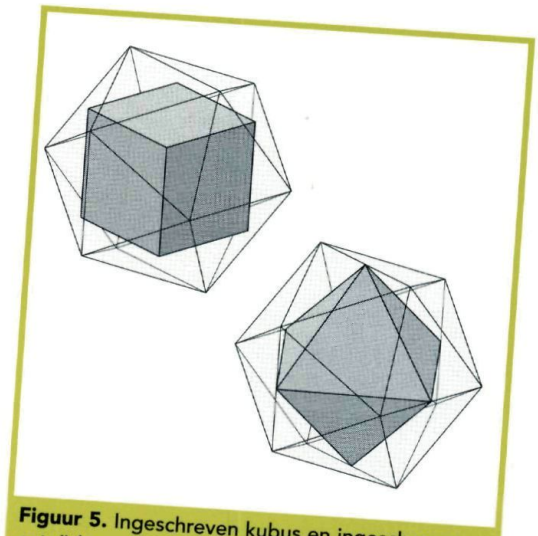
In een kubus
Mocht je ooit een fabriekje beginnen dat icosaëders op de markt brengt, dan kun je ze heel handig in kubusvormige doosjes verpakken. Dat blijkt al uit figuur 3, die laat zien dat de daar getekende icosaëder precies past in de kubus waarvan de hoekpunten de coördinaten $(\pm\tau, \pm\tau, \pm\tau)$ hebben. De ribben van de kubus hebben dus lengte 2τ, en omdat de ribben van de icosaëder lengte 2 hadden, verschijnt ook hier weer de gulden-snedeverhouding ten tonele (zie figuur 4).

Ingeschreven kubus en octaëder
De kubus van figuur 4 kunnen we ook veel kleiner maken. Zo veel kleiner, dat hij helemaal binnen de icosaëder past. Er is een grensgeval waarin de hoekpunten van de kubus juist tegen de wanden van de icosaëder aankomen. Ze bevinden zich dan precies in de middelpunten van de acht zijvlakken die in figuur 3 met drie verschillende letters worden aangegeven, zoals $A_1B_1C_1$. De coördinaten van die middelpunten zijn

$$\left(\pm\frac{\tau+1}{3}, \pm\frac{\tau+1}{3}, \pm\frac{\tau+1}{3}\right).$$

Je zou die kubus een *ingeschreven* kubus van de icosaëder kunnen noemen.

Een ander opmerkelijk ingeschreven veelvlak is de *octaëder*, oftewel het *regelmatige achtvlak*. Het heeft de middens van de korte zijden van de gulden rechthoeken uit figuur 3 als hoekpunten, en de coördinaten ervan zijn $(\pm\tau, 0, 0)$, $(0, \pm\tau, 0)$ en $(0, 0, \pm\tau)$. In figuur 5 zijn de ingeschreven kubus en de ingeschreven octaëder getekend.

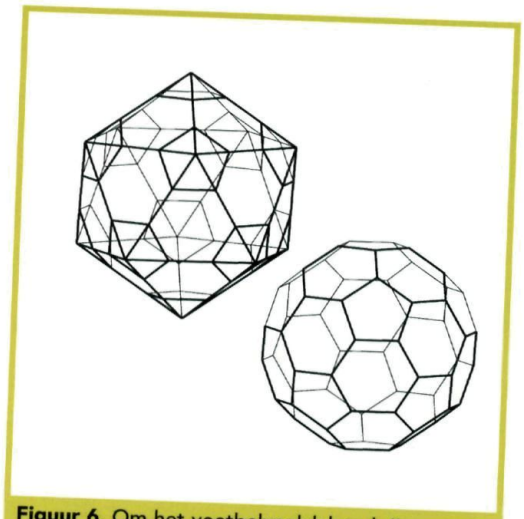


Figuur 5. Ingeschreven kubus en ingeschreven octaëder.

Je ziet dat in de lengteverhouding tussen de ribben van de icosaëder, de ingeschreven kubus en de ingeschreven octaëder ook telkens weer de gulden snede opduikt. De icosaëder heeft ribben van lengte 2, de ingeschreven kubus heeft ribben van lengte $\frac{2}{3}(\tau+1) = \frac{2}{3}\tau^2$ en de octaëder heeft ribben van lengte $\tau\sqrt{2}$.

Het voetbalveelvlak
Een overbekende vorm, de voetbal, heeft alles te maken met de icosaëder. Je kunt hem er direct uit afleiden door van elk hoekpunt een vijfzijdige regelmatige piramide af te snijden op één derde deel van de vijf ribben die daar samenkomen (zie figuur

6). De snijfiguur is dan een regelmatige vijfhoek, terwijl er van de oorspronkelijke zijvlakken (die de vorm hadden van gelijkzijdige driehoeken) alleen nog maar regelmatige zeshoeken overblijven.



Figuur 6. Om het voetbalveelvlak te krijgen, snijden we van elk hoekpunt van de icosaëder een regelmatige vijfzijdige piramide af op een derde van de ribben die daar samenkomen.

Kleur je de vijfhoeken zwart en de zeshoeken wit, dan krijg je een veelvlak dat iedereen kent als de voetbal (zie figuur 7). Alleen heeft onze 'voetbal' vlakke zijvlakken, terwijl een echte goed opgepompte voetbal vrijwel een bolvorm heeft.

Figuur 7. Het voetbalveelvlak.

Koolstofmoleculen

Het voetbalveelvlak is een voorbeeld van een *halfregelmatig* veelvlak: bij zo'n veelvlak hoeven de zijvlakken niet meer allemaal congruent te zijn: er kunnen meerdere soorten regelmatige zijvlakken optreden.

Bij de voetbal zijn het regelmatige vijfhoeken en regelmatige zeshoeken. Alle ribben zijn wel even lang en verder zijn ook alle hoeken onderling gelijk: in elk hoekpunt van de voetbal komen twee zeshoeken en een vijfhoek bij elkaar. Het voetbalveelvlak telt $5 \times 12 = 60$ hoekpunten, en dat heeft zelfs toepassingen in de scheikunde. Zuivere koolstof komt in de natuur voor als grafiet en als diamant, maar in 1985 werd er een derde vorm ontdekt waarvan de moleculen uit 60 koolstofatomen bestaan. Nader onderzoek wees uit dat de vorm van zo'n C_{60}–molecuul in wezen die van ons voetbalveelvlak is. De C_{60}–moleculen vormen dus kleine, bijna bolvormige kooitjes, en dat resulteert in allerlei verrassende scheikundige eigenschappen. In 1996 ontvingen Bob Curl, Harvey Kroto en Richard Smalley de Nobelprijs voor hun ontdekking van C_{60}. Er wordt op dit terrein nog steeds veel onderzoek gedaan.

Vragen en opdrachten

Ga bij de vragen 1 en 2 uit van een icosaëder met ribben van lengte 2, net zoals in figuur 3.

1. Er is een *omgeschreven bol* die door alle hoekpunten gaat, en een *ingeschreven bol* die alle zijvlakken raakt. Bereken van beide bollen de straal. Wat is de verhouding van die stralen?

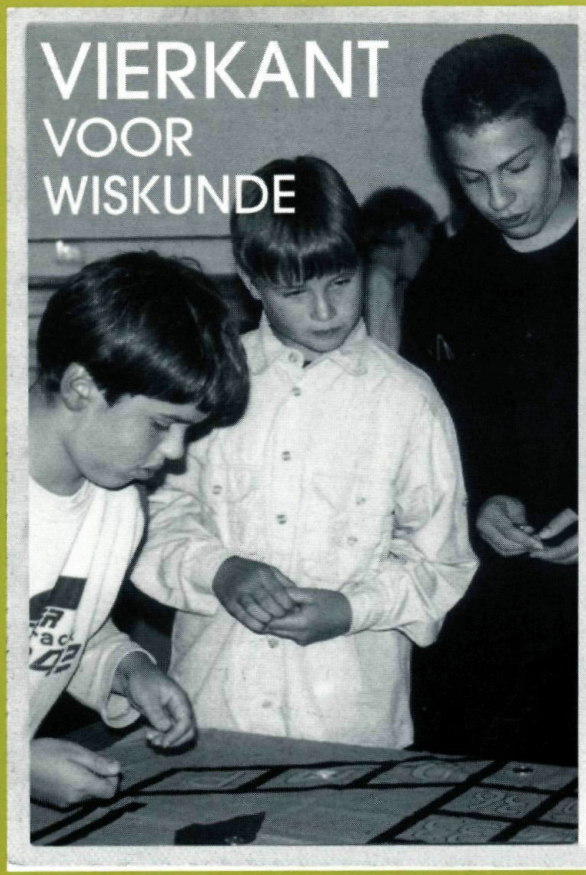
2. Bereken de oppervlakte en de inhoud van de icosaëder.

3. Hoeveel ingeschreven kubussen en ingeschreven octaëders (zoals in figuur 5) heeft een icosaëder?

4. Heeft het voetbalveelvlak een omgeschreven bol? En een ingeschreven bol?

5. Wat voor een veelvlak ontstaat er als je de hoekpunten van de icosaëder niet op een derde van de ribben, maar op de helft ervan afsnijdt?

6. De ingeschreven kubus ontstond door de middelpunten van acht van de twintig zijvlakken van de icosaëder als de hoekpunten van een veelvlak op te vatten. Wat voor een veelvlak krijg je als je de middelpunten van *alle twintig* zijvlakken als de hoekpunten van een veelvlak neemt?



VIERKANT VOOR WISKUNDE ZOMERKAMPEN

Vierkant voor wiskunde is een stichting die van alles organiseert op het gebied van wiskunde. Een belangrijke activiteit is het *zomerkamp*. Ieder jaar worden twee kampen georganiseerd: een kamp voor kinderen van 10 tot 13 jaar en een voor kinderen van 13 tot 17 jaar. Het doel is om deelnemers spelenderwijs met wiskunde bezig te laten zijn. De kampen worden geleid door wiskundestudenten, wiskundeleraren en docenten van hogescholen.

De kampweek

Een kampweek duurt van maandagochtend tot vrijdagmiddag. Korte wiskundige puzzels, onderzoeksprogramma's, workshops en 'de drie grote problemen' wisselen elkaar af. Voor een workshop wordt een docent uitgenodigd om iets te vertellen over een bepaald onderwerp. Dit hoeft niet altijd met wiskunde te maken te hebben.

Echte ★ foto

In augustus 1999 is er bijvoorbeeld een astronoom geweest om te vertellen over de zonsverduistering die toen plaatsvond.

De 'grote problemen' zijn opdrachten die je aan het begin van de week krijgt en waaraan je dan de hele week kunt werken.

De problemen bestaan uit een optimalisatieprobleem, een spel waarvoor een strategie moet worden gevonden en een wiskundige creatieve opdracht. Tijdens de kampweek is er ook voldoende tijd voor andere activiteiten, zoals zwemmen en bosspelen.

Meer informatie

Kijk voor meer informatie op de website van *Vierkant* of neem contact op met het secretariaat:
Stichting Vierkant voor Wiskunde
Universiteit Leiden / Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1, 2333 CA Leiden

Tel.: 071-5277129
e-mail: info@vierkantvoorwiskunde.nl
Internet: www.vierkantvoorwiskunde.nl

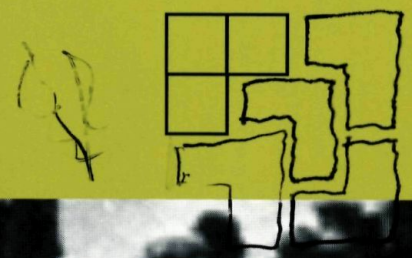
U kunt de stichting ook financieel ondersteunen.
U wordt dan *Vriend van Vierkant*.

Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!
De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Aan het eind van het jaar zijn er boekenbonnen ter waarde van 120, 100 en 80 euro voor de drie leerlingen die bovenaan staan in de laddercompetitie.

Opgave 81
Iemand kiest n punten willekeurig op de omtrek van een cirkel. Wat is de kans dat de cirkel in twee gelijke helften gesplitst kan worden zodat alle n punten op dezelfde helft liggen?

Opgave 82
We hebben een schaakbord van 2^n bij 2^n vakjes waar een hoekje van 1 bij 1 uit verwijderd is. Bewijs dat dit bord volledig en zonder overlappingen bedekt kan worden met stukjes van deze vorm:



Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je *naam, adres, school* en *klas*. Stuur bij de antwoorden ook een *toelichting*, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 mei 2002. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing *zelf* vindt!

Op de volgende pagina staan de oplossingen van de opgaven uit het decembernummer. Veel succes!
René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Opgave 77
De getallen x, y en z zijn reële getallen met $x + y + z = 0$. Gegeven is dat $x^3 + y^3 + z^3 = 2001$. Wat is het product xyz?

Oplossing. We maken gebruik van de gelijkheden $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz$. We zien dan dat $0 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz = -2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 6xyz = -4002 + 6xyz$, dus $xyz = \frac{4002}{6} = 667$.
Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Bram de Beer van het **HRO** te Ouderkerk a/d IJssel, Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvenaat H.H.** te Bergen op Zoom, Hanneke de Boer te Amsterdam, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Birgit van Dalen van de **Vlaardingse openbare scholengemeenschap** te Vlaardingen, P. Dekker van het **Erasmus College** te Rotterdam, Harald van Dijk van het **Zwijsen College** te Veghel, Koen Venus te Duffel (België) en Tim Wouters van de **KU Leuven** te Leuven.
De boekenbon gaat naar P. Dekker.

Opgave 78
Gegeven is dat a, b en c gehele, oneven getallen zijn. Bewijs dat de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ geen breuken als oplossing heeft.

Oplossing. Stel dat er een oplossing van de vorm $\frac{p}{q}$ is met p en q geheel. We mogen aannemen dat de breuk zo ver mogelijk vereenvoudigd is en dat p en q niet allebei even zijn. Als we nu de vergelijking $a(\frac{p}{q})^2 + b\frac{p}{q} + c = 0$ met q^2 vermenigvuldigen, krijgen we $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Omdat a, b en c oneven zijn, kan de linkerzijde van deze vergelijking alleen even zijn als p en q even zijn (ga na). Deze mogelijkheid hadden we echter uitgesloten, zodat $ap^2 + bpq + cq^2$ altijd oneven is en nooit gelijk aan nul.
Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvenaat H.H.** te Bergen op Zoom, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Birgit van Dalen van de **Vlaardingse openbare scholengemeenschap** te Vlaardingen, P. Dekker van het **Erasmus College** te Rotterdam en Harald van Dijk van het **Zwijsen College** te Veghel.
De boekenbon gaat naar Birgit van Dalen.

