

A black and white photograph of a man in a plaid shirt hanging upside down from a brick wall. Above him is a geometric, faceted light fixture. The background shows a residential building with windows and a tiled roof.

PYTHA GORAS

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

www

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofredactie

Marco Swaen

Eindredactie

Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw
Divisie Wiskunde en Informatica
Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.

Nul rondjes betekent:

geen enkele wiskundige voorkennis vereist;

1 rondje ^o: voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen;

2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;

3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

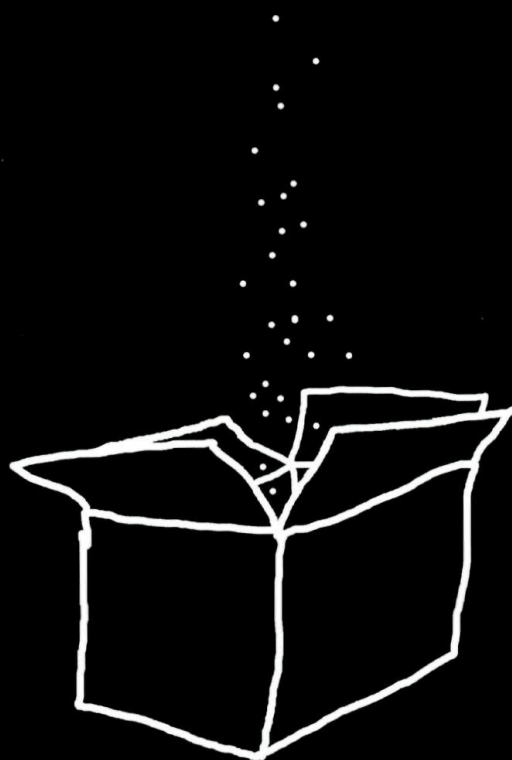
MEDEWERKERS

prof. dr. F. Beukers is hoogleraar wiskunde aan de UU. **drs. A.J. van den Brandhof** is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **prof. dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **J. Groot** is wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **drs. W. Hoekstra** is docent wiskunde aan de JSG Maimonides te Amsterdam en verbonden aan het APS te Utrecht. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Callandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

OMSLAG

Bram Kuijvenhoven is een van de trouwe inzenders van de Pythagoras Olympiade

INHOUD



2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 5 **Een bewijs van Da Vinci?**

6 - 9 **Het 24-spel**

10 - 14 **De dodecaëder en de
icosaëder - een gulden duo**

15 **De post**

16 - 17 **Pythagoras Olympiade**

18 - 21 **Ronde dobbelstenen**

22 - 23 **Problemen - Oplossingen**

24 - 25 **Journal**

26 - 29 **Een pijnlijk
wiskundeprobleem**

30 **Oplossingen nr. 4**

31 **Uitslag Prijsvraag**

32 **Activiteiten**

door Chris Zaal

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis kan
oplossen.

De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2

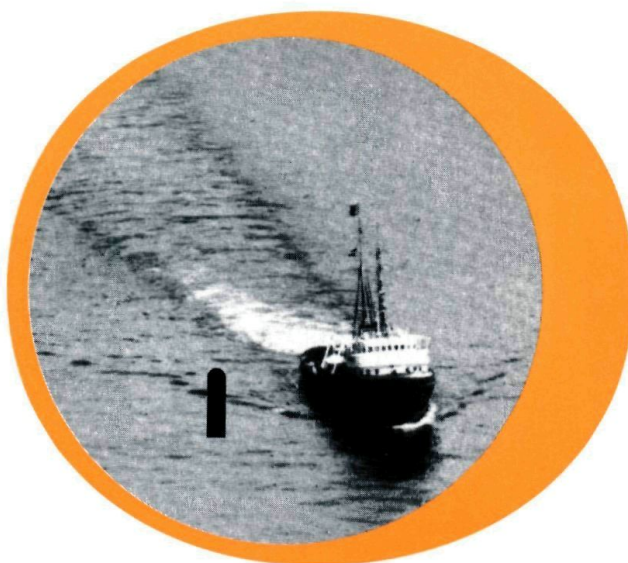


Vierkanten

Hoeveel vierkanten
kun je aanwijzen op een
schaakbord van vier
bij vier?

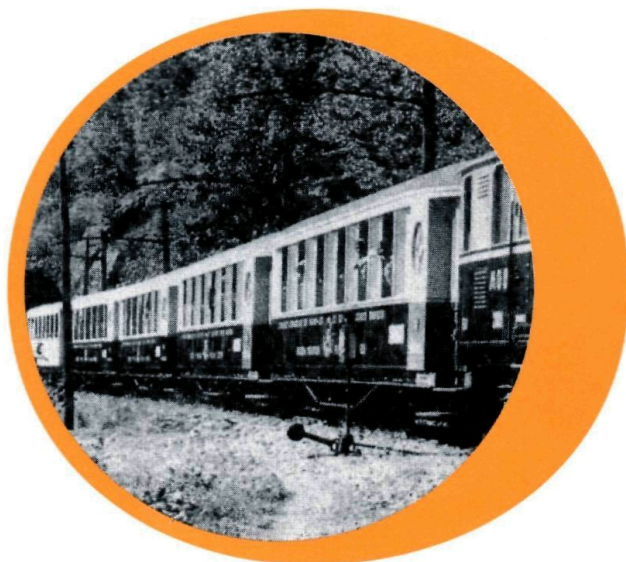
Meerpaal

In de haven staat een
meerpaal. De helft van de paal staat
in de bodem van het kanaal. Eenderde
van de paal staat in het water. Boven de
waterspiegel steekt anderhalve meter
paal uit. Wat is de totale lengte van
de meerpaal?



Een miljoen uur

Hoe oud in jaren ben je, als je een miljoen uur geleefd hebt?



De trein

Een kilometer lange trein die 15 kilometer per uur rijdt, gaat een kilometer lange tunnel in. Hoe lang duurt het voordat de trein weer helemaal de tunnel uit is?

3

Waar of niet waar?

Ben spreekt altijd de waarheid.
Johan liegt altijd. Eén van hen zegt:
'De ander zegt dat hij Johan is.'
Wie zegt dat?



De ander zegt dat hij Johan is

door Bruno Ernst

Een bewijs van Da Vinci?

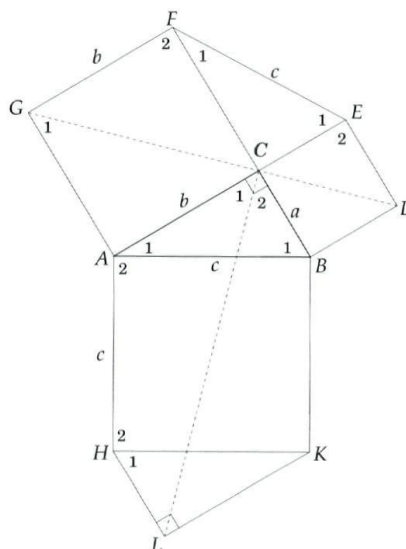
Bewijzen van de stelling van Pythagoras,
deel V

4 Een bewijs voor een zo belangrijke stelling als die van Pythagoras wekt zonder meer onze belangstelling als de naam van een bekend persoon er mee verbonden is. In verschillende populaire boeken en soms wel in de vakliteratuur wordt het volgende bewijs aan Leonardo da Vinci toegeschreven. Het is daarmee gekoppeld aan de grootste en veelzijdigste renaissance-kunstenaar. Bovendien heeft het daardoor al een eerbiedwaardige ouderdom (zo'n 500 jaar) gekregen. Merkwaardig is dat het bewijs niet in zijn handschriften te vinden is. Het zou dan wellicht nog door een tijdgenoot zijn opgeschreven met de vermelding dat het van Da Vinci stamt.

Twijfelachtig

Ik heb mijn twijfels. De eerste die het bewijs aan Da Vinci toeschreef, was F.C. Boon in zijn boek *Miscellaneous Mathematics* uit 1924. Ik heb deze publicatie niet kunnen raadplegen en weet dus niet waar Boon het vandaan haalt. In ieder geval staat het bewijs nu bekend als het bewijs van Leonardo da Vinci... en dat blijven we maar van elkaar overschrijven. Zelf houd ik het erop dat de eerste die dit bewijs publiceerde, Tempelhof was, in zijn boek *Anfangsgründe der Geometrie* uit 1769 en daar staat geen enkele verwijzing naar de vermaarde renaissance-kunstenaar. Maar al

zou het bewijs een beroemde naam moeten missen, het is zeker een bijzonder – en dus vermeldenswaardig – bewijs, zie figuur 1.



Figuur 1

Een fout bewijs

In het bewijs komen twee zeshoeken voor die wel gelijke zijden en gelijke oppervlakte hebben, maar die niet congruent zijn. Het hele bewijs draait eigenlijk om deze zeshoeken. Versluys, die het bewijs in zijn beroemde verzameling van 96 Pythagorasbewijzen uit 1914 opnam, vermeldt dat beide zeshoeken congruent zijn en komt daardoor tot een foutief bewijs. Een beetje merkwaardig bij deze doorgaans zo zorgvuldige schrijver.



Het bewijs

Het correcte bewijs verloopt als volgt. Uitgangspunt is een rechthoekige driehoek ABC met vierkanten op de zijden naar buiten geklapt. Onderaan het vierkant op de schuine zijde is een driehoek getekend die congruent is met driehoek ABC . Trek FE waardoor ook een driehoek FEC ontstaat die congruent is met driehoek ABC . De bovenste zeshoek $ABDEFG$ bestaat uit de twee vierkanten op de rechthoekszijden, met twee congruente driehoeken ertussen. Als we GC en CD trekken, blijken ze één rechte lijn te vormen, want bij C ontstaat een hoek van $45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Trek ook CL . De stippellijnen verdelen beide zeshoeken in onderling congruente vierhoeken. Dit is duidelijk uit symmetrie-overwegingen en kan eventueel met behulp van congruentie bewezen worden. We gaan nu bewijzen dat de helft van de bovenste zeshoek congruent is met de helft van de onderste zeshoek. Daaruit volgt dan dat de beide zeshoeken dezelfde oppervlakte hebben. Trekken we van elk der zeshoeken tweemaal de oppervlakte van de rechthoekige driehoek af, dan blijven van de bovenste zeshoek de twee vierkanten op de rechthoekszijden over en van de onderste zeshoek het vierkant op de schuine zijde. Daarmee is de stelling van Pythagoras bewezen.

Hier volgt dan het laatste deel van het bewijs. Vierhoek $GDEF$ is congruent met vierhoek $CLHA$, want

$$\begin{aligned} GF &= b = CA, \\ \angle F_{12} &= 90^\circ + \angle A_1, \\ FE &= c = AH, \\ \angle E_{12} &= 90^\circ + \angle B_1 = 90^\circ + \angle H_1, \\ ED &= a = HL. \end{aligned}$$

De oppervlakte van beide vierhoeken is dus gelijk. Het dubbele van beide vierhoeken – de beide zeshoeken – hebben dus ook gelijke oppervlakten. Van de bovenste zeshoek trekken we de twee congruente driehoeken ABC en FEC af. Zo houden we de beide vierkanten op de rechthoekszijden over. Van de onderste zeshoek trekken we de driehoeken ABC en KHL af, zodat we het vierkant op de schuine zijde over houden. Daarmee is, zoals we hierboven reeds opmerkten, de stelling van Pythagoras bewezen.

Opvallende bijzonderheden

De figuur heeft nog enige opvallende bijzonderheden. Uit de congruentie van de vierhoeken volgt dat $\angle C_1 = \angle G_1 = 45^\circ$. Omdat $\angle C_{12} = 90^\circ$, is ook $\angle C_2 = 45^\circ$. CL is dus de bissectrice van $\angle C$. Verder is nu duidelijk dat LC loodrecht op GD staat.

HET 24 SPEL



6

Je kent het 24-spel waarschijnlijk nog van de flippo's uit de zakken van Smiths chips. Je krijgt vier getallen van 1 tot en met 9, en met de bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $:$ moet je 24 maken. Het 24-spel wordt tegenwoordig veel gebruikt in het rekenonderwijs. Eigenlijk zijn er drie versies van het spel, afhankelijk van hoe je de berekening mag uitvoeren.

VERSIE 1. Je moet meteen doorrekenen met het getal dat je al gemaakt hebt. Neem bijvoorbeeld 1129; als je doet $9 - 1 = 8$, dan moet je daarna meteen verder met 8. Je mag dan niet eerst $1 + 2 = 3$ doen. Op deze manier kun je met het viertal 1129 geen 24 maken. De berekening in versie 1 heeft altijd de vorm $((a \star b) \star c) \star d$, waar elke $\star$ staat voor $+$, $-$, $\times$ of $:$. Deze versie wordt veel gebruikt op de basisschool.

