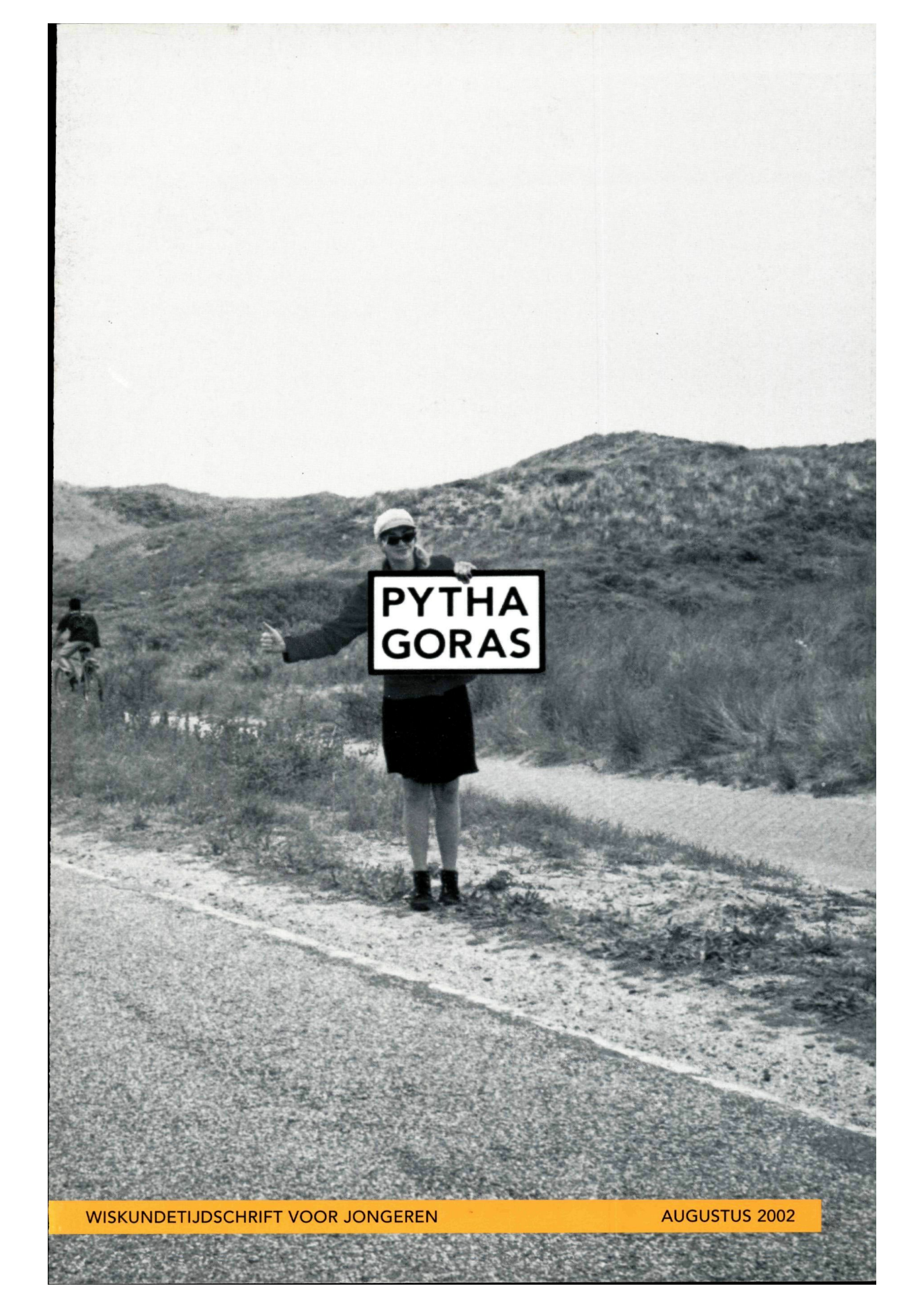


A black and white photograph of a person standing on a dirt path in a desert-like environment. The person is wearing a light-colored cap, sunglasses, a dark long-sleeved shirt, and a dark skirt. They are holding a large rectangular sign in front of their chest with both hands. The sign has the words 'PYTHA' and 'GORAS' stacked vertically in a bold, sans-serif font. The background shows a dry, hilly landscape with sparse vegetation under a clear sky. A white line is visible on the ground in the foreground.