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534
2117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930
3819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412
7372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943
3057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833
6733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681
2714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611
2129036834813925860325990534850875939519571401034903254472202649631124855308868427621911292618342974269
5524893112772506738393330992665660359470430309617003931812098111118621726322091314149284825342226352586
7049160651502967481315748652079094073893823276416797488160947027169453944148383078659386647159885161836
4193031392408524825094817954988271481342438743779860149446792419052326382283076352616416399893901764962
5263617421071126761941257311781399925992231193396121429724613617721539831068963146855315894039291525963
4503961362024394496860647438193429684490674539094658446691365231226427756943392343626941322944488172092
7777965262441150757601822420617961031188224050577471256138782687235054422660432335588585602352949501854
7345725224608706670450470909547858603015866227471694909170864287943710350793313960651727349024694560291
5034996965794537196863286006748689253210388703034843368618286690680949501401963421629143374226702949301
9619201050333317530929754890857784509483553377201569884467542616861476333798893941767523846974894545355
6978603205193634285692698905286154044809771855008386270685386238305768368602954293483747234498249347323
4386233569628110642353518480243702988077226059566389177242670414809514713034364145942922645309859290352
8330226911286639431438699860247133712603549863442286969092339444217852293651244355389413641943668509166
6945508455463602824488046425906949429959658445461215790991453274481777309203721582178776375943765859038
8878353187396962855056953654685971626297757617351666058056967052651502892416334488503231136835351176471
4832096344135928229319505026463673716944097968471286825116215768663962836735224754602693761505947220702
7119686672827863772325344810488877211670983218911833067535165120126601127616556147194391352941849718960
5116422352673356817177241363443944775449579551031392181368862657488678216478584865637694201231316727992
2275680823607607302968363670353620255414754038639343725942368725487179545928271865221625835055580166651
6542137112765011502441725368233918399648326260272286752146286137860935736438781551397235616941023288489
0086583360440525332334077966143509445651029350618456945319585038023720528554962724879977933625572767179
6745941351587892119584364365429762054821191294392297256392954954377358655426672590335819797475356636979
6052647232434103445965649613085689356966607107396448624305077677449667456509403651401277650271596293961
0315354506954209943702772394616616796116353180188286945821654235798351231616941386332147446068249059382
8638233964367518923754396388422917752939925180342710603707211499526317931959511031627462821445568501860
5326466213858456271367623941666523829392430609517339288098116271569724862665466227438267043268563396472
5148328474302368551694581872670223326094705443686334723509295039458965028420751389067939509474426274161
7420560605027941617518209352892954472111846677620911281079782940393736103342491468527051285181302550078
9417473779793015670897523540688145641055781251368276673835526401071472125823891607992193051831540484354
3682692034943392451168092809490819909075193959821068135303435457690452229689754665785946855052488353438
5976438207475275937421029603113404691420320192050792319203368292461825892421469192368505498626362285754
7185689069434903049465538092994692456422298438076944516340754500353317371959945868231386754337839882255
9225285272276654720941353743657179052342831188964992387963966493293479834313677120651647796940658651654
9197692698203215506373084448817947185698288627377421413154946350286166256975424949465149192940965190471
6713118751335393428741672326758944334207463992151224374118494539791601926609699339721771744288620233399
0390944458685660852324036168766925724417154113416169618617374734778104534221686398193494147968425288661
8597388160501363170559332123647360694168825188178367278616107380919501419865941758271434693294741343452
6146859296389521759471961185881170967013415759285901850438438345991031884492863675237765365389950667856
5692360568473052830488079297488171383823466721309893960440551046319511254819290649151452615249629539311
8172137047281759961628138823774892656403976068036048275863389334472128103131285338778079026768517846572
8462948992859963389727457435431937734884147949616109187284867669376694021487948958388464352988531227319
8915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000704277471627389252751425267154687154689755
7356617210291609231131160186076654858327104107635542079919877296638345766553949884178620931416157514782
8518606423956333506472618509596790506425071053690146330309941586566260394449930520436748475631671339051
3798274856966809426759286355221116754845956903694602534768642392228489768896479756298231649550619762085
3323118295551532317137647137948960016960363425271563564520165658250774014616621602360893779960425209472
6151137167172328860096159471151490603931519172371796863636748798642054245439418992724366992458631503028
6182974290663787462765584941290327886718852435858807170122281859488677253338765865689957488511596794272
8333466241573262286339386773356823551382604779193804855643864492436665270760390616189880819898532990861
0590490155293286760319971765118583045149115439421616979609316782860951470850694665673425329926289032602
5976689696506905581056551763503508439302431418439850292897692156600454875414721861193211863867945396413
4665724341425954954056137677048368779115283605709941427991925561354966056054285696569737484563964255319
4609631363943366592706147224891050041013856928468176856655849402420524595086897171276501160742941317767
5314752162518851453991369298188716639292670421562235588869650479381644689172516512967435801532775665550
7402352166567376027352519518179967027925670576652933918767672907703810758965380583321445617315853825944
6285319627619941178193471767149975941635438752665432408114427336470853286048516439458652352779113960855
2533687360223509960366094170274862367687309168290760003107106519863054325364201694751323960534314819098
7466464966992506171903376672309876675716354699237161201616946209484435065317436363286787084377859560843
7766941006965947027185862941091314071112432837517160692431351779660344398441733468844832326808778509056
2438039893794975679054605368124756051179297550267193072897382226851856960674422626380187613402464945792
4145942819517855846596602663122671864654585942068659491761960630474354285965145761571120271026474555068
8063295527474963635944351950882023095831186856927190147079684201444543423949911386501205169388975650369
3076207968822262545091702075392693289488293831160225193167551079631441342224644949303965425224317973199
6715591235467527739155277825518992398798783120776509289441267108497709782665160855406987940109101471798
2753672607091965507533532567823777309352193221766607309233692727171776167288401441889533212853631190313
9620271002112953317931534967450315403332720592959509476426274426419856444909953077471566145869434147729
1128142354581473470408511756596457483423963550967737941224847672113666418397627389698188303675193011702
6176793941133445665393794977094392733523523112332782466388619201642004674424822922725518366193189286488
1584405154350823792035414553027563836925271550459025422350779451694664571784784875163698747779392126096
7369962485368518296347058317921105363226954785754388382234684309326620316461514284847488616471596254203
6528851231103352030355047448201734399142983067978465231951609131418449462963745963506289356613277218850
5738444321776810388050792260992491333781809151353498194025139826517341539636631652180942943713287251231
6596754471210856688698674194255483077650786963660645555131988915025056812383311468333352307609428536978
3601433771309961962637427431830968349285684851051396362056513947785016388437074201557042857617857294960
6596116205298221337962665124965049418650146663968518286066336037147113751374488016936035313889097137968
9112975533453050774825168051563863461484593091986231574341535733124425303684571003529967968197767363252
6227226319368551286885607962067702430168721675715056462180758823354065365286527147221503757508209758532
9252307309891440987271715426998067380386840079963248309960644169279255031411206481094352254692697168608
3943573644903065774804780388551846249870527663694751188515857079506484160049596594542671471375740143147
7966389678501354018849352937765412017368591913841435776961414754608238643603896660041363425171903596751
0942161884314502344587127821792849750303398985094387925702592339297971602277471836670429151464209027803
5311477992860689411621291222678534318529185489446791574984286233297842224135046427351550655992319615491
4298093833366580928774832962421720854579071317952968823960721072246075470691756670238481034959468324172
8366428518501256184489470761193425043324392351023137054114405390962175028354091716530926719887474703563
9990255736962914389337728603026147996622436544352620580954231367947751479031540274477963035914992551366
2150143413533342613003366294065774027992838795163669425228620235488163947758256189037231114574594135960
3418992448622235501005807201327115181881368031285287319639865564488627689587836823281398930501321803908
6272471568428332519159035924660856403766984401960520444381502067347837422603483702018749032041722145425
1950549874016408076860847389650195518190245611837352179409892069192860863331660596253468594163615416092
7964389798892989484215941694835255319442377825586719540166275779289257860958386277179667518408689498049
5038618362838683312773589942312413374602758794792434034037860980458367338603653799511429958177035754674
6418393887467276568360432617207609378838565057527965491231161054158391150193291163835992486685846735524
9411651157246591892441816540340296077179692687442287992859459310987473276896083312568647033058928137757
2892630352396759260344627720113553059931988609658596031387574116489940368615140860451625234354460348441
6189366942736475835275374125268674458068836860286960551650680502018931780617413101821031368376097067522
3148388413259665089646720193095488202758959654829064010945596798362016944835690246032809309779658860488
6166338342490651941231958767684875697992438491224689565054657224607206652504388120725060314687418963171
9298317824256502584931304285502121067960728354188689220722967767967368329385425660419091288414368575030
6452089194526027350457413941877954618335398164651859960552293855968723736193171602092953716469049615633
5382594362342577860389156465949674783623963751502852228055058118306338328779784421484859191193376431781
5286368092049083193105179160796511201880921785861440303941667135770992508221191286942319126069471963694
8339065849626005416479489418990489377292194328282095758540985367845665835120352658019620945470238393893
6874307975159980919333119879896292388948431382967165751650380388437647669942574741854034859038452362879
4601989242471361130603074392256823724184881164271160798528387365150251276620190758754111773911160242596
0628355221650699560539180094073779619297488170418835393516551120329948647438285751627141325983643286859
6315353787863875874216171767669147303597506947635286620021321626412949414634050307691554591343626522447
7966467809667372861943296231988207108249254095011657472484110949629342314429757651852874016651076971286
5138319397233026078693339355614453250524883819859449991757506164271460221056298859431204422414379822193
6342355382222383599413391319721317812847784295036233941647959119012085216256189051011214672207223897674
3650757463759551583074386382289942284568660568008992860134758221551246776650926047446780377326998465149
6580159441497435434496515596146350256650592608502148884146054926788377089937089286091551698359261254830
9696526772372954270326630067969113792239442809119609438432955793823168096386669825625418703757852496651
0957309211373691638114160963294616116964599935619319689249549220962031023510294474180960837863941015453
4326586137689093618334617274728034504987018374945452806224941964425416490439397988590690804916368590670
6601380124446120343392604809524799051151184551397801471109641559783838115157999835168454436426092939891
9163501508884438835931403607491451963992425908625413751376689473208967902509475119386687193058049275224
8610201616471201219966292960292680058276471204941411873192161193167355094296953755324331353832361882420
2798643752371207617183456762449193041759037499259961725052433659365342862823497342907568966862534988775
9114781389363952603440774877532058383414647893694687608468824809509965688556652496124565554505630950329
5352596503183553553113231425223077379392193491256050215863967331753253836450943137341362042859567549830
1771309960518070754255169151323964567285307295760309116388450484966365231425076302243942276471067206521
6608940436437650203481501138583226498757201965408592967434276454471205430975636164737644787588116817493
5320670193826319966557309504353698864963570967032572673677952636980388092948614503194856310307990497599
3440161255964326309521424949503488503634467622781954120184471158722380998903623943499145471605122121663
5944285192466422943754904665499911188374991468524079389137184265319486423692017862312681540966521391963
4671742523465427367649863438856396699309941501441611806425275301965300659453960306340466994284694118471
5325386368428205731507294418771635403593416382869108147179471825613284334386698506856343077711665201362
3516856333193968598457392790675399422363436514457545137958150570169116079393751610783880835302642466949
9092365473309522647458968678350194992551435589325976698338673779782654859386754588596861458961794231864
6468439438649494639792933367702289392988694694095686690166509129762674694282120366588657607289540250465
5085660668325119388344421254483392876976094471056546607112396310861691672303707176626954457312863596792
3545350568808385457685441511450689408865416945491608605390294944631449807310771599526805667188089231392
9761488275887201348963325035621502875867345161856671539092458058038033659335647475613806636915509767859
7163689517029694339145017967864667470964325861261181179310112373449114181448416251445736354030380672736
5914414506962357542457702663148501317047284588675335323326503719768656032441690309897488779999721248307
6466665499911838319288627463894253468091106960315294963959285387509228911146058233517684675502605439487
7395351374960725860351228509533511125640747110418616733078601280471795274964065249205765251686616963620
5380689893960726343754618968356172607101499553363275255496376092471182538268356963620620702575966716110
7077054704180772929530985290892215216266471222694753551309486964670963472837758345677292698657078393867
7309930150976116798942137470931857796343894150174641270175692641917508488466515338352332663607352943235
3518529113201032784507484593821674110309318809877584752032411983503193694065471495856036238710753164126
5480294897801477293185793636431425991599616392177193830814809771992508837687382619795194949137654292892
9240949319668651004631382375424868425671398027403603448307540855649992856068353207291652208283959221391
9711194422921193488427963115757005754689574392144868884116694148076420756540198343942092430386463928645
3320308725342041506992570650518293897758478850314246671944125448041068551323943854465733345936860845201
3116716368076832889422626945169649255443058854460243652212945361475942222659715803770309791745670064404
9090368429503537231863626879697501509751468851558673573321225835377622592345831856958031651166889396755
7853193421161601427138287830528470293947101119959224784471670925864136941255862074501285685035924725938
5119215725835399767954778367366448905799704430796180940792540563368652392339351755382493858009430809388
6326645835291116598929342792633319339906179780622121758108640751370317231865150392855276274836042747691
6311356941448184229689078952943365259146498472425961181719949067313830523267068150643321360293856663752
6252309540340965689706325471855071408501448207124077941999275148651603283233146293395959432356319639428
8509264961961291790642793532250119996286354909427861644998496226868368925905992758355277094801560502959
4562400961753621185596800675211985775495788650752445463116606368556540398030187506755991551316047780385
6986275499865389079172192590863284884675368992414519474483159969031404958293472742368457226403941201724
9785650992507836667966667521096643380226860499655388165751358807079968724518931558368819475683868963068
3243968745336312356382860921480154543963643255225188366325851058779586481754160980026448598635945506665
8023385642617821449211380556506911249831720311859509116992149675388819776253067468091241691137151550018
6094419159284488840961252442510815292620837317030226371326130147564655260849388780501096650645552491875
4246074917079624994055688766033343635598246286554250149377765556985096659253215188766518947033684605103
6432403211365297976532965026161372178616835584342766547754253860449034845943301215430438463689664960397
1518426148619417291688077654252474491393989941849784940166424860149399235473973231597763782110238135354
1989380966226254241094165292691607431232424097194120128759368823490687766560163596116355125958279350158
2857601911614701419397667066435925085119325551079434278963747491882916771249038150519967480180750138887
7842065227533460718109990419744884056435431178792242859038649035947759703863720565958124533718131491549
5145143617869627365675702593963112119251019283967292394408119516168325171494688857691297533233421220423
2263011702114307840165707368255297487911438690556959534389719772554952542193161835035179319113830232502
6938641055124444367630353759909818586754201550875996426677835603134617794516014754038646754737093665490
4216365272042765275554854766056121168391325963188505303968751515617677286136339535474119937718512441388
5126345131337177157847952576326117127860754449422896694509252950881957877184122754378809597181419516512
6269567455291967317861525406963278788651752951510129897489392379782312618602671754963184501358382804909
9778551473741225177720863186056512491505631285171271578255963206717809168313526937239362213373231570505
1473163113429860849687422386368639193076527311719529976262392901224386466445689649996438037356125484151
9490343466529365451694079864256399942091401763285718456602249403414425940149588627578516192201616184733
5138751148201034281754226137672089096964092421693071613863967067584965488870157966467058702226680476472
9548702790797553778367598516403188112168783892107751143116555448201190391943115572903616179551574725178
2404449685143855686979623740351356642074235160651870267179518907923542019956112129021960864034418159813
5756136192351091354501471471685877288620271696275058894067798985286965094256148166482331786541416262564
6369251831835004868716385084551339423763804392339179392596540819766812349515674481860686958295207639772
4080966679411065146649644689253901540368329418137631338647542502399176055608094025647784338703405883550
7436003549959471301856540765127091499207442850283079671767694686209167291167963558752058985097491388193
5034352031528018607925056388649448691698702720793425779342603219195254511004471287798627356503643077326
7591563819161353038634579319673663220416779203805685084488327823498320326758859772083354071531407968963
4315258905135018657094602165448315962475762023401777467909944608155148380121421392365483177163143599603
2659969909563626940512451665294781865558627682204604651147441732252154325091594950324179794496819473009
2773497911925306868698416533721355942112963779159388314835860260849579071403745349979252107599127751941
7157616925509424632222386840411221599163988636382510707711286489649627608291359751024509457050241127279
6897264068201141391144968925960925490676671234781386740388809879514524180758484263471470745697540030165
6590968035180659471663353374532277224137591505787605602437718405127964325360115353231392448960396013366
7430240293702963286926794307002686457179681161551150016342284317798677669624518714271704101526755069924
5342293649422254698570854491471103905649938625017247852996599127448667607435386988940177067549283602605
6628047417475663867654236616435412309618292362575745701850352663552533187967508567943817292992460617085
7216779960519390631193167180741869694743089066560774429941518314647598860374964471718057518179670502549
6091137091574522111255747586631321858459853506116438889185403855387375964195291618317607038448796509726
2383962483108159286498905479054304943762233077482502276953356688851159271367388806704785940699368785165
4319326383175968888256909119736963555790494960652296964965255627162683517864530398596740531452953619631
5173613033338954450449506856987754591857627113135960309941861830674765440550316798307608705077278397779
2091756711578291179775161446397684390900360408773103193388228511393860925985483976491785738033634368922
5237949589577635763608319835367408871280340419362345276872389206376325330327693416232377161605709959191
5392984896084128488626945604241965285022210661186306744278622039194945047123713786960956364371917287477
6465757396241389086583264591380978643403697375518621590812262471968309445013159518094946338002081368475
3464346774964792288652094829101833333617766468615738467382448013119490838509470919594447692825625264754
9618622865882068660841588352962069256483109322418768019091383675671322835788656389164762077635691232443
8762236005193511333382754702672388596953276627518192421822859974568965691819059292053836352275656925055
9544877727396759397945677631376193443809193835291974949952665011286445032085823874962434093954950331765
8528819501841471968694315438076860023403441706416209172026794677698337992680112377958817538366665888501
4505837992287316305954334730942212314506474179416460319856602594998471603968823444698375035751941309876
5318992758445754477784287365759555095553317853011601388519255448387844069848963231280858388055286411660
9757963448256751196691146314471149179692820804362246996753490374343865349106059869697960094511665094825
8223171539356742697417636940056691641163050086014368946858551658579506224599392505509665605377479684850
4873411576773193198118514579897011303024226296574399790179857860209398352285396376030405074449845124389
5454784228497859242084099652833379165438564050379465059279631501254481150740517344235603431649376765689
6035638482634717540819456231966670638943870763968577831743124194056484355780252473473912377872794607056
7544331517416943712770968311593475275615163206825298392074911671736363097893823964788365274510655532944
8279671368960651943908709069426659508551275063404351584398893944370686422362604499949691985507442068253
1186094190992517816425925738986449602119319619343238651252992189418738492919293607377577289117975687309
2660192528092649097962094501417968942665616380938857690274893219656471349720241773530594147174304205775
6448917747007177549892438602953968967318752384894502141805768826514929754616368392731780798331821503665
1526165651890949899092126849754902436692114811051954690389392192869399539867113425396034243887487309860
5945941311110659511596538617339673113440650233473467697416409855325754991856371396403450255788944620616
7615611281538880095941702101535780046325926849429941860536436317137111386270479615491127608631509619963
7188667856509501884126860698319033754406643193950979019069963955245300545058068550195673011167236434354
3947822181852862408514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730176496286744604774649159
9505497374256269010490377819868359381465741268049256487985561453723478154133714248928307220126901475466
8476535761647737946752004907571555278196536213239264061601368656271095359194658975141310348227693062474
3536325691607815478181152843667957061108615331504486527109535919465897514131034822769306247435363256916
0781547818115284366795706110861533150445645216439394239862916421939949072362346468441173940326591840443
7805136791928866215078424516709087000699282989650226291748788202734209222245339856264766914905562842503
9127577102840279980663658254889264343476933857817113864558736781230145876871266034891390956200993936103
1029161615288138437909922909433467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512
8162288244625800535598491754173818839994469748676265516582765848358845314277568790029095170283529716344
5627518721272675079812554709589045563579212210333466974992356302549478024901195212382815309114448002
6704962482017928964766975831832713142517029692348896276684403232609275249603579964692568754711962184
4396582533754388569094113031509526179378002974120766514793942590298969594699556520738837781423356282
3608963208068222468012248261177185896381409183903673672220888321513755600812314593571984922528471605
0492212424701412147805734551050080190869960330276347870810817545016514384070070736041123735998434522
5161050702705623526601276484830840761183013052793205427462 8