VERSIE 2. Het tussenresultaat van de eerste bewerking hoeft niet meteen gebruikt te worden. Hiervan is $(9 - 1) \times (2 + 1)$ een voorbeeld. We eisen wel dat alle tussenre-

sultaten gehele getallen zijn. Bij de oplossing $(9 - 1) \times (2 + 1)$ voor 1129 is dat het geval. Voor bijvoorbeeld 3377 is er echter niet zo'n oplossing.

VERSIE 3. Ook de laatstgenoemde beperking – de tussenresultaten zijn gehele getallen – vervalt. Dan is er voor 3377 ook een oplossing. Welke?

Ik heb een spelletje geschreven, genaamd *Flippo*, dat gebaseerd is op de tweede versie van het 24-spel. Later heb ik nog een versie geschreven, die voldoet aan de derde beschrijving. Dit spel doopte ik *Flipplus*. Er wordt een viertal getallen gekozen. De bedoeling is om binnen twee minuten de oplossing te vinden. De opgaven variëren in moeilijkheidsgraad van zéér eenvoudig tot heel moeilijk. Daarnaast is er een speciale docentenversie, die kan worden gebruikt om geschikte opgaven voor de leerlingen te selecteren. Mochten de leerlingen na een tijd alle mogelijke sommen een keer gezien hebben (het zijn er 404, zie daarvoor 'De post' in Pythagoras van okto-

Figuur 1

$((a + b) + c) + d$	$((a + b) \times c) \times d$	$((a \times b) \times c) : d$
$((a + b) + c) - d$	$((a + b) \times c) : d$	$((a \times b) : c) : d$
$((a + b) + c) \times d$	$((a - b) \times c) \times d$	$(a - (b \times c)) \times d$
$((a + b) + c) : d$	$((a - b) \times c) : d$	$(a - (b : c)) \times d$
$((a + b) - c) \times d$	$((a \times b) + c) \times d$	$(a : (b + c)) \times d$
$((a - b) - c) \times d$	$((a \times b) + c) : d$	$(a : (b - c)) \times d$
$((a + b) \times c) + d$	$((a \times b) - c) \times d$	$(a + b) \times (c + d)$
$((a + b) \times c) - d$	$((a \times b) - c) : d$	$(a + b) \times (c - d)$
$((a - b) \times c) + d$	$((a : b) + c) \times d$	$(a - b) \times (c - d)$
$((a - b) \times c) - d$	$((a : b) - c) \times d$	$(a \times b) + (c \times d)$
$((a + b) : c) + d$	$((a \times b) \times c) + d$	$(a \times b) + (c : d)$
$((a \times b) + c) + d$	$((a \times b) \times c) - d$	$(a \times b) - (c \times d)$
$((a \times b) + c) - d$	$((a \times b) : c) + d$	$(a \times b) - (c : d)$
$((a \times b) - c) - d$	$((a \times b) : c) - d$	$a : ((b : c) - d)$
$((a : b) + c) + d$	$((a \times b) \times c) \times d$	$a : (b - (c : d))$

De mogelijke formules om met vier getallen en drie operaties 24 te maken.

ber 2001), dan kan eenvoudig een ander resultaat, of andere startwaarden worden gekozen. In dit artikel wil ik uitleggen wat er kwam kijken bij het schrijven van *Flippo*. Daarna geef ik enkele tips voor het oplossen van 24-spelopgaven. Ik eindig met een reeks opgaven van verschillende zwaarte. Meer opgaven staan op mijn homepage www.coster.demon.nl, waar ook *Flippo* te vinden is.

De vorm van de berekening

Hoe kom je er met de computer achter of vier getallen samen 24 kunnen opleveren? Het idee is simpel: laat de computer alle mogelijke berekeningen van +, -, x of : met die vier getallen in alle mogelijke volgorde uitproberen. Welke mogelijke berekeningen zijn er allemaal? Ten eerste heb je te maken met de vorm van de berekening. Met een viertal $abcd$ kun je namelijk op verschillende manieren te werk gaan. Je kunt 'doorrekenen' zoals in versie 1. Je kunt ook eerst a en b nemen, dan c en d , en tenslotte de beide resultaten. De berekening heeft dan de vorm $(a \star b) \star (c \star d)$.

In totaal zijn er vijf verschillende vormen mogelijk:

1. $((a \star b) \star c) \star d$, bijvoorbeeld $((7 + 1) - 4) \times 6 = 24$,
2. $(a \star (b \star c)) \star d$, bijvoorbeeld $(6 : (8 - 6)) \times 8 = 24$,
3. $(a \star b) \star (c \star d)$, bijvoorbeeld $(5 + 7) \times (9 - 7) = 24$,
4. $a \star ((b \star c) \star d)$, bijvoorbeeld $6 \times ((7 + 1) - 4) = 24$,
5. $a \star (b \star (c \star d))$, bijvoorbeeld $6 : (1 - (3 : 4)) = 24$.

Kun je nagaan dat dit alle mogelijkheden zijn om haakjes te plaatsen?



Hoeveel formules zijn er?

In principe kan voor elke ★ elk van de vier bewerkingen worden ingevuld. Elke vorm levert dus $4 \times 4 \times 4 = 64$ formules op. Met de vijf vormen en de vier bewerkingen kunnen we dus in totaal 320 formules maken. Maar veel formules worden dan dubbel geteld, want bij bepaalde bewerkingen geven verschillende vormen hetzelfde resultaat. Gebruik je bijvoorbeeld alleen maar de bewerking $+$, dan doet de volgorde er helemaal niet toe: $((4 + 5) + 7) + 8 = (4 + (5 + 7)) + 8 = (4 + 5) + (7 + 8) = 4 + ((5 + 7) + 8) = 4 + (5 + (7 + 8)) = 24$. Ook zijn er heel wat onzinnige formules bij. Wat te denken van $((a - b) - c) - d$ of $((a : b) : c) : d$. Het zal wel duidelijk zijn dat met deze formules en als beginwaarde een van de getallen 1 tot en met 9 nooit als resultaat 24 behaald kan worden.

In figuur 1 staat een lijst van alle mogelijke formules. Van twee formules die altijd hetzelfde antwoord geven, zoals $(a + b) - (c + d)$ en $((a + b) - c) - d$, heb ik er steeds maar een in de lijst opgenomen. Ook onzinnige formules zijn achterwege gelaten. Zo kom je op een lijst van 45 formules. Op de website van Pythagoras staat een lijst van alle formules waarmee je 1 kunt maken. Die lijst bestaat uit 93 formules.

Hoe nu verder?

Als we voor een viertal $abcd$ willen testen of je 24 kunt krijgen, dan zul je alle in figuur 1 staande formules moeten aflopen.

Bovendien moet je alle mogelijke volgordes van $abcd$ proberen. Voor 6666 is dat eenvoudig, maar voor 1289 zijn dat $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ volgordes. In dit laatste geval moeten er $24 \times 45 = 1080$ mogelijkheden worden nagegaan en steeds worden gekeken of het resultaat op 24 uitkomt. De computer telt het aantal formules dat bij een zekere combinatie van de vier getallen tot het eindresultaat 24 leidt. (Dus $((3 + 4) + 8) + 9$ en $((4 + 3) + 8) + 9$ tellen slechts eenmaal mee.) Op grond van het aantal gevonden formules wordt de volgende indeling gemaakt:

Aantal formules	Soort opgave
9 of meer	zéér eenvoudig
6, 7 of 8	eenvoudig
4 of 5	gaat wel
2 of 3	lastig
1	heel lastig

Nuttige tips

Om je op weg te helpen, volgen hier enkele tips bij het maken van een 24-spelopgave.

• Werk van achter naar voor

Het getal 24 heeft een hele hoop delers: 2, 3, 4, 6 en 8. Als één van de vier getallen, zeg a , waarmee je 24 moet maken een deler van 24 is, probeer dan met de drie overige getallen $24/a$ te maken. Lukt dit niet, tel dan bij 24 één van de vier getallen op en probeer vervolgens met de resterende drie getallen deze som te maken. (Of trek van 24 één van de vier getallen af.)



• Neem twee getallen samen

Ga alle mogelijkheden van twee getallen langs. Tel deze getallen op, of neem het verschil. Is het een deler van 24? Probeer dan met de resterende twee getallen dát getal te maken dat vermenigvuldigd met het voorafgaande getal 24 oplevert.

Opgaven

1. Leef je uit op het 24-spel met de volgende viertallen:

gaat wel	lastig	heel lastig
2339	2255	1168
3499	4555	1479
3666	1227	1799
1267	2447	1668
4667	4778	3388

2. Probeer ook het 30-spel met de volgende viertallen:

gaat wel	lastig	heel lastig
1237	2288	5599
2669	5789	6899
3349	1589	7789
1479	2267	4488
2689	5689	2477

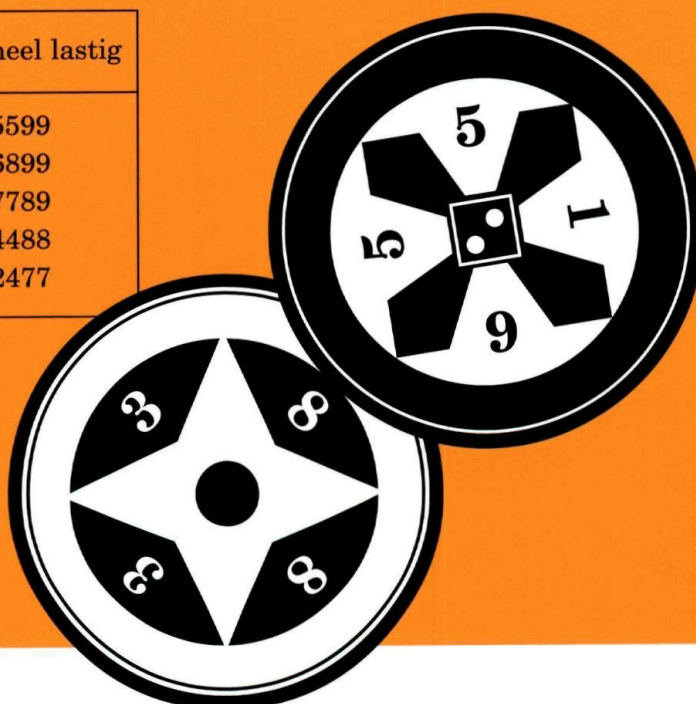
Het 120-spel

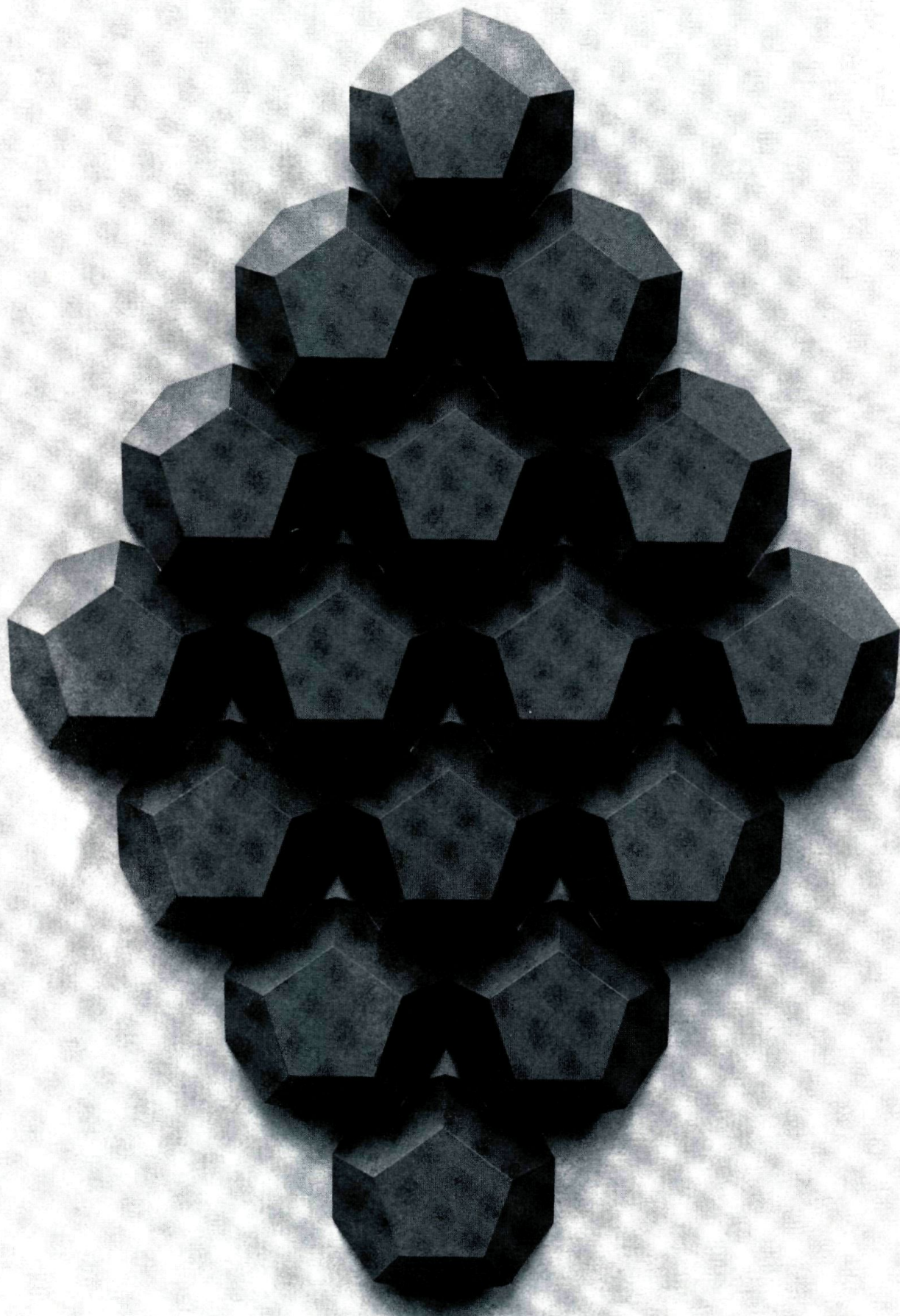
Stel je nu eens voor dat je vijf getallen krijgt voorgeschoteld en de opdracht krijgt om met de bewerkingen $+$, $-$, $\times$ en $:$ 120 te realiseren. Allereerst moeten we weten hoeveel formule-types er zijn voor vijf getallen en vier operaties. Ga na dat dit er 14 zijn.