**PYTHA
GORAS**

COLOFON

Uitgave

Pythagoras is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt zes keer per jaar. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. ISSN: 0033-4766

E-mail

pythagoras@science.uva.nl

www

www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie

Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofredactie

Marco Swaen

Eindredactie

Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp

Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw
Divisie Wiskunde en Informatica
Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

Redactiesecretariaat

Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel 071 5277121
fax 071 5277101

Abonnee-administratie

Adreswijzigingen

Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
tel 0522 855175
fax 0522 855176

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven.
Nul rondjes betekent: geen enkele wiskundige voorkennis vereist;
1 rondje ^o: voor iedereen van af de derde klas te begrijpen;
2 rondjes ^{oo}: hiervoor heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig;
3 rondjes ^{ooo}: dit gaat net iets verder dan de middelbare schoolstof.

MEDEWERKERS

drs. A.J. van den Brandhof is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **prof. dr. J. van de Craats** is hoogleraar wiskunde aan de UvA, de Open Universiteit en de KMA. **Bruno Ernst** is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **drs. A. Goddijn** is medewerker aan het Freudenthal Instituut te Utrecht. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **dr. J.B.M. Melissen** is docent informatietechnologie aan de TU Delft. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **L.H. van den Raadt** is docent wiskunde aan het Bernard Nieuwentijt College te Amsterdam. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Callandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

OMSLAG

Pythagoras op vakantie!



INHOUD

1

2 - 3	Kleine nootjes	20 - 21	Problemen - Oplossingen
4 - 5	Een bewijs van Einstein?	22 - 23	Journal
6 - 8	De laatste drup	24 - 29	Nee is meestal Nee, maar Ja niet altijd Ja
9	De post	30	Oplossingen nr. 5
10 - 15	Gulden ruitenveelvlakken	31	Boekbespreking
16 - 17	Bouwplaat $1-\sqrt{2}$ -knoop	32	Activiteiten
18 - 19	Pythagoras Olympiade		

door Chris Zaal

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis kan
oplossen.

De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2



Twee zusjes

Als Sanne twee jaar van haar leeftijd aan Yanthe geeft, zijn beide zussen even oud. Als Yanthe twee jaar aan Sanne geeft, is Sanne twee keer zo oud als Yanthe. Hoe oud zijn Sanne en Yanthe?



Ronderijders

Twee wielrenners rijden op een rond wielercircuit. Joop legt een ronde af in 6 minuten, Eddy in 4 minuten. Hoeveel minuten duurt het voordat Eddy Joop heeft ingehaald? Ze starten tegelijkertijd vanaf hetzelfde punt.



Glazenpuzzel

Zet zes identieke glazen op een rij. Vul de eerste drie met water. Als je één glas mag verplaatsen, kun je dan de volgorde van de glazen zo veranderen, dat het eerste, derde en vijfde glas gevuld zijn met water?



De graanmolen

Volgens goed gebruik mag de molenaar eentiende van het meel behouden dat hij maalt, als beloning voor zijn diensten. Hoeveel graan maalde hij voor de boer die terugkwam met een baal meel van 100 kilo?

Opa

In een gulle bui schonk opa 1000 euro aan zijn vijf kleinkinderen. Te beginnen bij de jongste, kreeg ieder kleinkind 20 euro meer dan het volgende, jongere kleinkind. De jongste kreeg dus een zeker bedrag, de volgende 20 euro meer, de volgende weer 20 euro meer, enzovoort. Hoeveel kreeg het jongste kleinkind?



door Bruno Ernst

Een bewijs van Einstein?

Bewijzen van de stelling van Pythagoras,
deel VI

4

Voor de stelling van Pythagoras bestaan vele bewijzen, wel meer dan honderd. Het volgende bewijs zal bijna iedereen aanspreken door zijn eenvoud en beknoptheid. Er schuilt echter een addertje onder het gras. Er wordt namelijk gebruik gemaakt van de volgende stelling.

De oppervlakten van twee gelijkvormige driehoeken verhouden zich als de kwadraten van overeenkomstige zijden.

Het bewijs hiervan is niet moeilijk, maar zal toch gegeven moeten worden... en dan wordt het bewijs van de stelling van Pythagoras toch wel wat langer. We geven dit bewijs achteraf.

Van de andere kant is het mogelijk deze stelling aan de hand van enige voorbeelden plausibel te maken zonder een bewijs te geven. En dan is het hier volgende bewijs inderdaad wonderlijk simpel.