1170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229
8936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204
8857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392
2249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187
1710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937
9682303019520353018529689957736225994138912497217752834791315155748572424541506959508295331168
9429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521047
8417216412199245863150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093029553211653449
0600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418494684385233239073941433
7843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284886269456042419652850
8133904780275900994657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026
7729754989301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725246808459872736446958
3484063534220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225499546667278239864565
2287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848216829
1134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084
4406437451237181921799983910159195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252
2026054146659252014974428507325186660021324340881907104863317346496514539057962685610055081066
7631763594218731251471205329281918261861258673215791984148488291644706095752706957220917567116
8141267111369908658516398315019701651511685171437657618351556508849099898599823873455283316355
9575712828905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428138830320382490375
7669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226978028073189154411010
5356620185581007293606598764861179104533488503461136576867532494416680396265797877185560845529
1270004078547332699390814546646458807972708266830634328587856983052358089330657574067954571637
7791745011299614890304639947132962107340437518957359614589019389713111790429782856475032031986
8297986622371721591607716692547487389866549494501146540628433663937900397692656721463853067360
5114959501566049631862947265473642523081770367515906735023507283540567040386743513622224771589
3965864573021631598193195167353812974167729478672422924654366800980676928238280689964004824354
1617557829735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215413418994854
1975988281613323166636528619326686336062735676303544776280350450777235547105859548702790814356
3796959703098339130771098704085913374641442822772634659470474587847787201927715280731767907707
5290928545201165839341965621349143415956258658655705526904965209858033850722426482939728584783
4204208320856611906254543372131535958450687724602901618766795240616342522577195429162991930645
0825202618798531887705842972591677813149699009019211697173727847684726860849003377024242916513
4640903890644954440061986907548516026327505298349187407866808818338510228334508504860825039302
0568533862186725233402830871123282789212507712629463229563989898935821167456270102183564622013
9219139339185680344903982059551002263535361920419947455385938102343955449597783779023742161727
5940516553790686627333799585115625784322988273723198987571415957811196358330059408730681216028
8303904688383436346553794986419270563872931748723320837601123029911367938627089438799362016295
8155907422020203187277605277219005561484255518792530343513984425322341576233610642506390497500
1274739245449454236828860613408414863776700961207151249140430272538607648236341433462351897576
8945257423995082965912285085558215725031071257012668302402929525220118726767562204154205161841
0660418371806535567252532567532861291042487761825829765157959847035622262934860034158722980534
8025456610172967026640765590429099456815065265305371829412703369313785178609040708667114965583
2317473363948045759314931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671922033
9163330391072253837421821408835086573917715096828874782656995995744906617583441375223970968340
9640435231176006651012412006597558512761785838292041974844236080071930457618932349229279650198
9073860251522742995818072471625916685451333123948049470791191532673430282441860414263639548000
4936818360900323809293459588970695365349406034021665443755890045632882250545255640564482465151
1218656196733786236256125216320862869222103274889218654364802296780705765615144632046927906821
2798394004152970028783076670944474560134556417254370906979396122571429894671543578468788614445
8071412233908663938339529425786905076431006383519834389341596131854347546495569781038293097164
4036036745328651057065874882256981579367897669742205750596834408697350201410206723585020072452

van π. Als de Grieken gelijk hadden gehad, dan zou de decimaalontwikkeling van π er heel eenvoudig uit zien: $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}14285714285714....$ We zien dat hierin sommige cijfers niet voorkomen en dat degene die wel voorkomen, zich in een vaste volgorde herhalen. In de echte decimale ontwikkeling van π gaat het er anders aan toe. Er zit geen herhaling in de decimalen, π is immers irrationaal. Elk cijfer treedt op als decimaal, en zo te zien ongeveer even vaak. In het begin zal dat natuurlijk niet zo zijn, maar als je meer decimalen bekijkt wel. Men heeft gekeken naar de eerste 6 miljard decimalen die van π bekend zijn. Het bleek dat, op een zeer kleine afwijking na, elk cijfer 600 miljoen maal voorkomt. Dit is absoluut geen bewijs dat ook daarna de cijfers even vaak blijven voorkomen. Het is denkbaar dat na de 7 miljardste decimaal geen '4' meer voorkomt, hoewel het mij zeer onwaarschijnlijk lijkt. Je kunt je ook afvragen hoe het zit met twee opeenvolgende cijfers. Er zijn $10^2 = 100$ mogelijkheden om twee cijfers te combineren. Ook hiervoor zijn de eerste 6 miljard decimalen van π nagelopen en het blijkt dat alle 100 mogelijke combinaties ongeveer 60 miljoen maal voorkomen. Vervolgens kun je naar drie opeenvolgende cijfers gaan kijken. Zo'n driecijferige combinatie, waarvoor $10^3 = 1000$ mogelijkheden zijn, zou dan ongeveer 6 miljoen keer moeten voorkomen in de eerste 6 miljard decimalen.

Een normaal getal

We noemen de decimaalontwikkeling van een getal *normaal* als elk cijferrijtje van een bepaalde lengte even vaak voorkomt als alle andere cijferrijtjes van diezelfde lengte. Je kunt een getal ook met een ander grondtal ontwikkelen (bijvoorbeeld binair); als elk van die ontwikkelingen normaal is, dan zeggen we dat het getal zelf normaal is. Wiskundigen vermoeden dat π een normaal getal is. Onderzoek van de eerste 6 miljard decimalen van π ondersteunt dat vermoeden, maar levert uiteraard geen bewijs, want het zegt niets over wat er na die 6 miljard decimalen gebeurt.

Het is erg moeilijk te bewijzen dat een getal normaal is. Totnogtoe is dat alleen gelukt voor getallen die daar speciaal voor bedacht zijn, zoals het getal van Champernowne, dat je krijgt door alle natuurlijke getallen gewoon achter elkaar te plakken, zie figuur 1.

Vreemd genoeg is wel al bewezen dat van alle mogelijke getallen de meeste normaal moeten zijn. Als een decimaalontwikkeling normaal is, dan moet elke opeenvolging van cijfers er wel een keer in voorkomen, als je maar voldoende decimalen bestudeert. Je kunt zelf eens een zoektocht starten naar bepaalde cijfercombinaties (zoals een huisnummer of een pincode) in de eerste 9827 decimalen van π. Merk op dat 7777 diverse malen voorkomt, terwijl $xxxx$ in het algemeen er karig van afkomt.

Je kunt ook op zoek gaan naar lettercombinaties. Om dit te doen, spreken we af hoe we letters als cijfers interpreteren. We doen het als volgt: A = '01', B = '02',..., Z = '26'. Dus als we zoeken naar '*PYTHAGORAS*', dan zoeken we eigenlijk naar het cijferrijtje '16252008010715180119'. In de eerste 10.000 decimalen van π komt dit rijtje niet voor. Het gaat om 20 cijfers, dus zal het rijtje ongeveer eens in de 10^{20} decimalen voorkomen. Als π normaal is, dan is te verwachten dat zelfs het complete Shakespeare's *Macbeth* ergens terug te vinden zal zijn in π, en ook dit artikel!

0,0123456789
101112131415
161718192021
22232425...

Figuur 1. Zet alle natuurlijke getallen achter elkaar, dan ontstaat een normaal getal (het getal van Champernowne).

Opgave. Hoeveel letters verwacht je tegen te komen in de eerste 6000 decimalen van π? Hoeveel letterparen? Hoeveel letterdrietallen?

Het aantal letters blijkt 1565 te zijn, het aantal letterparen 409, het aantal lettertrio's 105, het aantal letter-viertallen 29, het aantal letter-vijftallen 9 en het aantal letterzestallen blijkt 3 te zijn. Kloppen deze aantallen enigszins?

Op de homepage van Pythagoras is een programma te downloaden dat gebruikt kan worden om zelf in een eigen gefabriceerd getal, of bij een ander aantal decimalen van π woorden terug te zoeken. Er bestaat een site (zie bronnen) waar je kunt zoeken naar woorden in de binaire ontwikkeling van π. Bij de binaire ontwikkeling worden alleen de cijfers 0 en 1 gebruikt. Vijf bits leveren $2^5 = 32$ verschillende combinaties. Van deze combinaties worden 26 combinaties gebruikt voor de letters A t/m Z. De kans dat een rijtje van 5 bits een letter voorstelt is groter (namelijk $\frac{26}{32}$) dan in het geval van decimale ontwikkeling (hier is de kans $\frac{26}{100}$). Daarom vind je al veel eerder allerlei 'zinvolle' woorden.

Bronnen

•http://members.tripodnet.nl/peterdeleu/pi_normal.htm
•http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/dataB/isc/C/pi10000.txt
•http://pi.nersc.gov/

Met dank aan **Peter Deleu**.

Journaal

pythagoras april 2002 nummer 04

door **Matthijs Coster** en **Marco Swaen**

Verspreiding euromunten

Al een Portugees 1 euro-stuk als wisselgeld teruggekregen bij de bakker? Nu wij enkele maanden gewend zijn aan de euromunten, duiken steeds vaker munten op uit de andere euro-landen. Pessimisten voorspellen dat binnen afzienbare tijd voornamelijk Duitse en Franse munten door onze handen zullen gaan, en dat we nog maar af en toe (5%) het hoofd van Beatrix of Albert op onze euro's zien prijken. Op www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie/resultaten.html kun je de verspreiding van euromunten in Nederland en België op de voet volgen.