De volgende stap is om de verschillende operatie-keuzes op te sommen. Er zijn circa 600 verschillende formules! Vijf verschillende getallen kunnen op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ manieren tussen de operaties worden geplaatst. Kortom, er zijn heel veel mogelijkheden.

Opgaven

3. Kies vijf getallen van 1 tot en met 9 en probeer met behulp van de operaties $+$, $-$, $\times$ en $:$ het resultaat 120 te verkrijgen.
4. (Moeilijk!) Probeer met het vijftal 47778 en de operaties $+$, $-$, $\times$ en $:$ het resultaat 120 te verkrijgen.





Dedecaëder & Icsaëder

11

Een gulden duo in de serie:
De Gulden Snede,
deel V

De dodecaëder, het regelmatige veelvlak met twaalf regelmatige vijfhoeken als zijvlakken, en de icoesaëder, het regelmatige twintigvlak waaraan we in de vorige aflevering van onze serie uitgebreid aandacht hebben besteed, vormen een onafscheidelijk duo.

Het ene veelvlak heeft twaalf zijvlakken en twintig hoekpunten, en bij de ander is het net andersom. Beide hebben ze dertig rib-

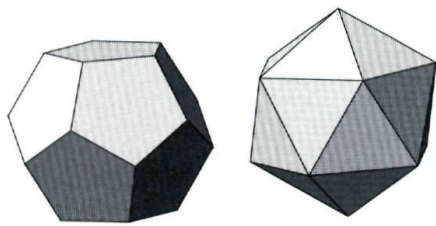
ben. Nog mooier: de *middelpunten* van de *zijvlakken* van een dodecaëder zijn de *hoekpunten* van een icoesaëder, en omgekeerd. In figuur 2 is dat in beeld gebracht.

Ingeschreven kubus

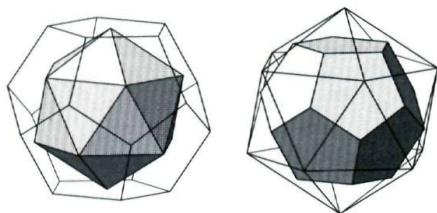
In de vorige aflevering hebben we een kubus in een icoesaëder gepast door de middelpunten van acht van de twintig zijvlakken als hoekpunten te nemen. In de linker-

Linkerpagina:

Een kunstwerk met dodecaëders van Gerard Caris: *Reliefstructure 1R – 1* uit 1993, gemaakt van polystyreen, epoxyglasvezel, hout, aluminium en verf.



Figuur 1. De dodecaëder en de icoesaëder.



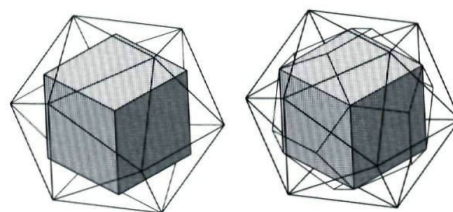
Figuur 2. De middelpunten van de zijvlakken van een dodecaëder zijn de hoekpunten van een icoesaëder, en vice versa.

gegeven. De schuine vlakken van die dakjes lopen dan netjes zonder knik in elkaar over, en vormen zodoende de twaalf regelmatige vijfhoeken die de zijvlakken zijn van de dodecaëder. Deze constructie van een dodecaëder uit een kubus is al beschreven door de oude Griekse wiskundige Euclides (ca. 300 v. Chr.).

Een gelijkwaardig tweetal

In figuur 2 is links een icoesaëder ingeschreven in een dodecaëder, en rechts is het net andersom. In beide gevallen is het ingeschreven veelvlak veel kleiner dan het omgeschreven veelvlak. Je kunt echter ook een soort tussenvorm maken door bijvoorbeeld de ingeschreven icoesaëder zó veel op te blazen, dat de ribben ervan precies tegen die van de omgeschreven dodecaëder aankomen. De dodecaëder voeren we dan als draadmodel uit, want de punten van de icoesaëder steken door de zijvlakken heen.

Het kan natuurlijk ook net andersom: de icoesaëder als draadmodel en de dodecaëder er als een massief veelvlak binnenin. In figuur 5 zie je de twee mogelijkheden allebei getekend. In de linker en de rechter tekening hebben de dodecaëder en de icoesaëder hetzelfde formaat. Ze zijn in deze combinatie min of meer gelijkwaardige partners geworden, ook al zijn hun ribben niet even lang.



Figuur 3. Links een kubus in een icoesaëder. De hoekpunten van de kubus zijn de middelpunten van acht zijvlakken van de icoesaëder. Rechts zijn ook de overige middelpunten toegevoegd, waardoor, net als in de rechterhelft van figuur 2, een dodecaëder ontstaat.

helft van figuur 3 is dat nog eens te zien; de icoesaëder balanceert daar op een van zijn ribben. In de rechterhelft zijn ook de overige middelpunten meegenomen, waardoor, net als in figuur 2 (rechts), een dodecaëder ontstaat.

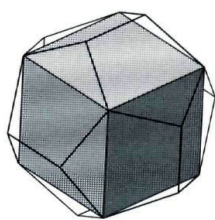
De dodecaëder is duidelijker te zien in figuur 4, waarin we de omvattende icoesaëder weg hebben gelaten. Je hoeft er maar even wat langer naar te kijken om gelijk al weer de gulden-snedeverhouding τ op te merken: de ribben van de kubus zijn τ maal zo groot als die van de dodecaëder. We hebben immers in deel 1 van onze gulden-snedeserie τ gedefinieerd als de verhouding tussen de diagonaal en de zijde van een regelmatige vijfhoek. We hebben toen ook laten zien dat $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$.

De constructie van Euclides

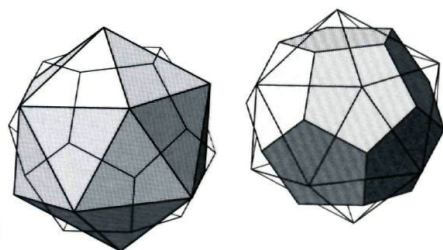
Figuur 4 laat ook zien hoe je een dodecaëder uit een kubus kunt construeren. Neem voor het gemak even aan dat de kubus ribben van lengte τ heeft. Bouw dan op elk zijvlak een tentdakje met vijf ribben van lengte 1 op de manier die in figuur 4 is aan-

Opnieuw de gulden snede

In figuur 5 zie je ook dat de ribben van de icsaëder en die van de dodecaëder elkaar loodrecht middendoor delen. Maar hoe zit het met hun lengteverhouding? Het wordt misschien eentonig, maar inderdaad: ook hier komt τ weer tevoorschijn. De ribben van de icsaëder zijn namelijk τ maal zo groot als die van de dodecaëder.

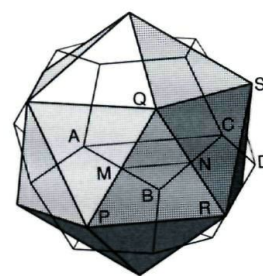


Figuur 4. Een kubus ingeschreven in een dodecaëder. De ribben van de kubus zijn τ maal zo groot als die van de dodecaëder.



Figuur 5. Een dodecaëder in een icsaëder-draadmodel (rechts) en een icsaëder in een dodecaëder-draadmodel (links). In beide gevallen snijden de ribben van het ene veelvlak die van het andere loodrecht middendoor.

Het bewijs is een simpele toepassing van de *middenparallelstelling*: als in een driehoek ABC de punten M en N de middens zijn van respectievelijk AB en BC , dan is MN evenwijdig aan, en half zo lang als AC . Pas je dit in figuur 6 toe op de driehoeken ABC en PQR die elkaar in hun gemeenschappelijke middenparallel MN snijden, dan zie je dat AC en PR evenwijdig en even lang zijn. Maar AC is τ maal zo lang als de ribbe AB van de dodecaëder, en PR is een ribbe van de icsaëder, en dus geldt inderdaad dat de ribben van de icsaëder τ maal zo lang zijn als die van de dodecaëder.

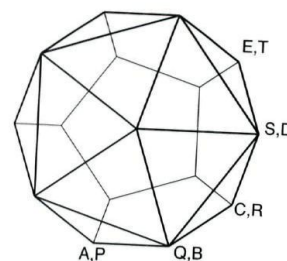


Figuur 6. MN is middenparallel in de driehoeken ABC en PQR .

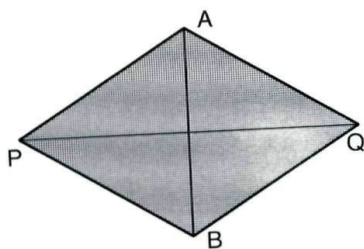
Bovenaanzicht

Maar er is meer. Als je de dodecaëder horizontaal doorsnijdt langs de lijn AC , is de snijfiguur een regelmatige vijfhoek met zijden van lengte AC . En als je de icsaëder horizontaal doorsnijdt langs de lijn PR , krijg je precies zo'n vijfhoek, want $AC = PR$. Bovendien liggen ze recht boven elkaar, met andere woorden, AP en CR zijn verticale lijnstukken.

Dat blijkt ook uit figuur 7, die een bovenaanzicht geeft van figuur 6. Daarin valt A met P samen en C met R . En natuurlijk ook Q met B , enzovoort. De buitenrand is een regelmatige tienhoek, die zowel de projectie is van de zigzaglijn $ABCDE...$ die de gehele dodecaëder in twee gelijke delen verdeelt, als de zigzaglijn $PQRST...$ die hetzelfde doet met de icsaëder.



Figuur 7. Bovenaanzicht van figuur 6.



Figuur 8. De gulden ruit. De diagonalen ervan hebben de gulden-snedeverhouding.

De gulden ruit

De ribben PQ en AB in figuur 6 snijden elkaar loodrecht middendoor, en vormen dus een ruit $PBQA$ met diagonalen in de gulden-snedeverhouding: een *gulden ruit* (figuur 8).

De hoeken ervan zijn, in graden of radialen uitgedrukt, geen mooie getallen, maar we kunnen ze wel gemakkelijk uitrekenen, want $\tan \angle PAB = \tau$. De rekenmachine levert dan $\angle PAB = 63,4349\dots$ graden.

Keplers ruitendertigvlak

Verbinden we de hoekpunten van de dodecaëder en de icosaeëder uit figuur 6 door middel van dit soort ruiten, dan krijgen we een veelvlak met dertig congruente gulden ruiten als zijvlakken, een voor elk ribbenpaar. Dit 'gulden veelvlak' is al door Johannes Kepler (1571-1630) getekend en beschreven. De opmerkelijke eigenschappen ervan zullen we in de volgende en laatste aflevering van onze gulden-snedeserie nader onder de loep nemen.

Vragen en opdrachten

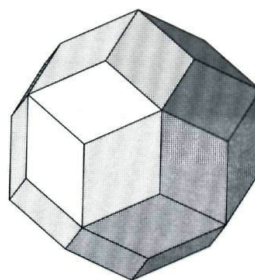
1. Hoeveel ribben heeft Keplers dertigvlak? En hoeveel hoekpunten?
2. Laat zien dat elke ribbe van Keplers dertigvlak dezelfde richting heeft als een van de lichaamsdiagonalen van de icosaeëder die er deel van uitmaakt. (Een lichaamsdiagonaal verbindt diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten. De icosaeëder heeft twaalf hoekpunten, en dus zes lichaamsdiagonalen.)