Driehoek ABC is een rechthoekige driehoek, zie figuur 1. De hoogtelijn uit C verdeelt de hele driehoek (III) in de driehoeken I en II die gelijkvormig zijn met de hele driehoek (III), omdat I, II en III gelijke hoeken hebben. Volgens bovenstaande stelling verhouden zich de oppervlakten van

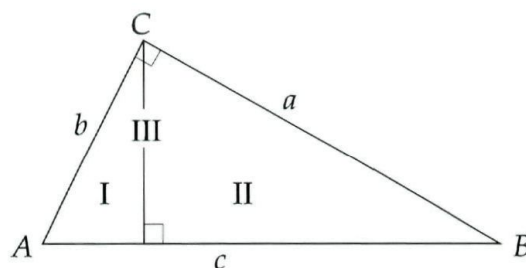
deze driehoeken als $a^2 : b^2 : c^2$. Die oppervlakten kunnen we dus schrijven als:

$$\begin{aligned}\text{opp. I} &= mb^2, \\ \text{opp. II} &= ma^2, \\ \text{opp. III} &= mc^2.\end{aligned}$$

Omdat

$$\text{opp. I} + \text{opp. II} = \text{opp. III},$$

is $mb^2 + ma^2 = mc^2$, waaruit onmiddellijk volgt dat $a^2 + b^2 = c^2$.



Figuur 1

Euclides

Euclides geeft dit bewijs in meer algemene vorm in het zesde boek van de *Elementen* als stelling 31. Hij vermeldt er niet bij dat zijn stelling ook een bewijs is voor de stelling van Pythagoras. Ongetwijfeld wist hij



dat, maar... de stelling van Pythagoras was al bewezen in het eerste boek. Waarom zou hij er in zijn strakke opbouw van de elementaire meetkunde nog eens op terugkomen? Andere varianten vinden we onder andere bij Bézout in zijn *Eléments de Géométrie* (Parijs 1768) en bij H.A. Naber (1908).

Einstein

Met de nodige bewondering schrijft Peter Baptist in zijn *Pythagoras und kein Ende* (Leipzig 1997) het bewijs toe aan de jonge Einstein, die het bewijs van Euclides node-loos ingewikkeld vond vanwege de vele hulplijnen. Het is natuurlijk wel prettig het bewijs te kunnen koppelen aan een van de grootste geleerden van de twintigste eeuw, maar helaas was Einstein hiermee niet erg origineel. Peter Baptist suggereert dat Einstein dit bewijs als elfjarige bedacht en dat zou natuurlijk wel vermeldenswaardig zijn. Maar deze suggestie wordt niet ondersteund door enige uitspraak van Einstein zelf. Ik heb dit bewijs (maar niet op jeugdige leeftijd!) ook bedacht, met het idee dat het een nieuw bewijs was.

Laten we het maar het bewijs van Einstein noemen, met de wetenschap dat het – iet-wat verborgen – al bij Euclides te vinden is.

Het bewijs van de stelling

Hier volgt het bewijs dat de oppervlakten van twee gelijkvormige driehoeken zich verhouden als de kwadraten van overeenkomstige zijden. In de gelijkvormige driehoeken I en II trekken we de hoogtelijnen h_1 en h_2 , zie figuur 2. Nu is:

$$\frac{\text{opp. I}}{\text{opp. II}} = \frac{h_1 c}{h_2 r}$$

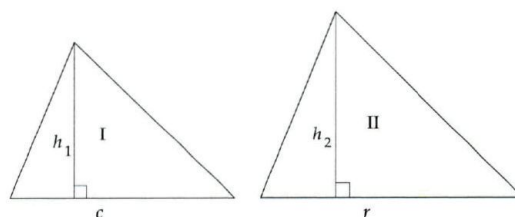
en wegens de gelijkvormigheid:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{c}{r}.$$

Dus:

$$\frac{\text{opp. I}}{\text{opp. II}} = \frac{c}{r} \cdot \frac{c}{r} = \frac{c^2}{r^2}.$$

Voor de andere zijden is het bewijs hetzelfde.



Figuur 2

De laatste drup

door
Hans Melissen

6

Waarschijnlijk ken je ze wel, de cilinder-vormige blikken bussen met limonadesiroop. In zo'n blik zit 750 ml siroop die je met water kunt aanlengen tot limonade. Misschien is het je opgevallen dat er altijd een restje siroop in het blik achterblijft. Zelfs schudden helpt niet.