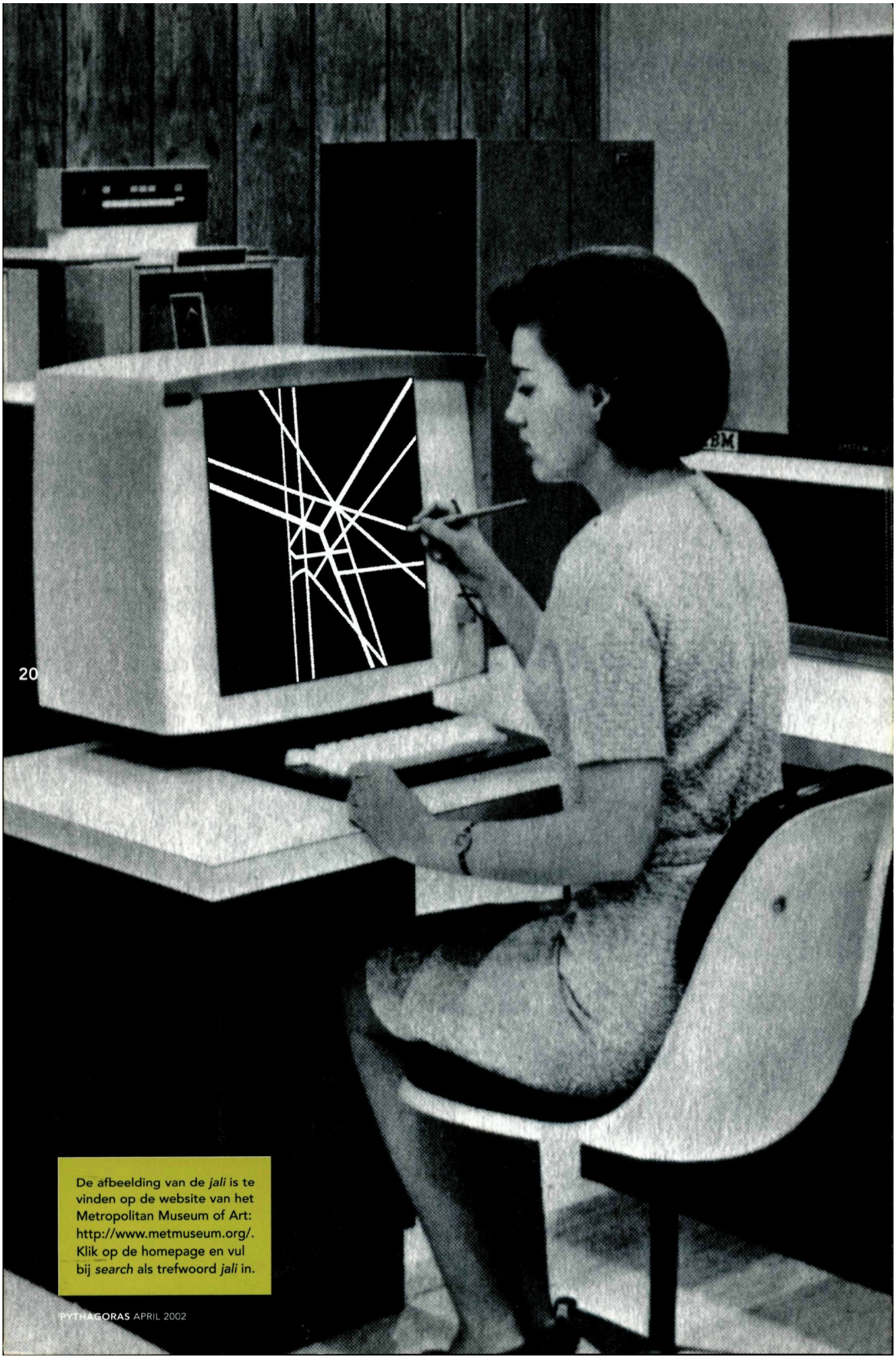
Kaarten vouwen

Lastig kan dat zijn: je hebt eindelijk de weg gevonden en wilt die kaart even opvouwen, maar hoe je het ook probeert, je krijgt hem niet in zijn oorspronkelijke formaat terug. Wiskundigen doopten dit probleem het 'wegenkaart-raadsel' en hebben lange tijd gepuzzeld op de vraag hoe je aan het patroon van bergvouwen en dalvouwen kunt zien in welke volgorde je de kaart moet terugvouwen. Onlangs heeft de 21-jarige Amerikaan Erik Demaine van het Massachusetts Institute of Technology een algoritme bedacht dat het probleem oplost. Daarbij heeft hij gebruik gemaakt van technieken uit de Origami (Japanse papiervouwkunst). Zijn algoritme is verschenen in het wereldberoemde wetenschapstijdschrift *Nature* van afgelopen februari.

Een nieuw Mersenne priemgetal

Op 6 december 2001 werd bekend gemaakt dat de twintigjarige Michael Cameron heeft nagegaan dat het Mersennegetal $M_{13.466.917} = 2^{13.466.917} - 1$ priem is. Hij deed dit in het kader van GIMPS. Wereldwijd zijn 130.000 vrijwilligers getallen van de vorm $2^n - 1$ aan het testen, om na te gaan of deze getallen misschien priem zijn. Cameron gebruikte daarvoor een 800 Mhz PC, die over deze rekenklus 45 dagen deed. Om een indruk te krijgen van het getal $2^{13.466.917} - 1$: het getal bevat 4.053.946 cijfers. Volledig uitgeschreven is het groter dan de bijbel. $M_{13.466.917}$ is het 39ste Mersennegetal waarvan nu bewezen is dat het priem is.

Bron: http://www.mersenne.org/13466917.htm

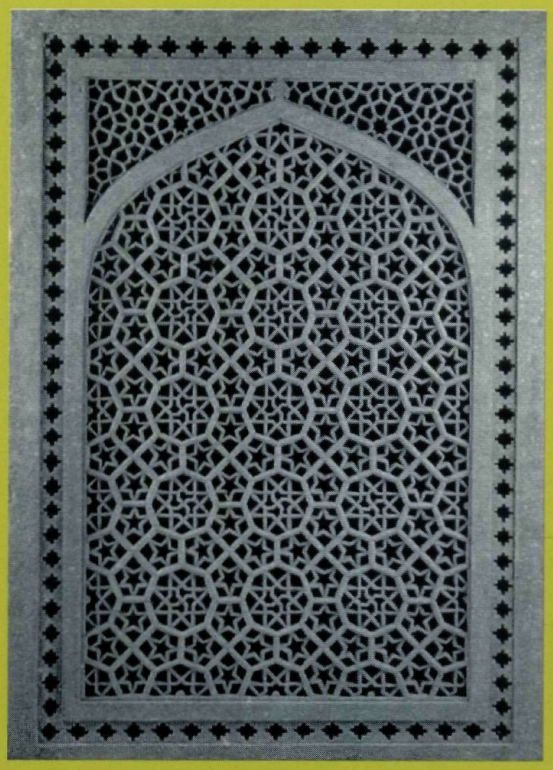


De afbeelding van de *jali* is te vinden op de website van het Metropolitan Museum of Art: http://www.metmuseum.org/. Klik op de homepage en vul bij *search* als trefwoord *jali* in.

Een Islamitische jali uit India

door **Jan van de Craats**

Het artikel over Moorse kunst in deel II van onze serie over de gulden snede (december 2001) ging over vlakvullingen met pentagrammen en tienpuntige sterren. Pythagoraslezer Henk van Tongeren zond ons als reactie een afbeelding van een ander voorbeeld van Islamitische kunst waarin vijfpuntige sterren voorkomen (zie figuur 1).



Figuur 1. Een *jali* uit India.

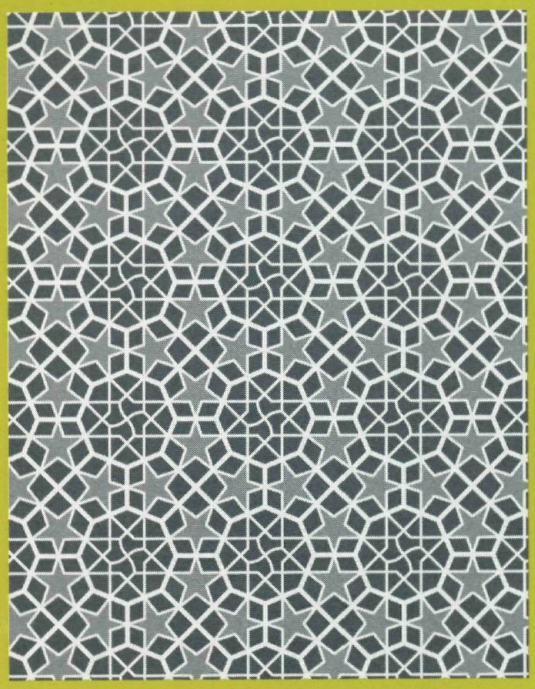
Het is een opengewerkt kamerscherm, een zogenaamde *jali*, zoals die in India veelvuldig gebruikt wordt als raamvenster of afscheiding binnenshuis. Als zo'n *jali* dienst doet als venster, wordt het felle zonlicht er op een sprookjesachtige manier door gefilterd. Het hier afgebeelde exemplaar bevindt zich thans in het Metropolitan Museum of Art in New York. Het is gemaakt in de tweede helft van de zestiende eeuw van uitgehakte rode zandsteen, 186 cm hoog, 130 cm breed en 9 cm dik. Waarschijnlijk is het afkomstig uit Fatehpur Sikri in India.

Molentjes en pentagrammen

We zien dat in de regelmatige vlakvulling waarmee het grootste deel van de *jali* gevuld is, achtpuntige en vijfpuntige sterren voorkomen. Elke achtpuntige ster wordt omsloten door een regelmatige achthoek, en binnenin de ster bevindt zich een soort molentje met vier wieken. Alle molentjes draaien dezelfde kant op. Althans, dat zal wel de bedoeling zijn geweest. Wie echter goed kijkt, ziet bovenaan in het midden een molentje dat verkeerd om staat; waarschijnlijk een foutje van de steenhakker!

Elke achthoek wordt omgeven door een krans van acht vijfhoeken, met in elke vijfhoek een pentagram, een vijfpuntige ster. Die vijfhoeken en pentagrammen lijken op het eerste gezicht regelmatig, maar, zoals Henk van Tongeren opmerkt, in werkelijkheid zijn ze het niet! Kijk maar: er zijn punten waar vier vijfhoeken samenkomen, en in die punten hebben ze een rechte hoek.

Niet alle hoeken van zo'n vijfhoek zijn dus gelijk, en voor de pentagrammen geldt hetzelfde.



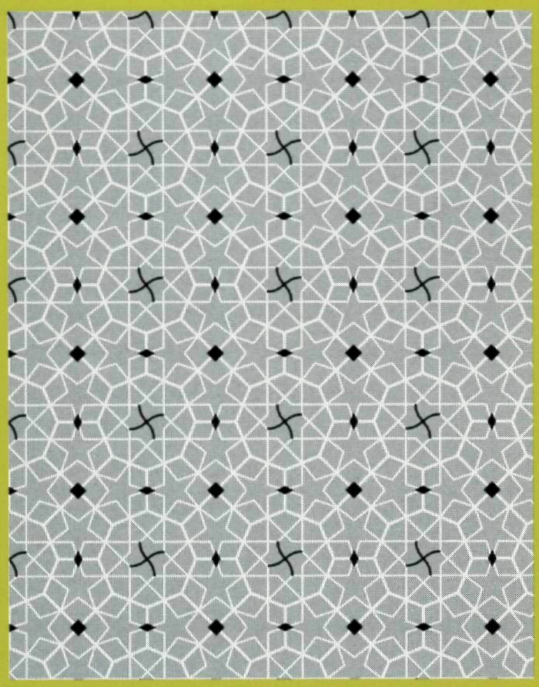
Figuur 2. De vlakvulling met ingekleurde pentagrammen.

Rotatiecentra

Als iets niet helemaal regelmatig is, is het des te spannender om uit te zoeken hoe het precies in elkaar steekt. We zullen het patroon van deze *jali* proberen te analyseren, en wel op zo'n manier dat we het helemaal kunnen reproduceren, en er zelf ook variaties in aan kunnen brengen. In de schematische tekening van het patroon in figuur 2 zijn de pentagrammen lichtgrijs ingekleurd om ze nog beter te laten uitkomen.

Hoe analyseer je zo'n vlakvulling? Het is handig om eerst te zoeken naar spiegelassen en rotatiecentra. Spiegelassen zijn er echter niet in dit geval, want een lijnspiegeling zou een linksdraaiend molentje in een rechtsdraaiend molentje omzetten, en er zijn alleen maar linksdraaiende molentjes. Maar rotatiecentra zijn er wel: in figuur 3 hebben we ze in beeld gebracht.

Ze blijken in drie soorten voor te komen: twee soorten centra met viervoudige draaisymmetrie, en één soort met tweevoudige



Figuur 3. De rotatiecentra van het patroon.

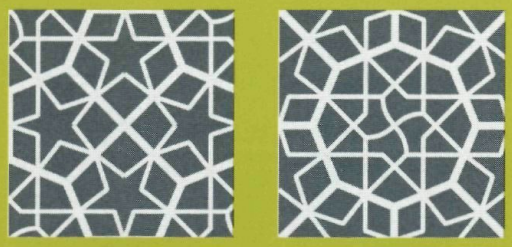
draaisymmetrie. De middelpunten van de in figuur 3 zwart getekende molentjes en de punten waar vier vijfhoeken samenkomen (met zwarte vierkantjes aangegeven) zijn de twee soorten centra van viervoudige draaisymmetrie.