3. Heeft Keplers dertigvlak een omgeschreven bol? En een ingeschreven bol?

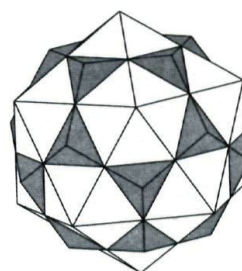
4. De zijvlakken van een homogeen massief veelvlak in de vorm van Keplers dertigvlak zijn op een willekeurige manier genummerd met de getallen 1 tot en met 30. Is dit een eerlijke dertigzijdige dobbelsteen?

5. Neem aan dat Keplers dertigvlak ribben heeft van lengte 1. Wat is dan de inhoud ervan?

6. In figuur 10 zie je een samengesteld veelvlak dat bestaat uit een dodecaëder en een icosaeëder door elkaar heen (vergelijk dit met figuur 5). Ga na dat de donkergrijze driehoekige zijvlakjes van dit veelvlak zijden hebben in de verhouding $1 : 1 : \tau$, en leid hieruit een ander bewijs af van het feit dat de ribben van de icosaeëder τ maal zo groot zijn als die van de dodecaëder.



Figuur 9. Keplers gulden ruitendertigvlak.



Figuur 10. Samenstel van een dodecaëder en een icosaeëder.

De post

Een koppige munt

In het vorige nummer van Pythagoras staat een verkeerde oplossing van 'Een koppige munt' (Problemen, februari 2002). Hierop maakte W. Schuurman ons attent. Volgens hem is de kans op 'munt' met de andere munt gelijk aan $\frac{2}{5}$ (in plaats van $\frac{3}{10}$), en de kans op 'munt' met de eerste munt gelijk aan $\frac{1}{10}$ (in plaats van $\frac{2}{10}$). Op de homepage van Pythagoras staat de toelichting die W. Schuurman ons stuurde.

Zandlopers

Ook van Hans van der Heijde kregen we een reactie over een oplossing, en wel van het zandloperprobleem (Kleine nootjes, februari 2002). Hij stuurde een oplossing die zeven minuten sneller is dan de oplossing zoals die in het vorige nummer is gegeven. Het is niet handig als je eerst 7 minuten moet wachten. Het kan ook als volgt. Start beide zandlopers. Na 7 minuten is zandloper A klaar. Draai deze zandloper onmiddellijk weer om. Na 11 minuten is zandloper B klaar. Op dit moment heeft A 4 minuten gelopen. Dus als A dan wordt omgedraaid, zijn er 15 minuten afgemeten zodra A klaar is.

Vierentwintigen

In de postrubriek van februari vroegen we wat het kleinste getal is, dat je op geen enkele manier kunt schrijven uitgaande van vier positieve getallen kleiner dan 10 en de bewerkingen +, -, x en ÷. Zowel Aad van de Wetering als Elias Buissant des Amorie vonden met de computer dat 417 het gezochte getal is. Voor de eerstvolgende

getallen hoeven we overigens niet ver te zoeken: ook 418, 419, 421 en 422 zijn zo niet te verkrijgen. Voor 420 is dit wel mogelijk; zie je hoe?

Breuken (1)

Joris Huizer maakte ons attent op een programma dat hij heeft gemaakt voor het schrijven van een breuk als som van breuken met teller 1 (zogenaamde *stambreuken*) volgens het algoritme beschreven in opgave 46 van de Pythagoras Olympiade (april 1999). Het programma is te vinden op: <http://jorishuizer.cjb.net/html/fractions/breuken.html>. Er wordt ook uitgelegd hoe het algoritme werkt en er wordt bewezen dat het altijd leidt tot een som van eindige lengte.

Breuken (2)

'Kun je drie of vier breuken samenstellen die som 1 hebben en waarbij elk van de cijfers 0 tot en met 9 links van het =-teken precies één keer voorkomt?' Deze vraag stelden we in de postrubriek van februari. Aad van de Wetering en Elias Buissant des Amorie stuurden ons oplossingen. Bij drie breuken blijken er maar liefst 93 mogelijkheden te zijn, maar bij vier breuken zijn dat er nog maar 10. Enkele fraaie resultaten:

$$\frac{7}{90} + \frac{8}{36} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = 1,$$

$$\frac{175}{630} + \frac{2}{9} + \frac{4}{8} = 1,$$

$$\frac{8}{306} + \frac{27}{51} + \frac{4}{9} = 1.$$

De complete lijst is te vinden op de homepage van Pythagoras.

O

Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Aan het eind van het jaar zijn er boekenbonnen ter waarde van 120, 100 en 80 euro voor de drie leerlingen die bovenaan staan in de laddercompetitie.

Opgave 83

Laat A een verzameling van N verschillende getallen uit $\{1, 2, \dots, 100\}$ zijn zodat de som van twee verschillende elementen van A nooit deelbaar door 10 is. Wat is de grootste waarde die N kan hebben?

Opgave 84

Beschouw een 10 bij 10 schaakbord waarvan alle 100 vakjes wit zijn. Nummer de vakjes op het bord van 1 tot en met 100, door linksboven te beginnen met 1 en eerst de eerste rij af te lopen van links naar rechts, dan de tweede van links naar rechts, enzovoort. Kleur nu een aantal vakjes zwart, en wel zo dat de helft van de vakjes in elke kolom zwart is en de helft van de vakjes in elke rij ook. Bewijs dat de som van de getallen op de zwarte vakjes gelijk is aan de som van de getallen op de witte vakjes.

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 juli 2002. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt!

Op de volgende pagina staan de oplossingen van de opgaven uit het februari-nummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Opgave 79

Er staan 25 bekers omgekeerd op een tafel. Je mag er steeds 4 tegelijk omkeren. Een beker mag meerdere malen omgekeerd worden. Kun je zo alle bekers rechtop krijgen?

Oplossing. Als je 4 bekers omkeert, kun je dit doen door 4, 3, 2, 1 of 0 bekers rechtop te zetten en er respectievelijk 0, 1, 2, 3 of 4 weer om te keren. Dit betekent dat het aantal bekers dat rechtop staat, toeneemt met 4, 2, 0, -2 of -4. Aangezien dit aantal aan het begin 0 en dus even is, blijft het even en kan de toestand met 25 bekers rechtop nooit worden bereikt.

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvena**at te Bergen op Zoom, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker van het **Erasmus College** te Rotterdam, Harald van Dijk van het **Zwijsen College** te Veghel, Bas Heideveld te Zwolle, Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk, Jan Tijs Nijssen en Sohail Sheikh van het **St. Maartenscollege** te Voorburg, H. Verdonk te Den Haag en H. Verhulst. De boekenbon gaat naar Harald van Dijk.

Opgave 80

Laat x een reëel getal zijn ongelijk aan nul. Bewijs:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

Oplossing. We ontbinden de uitdrukking in factoren:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = \frac{(x^3 - 1)(x^9 - 1)}{x^4}.$$

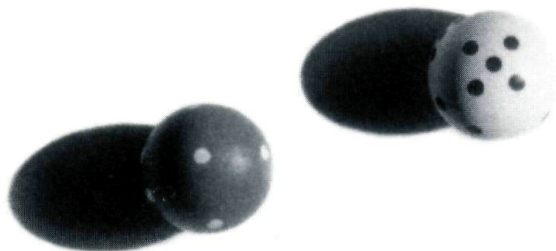
De noemer x^4 is altijd positief. Als $x = 1$, is $x^3 - 1 = 0$ en geldt gelijkheid. Als $x > 1$, zijn $x^3 - 1$ en $x^9 - 1$ allebei positief en is het product ook positief. Als $x < 1$, zijn $x^3 - 1$ en $x^9 - 1$ allebei negatief en is het product positief. Omdat het quotiënt van twee positieve getallen positief is, is de hele uitdrukking positief.

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Thomas Beuman van het **R.K. Gymnasium Juvena**at te Bergen op Zoom, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Harald van Dijk van het **Zwijsen College** te Veghel, Bram Kuijvenhoven van het **Atlas College** te Rijswijk, H. Verdonk te Den Haag en Zhang Xiao Qian te Rumst (België). De boekenbon gaat naar Bram Kuijvenhoven.



door Jos Groot

Ronde dobbelstenen



18

Dobbelstenen heb je in allerlei soorten en maten, maar dat er ronde bestaan, dat wist ik niet. Vorig jaar kwam ik er een tegen tijdens mijn vakantie. De foto in figuur 1 toont hoe hij er uitziet: echt bolvormig, met de gebruikelijke stippenpatronen van 1 tot en met 6. Hij is van plastic met een diameter van ruim 2 cm. Toen ik hem probeerde kwam er dan weer eens een 2 boven, dan een 5, dan weer een 2, een 6, enzovoorts. Hij leek nog te werken ook! Probeer eens te bedenken hoe hij in elkaar zit, hoe hij werkt. Als je hem, zoals ik, had kunnen vasthouden, was je er vast achter gekomen. De dobbelsteen is namelijk hol met binnenin een stalen kogeltje van 9 mm. Dat voel je als je hem beweegt. Bij elk cijfer zit een holte waar het kogeltje ruim in past. Tegen het eind van een worp belandt het kogeltje in zo'n holte, bijvoorbeeld bij de 5. Door het gewicht van het kogeltje eindigt de worp met de 5 onderaan en, omdat de som van overstaande ogetallen altijd 7 is, met de 2 boven. Doordat het kogeltje tamelijk zwaar moet zijn voor een goede werking is de dobbelsteen waarschijnlijk wat groter dan een gewone kubusvormige.

Zuiver of vals?

Een zuivere dobbelsteen is er een die, als je maar lang genoeg gooit (in theorie oneindig

lang), precies evenveel keren een 1, 2, 3, 4, 5 als 6 geeft. Als je een gewone dobbelsteen nauwkeurig kubusvormig maakt en een homogeen (dat wil zeggen: overal hetzelfde) materiaal gebruikt, dan is hij vanzelf zuiver. Maar de ronde dobbelsteen zit wat ingewikkelder in elkaar. Ik kon me best voorstellen dat als de holletjes maar een klein beetje van elkaar verschillen, de dobbelsteen duidelijk onzuiver (vals) is. Daarom heb ik er 198 keer mee gegooid, met als resultaat deze tabel:

aantal ogen	aantal
1	43
2	33
3	16
4	36
5	29
6	41
som:	198

Je verwacht op de lange duur $198/6 = 33$ voor alle aantallen ogen. Dat is hier niet het geval, vooral de 3 komt relatief weinig voor, maar 16 keer. Het kan natuurlijk zijn dat als je maar lang genoeg gooit de 3 juist weer vaker voorkomt en zo zijn 'achterstand' inhaalt. Kijk maar eens naar figuur 2 (pag.20).



Figuur 1. Een ronde dobbelsteen

Hiervoor heb ik met een computerprogramma verschillende aantallen worpen met een dobbelsteen nagedaan, van 10 tot een miljoen (10^6) keer. De verticaal uitgezette fractie is het aantal 3-en gedeeld door het aantal worpen. Rond de 50 worpen (let op de speciale horizontale schaal) is er een fikse achterstand ten opzichte van wat je verwacht (de horizontale lijn op $1/6 = 0,1666\dots$). Maar uiteindelijk wordt het verschil met $1/6$ toch heel erg klein. De achterstand is relatief ingehaald, zou je kunnen zeggen.

Het toetsen van een hypothese

Wat kunnen we zeggen over de zuiverheid van een dobbelsteen? Volgens de definitie van zuiverheid van hiervoor zou je voor een absoluut zekere uitspraak oneindig vaak moeten gooien. Als dan de fractie 3-en niet $1/6 = 0,1666\dots$ is, maar bijvoorbeeld 0,10, dan weet je absoluut zeker dat de dobbelsteen onzuiver is. In de praktijk is het natuurlijk onmogelijk om oneindig vaak met een dobbelsteen te gooien. Om toch een uitspraak te kunnen doen over de zuiverheid van een dobbelsteen, 'toetsen we een hypothese', zoals het in de statistiek wordt genoemd. Er wordt daarbij eerst een zogenaamde *nulhypothese* gekozen, in dit geval: 'de ronde dobbelsteen is zuiver'. Welke maat voor de zuiverheid, afgeleid uit

de tabel, zou je nu voor zo'n toets kunnen gebruiken? Vaak wordt de zogenaamde χ^2 (spreek uit: gie-kwadraat) gebruikt. Dat is een maat voor hoeveel de uitkomsten afwijken van de verwachte uitkomsten als de dobbelsteen zuiver zou zijn. In ons geval komt die uit op $((43 - 33)^2 + \dots + (41 - 33)^2) / 33 \approx 14,5$. De som telt zes termen, een voor elk aantal in de tabel. Voor een zuivere dobbelsteen is 33 het aantal te verwachten 1-en, 2-en, enzovoort. Naarmate een dobbelsteen onzuiverder is, neemt χ^2 toe. Grote waarden maken het onwaarschijnlijk dat je dobbelsteen zuiver is. Maar wat is groot?