Wil je weten hoe dat komt, zaag dan gewoon eens zo'n blik doormidden. Maar je kunt ook figuur 1 bekijken. In de bovenkant van het blik zit een plastic pijpje geklemd. Dit buisje dient als schenktuit en kan worden afgesloten met een draaidop. Het buisje wordt tijdens de fabricage in de opening van het blik geplopt. Heel simpel, maar daardoor ontstaat er binnenin een randje waar wat siroop achter blijft hangen.

Hoeveel siroop blijft erin?

Een blik dat ik heb nagemeten heeft een diameter van 7 cm, het kunststof pijpje heeft een diameter van 2,6 cm en steekt 0,5 cm in het blik. Draai de dop van het blik en zet het blik op z'n kop. Hoeveel siroop blijft er nu in het blik achter? Dat is eenvoudig uit te rekenen. We trekken de oppervlakte van het pijpje (kleine cirkel) af van de oppervlakte van de bovenkant van het blik

(grote cirkel) en vermenigvuldigen dit met de hoogte van het randje:

$$(\pi \cdot (3,5)^2 - \pi \cdot (1,3)^2) \times 0,5 = 16,58 \dots \text{cm}^3 = 16,58 \dots \text{ml.}$$

Er blijft dus ruim 16 ml siroop achter als je het blik op z'n kop zet. Als je het blik iets schuiner houdt, blijkt dat er nog een beetje siroop uitloopt (kun je dit beredeneren?), maar het is lastig om precies uit te rekenen hoeveel. De achtergebleven hoeveelheid siroop blijkt minimaal te zijn als je het blik 14 graden uit het lood houdt. Er blijft nog steeds zo'n 10 ml achter. Zonde natuurlijk, om anderhalf procent van de inhoud weg te gooien.

Hoe krijg je er meer uit?

Je kunt natuurlijk gaan zagen, boren of het restje uitzuigen met een rietje, maar gelukkig zijn er betere manieren om de siroopopbrengst te vergroten. We gaan ervan uit dat je lekkere limonade krijgt door één deel siroop te mengen met vijf delen water. Het ligt voor de hand om de achtergebleven siroop met water uit te spoelen. Natuurlijk moet je niet teveel water gebruiken, anders smaakt het uitgespoelde mengsel niet

lekker. Het gaat precies goed als je 50 ml water in de bus giet. Na wat schudden krijg je in het blik 60 ml perfecte limonade, waarvan je 50 ml kunt uitgieten. In het blik blijft 10 ml limonade over, samengesteld uit 1,67 ml siroop en 8,33 ml water. Een enorme verbetering ten opzichte van een rest van 10 ml siroop dus!

Hoe krijg je er nóg meer uit? °

Maar het kan nog beter! In plaats van al het water in één keer toe te voegen, kun je het ook in twee porties doen. Eerst voeg je een bepaalde hoeveelheid, zeg x ml, water toe. Na roeren giet je x ml siroop/watermengsel af. Dit doe je vervolgens nog een keer: voeg x ml water toe, schud, en giet x ml mengsel af. De twee afgegoten mengsels giet je bij elkaar. De hoeveelheid x bepaal je zó, dat dit laatste mengsel goed van smaak is. Dat gaat als volgt:

Als je x ml water toevoegt, krijg je $10 + x$ ml mengsel dat 10 ml siroop bevat en x ml water. Een gedeelte $10/(10 + x)$ is dus siroop en een gedeelte $x/(10 + x)$ is water. Vervolgens giet je x ml mengsel af. Daarin zit $x(10/(10 + x)) = 10x/(10 + x)$ ml siroop. In het blik blijft 10 ml mengsel achter, waarvan $10(10/(10 + x)) = 100/(10 + x)$ ml siroop. Dan voeg je weer x ml water toe. Je krijgt

$10 + x$ ml mengsel waarin $100/(10 + x)$ ml siroop van daarnet. De x ml mengsel die je afgiet, bevat dus $100x/(10 + x)^2$ ml siroop. Nu heb je tweemaal x ml mengsel afgegoten, waarin

$$\frac{10x}{10 + x} + \frac{100x}{(10 + x)^2} = \frac{200x + 10x^2}{(10 + x)^2} \text{ ml}$$

siroop zit. Dit is lekkere limonade als een-zesde deel van het mengsel uit siroop bestaat:

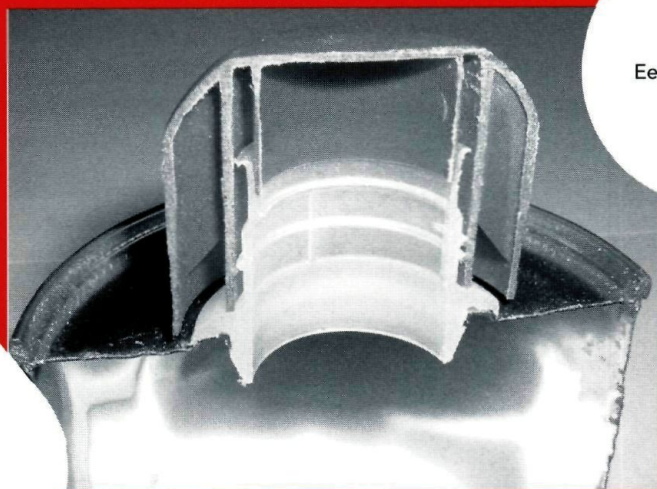
$$\frac{200x + 10x^2}{(10 + x)^2} = \frac{1}{6} \cdot 2x.$$

In deze vergelijking kun je links en rechts delen door x , want $x = 0$ betekent 'niets uitspoelen' en dat is geen interessant geval. Na uitwerken krijg je een kwadratische vergelijking:

$$x^2 - 10x - 500 = 0.$$

Er zijn twee oplossingen, waarvan er één positief is: $x = 5 + 5\sqrt{21} \approx 27,91$ ml.

In het blik blijft $1000/(10 + x)^2 = (25 - 5\sqrt{21})/3 \approx 0,695$ ml siroop achter. De oogst is $10 + 10\sqrt{21} \approx 55,826$ ml limonade, méér dan de 50 ml die we eerst hadden. Er blijft nu nog maar 0,695 ml siroop achter in plaats van 1,667 ml bij één keer spoelen.



Figuur 1.
Een opgezaagd
siroopblik

**Figuur 4.**

We hebben in de supermarkt bij een ander merk een betere constructie gevonden: een buisje met inkepingen; als je dit blik ondersteboven houdt, blijft er bijna geen siroop in het blik achter en met één keer spoelen blijft er nog maar een beetje limonade achter.

Enzovoorts ∞

Misschien kunnen we nog beter driemaal of viermaal spoelen, of wellicht meteen n maal. We nemen v ml water en spoelen n keer met gelijke porties v/n ml water. In het blik blijft uiteindelijk

$$\frac{10^{n+1}}{(10 + \frac{v}{n})^n} = \frac{10}{(1 + \frac{v}{10} \frac{1}{n})^n} \text{ ml}$$

siroop achter. Als functie van n is dit een dalende rij getallen met limiet $10e^{-\frac{v}{10}}$. In figuur 2 zie je hiervan een plot voor een aantal waarden van v . Je kunt de limietwaarde controleren door je rekenmachine de termen van de rij voor een paar waarden van v met $10e^{-\frac{v}{10}}$ te vergelijken of zelfs door op de GR voor een paar waarden van n de grafiek van $10/(1 + \frac{v}{10} \frac{1}{n})^n$ tezamen met die van $10e^{-\frac{v}{10}}$ te plotten.

**Figuur 2.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{(1 + \frac{v}{10} \frac{1}{n})^n} = 10e^{-\frac{v}{10}}$

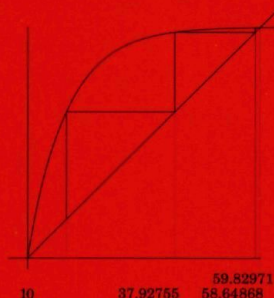
We moeten nu nog v zó bepalen dat de totale uitgespoelde vloeistof de juiste samenstelling heeft. Dit is het geval als de gewonnen hoeveelheid siroop een zesde deel uitmaakt van de limonade:

$$10 - 10e^{-\frac{v}{10}} = \frac{v}{6}$$

Deze vergelijking kun je niet exact oplossen, maar de oplossing is ongeveer 59,84901... ml. Je kunt dit getal zelf vinden door

$$v \rightarrow 60 - 60e^{-\frac{v}{10}}$$

een aantal keren achter elkaar op je rekenmachine uit te rekenen. Als je bijvoorbeeld begint met $v = 10$, vind je achtereenvolgens: 37,927..., 58,647..., 59,829..., 59,848... en 59,849..., zie figuur 3.