Hoe je dat ziet? Kopieer het patroon op een transparant, leg die precies over het origineel heen, steek een punaise door zo'n centrum en draai vervolgens de transparant over 90, 180 of 270 graden. Het patroon van de transparant past dan telkens weer precies op het origineel.

Maar er zijn ook tweevoudige rotatiecentra; ze zijn gemarkeerd met zwarte wybertjes. Als je daar een punaise doorheen prikt en de transparant over 180 graden draait, past het patroon ook weer precies op het origineel.

Tegels

Nu is het ook duidelijk dat zo'n patroon helemaal opgebouwd kan worden uit vierkante tegels, waarbij je nog een zekere vrijheid hebt in de keuze van de precieze begrenzingen van zo'n tegel.



Figuur 4. Twee tegelvormen voor het patroon.

In figuur 4 geven we twee voorbeelden, allebei met een viervoudig rotatiecentrum in het midden. Door zulke tegels naast elkaar te leggen, krijg je het hele patroon terug.

Fundamentaalgebied

Maar het kan nog zuiniger: een kwart van zo'n tegel is al voldoende om het hele patroon te leggen. Je moet sommige tegels dan wel over 90, 180 of 270 graden draaien voordat je ze neerlegt.

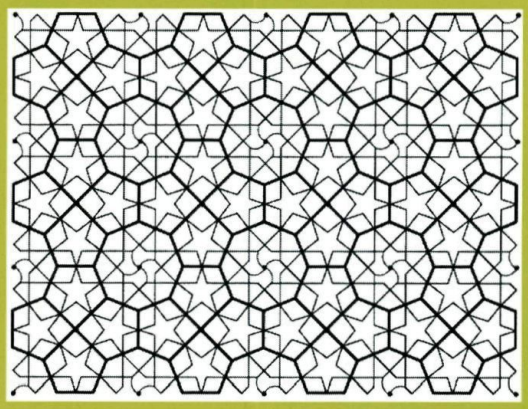
Figuur 5. Een uitvergroot fundamentaalgebied.

In vaktermen heet zo'n klein vierkantje, dat in figuur 5 uitvergroot getekend is, een *fundamentaalgebied*. De hoekpunten linksonder en rechtsboven zijn centra van viervoudige rotatiesymmetrie, de andere twee hoekpunten zijn tweevoudige rotatiecentra.

Je ziet dat dit fundamentaalgebied bijna symmetrisch is in een diagonaal: alleen linksonder verstoort een klein boogje de symmetrie. Dat boogje is verantwoordelijk voor de molentjes in het patroon. Zou het er niet zijn, dan zou de vlakvulling ook nog allerlei symmetrieassen bezitten, en dan zou het fundamentaalgebied slechts een half vierkant (geodriehoek) zijn.

Zelf doen

Om precies te begrijpen hoe de vlakvulling in elkaar zit, hoef je eigenlijk alleen maar te weten hoe het patroon in zo'n fundamentaalgebied eruit ziet. En om zelf zo'n patroon na te maken, met de hand of met behulp van een tekenprogramma op de computer, hoef je ook alleen maar zo'n fundamentaalgebied als bouwsteen te fabriceren.



Figuur 6. Het patroon van de *jali* nagemaakt met Cabri.

Sommige tekenprogramma's, zoals bijvoorbeeld JavaLogo of het programma PostScript waarmee wij onze figuren gemaakt hebben, hebben programmeermogelijkheden, en daarmee is het tekenen van dit soort vlakvullingen heel gemakkelijk. Bij een programma als Cabri gaat het iets moeizamer. Maar het lukt wel, kijk maar naar figuur 6. De ruimte ontbreekt om te vertellen hoe we het precies gedaan hebben, maar het is ook veel leuker om dat zelf te ontdekken.

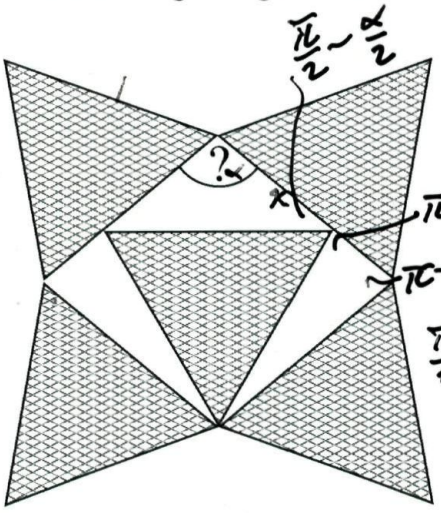
Je snapt waar we heen willen: het jaarthema van Pythagoras is niet voor niets *Experimentele wiskunde*. Ga zelf na hoe de lijnen in het fundamentaalgebied precies lopen, probeer het patroon met de hand of met de computer na te maken, en verzin zelf mooie variaties. Wat voor extra symmetrieën komen er bij als je de molentjes weglaat? En wat gebeurt er als je de molentjes om en om linksom en rechtsom laat draaien? Krijg je in die gevallen een ander fundamentaalgebied? En kun je met kleur fraaie effecten bereiken? Mogelijkheden te over! Stuur ons je mooiste vondsten, dan zetten wij ze op onze website.

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Leugenaars
Een klas bestaat uit leerlingen die altijd liegen en leerlingen die altijd de waarheid spreken. De nieuwe lerares neemt de leerlingen een voor een apart en vraagt ze om van elke andere leerling te zeggen of het een leugenaar is of niet. In totaal wordt 62 maal een leerling door een andere leerling ervan beschuldigd een leugenaar te zijn. Hoeveel leerlingen zitten er in de klas?

Vijf driehoeken
In de figuur zie je een configuratie bestaande uit vijf even grote gelijkzijdige driehoeken. Bereken de gevraagde hoek.



$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi-\alpha=\pi$

$\frac{3}{2}\alpha=\frac{5\pi}{6}$

$\alpha=\frac{5\pi}{9}$

$\alpha=100^\circ$

$1=2x^2-2x^2\cos\alpha$

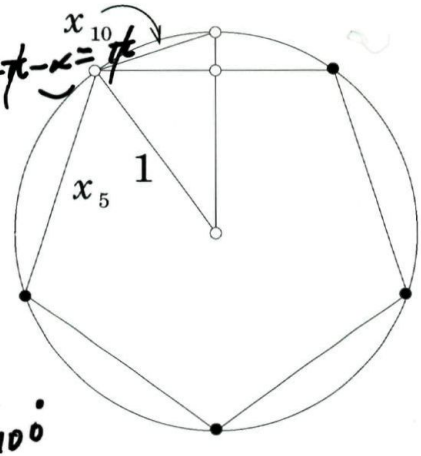
$1=(1-x)^2+1+2(1-x)\cos\alpha$

Vierenzestig
Verdeel de getallen 1 t/m 64 over de 64 vakjes van een schaakbord, op zo'n manier dat van elk tweetal vakjes dat aan elkaar grenst of een hoekpunt gemeen heeft, het verschil niet groter is dan 9. Kan het ook zo dat de verschillen niet groter zijn dan 8?

Bereken π
De hoekpunten van een regelmatige n-hoek liggen op een cirkel met straal 1. Noem de lengte van de zijden van de veelhoek x_n. We kunnen π benaderen door $\frac{n}{2}x_n$ te berekenen voor grote waarden van n (waarom?). Bewijs met behulp van de stelling van Pythagoras dat

$$x_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - x_n^2}.$$

Benader π door x_{1024}^2 te berekenen.



°Oplossingen nr.3

door **Dion Gijswijt**

Munten

Noem het aantal munten van 1 eurocent a, van 2 eurocent b en van 5 eurocent c. Als je 20 munten uit de zak haalt, zijn er nog zes in de zak over. Je weet dus dat $a \geq 6 + 1 = 7$, $b \geq 6 + 2 = 8$ en $c \geq 6 + 5 = 11$. Dus $a + b + c \geq 7 + 8 + 11 = 26$. Omdat er in totaal slechts 26 munten in de zak zitten, móét gelden: $a = 7$, $b = 8$ en $c = 11$. Munten van een andere soort zijn er kennelijk niet bij. De totale waarde is dus 1 x 7 + 2 x 8 + 5 x 11 = 78 eurocent.

Een koppige munt

De kans dat de eerste munt zuiver is, gegeven dat Lisa tweemaal 'kop' heeft gegooid, is de kans op tweemaal 'kop' met een zuivere munt gedeeld door de kans op tweemaal 'kop' met een willekeurige munt, dus $\frac{1/4}{1/2\times1/4+1/2\times1} = \frac{2}{5}$.
De kans dat ze nu met de andere munt 'munt' gooit, is $\frac{2}{5} \times 0 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.
De kans dat ze met de eerste munt 'munt' gooit, is gelijk aan $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times 0 = \frac{2}{10}$.
Het was dus verstandig om van munt te wisselen, want zo heeft ze meer kans om de zuivere munt te vinden.

Gijzelaars

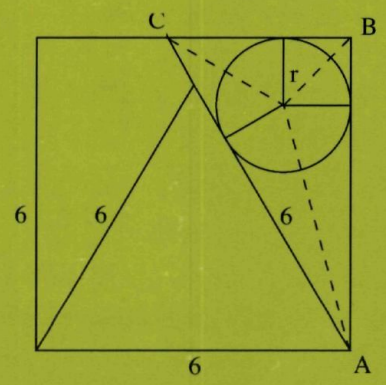
De tien leerlingen maken (bijvoorbeeld) de volgende afspraak: *De leerling die achteraan in de rij staat, roept 'rood' indien het aantal rode petten dat hij vóór zich ziet* even *is en 'blauw' indien dit aantal* oneven *is.* Deze leerling overleeft dan met kans $\frac{1}{2}$, maar de andere leerlingen kunnen met kans 1 overleven. Indien de achterste 'rood' zegt, weet de persoon vóór hem dat hijzelf een rode pet heeft als hij een oneven aantal rode petten ziet en een blauwe als hij een even aantal rode petten ziet. Met behulp van dit gegeven kan de volgende leerling in de rij nagaan welke kleur zijn pet heeft, enzovoort.

Cirkel, driehoek en vierkant

Omdat $BC : AC : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$, is $BC = 2\sqrt{3}$ en $AC = 4\sqrt{3}$.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan

$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

De oppervlakte van $\triangle ABC$ kunnen we ook bepalen door de driehoek in drie kleinere driehoeken te verdelen, zoals met stippellijnen is aangegeven in de figuur. Deze drie driehoeken hebben AB, BC en AC als basis en hebben alle drie hoogte r. Derhalve geldt dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan $\frac{1}{2}r(AB + BC + AC) = r(3 + 3\sqrt{3})$.
Oplossen van de vergelijking $r(3 + 3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ geeft $r = 3 - \sqrt{3}$.



oo

$\frac{\pi^2}{6}$

door **Klaas Pieter Hart**

Oneindig veel getallen bij elkaar optellen kan soms wel, soms niet. Als je 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ... bij elkaar optelt, krijg je een interessante breuk.