De χ^2 van een zuivere dobbelsteen

Wat je in ieder geval kunt doen, is bepalen hoe groot χ^2 is als je 198 keer met een zuivere dobbelsteen gooit. Dat verschilt natuurlijk van keer tot keer. Om je een beeld te geven van wat je mag verwachten als antwoord, heb ik met mijn computer 1000 maal 198 worpen met een zuivere dobbelsteen gesimuleerd. Voor elke 'ronde' is de χ^2 berekend. Het resultaat staat in figuur 3. Het histogram in figuur 3a geeft aan hoe vaak de verschillende waarden van χ^2 voorkwamen. Die tussen 2,5 en 3,5 (de derde staaf van links) het vaakst: 149 maal. Naarmate χ^2 groter wordt, komt hij minder vaak voor. In figuur 3b staat het zogenaamde cumula-

tieve histogram. Om bijvoorbeeld de waarde bij $\chi^2 = 5$ te krijgen, is in de grafiek van figuur 3a geteld hoeveel van de rondes een χ^2 kleiner dan 5 gaven. Om hier een kans van te maken, is er gedeeld door 1000. Zoals altijd stijgt zo'n cumulatief histogram voortdurend en nadert het tot 1. Het korte staafje bij 14,5 correspondeert met de ronde dobbelsteen.

Wat kun je nu uit zo'n cumulatief histogram aflezen? Dit bijvoorbeeld: 'Als ik een zuivere dobbelsteen heb, dan is de kans 0,94 (94%) dat ik bij 198 worpen een χ^2 onder de 10 krijg.' Voor ons geval is het 'omgekeerde' belangrijker: voor een zuivere dobbelsteen is de kans maar $1 - 0,94 = 0,06$ (6%) dat χ^2 boven de 10 uitkomt. Een zuivere dobbelsteen geeft dus met erg kleine kans zulke hoge waarden, terwijl bij een onzuivere dobbelsteen zulke hoge waarden minder onwaarschijnlijk zijn.

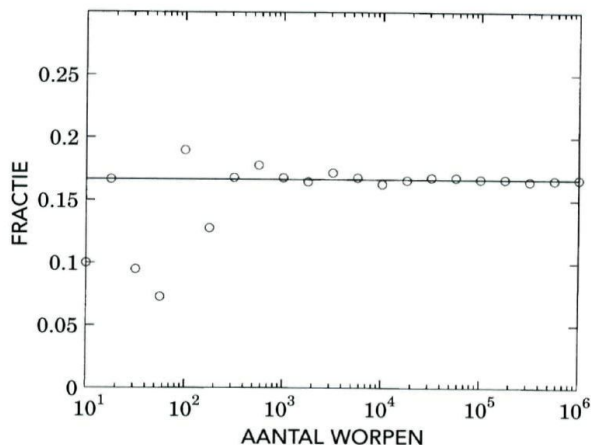
Wat is de conclusie?

Wat moeten we nu concluderen omtrent onze ronde dobbelsteen? Is hij zuiver of vals gebleken? Dit hangt af van de gekozen *onbetrouwbaarheidsdrempel* α . In de praktijk kiest men α vaak gelijk aan 0,05, maar ook een kleinere grens, bijvoorbeeld 0,01, komt voor.

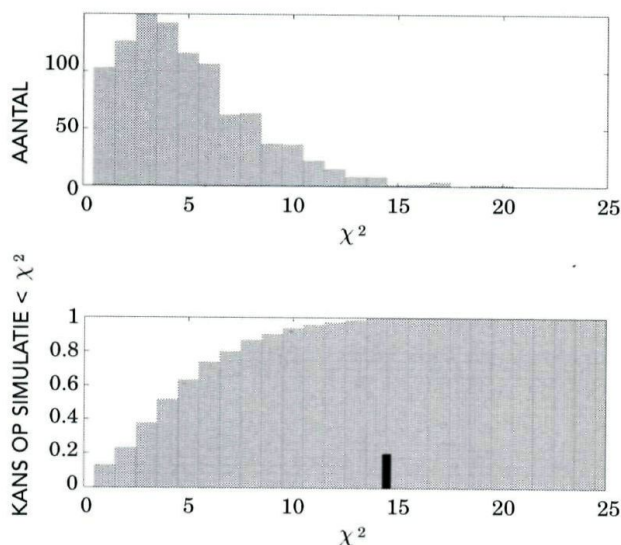
De waarde 14,5 (zie figuur 3b) correspondeert met een grens van 0,013. Nemen we voor de onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05, dan moeten we concluderen dat de ronde dobbelsteen onzuiver is (we verwerpen de nulhypothese), terwijl we dit bij een aannahme van 0,01 niet kunnen concluderen (maar we concluderen ook niet dat de dobbelsteen zuiver is).

Het lijkt flauw dat de uitkomst afhangt van de keuze van α . Het komt echter gewoon doordat je nooit écht zekere uitspraken kunt doen. Hoe lager de grens, hoe meer zekerheid. Nu lijkt het misschien aantrekkelijk de onbetrouwbaarheidsdrempel extreem klein te kiezen, zodat we vrijwel nooit een verkeerde conclusie trekken. Echter, hierdoor wordt de kans dat we de nulhypothese ten onrechte niet verwerpen erg groot, hetgeen ook ongewenst is. Uiteraard kunnen we alle

fouten kleiner maken door meer waarnemingen te doen. In ons geval: meer zekerheid dat de ronde dobbelsteen onzuiver is, krijg je door meer dan 198 worpen te doen.



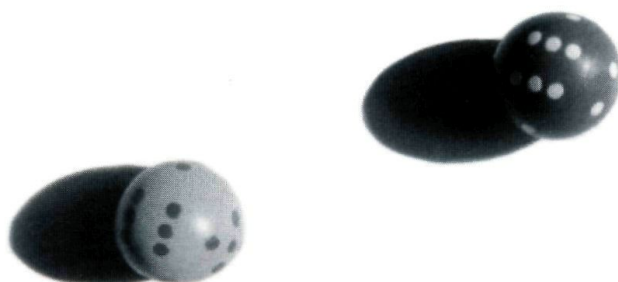
Figuur 2. Naarmate er vaker met de dobbelsteen geworpen wordt, komt de fractie 3-en steeds dichterbij 1/6.

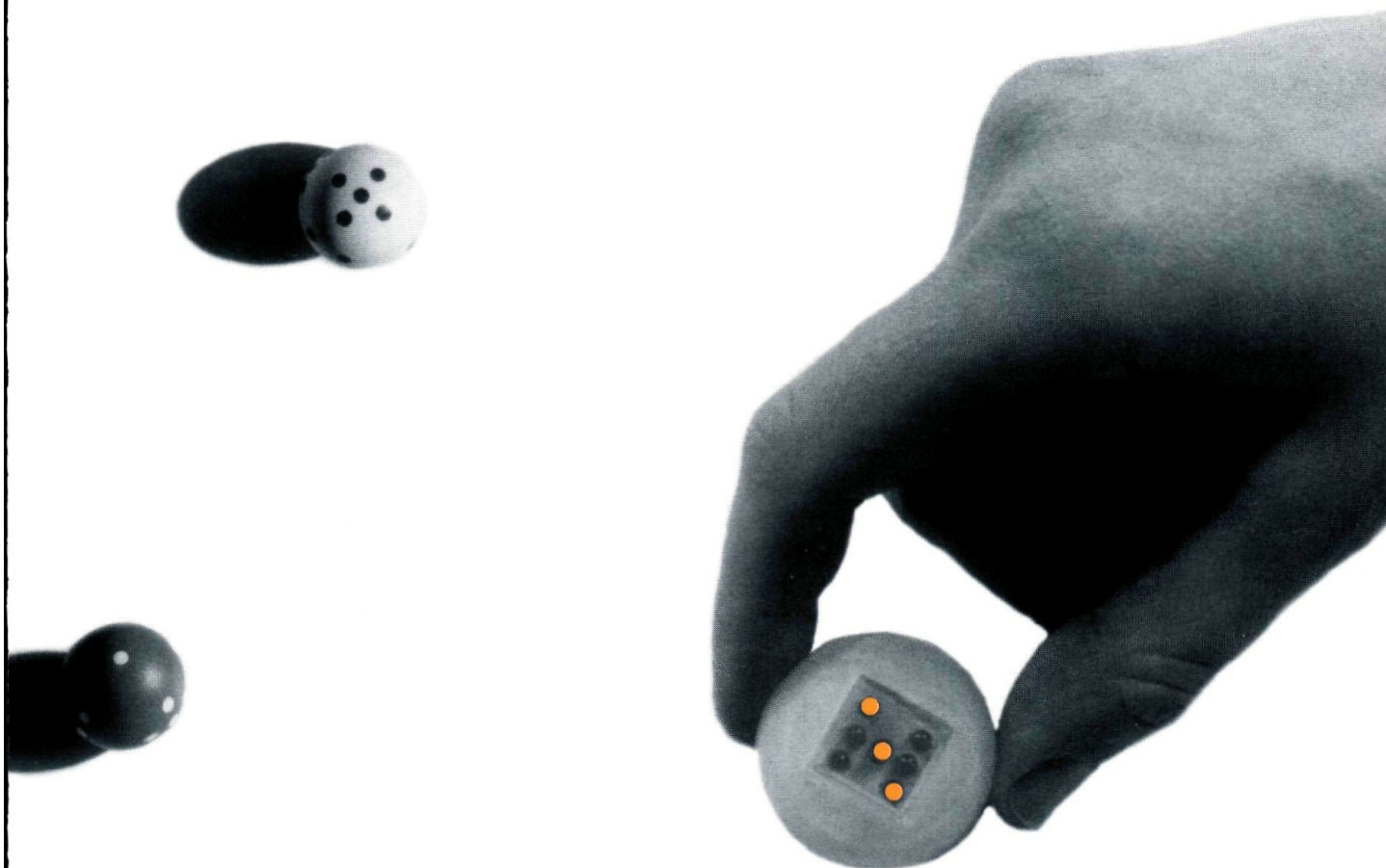


Figuur 3a en b.

Figuur a geeft aan hoe vaak de verschillende waarden van χ^2 voorkwamen bij de waarnemingen.

Figuur b is het cumulatieve kanshistogram. Het korte staafje bij 14,5 correspondeert met de ronde dobbelsteen.





21

Electronische dobbelsteen

Gezelschapsspelen zijn een plezierige vorm van ontspanning, maar aan de erbij horende dobbelstenen ergert een mens zich al snel: ze vallen op de grond, niet iedereen heeft het resultaat goed gezien, er wordt wel eens gepoogd te sjoemelen bij het gooien, enzovoorts. Met de *electronische dobbelsteen* behoren deze euvels tot de verleden tijd: je hoeft de dobbelsteen alleen maar met een ferme beweging op tafel neer te

zetten en een aantal ledlampjes gaat flikkeren, om daarna op een willekeurig getal van 1 tot en met 6 te stoppen. De dobbelsteen rolt niet van tafel, over het resultaat op de display van deze dobbelsteen kan geen enkele twijfel bestaan en valsspelen is totaal uitgesloten. Geen mens die zich met de electronische dobbelsteen hoeft te ergeren.



Problemen

door **Dion Gijswijt**

Wie van de drie

Van een eeneïge drieling spreekt er één altijd de waarheid en de andere twee liegen altijd. Een van de twee leugenaars heeft een moord gepleegd en de twee zusjes waren getuige. Je kunt de drie drieling-zusters niet van elkaar onderscheiden. Je mag twee vragen stellen. Per vraag mag slechts één verdachte het antwoord 'ja' of 'nee' geven. Hoe kun je er achter komen wie de dader is?

Kleur het vlak

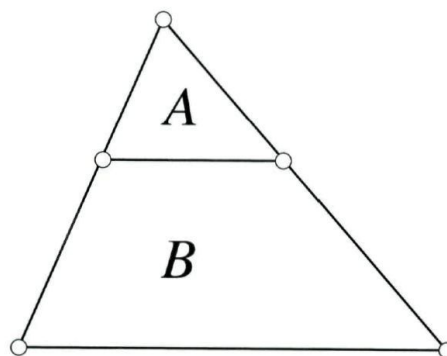
Stel dat je (in gedachten) het vlak met drie kleuren kleurt. Dat wil zeggen: je kent aan elk punt in $\mathbb{R}^2$ één van de kleuren rood, groen en blauw toe. Bewijs dat er twee punten op afstand 1 van elkaar zijn, met dezelfde kleur.