**Figuur 3.** De vergelijking $10 - 10e^{-\frac{v}{10}} = \frac{v}{6}$ geïtereerd**En de laatste drup?**

We kunnen het blik dus blijkbaar het beste druppelsgewijs 'leegmelken': een druppel water (0,05 ml) erin, schudden, een druppel mengsel eruit, een druppel water erin, schudden, een druppel mengsel eruit, enzovoorts. Dit doe je vervolgens zo'n 1200 keer. Het is even wat werk, maar daar krijg je dan ook iets voor. Het resultaat is verpletterend: er blijft nog maar 0,0255 ml siroop achter! Deze laatste halve druppel zal hooguit een krenterige Nederlander nog zorgen baren.

De post

Schaakbord

Jan de Gier en Ruben Koster maakten ons attent op het feit dat in het vorige nummer een verkeerde oplossing staat van het schaakbordprobleem van Bob de Jongste. De velden A1 en H8 staan op dezelfde diagonaal en hebben dus dezelfde kleur. Hierdoor gaat de gegeven redenering niet op. Welke lezer kan aantonen dat het wel/niet mogelijk is om in 63 sprongen van A1 – via alle velden – naar H8 te komen? Laat het ons weten!

Dodecaëder & Icosaëder

Naar aanleiding van de Gulden-snede-afl levering van het vorige nummer kreeg de redactie een e-mail van Jos Groot. Hij wijst op een interessant boekje van A.K. van der Vegt, dat onder meer over de dodecaëder en de icoesaëder handelt. Het boekje is voor niets in PDF-formaat te krijgen via www.vssd.nl/hlf/a017.htm.

Website over programmeren

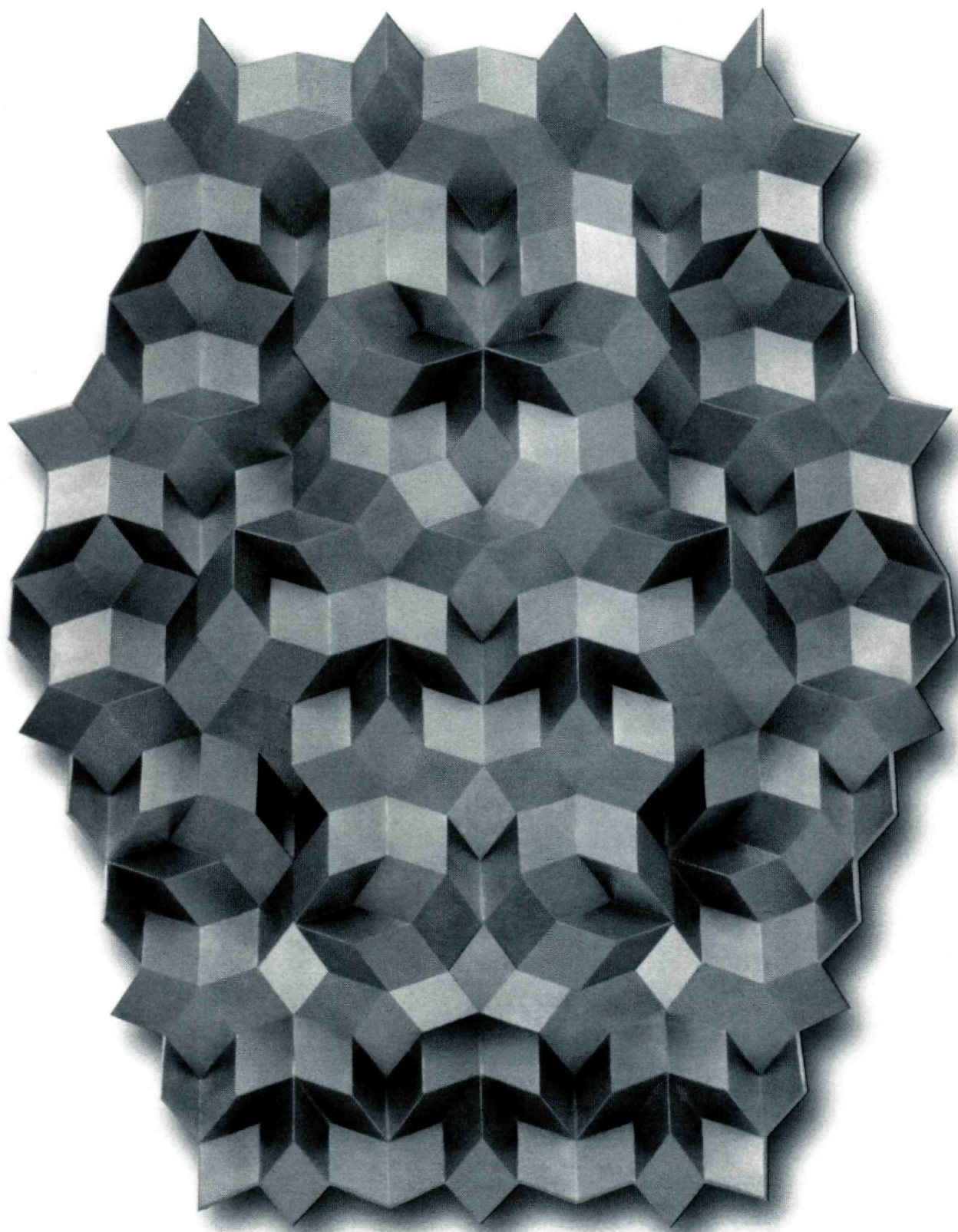
Naar aanleiding van de prijsvragen over de TI-83 heeft Thomas Beuman een website gemaakt over programmeren op de TI-83. Middelbare scholieren kunnen hier terecht om de eerste stappen te leren, maar er zijn ook lessen die veel dieper op de diverse mogelijkheden ingaan. Je kunt deze lessen vinden op www.tbeuman.myweb.nl.