Oneindig veel getallen optellen

Het is niet mogelijk oneindig veel getallen echt bij elkaar op te tellen, daar hebben we immers de tijd niet voor. Toch is het in veel gevallen duidelijk wat de uitkomst van zo'n oneindige som moet zijn. Iedereen beseft bijvoorbeeld dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$. Archimedes kwam bij bepaalde oppervlakteberekeningen uit op $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ en hij beredeneerde dat de uitkomst hiervan $\frac{4}{3}$ moest zijn. De Grieken hadden dus geen moeite met het bepalen van de som van een meetkundige rij. Maar het duurde nog een hele tijd voor wiskundigen de som van ingewikkeldere oneindige rijen wisten te bepalen. Dat gebeurde aan het eind van de zeventiende eeuw; de gebroeders Bernoulli namen daarbij het voortouw. Ze (her)ontdekten bijvoorbeeld iets dat Nicole Oresme al in 1360 had vastgesteld, namelijk

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty.$$

In juni 2001 is in Pythagoras een artikel gewijd aan deze oneindige som, die bekend staat als de *harmonische reeks*. Daar wordt verteld waarom de som van deze rij oneindig groot is. De Bernoulli's hadden een andere fraaie manier om dit in te zien. Zij redeneerden als volgt. Als je voor een vaste n de som $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ bekijkt, dan zie je n^2-n termen die (op één na) groter zijn dan $\frac{1}{n^2}$, de som is dus groter dan $1-\frac{1}{n}$. Maar dan geldt

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Hiermee kun je dan inzien dat de partiële sommen $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ inderdaad boven elk getal uitstijgen.

Opgave 1. Hoe groot moet je n nemen opdat zeker $H_n>100$?

Een weerbarstige som

De Bernoulli's hadden meer moeite met de som

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \qquad (*)$$

Ze wisten wel dat daar een getal uit moest komen (en niet ∞), maar ze hadden geen idee wat dat getal moest zijn. Het duurde tot ongeveer 1730 voor Leonhard Euler (zie figuur 1) de uitkomst bepaalde. We gaan eerst kijken hoe de Bernoulli's wisten dat de som een eindig getal moest zijn. Daartoe korten we de partiële sommen even af: schrijf

$$P_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$

De volgende tabel geeft de eerste twintig partiële sommen, waar op zich weinig uit af te leiden is.

n	P_n
1	1
2	1,250000000
3	1,361111111
4	1,423611111
5	1,463611111
6	1,491388889
7	1,511797052
8	1,527422052
9	1,539767731
10	1,549767731
11	1,558032194
12	1,564976638
13	1,570893798
14	1,575995839
15	1,580440283
16	1,584346533
17	1,587806741
18	1,590893161
19	1,593663244
20	1,596163244

Opgave 2. Kun je aan de getallen in de tabel zien wat de waarde van $(*)$ zou moeten zijn? Laat je rekenmachine nog wat aantal waarden van P_n uitrekenen, bijvoorbeeld P_{1000} of $P_{10.000}$. Geeft dit een beter idee?

Het gedrag van P_n

De Bernoulli's bedachten het volgende trucje om iets zinnigs over de getallen P_n te kunnen zeggen. Eerst merkten ze op dat $k^2 > k(k-1)$ voor elke $k \geq 2$ en daarmee ook

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Verder kun je schrijven:

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

reken maar na. Hieruit volgt dat $\frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{2}$, dat $\frac{1}{9} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, dat $\frac{1}{16} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ en, voor willekeurige k,

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Hiermee zie je bijvoorbeeld dat P_4 kleiner is dan

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}).$$

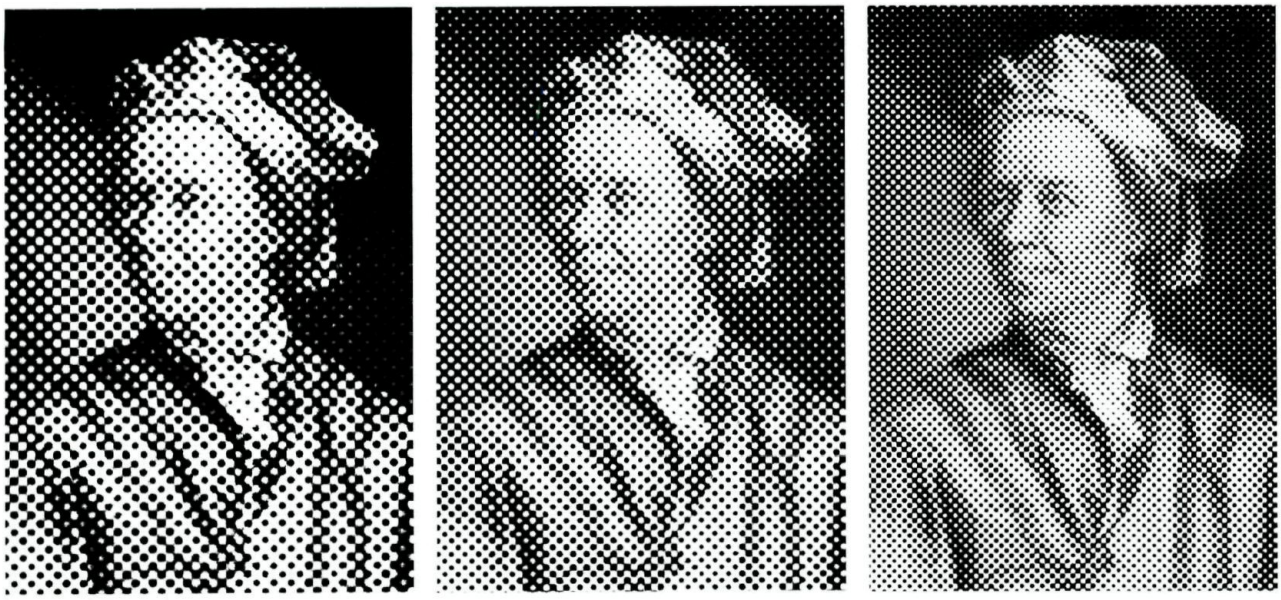
Als we hierin de haakjes wat anders zetten, krijgen we

$$1 + 1 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}.$$

In het algemeen vind je op dezelfde manier dat

$$\begin{aligned} P_n &< 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + \cdots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) \\ &= 2 - \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Conclusie: $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots < 2$. Hieruit trokken de Bernoulli's de conclusie dat in elk geval



Figuur 1. Leonhard Euler >>>

$$\tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} + \cdots \leq 2\,.$$

Als je je rekenmachine hebt laten werken, heb je inmiddels gezien dat de som waarschijnlijk ergens tussen $1{,}6$ en $1{,}7$ ligt.

De ontdekking van Euler

We gaan nu zien hoe Leonhard Euler rond 1730 ontdekte dat de waarde die de Bernoulli's zochten, gelijk moest zijn aan $\frac{1}{6}\pi^2$, met andere woorden, dat

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dat zal niet makkelijk zijn, maar wie mee durft te gaan voorbij de drie rondjes, krijgt een van de mooiste redeneringen uit de wiskunde te zien. In die redenering gebruikte Euler twee ingrediënten. Het eerste was een ontdekking van Newton: je kunt $\sin x$ als een oneindig lang polynoom (in het Nederlands: veelterm) schrijven; het tweede ontdekte hij zelf: je kunt $\sin x$ als een oneindig lang product schrijven.

De formule van Newton ooo

Isaac Newton had ontdekt dat je $\sin x$ als een oneindig lang polynoom kunt schrijven:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

In een later nummer van Pythagoras zullen we zien hoe je die formule voor $\sin x$ kunt vinden; deze keer gaan we hem gewoon gebruiken.

De aanpak van Euler ooo

Euler begon met de formule van Newton en deelde deze links en rechts door x:

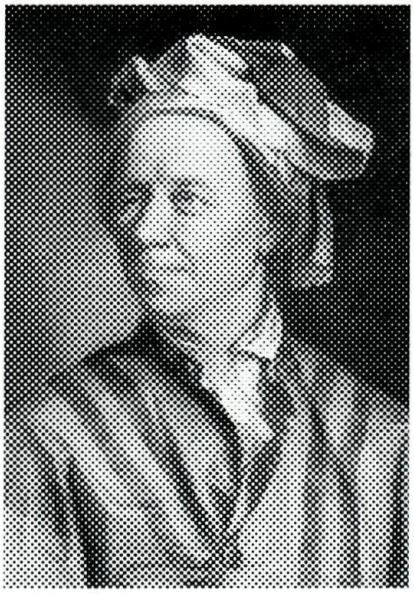
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots$$

Om de latere formules wat mooier uit te laten komen, verving hij x door πx:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + \frac{\pi^4}{120}x^4 + \cdots$$

Nu had hij een oneindig lang polynoom $p(x)$ met de volgende eigenschappen: als je (rechts) 0 invult, krijg je 1 en als je (links) 1, -1, 2, -2, 3, -3,... invult, krijg je telkens 0. Dergelijke eisen leggen een polynoom helemaal vast en Euler wist nog een manier om een polynoom te maken dat aan die eisen voldoet. In het eenvoudige geval dat je $q(0) = 1$ wilt en $q(1) = q(-1) = q(2) = q(-2) = 0$, doet de volgende formule precies wat je wilt:

$$q(x) = \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{-1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{-2}\right).$$



Als je dit uitwerkt, krijg je

$$\begin{aligned} q(x) &= \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) \\ &= 1-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\right)x^2+\frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Merk op dat tussen de haakjes voor de x^2 precies P_2 staat.
Als je meer nulpunten wilt, zeg $1, -1, 2, -2, \ldots, n$ en $-n$, en nog steeds $q(0) = 1$, dan kom je vanzelf uit op

$$\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right);$$

dat uitwerken brengt je op

$$1-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)x^2+\cdots$$

en dat is nu net

$$1-P_n x^2+\cdots$$

Euler nam nu de sprong naar het oneindige: $p(x)$ is een oneindig lang polynoom met $p(0) = 1$ en $1, -1, 2, -2, \ldots$ als nulpunten. Dan is het blijkbaar ook te schrijven als een oneindig lang product:

$$p(x) = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots$$

Als we dat uitvermenigvuldigen, krijgen we

$$p(x) = 1-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)x^2+\cdots,$$

maar we hadden al

$$p(x) = 1-\frac{\pi^2}{6}x^2+\cdots$$

en hier lezen we meteen onze gewenste formule uit af.

Goede benaderingen?
Als je de waarden van P_n met $\frac{1}{6}\pi^2$ vergelijkt, zul je zien dat er nog maar weinig decimalen kloppen. Met behulp van de Bernoulli-truc kunnen we zien waar dat aan ligt. Bedenk namelijk dat

$$\frac{1}{6}\pi^2 - P_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots$$

Opgave 3. Laat zien dat $\frac{1}{6}\pi^2 - P_n < \frac{1}{n}$.

Je kunt de Bernoulli-truc ook omdraaien.

Opgave 4. Reken na dat $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ en gebruik dit om te laten zien dat $\frac{1}{6}\pi^2 - P_n > \frac{1}{n+1}$.

Dit verklaart bijvoorbeeld waarom $P_{10.000}$ nog maar drie cijfers achter de komma goed heeft: $\frac{1}{6}\pi^2 - P_{10.000} > \frac{1}{10.001}$ laat zien dat het vierde cijfer nog best kan afwijken.

OPLOSSINGEN NR 3

Oplossingen kleine nootjes

Kop of munt

Als je bij 50 worpen met een muntstuk geen enkele keer 'kop' gooit, is het muntstuk hoogstwaarschijnlijk onzuiver. Erg kleine kans dat de kans op 'kop' bij de 51-ste worp $\frac{1}{2}$ is!

Zandlopers

Noem de zandloper die precies 7 minuten meet zandloper A en de andere zandloper B. Draai beide zandlopers tegelijkertijd om. Op het moment dat zandloper A klaar is, begin je met het afmeten van 15 minuten. Als zandloper B klaar is, zijn de eerste 4 minuten (van de 15) verstreken. Draai dan onmiddellijk zandloper B weer om. Als deze klaar is, heb je precies 15 minuten afgemeten.