De constante van Kaprekar

Een getal van vier cijfers heeft de volgende eigenschap: *indien de cijfers van het getal van groot naar klein en van klein naar groot worden gerangschikt, zodat twee getallen ontstaan, dan krijg je het oorspronkelijke getal weer terug als je het kleinste van het grootste getal aftrekt*. Om welk viercijferig getal gaat het?

Zes lengtes

Een driehoek wordt in twee delen gesplitst door een lijn die parallel loopt met de basis van de driehoek, zie onderstaande figuur. Het driehoekige stuk *A* heeft een omtrek van 70 cm en een oppervlakte van 210 cm^2 . Het stuk *B* is een trapezium met een omtrek van 196 cm en een oppervlakte van 1680 cm^2 . Wat zijn de lengtes van de zes lijnstukken in de figuur?



Dit probleem is aangeleverd door *Dave Odegard*, docent wiskunde op de Internationale school te Hilversum.

Oplossingen

nr.4

door **Dion Gijswijt**

Leugenaars

Noem het aantal leugenaars L en het aantal waarheidssprekers W . Een waarheidsspreker beschuldigt een andere leerling alleen van liegen als dat een leugenaar is, dus de W waarheidssprekers beschuldigen elk L leerlingen van liegen, in totaal $W \times L$ beschuldigingen.

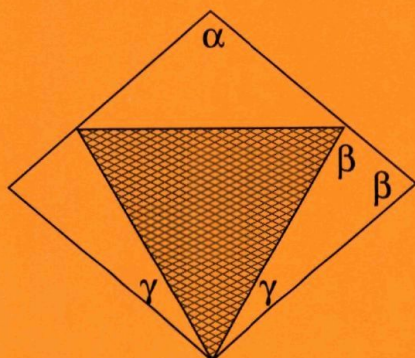
Een leugenaar beschuldigt een andere leerling alleen van liegen als dat een waarheidsspreker is, dus elke leugenaar beschuldigt W andere leerlingen, in totaal $L \times W$ beschuldigingen.

We weten nu dat $2WL = 62$ en dus is $WL = 31$. Omdat 31 een priemgetal is, volgt hieruit dat óf $W = 1$ en $L = 31$ óf dat $W = 31$ en $L = 1$. In beide gevallen zijn er 32 leerlingen.

Vijf driehoeken

Zie onderstaande figuur. De buitenste vier driehoeken sluiten een parallellogram in (een ruit zelfs), dus $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Verder weten we dat $2\beta + \gamma = 180^\circ$ en dat $2\gamma + 60^\circ = \alpha$. Als we dit stelsel van drie vergelijkingen oplossen, vinden we dat $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 80^\circ$ en $\gamma = 20^\circ$. De gevraagde hoek is dus 100° .



Vierenzestig

Een mogelijke oplossing is om in de eerste kolom van boven naar beneden de getallen 1 t/m 8 te zetten, in de tweede kolom de getallen 9 t/m 16, in de derde kolom de getallen 17 t/m 24, etcetera. Als de 64 getallen in de vakjes zijn geplaatst, dan kun je in niet meer dan 7 stappen van het vakje met het getal 1 via buurvakjes naar het vakje met het getal 64 komen. Dat betekent dat er een stap is waarvan het verschil tenminste $(64 - 1)/7 = 9$ is. Er zijn dus altijd twee buurvakjes waarvan de getallen minstens 9 verschillen.

Bereken π

Met behulp van de stelling van Pythagoras volgt dat

$$x_{2n}^2 = \left(\frac{1}{2}x_n\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}x_n\right)^2}\right)^2.$$

Uitwerken geeft:

$$x_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - x_n^2}.$$

We zien achtereenvolgens dat $x_4^2 = 2$,

$$x_8^2 = 2 - \sqrt{2} \quad x_{16}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

etcetera. De benadering die we vinden voor π is $512 \times x_{1024} = 3,1415877...$

Na 14 'verdubbelingsstappen' zijn de eerste tien decimalen correct.

Journaal

door Alex van den Brandhof en Marco Swaen

pythagoras

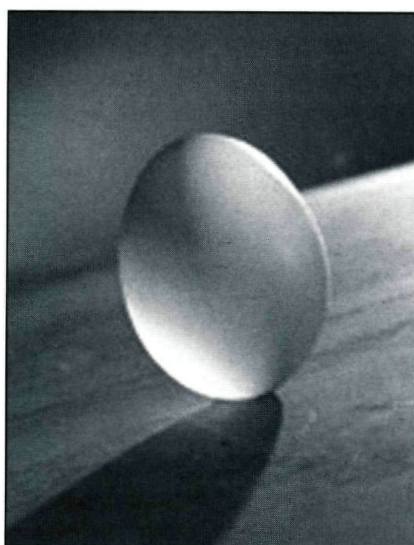
juni 2002

nummer 05

Rondtollend ei

Hoe hou je een rauw en een gekookt ei uit elkaar? Een eenvoudig foefje: een rauw ei is bijna niet aan het draaien te krijgen, terwijl een hardgekookt ei prima tolt en daarbij soms zelfs op zijn stompe punt gaat staan.

Dit wonderlijke verschijnsel, dat in strijd lijkt met fundamentele natuurwetten, is onlangs verklaard door de Brit Keith Moffatt en de Japanner Yutaka Shimomura. Voor een goede beschrijving van het eigenaardige gedrag van een hardgekookt ei dien je informatie te hebben over zijn bouw en massa, de draaisnelheid, de grootte van de wrijving tussen steunpunt en ondergrond en over de mate van slip die tijdens



De wonderbaarlijke opstanding van een hardgekookt ei

het draaien optreedt. Als het ei draait op een harde, robuuste tafel, zal de lengte-as van het ei geen enkele neiging vertonen om zich vanuit horizontale positie te verhef-

fen naar verticaal. Maar een hardgekookt ei dat met precies de juiste snelheid wordt rondgedraaid op een oppervlak met de juiste mate van wrijving en waarbij de juiste mate van slip optreedt, zal rijzen... Het ogenschijnlijk tegennatuurlijke is dat het zwaartepunt van de tollende massa een hogere positie zoekt, in plaats van een lagere. Volgens Moffatt komt dat doordat de wrijving de draai-energie door de specifieke vorm van het ei deels overbrengt in een opwaartse kracht. Met een rauw ei gaat dat niet, omdat daarin te veel draai-energie verloren gaat in rommelige vloeistofstroming in het eibinnenste.

Bronnen: *Nature*, nr. 416, 28 maart 2002, *NRC Handelsblad*, 30 maart 2002, *de Volkskrant*, 30 maart 2002



Op 9 april overleed de oudste wiskundige van de wereld (en oudste inwoner van Oostenrijk): **Leopold Vietoris**. Hij is 110 jaar geworden. Vietoris begaf zich op het terrein van de algebraïsche topologie.

Breinbreker

Black hole is de naam van een nieuw 3D-speeltje, dat zelfs bollebozen doet zweten. De nieuwe breinbreker is een combinatie van de bekende *Rubik-kubus* en een schuifraam. De bedoeling is om de 26 blokjes die bedrukt zijn met grijze en gekleurde sterren zo te verschuiven dat er een zwarte kubus tevoorschijn komt. De volgende uitdaging is om dan weer een kubus met louter grijze

sterren terug te toveren. De *Black hole* is bedacht door de Belg Peter Dejonghe.



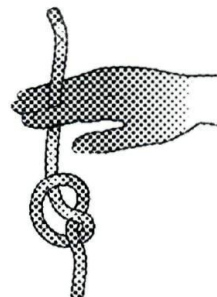
De *Black hole*

Een bewijs van vermoeden van Poincaré?

De Brit Martin Dunwoody van de Universiteit van Southampton meent een bewijs te hebben gevonden van een stelling die in 1904 werd geformuleerd door de Franse wiskundige Henri Poincaré. Deze stelling is één van de zeven *Millennium Prize Problems*, grote mathematische vraagstukken waarvoor het particuliere Clay Mathematics Institute voor hogere wiskunde in Cambridge in het jaar 2000 een bedrag van een miljoen dollar uitloofde voor degene die zo'n vermoeden kan bewijzen. Poincaré's probleem heeft betrekking op topologie, de leer van de vorm van mathematische objecten. Hij bedacht de zogeheten *fundamentealgroep*, een grootte die de essentie van een ruimtelijk object algebraïsch beschrijft. Hij bewees dat elk tweedimensionaal object met de fundamentealgroep die hoort bij die van een boloppervlak, via duwen en trekken is om te vormen tot een boloppervlak. Poincaré vermoedde dat dit principe ook in andere dimensies zou moeten opgaan, maar kon het niet bewijzen. Dit vermoeden is in 1960 alsnog bewezen voor alle denkbare dimensies, behalve voor de derde dimensie. Dunwoody lijkt nu een strategie te hebben gevonden voor een bewijs in het driedimensionale geval. Als zijn idee waterdicht is, sleept hij het eerste prijzengeld van het Clay Mathematics Institute in de wacht.

Bronnen: *Nature*, nr. 416, 18 april 2002, *de Volkskrant*, 13 april 2002

Wiskundig advies voor goochelaars



Het is een kunst die maar weinig goochelaars ooit onder de knie krijgen: een knoop leggen in een touw door er alleen maar een goedgerichte slinger aan te geven. Een team wiskundigen onder leiding van Andrew Belmonte onderzocht hoe een hangende ketting beweegt als je het ophangpunt gelijktijdig heen-en-weer en op-en-neer beweegt. De bewegingen die zij de ketting zagen maken, hebben zij vervolgens met wiskundige modellen nagebootst. De wetenschappers stel-

den vast dat bij bepaalde onderlinge frequenties de beweging van de ketting chaotisch wordt, en dat het dan kan gebeuren dat de ketting zichzelf in een knoop 'slaat'. Opvallend was dat de knopen die in de ketting ontstonden nooit gewone platte knopen waren, maar altijd veel ingewikkeldere. Het team adviseert daarom goochelaars voortaan op die ingewikkeldere knopen te studeren, want daarbij zullen ze meer kans op succes hebben.