13 als geluksgetal?

Als je met twee (normale) dobbelstenen gooit, dan is de som van de uitkomsten maximaal 12. Frank Roos merkt op dat je het getal 13 dus met recht een ongeluksgetal kunt noemen als kleinste getal boven de 12 dat je niet als som kunt krijgen. Hij stelt daarom voor één dobbelsteen aan te passen: zet op die zijvlakken de getallen 7 tot en met 12. Als je nu beide dobbelstenen gooit, dan is de kans dat de som gelijk is aan 13 juist het grootst, namelijk $1/6$. Er is ook nog een andere manier om 13 als geluksgetal te krijgen: gooi in plaats van kubus-(zesvlak)dobbelstenen met twee dodecaëders (regelmatige twaalfvlakken), met op de vlakken de getallen 1 t/m 12. Ook dan blijkt de som 13 het vaakst voor te komen en wel 12 keer op 144 mogelijke uitkomsten. Kan iemand nog een andere constructie vinden waarbij 13 als geluksgetal optreedt?

Foutje in Islamitische Jali

Van José van Haastrecht en Kees Jol kregen we een reactie op het artikel van Jan van de Craats in het aprilnummer over een Islamitische jali. Ze merken op dat die ene onregelmatigheid in het molentjespatroon waarschijnlijk opzettelijk door de steenhakker is gemaakt. Immers, volgens bepaalde Islamitische opvattingen betekent het streven naar volmaaktheid concurreren met Allah. Kunstenaars zullen daarom uit bescheidenheid een kleine onvolkomenheid in hun werkstuk aanbrengen.



door Jan van de Craats

Gulden ruitenvoelvlakken

De Gulden Snede,
deel VI

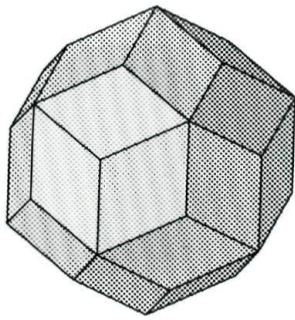
11

Het gulden ruitendertigvlak van Johannes Kepler (zie figuur 1) is al in de vorige aflevering van onze gulden-snedeserie ten tonele verschenen, maar we hebben er toen nog lang niet alles over verteld. Wel hebben we opgemerkt dat de dertig zijvlakken *gulden ruiten* zijn, dat wil zeggen ruiten waarvan de diagonalen zich verhouden als $\tau : 1$, waarbij $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$ het gulden-snedegetal is, de positieve

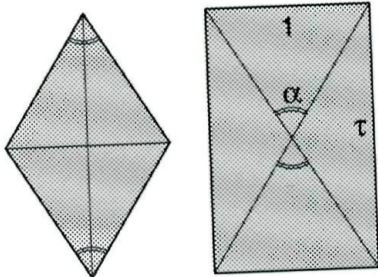
wortel van de vergelijking $\tau^2 = \tau + 1$.