Eierdoos

Als x het gewicht van de doos is en y het gewicht van een ei, dan geldt: $x + 6y = 500$ en $x + 2y = 200$. Hieruit volgt dat $x = 50$ en $y = 75$. De lege doos weegt dus 50 gram.

Gewichten

De rode gewichten noemen we r_1 en r_2, de witte w_1 en w_2 en de blauwe b_1 en b_2. De eerste weging doen we als volgt: links r_1 en b_1 en rechts r_2 en w_1. Nu is de balans in evenwicht óf hij slaat naar een kant uit. In het eerste geval – de balans is in evenwicht – weten we dat r_1, b_2 en w_1 even zwaar zijn. Nu hoeven we in de tweede weging alleen r_1 tegen r_2 te wegen. In het tweede geval – stel dat de balans aan de rechterkant zwaarder is – doen we de tweede weging als volgt: links r_2 en b_1 en rechts b_2 en w_1. Als rechts zwaarder is, dan zijn r_2, w_1 en b_2 de zware gewichten. Als links zwaarder is, dan zijn r_2, w_1 en b_1 de zware gewichten. Als de balans in evenwicht is, dan zijn r_2, w_2 en b_2 de zware gewichten.

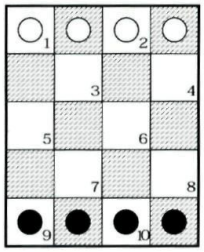
Op de homepage van Pythagoras staat een uitgebreide toelichting bij dit probleem.

Vreemd voedsel

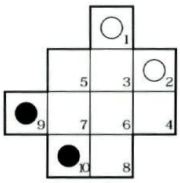
Een maïskolf.

door **Leon van den Broek**

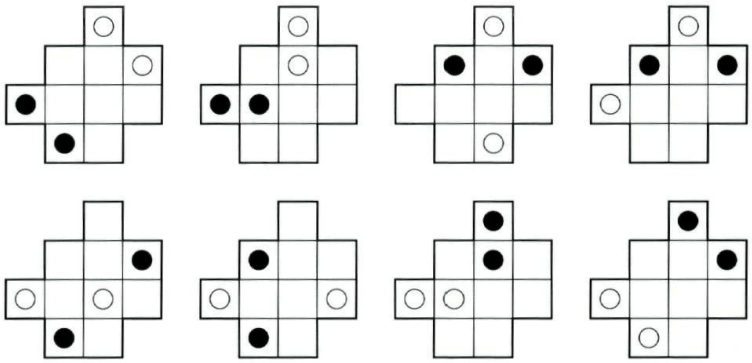
Oplossing Lopers op de loop



Figuur 1. Het speelbord van *Bishops on the move*, gekleurd volgens het schaakbord patroon.



Figuur 2. Het omgebouwde speelbord, waarin alleen nog maar de witte velden aanwezig zijn.



Figuur 3. Een oplossing waarbij de stukken zich als torens bewegen. De aantallen benodigde zetten zijn achtereenvolgens 2, 4, 2, 2, 2, 4, 2: in totaal 18 zetten. Merk op dat de laatste vier zetten het 'spiegelbeeld' zijn van de eerste vier zetten.

In het vorige nummer van Pythagoras is het spel *Bishops on the move* beschreven. Om het spel op te lossen, brengen we wat vereenvoudigingen aan.

De velden van het 4 bij 5 speelbord kleuren we afwisselend volgens het schaakbordpatroon, zoals in figuur 1. We zien dat de lopers op de witte velden 'niets te maken hebben' met de lopers op de zwarte velden: een loper op een wit veld en een loper op een zwart veld kunnen elkaar nooit aanvallen, omdat ze nooit op eenzelfde diagonaal staan. Als je het spel voor de lopers op de witte velden kunt oplossen, kun je dezelfde zetten voor de lopers op de zwarte velden uitvoeren en heb je het hele spel opgelost.

We lossen het spel op voor de lopers op de witte velden. Omdat de zwarte velden er niet toe doen, laten we die weg. Het speelbord gaat dus uit 10 velden bestaan. Dat bord kan dan ook anders worden getekend, zie figuur 2. Aan de cijfertjes in de lichte velden kun je zien hoe het speelbord is omgebouwd.

Op het nieuwe bord moeten de stukken horizontaal en verticaal bewegen. De lopers zijn dus torens geworden. Twee torens van verschillende kleur mogen nooit op eenzelfde horizontale of verticale baan staan.

Met de gemaakte vereenvoudigingen is het spel wat makkelijker te spelen. In figuur 3 staat een oplossing waarvoor 18 zetten nodig zijn. Met eenzelfde aantal zetten voor de lopers op de zwarte velden, kan het hele spel in 36 zetten worden geklaard. De vraag is of deze oplossing de *snelste* is. Op grond van speelervaring wordt vermoed dat dit inderdaad zo is, maar een bewijs dat de snelste oplossing niet minder dan 36 zetten telt, is voor de redactie van Pythagoras onbekend.

Activiteiten

vrijdag 12 april 2002 **Open dag Universiteit Leiden**
Open huis bij de wiskundeopleiding
http://www.leidenuniv.nl/studiesite/

vrijdag 19 en zaterdag 20 april 2002 **Voorlichtingsdag Universiteit Twente**
Voorlichting Toegepaste wiskunde, voor leerlingen van 4, 5 en 6 vwo
http://www.schoolsite.utwente.nl

donderdag 25 april 2002 **Conferentie ICT in de wiskundeles**
APS, Utrecht
http://www.aps.nl/wiskunde/X3.htm
telefoon: 030-2856722

zaterdag 25 mei 2002 **De roerige jaren zestig**
Symposium VIII van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
Hogeschool Domstad te Utrecht
e-mail: e.demoor@fi.uu.nl

dinsdag 11 juni 2002 **Proefstuderen Wiskunde, Financiële wiskunde en Computerwiskunde**
Katholieke Universiteit Nijmegen
http://www.kun.nl/place-to-b

zondag 16 juni 2002 **Onmogelijke getallen**
Lezing door prof. dr. Hendrik Lenstra over onmogelijke getallen als het getal π of priemgetallen.
Paradiso, Amsterdam
telefoon: 020-6264521
e-mail: paradiso@paradiso.nl

5 t/m 9 augustus 2002 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**
Voor leerlingen van de basisschool en brugklas
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

12 t/m 16 augustus 2002 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**
Voor leerlingen van de middelbare school
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

vrijdag 13 september 2002 **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002, tweede ronde**
TU/e, Eindhoven

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde- en de logica-afdeling van de Universiteit van Amsterdam, door de wiskunde-afdelingen van de Vrije Universiteit Amsterdam en de Universiteit Leiden, en door het Centrum voor Wiskunde & Informatica.

Universiteit van Amsterdam

vrije* Universiteit *amsterdam

Universiteit Leiden

Centrum voor Wiskunde & Informatica

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855175,
per fax: 0522 855176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17,
NL- 7940 VB Meppel.

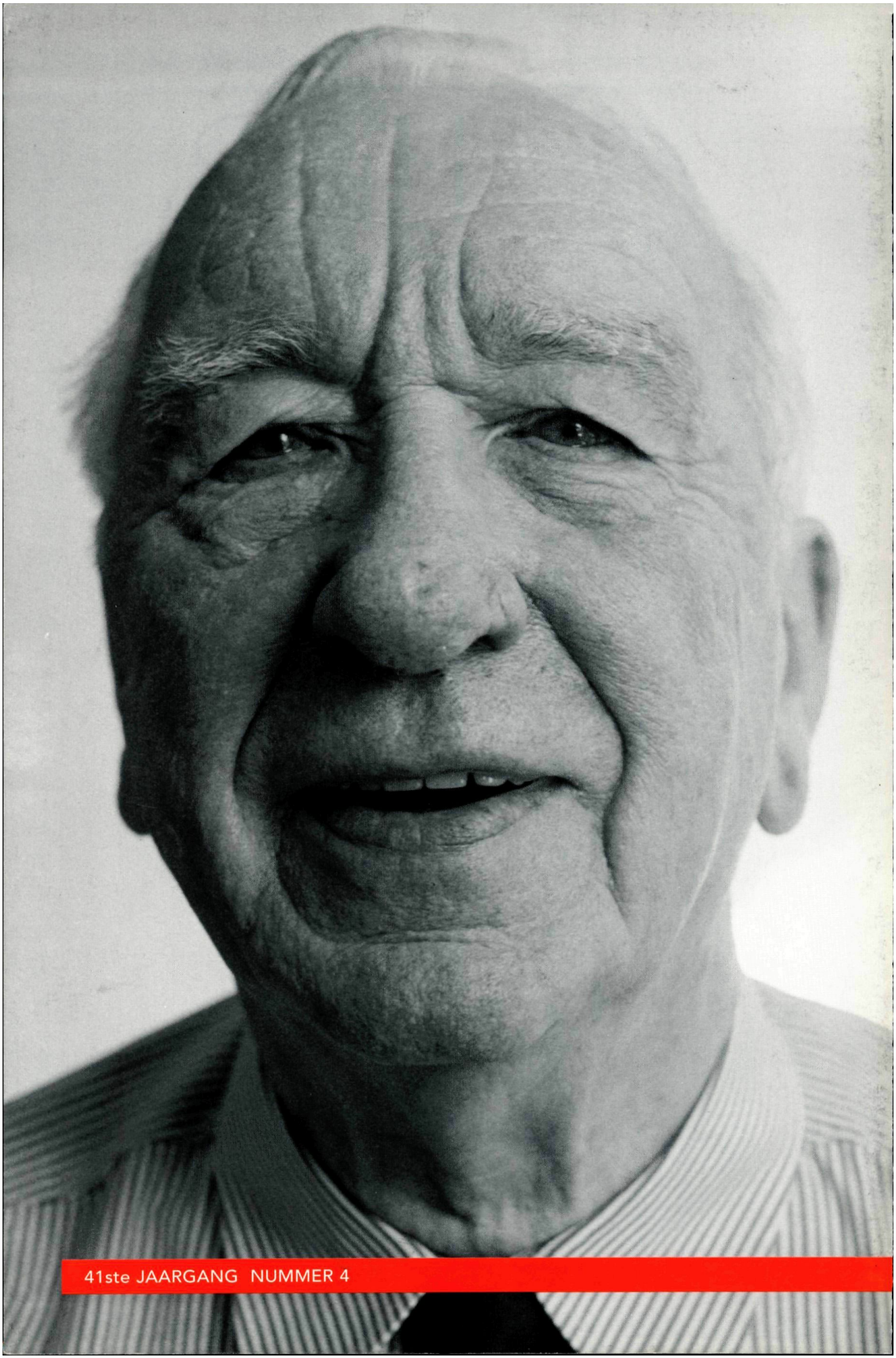
Tarieven 2001-2002
Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost € 17,92. Losse nummers kosten € 3,86.
Overige prijzen per jaar:
Pythagoras België € 21,07
Pythagoras buitenland € 24,73
Pythagoras én Archimedes € 31,54
Pythagoras én Archimedes België € 36,44
Pythagoras én Archimedes buitenland € 37,89

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen
Voor scholen zijn er bulkabonnementen.
Bulkabonnement Nederland: € 12,48 per jaar.
Bulkabonnement Belgie: € 16,11 per jaar.
Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.
De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen
Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.
Leerlingabonnement Nederland: € 14,75 per jaar.
Leerlingabonnement Belgie: € 18,59 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (€ 11,34 excl. verzendkosten) jaargang 40 (€ 17,92 excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke driehoek' (€ 3,40 excl. verzendkosten).



41ste JAARGANG NUMMER 4