Bron: *Nature*, nr. 416, 28 maart 2002

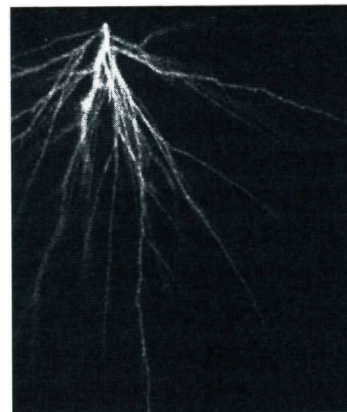
25

Vertakking bliksem wiskundig verklaard

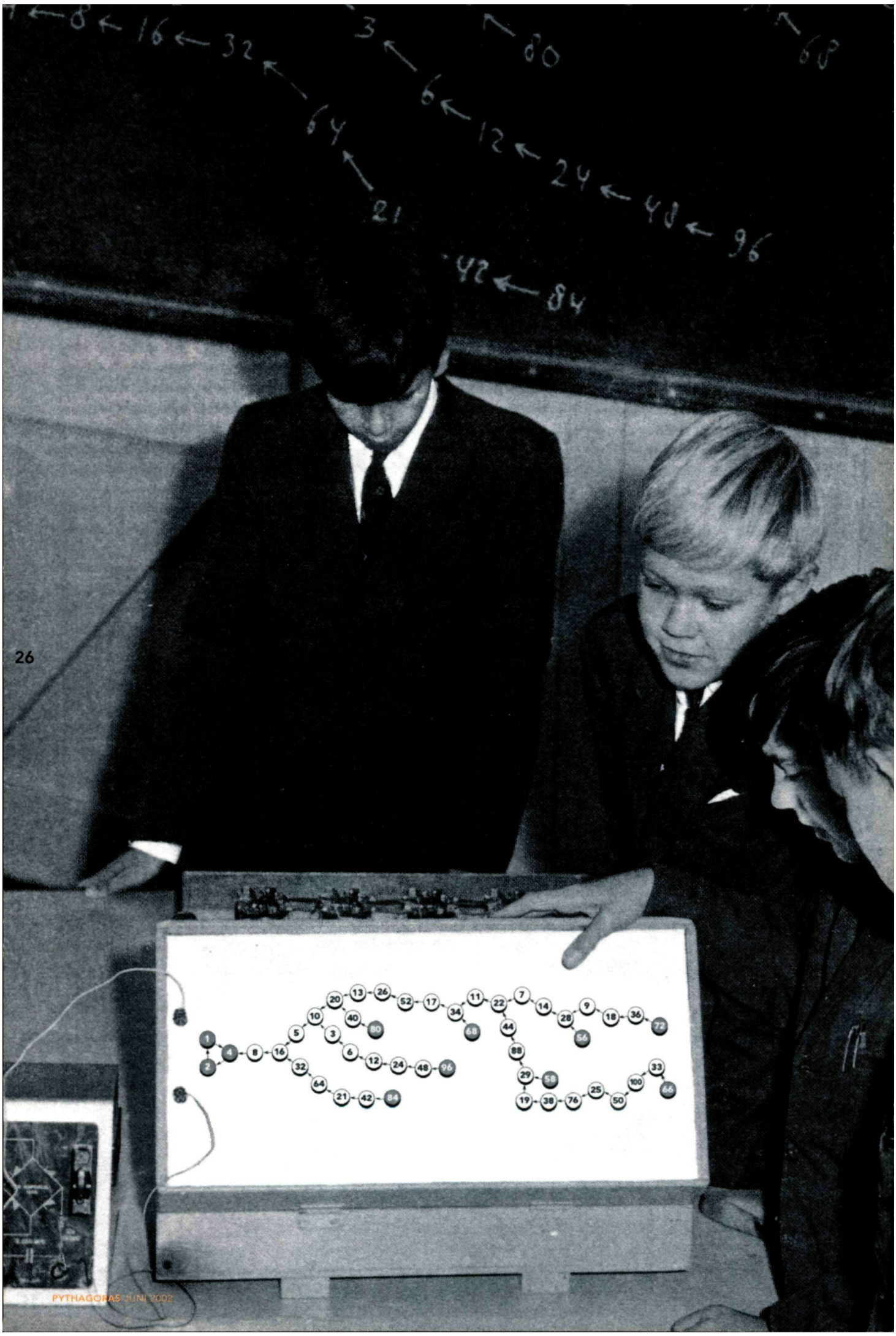
Heb je wel eens de kans gekregen een bliksemschicht goed te bekijken? Het blote oog is er meestal niet snel genoeg voor, maar op een foto als hiernaast is te zien hoe prachtig de bliksem zich kan vertakken. Onderzoekers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam hebben onlangs een verklaring gevonden voor die vertakkingspatronen. Zij gingen uit van een betrekkelijk eenvoudig stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, dat het verschijnsel van elektrische ontlading beschrijft. Uit dat stelsel wisten zij het optreden van de vertakkingen af te leiden. Tot

nog toe nam iedereen aan dat het onmogelijk was het grillige proces van vertakking te verklaren vanuit zo'n simpel stelsel vergelijkingen.

Bronnen: www.cwi.nl/events
<http://focus.aps.org/v9/st19.html>



De vertakking van een bliksem



Een pijnlijk wiskundeprobleem

door **Frits Beukers**

Al meer dan vijftig jaar wordt de wereld van amateurwiskundigen en professionals gekweld door een onopgelost getallenprobleem dat er op het eerste gezicht simpel uitziet. Het lijkt een stelling te zijn die voor alle positieve gehele getallen geldt. Voor biljarden getallen is de stelling al gecontroleerd, en steeds weer bleek het vermoeden te kloppen. Maar een bewijs dat het vermoeden ook echt voor *alle* getallen waar is, heeft nog niemand kunnen vinden.

Het rekenrecept

Het gaat om een rekenrecept dat je op ieder positief geheel getal kunt toepassen. Kies zo'n getal. Als het even is, deel het dan door 2 en als het oneven is, vermenigvuldig het dan met 3 en tel er 1 bij op. Herhaal deze procedure met het getal dat je zo krijgt, en ga zo door. Je krijgt dan een rij gehele getallen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ met de eigenschap dat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{als } x_n \text{ oneven,} \\ x_n/2 & \text{als } x_n \text{ even.} \end{cases}$$

We noemen zo'n rij een $3n + 1$ -rij. Laten we als voorbeeld met het getal 13 starten. Dit is oneven, dus we vermenigvuldigen met 3 en tellen er 1 bij op. Dit levert 40 op, hetgeen even is. We delen dus door 2 en krijgen 20 wat weer even is. Dus we delen weer door 2, etcetera. Schematisch weergegeven vinden we het volgende rijtje getallen: $13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Laten we het procédé verder los op 1, dan krijgen we het rijtje

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$$

dat zichzelf steeds herhaalt. Niet bijster

interessant, en daarom spreken we af dat we stoppen als we bij 1 zijn gekomen. We nemen nu een andere startwaarde, bijvoorbeeld 43, en vinden

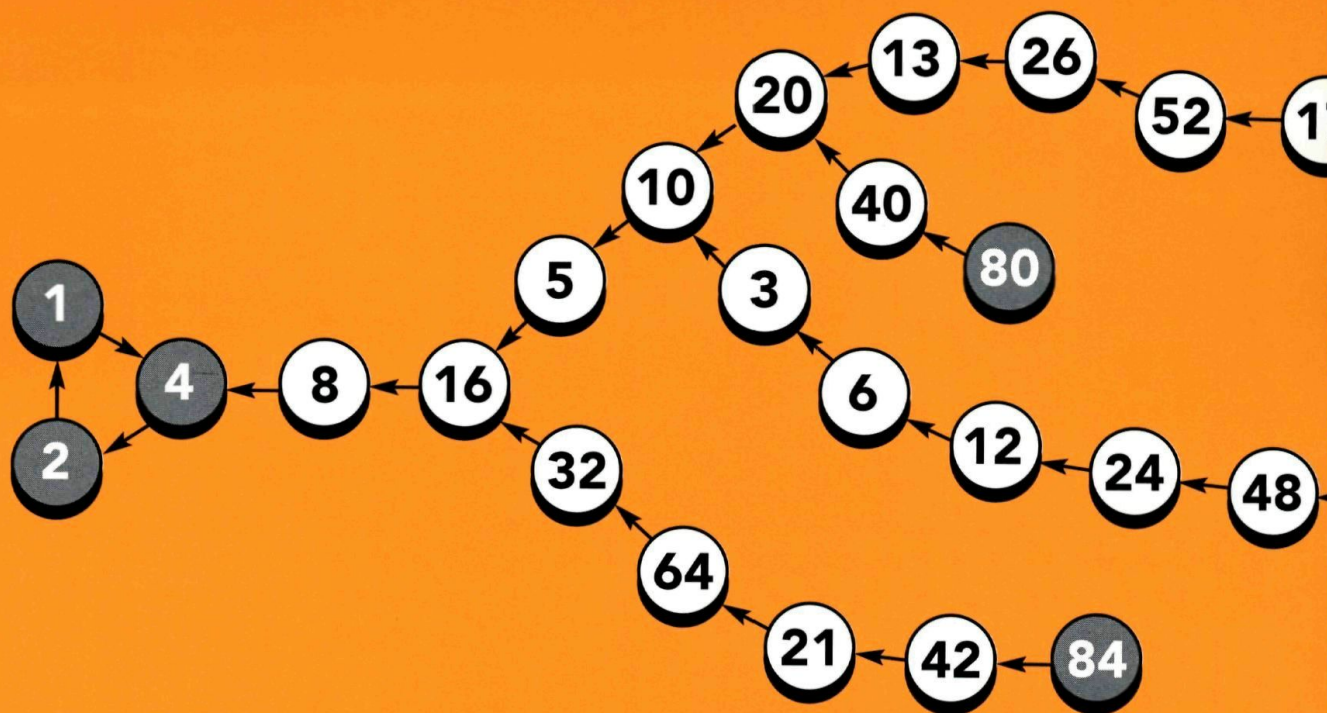
$$\begin{aligned} 43 \rightarrow 130 \rightarrow 65 \rightarrow 196 \rightarrow 98 \rightarrow 49 \rightarrow 148 \rightarrow \\ 74 \rightarrow 37 \rightarrow 112 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \\ \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow \\ 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow \\ 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Het heeft even geduurd, maar we zijn weer op 1 uitgekomen. Probeer zelf eens wat andere waarden en je zult zien dat je steeds op 1 uitkomt. De grote vraag is: eindigt elke $3n + 1$ -rij met een 1?

Een onbewezen vermoeden

Men vermoedt dat het antwoord ja is, maar er is nog niemand die dit heeft kunnen bewijzen. Omdat het probleem er zo bedrieglijk eenvoudig uitziet, en omdat het nog totaal niet duidelijk is wat voor wiskundige technieken er bij een oplossing gebruikt moeten worden, voelen veel amateurwiskundigen zich tot dit probleem aangetrokken. Regelmatig horen we berichten van mensen die ten onrechte menen het probleem opgelost te hebben. Maar ook professionele wiskundigen weten er geen raad mee. Denk dus eerst tweemaal na voor je zelf probeert de oplossing te vinden!

Het probleem staat onder diverse namen bekend: Collatz-probleem, Syracuse-probleem, Kakutani-probleem en $3n + 1$ -probleem. Wij zullen deze laatste benaming gebruiken. Over de naam Syracuse-probleem gaat het verhaal dat het werk op het mathematisch instituut van de Universiteit



van Syracuse, New York, een maand heeft stilgelegen doordat de voltallige staf zich op het probleem had geworpen. En, zoals we net aangaven, zonder al te veel succes.

Een verkort rekenrecept

Voor we verder gaan, willen we het rekenrecept voor de $3n + 1$ -rijen op een iets kortere manier beschrijven. Het zal duidelijk zijn dat als n oneven is, het getal $3n + 1$ even is. De volgende stap zal dus altijd deling door 2 zijn. Laten we daarom die deling maar meteen uitvoeren. We komen op het volgende verkorte procédé:

$$x_{n+1} = \begin{cases} (3x_n + 1)/2 & \text{als } x_n \text{ oneven,} \\ x_n/2 & \text{als } x_n \text{ even.} \end{cases}$$

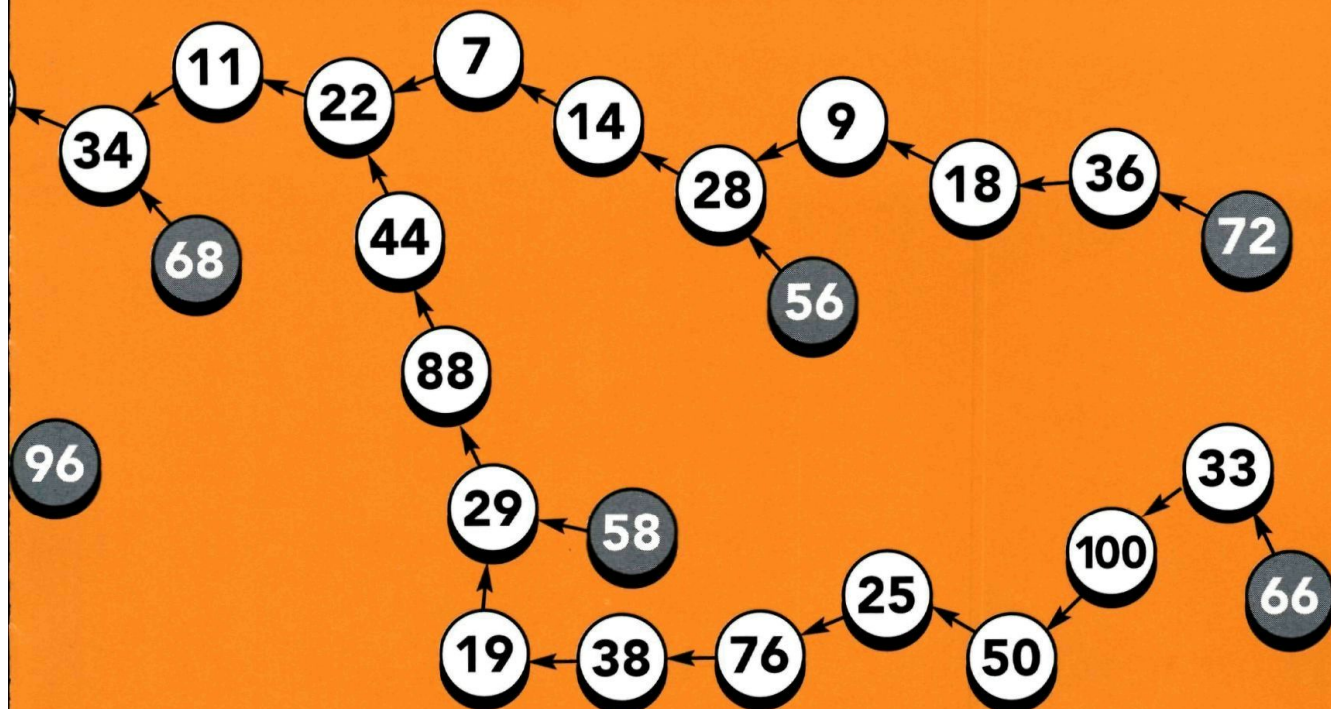
Hieruit zien we, dat als x_n oneven is, de waarde van x_{n+1} ongeveer $3x_n/2$ is. Als x_n even is, dan is x_{n+1} gelijk aan $x_n/2$. Als we aannemen dat in elke $3n + 1$ -rij de even getallen net zo vaak voorkomen als de oneven getallen, dan zal gemiddeld elk getal gelijk zijn aan $(\frac{3}{2})^{1/2} (\frac{1}{2})^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maal zijn voorganger. Aangezien dit getal kleiner dan 1 is, zal een $3n + 1$ -rij door de bank genomen exponentieel dalen. Dit is bemoedigend, en een aanwijzing voor de juistheid van het vermoeden dat elke $3n + 1$ -rij op 1 eindigt. Helaas berust deze redenering op de onbewezen aanname dat even en oneven

getallen ongeveer even vaak voorkomen in zo'n rij. De vraag is maar of dat zo is...

Experimenten

Theoretisch is er nog erg weinig bekend over het $3n + 1$ -probleem. Maar er is wel veel experimenteel werk gedaan. Alle getallen kleiner dan 9 biljard ($9 \cdot 10^{15}$) zijn als beginwaarde getest en al deze $3n + 1$ -rijen eindigen op 1. Verder is het ook aardig om naar records te kijken. Zo heeft bijvoorbeeld de $3n + 1$ -rij die begint met 27 niet minder dan 111 stappen (zoals in de eerste paragraaf beschreven) nodig om op 1 uit te komen. Dat is veel langer dan alle kleinere beginwaarden. Het kleinste begingetal dat 1000 stappen nodig heeft, is 1412987847. Dergelijke records, en nog veel meer, zijn allemaal te vinden op de website van Eric Roosendaal (zie onderaan dit artikel).

Op Internet zijn trouwens talloze $3n + 1$ -sites te vinden. Dit zul je merken als je bij een zoekmachine '3n+1' of '3x+1' intikt. Het is niet lastig om een computerprogramma te schrijven dat $3n + 1$ -rijen uitrekent. Dit kan zelfs op een programmeerbare rekenmachine. Degenen die niet willen programmeren, vinden onderaan dit artikel een website waar je een willekeurige startwaarde kunt opgeven en vervolgens de



bijbehorende $3n + 1$ -rij kunt bewonderen, evenals een aantal varianten daarop.

Zelf met varianten experimenteren

Omdat er al veel rekenkracht is besteed aan het $3n + 1$ -probleem, is het misschien leuk om ook eens te kijken naar alternatieve procédés. Bijvoorbeeld het $3n - 1$ -probleem:

$$x_{n+1} = \begin{cases} (3x_n - 1)/2 & \text{als } x_n \text{ oneven,} \\ x_n/2 & \text{als } x_n \text{ even.} \end{cases}$$

Hier gebeurt weer iets nieuws. De startwaarde 17 bijvoorbeeld geeft de rij getallen 17, 25, 37, 55, 82, 41, 61, 91, 136, 68, 34, 17, ... We komen dus weer op 17 uit, en de rij getallen zal zich daarna blijven herhalen. We hebben een periodieke rij gekregen, waarvan de periode bestaat uit 11 getallen. Het is mogelijk dat we, beginnend met een getal dat niet in deze rij staat, toch op deze periodieke rij uitkomen. De startwaarde 83 komt niet in de rij voor, maar na 7 stappen komen we op 17 terecht, waarna we weer een periodieke rij vinden.

De grote vraag is natuurlijk of er nog andere periodieke rijen zijn. We zullen hier verder niets over verklappen, maar je zelf op zoek laten gaan naar andere perioden. Natuurlijk kunnen we ook naar het $3n + a$ -probleem kijken waarbij je voor a je eigen

oneven getal kunt invullen. Bijvoorbeeld $a = 3, 5, 7$, enzovoorts. Bij al deze waarden zul je periodieke rijen vinden. Na deze experimenten zul je het waarschijnlijk bijzonder gaan vinden dat we bij het oorspronkelijke $3n + 1$ -probleem alleen maar de periode 4, 2, 1 vonden.

Een andere variant is om naar het $5n + 1$ -probleem te kijken. Hier zul je merken dat rijen vaak naar oneindig lijken te gaan. En dit is niet helemaal verwonderlijk, want nu is $(\frac{5}{2})^{1/2} (\frac{1}{2})^{1/2}$ groter dan 1. Maar toch zijn er ook in dit geval rijen die naar 1 gaan of een periode doorlopen. We kwamen bijvoorbeeld de periodieke rij 13, 33, 83, 208, 104, 52, 26 tegen. Kun je zelf nog andere vinden? Experimenteer ook eens met het $5n - 1$ -probleem (startwaarde 19 is leuk), en varianten daarop.

Meer details geeft Hoofdstuk 20 van *Getaltheorie voor beginners* van Frits Beukers, Epsilon Uitgaven 42, ISBN 90-5041-049-9.

Internet

- <http://personal.computrain.nl/eric/wondrous/index.html> (website van Eric Roosendaal)
- <http://www.math.uu.nl/people/beukers/collatz/Collatz.html> (website die op commando $3n + 1$ -rijen, en ook andere rijen, levert)

OPLOSSINGEN NR 4

Oplossingen Kleine nootjes

Sieradentransport

Rosa doet haar armband in haar locker en sluit die af met een hangslot. Vera doet er daarna een extra slot op. Vervolgens haalt Rosa haar slot eraf, waarna Vera de locker kan openen met haar hangslot.

Inpakken en wegwezen

Als vier van de vijf labels op het goede pakketje zitten, dan zit het vijfde label automatisch ook op het goede pakketje. De kans is dus 0.

Shopper

In totaal is uitgegeven $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{25}$ deel. Dat is gelijk aan 36 euro. Oorspronkelijk begon Lia dus met $\frac{25}{9}$ keer 36 euro. Dat is precies 100 euro.

Taalstrijd

Samen tel je 145%. Dat is 45% te veel, maar dat komt doordat je degenen die Nederlands én Frans spreken, dubbel geteld hebt. Van de Belgen spreekt dus 45% Nederlands én Frans.

Overschenken

Vul de 4 liter emmer en schenk die uit in de 7 liter emmer. Vul de 4 liter emmer nogmaals en vul daarmee de 7 liter emmer aan totdat die vol is. Dan heb je in de kleine emmer nog 1 liter over. Samen met twee keer 4 liter is dit 9 liter.

Oplossingen Problemen van Bob de Jongste

Even diep nadenken

Het is steeds het getal 121, maar dan in het 11-, 10-, 9-, 8-, 7-, 6-, 5-, 4-, 3- en 2-tallig stelsel (in deze volgorde). Dus de getallen 441 en 1321 (in het 5- respectievelijk 4-tallig stelsel) moeten worden ingevuld.

De euro

Op 4562 manieren. Dit kun je nagaan door slim te tellen of met behulp van een programmaatje op de computer. Zie hiervoor de homepage van Pythagoras.

Schaakbord

Bij een paardensprong wisselt de kleur steeds. A1 is een wit veld. Na 63 sprongen (een oneven aantal!) kom je dus altijd op een wit veld terecht. Veld H8 is zwart, dus het is niet mogelijk.

Eieren leggen

Een zwarte kip legt z eieren per dag, een witte w . Dan geldt: $5(4z + 3w) = 4(3z + 5w)$, ofwel $w = \frac{8}{5}z$. Dus de witte kippen zijn de beste legkippen.

Patiënten

30% heeft geen heupklachten, 25% geen hartproblemen, 20% geen maagproblemen, 15% geen spataderen. Bij elkaar heeft dus hoogstens 90% een van de kwalen niet. Dus minstens 10% heeft van alle kwalen last.

Kikkers vangen

Eén ooievaar vangt één kikker in 5 minuten, dus 100 ooievaars vangen 100 kikkers in 5 minuten.

UITSLAG PRIJSVRAAG

door **Willem Hoekstra**

In het oktobernummer van deze jaargang werd de GR-prijsvraag uitgeschreven. De bedoeling was om een tekening te ontwerpen op de grafische rekenmachine, volledig opgebouwd uit *grafieken* van *functies*.

De hoofdprijs

De vijf origineelste inzendingen staan afgebeeld op deze pagina. De ontwerpers van deze tekeningen hebben een *TI-83 Plus Silver Edition* gewonnen.

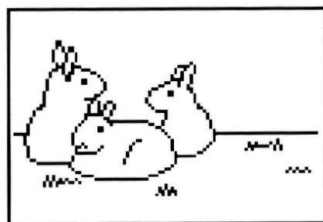
De tweede prijs

Verder zijn er tien tweede prijzen weggegeven, elk bestaande uit een *GraphLink* te samen met een boekenbon van 25 euro. De tweede-prijswinnaars zijn: Kasper Duivenoorden van het Hondrug College te

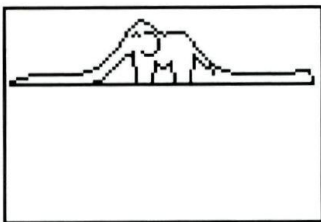
Emmen, Gielis van der Heijden van het Stedelijk College Eindhoven, Michiel Helvensteijn van het Alfrink College te Zoetermeer, Sander van der Horst van het Oranje Nassau College te Zoetermeer, Diederik Kruissen, Hermen Musch van het Greydanus College te Zwolle, Bastiaan du Pau van het Stedelijk College Eindhoven, Patrick Pierik van het Greydanus College te Zwolle, Sven Vehent van het Pius X-Instituut te Zele (België) en Sandra van Wijk van het Jacob Roelandslyceum te Boxtel.

Sponsor

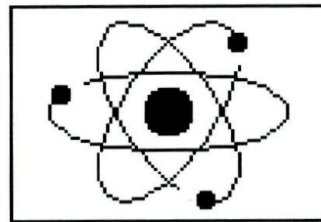
De organisatie van de prijsvraag is mede mogelijk gemaakt door Texas Instruments, die de grafische rekenmachines en de graphlinks ter beschikking stelde.



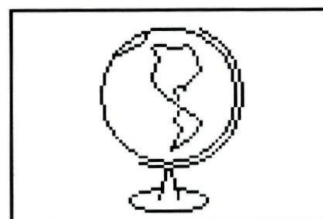
door Ignas Tilma van het Christelijk Gymnasium te Utrecht



door Piers Titus van der Torren van de RSG Pantarijn te Wageningen



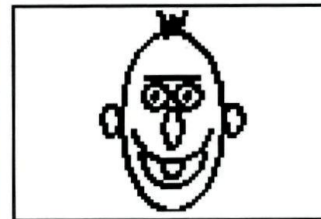
door Rob van Wijk van het Jacob Roelandslyceum te Boxtel



door Jan de Gier van Guido de Brès te Amersfoort



door Ruben Koster van Guido de Brès te Amersfoort



door Ruben Koster van Guido de Brès te Amersfoort

Activiteiten

dinsdag 11 juni 2002 **Proefstuderen Wiskunde,**
Financiële wiskunde en Computerwiskunde

Katholieke Universiteit Nijmegen

<http://www.kun.nl/place-to-b>

5 t/m 9 augustus 2002 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**

Voor leerlingen van de basisschool en brugklas

<http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>

12 t/m 16 augustus 2002 **Vierkant voor wiskunde zomerkampen**

Voor leerlingen van de middelbare school

<http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>

Vakantiecursus Wiskunde voor leraren

23 en 24 augustus 2002 Technische Universiteit Eindhoven

30 en 31 augustus 2002 Centrum voor Wiskunde & Informatica,
Amsterdam

<http://www.cwi.nl/conferences/VC2002/>

vrijdag 13 september 2002 **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002,**
tweede ronde

TU/e, Eindhoven

zaterdag 9 november 2002 **Ars et Mathesis-dag**

Zalencentrum Het Brandpunt, Baarn

<http://www.arsetmathesis.nl>

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde- en de logica-afdeling van de Universiteit van Amsterdam, door de wiskunde-afdelingen van de Vrije Universiteit Amsterdam, de Universiteit Leiden en de Rijks Universiteit Groningen, en door het Centrum voor Wiskunde & Informatica.



Universiteit van
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit
Leiden



Centrum voor Wiskunde
& Informatica



RuG

Rijks Universiteit
Groningen

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2001-2002

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost € 17,92. Losse nummers kosten € 3,86.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België € 21,07

Pythagoras buitenland € 24,73

Pythagoras én Archimedes € 31,54

Pythagoras én Archimedes België € 36,44

Pythagoras én Archimedes buitenland € 37,89

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Bulkabonnement Nederland: € 12,48 per jaar.

Bulkabonnement België: € 16,11 per jaar.

Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.

De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Leerlingabonnement Nederland: € 14,75 per jaar.

Leerlingabonnement België: € 18,59 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (€ 11,34 excl. verzendkosten) jaargang 40 (€ 17,92 excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke driehoek' (€ 3,40 excl. verzendkosten).