In figuur 2 is zo'n gulden ruit samen met een gulden rechthoek getekend. De diagonalen van de rechthoek zijn evenwijdig aan de zijden van de ruit, en omgekeerd. De scherpe hoek α tussen de diagonalen van de rechthoek is dus ook de scherpe hoek van de ruit. Omdat $\tan \alpha/2 = 1/\tau$ kun je α gemakkelijk berekenen: $\alpha = 63,4349\dots$ graden.

Linkerpagina: De kunstenaar Gerard Caris maakt veelvuldig gebruik van gulden ruitenvoelvlakken. Hier zie je zijn *Relief-structure 5 V-1* uit 2001, gemaakt in polystyreen, epoxyglasvezel, staal, hout en verf. De afmetingen zijn 99,5 x 75 x 16 cm.



Figuur 1. Keplers gulden ruitendertigvlak.



Figuur 2. De gulden ruit en de gulden rechthoek.

Icosaëder en dodecaëder

Keplers dertigvlak, dat we in het vervolg vaak kortweg K_{30} zullen noemen, heeft twee soorten hoekpunten: twaalf punten waar vijf scherpe hoeken α bij elkaar komen, en twintig punten waar drie stompe hoeken van $180^\circ - \alpha$ bij elkaar komen. De eerstgenoemde zijn de hoekpunten van een icoesaëder (regelmatig twintigvlak), de tweede zijn de hoekpunten van een dodecaëder (regelmatig twaalfvlak).

In feite hebben we K_{30} in de vorige aflevering ook op zo'n manier geconstrueerd: via de hoekpunten van een icoesaëder en een dodecaëder waarvan de ribben elkaar loodrecht middendoor delen.

Andere gulden ruitenveelvlakken

Naast K_{30} zijn er nog meer gulden ruitenveelvlakken: een twintigvlak F_{20} , genoemd naar de Russische kristallograaf E.S.

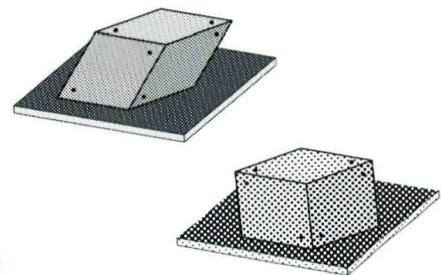
Fedorow, een twaalfvlak B_{12} , dat in 1960 ontdekt is door de wiskundige S. Bilinski, en twee zesvlakken genaamd A_6 en O_6 . Allemaal hangen ze met elkaar samen, en allemaal hebben ze fraaie, onverwachte eigenschappen.

De zesvlakken A_6 en O_6

Op twee manieren kun je zes gulden ruiten tot een veelvlak, een soort scheefgeslagen kubus, samenvoegen. Bij de ene manier zijn er twee hoekpunten waar drie ruiten met hun scherpe hoeken samenkomen, en bij de andere manier gebeurt dat met drie stompe hoeken. Alle andere hoekpunten zijn gemengd scherp-stomp.

Omdat de woorden scherp en stomp met dezelfde letter beginnen, handhaven we de Engelse namen A_6 ('acute-angled') en O_6 ('obtuse-angled'). In figuur 3 zijn ze afgebeeld, met in figuur 4 voor elk veelvlak een uitslag, zodat je ze ook zelf van karton kunt maken.

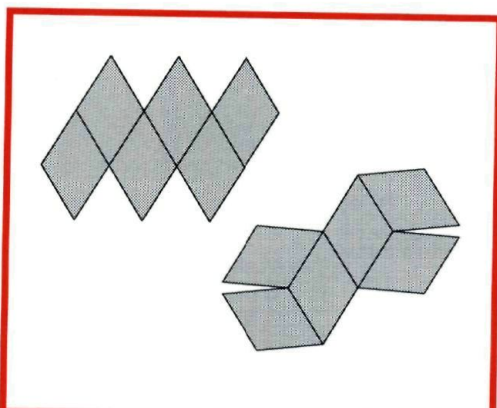
Deze twee veelvlakken spelen in de ruimte een rol die vergelijkbaar is met de dikke en de dunne ruiten in de Penrose-betegelingen van het vlak die we in aflevering 3 van onze serie zijn tegengekomen. Je kunt er namelijk *aperiodieke ruimtevullingen* mee maken. Een nadere uitleg daarvan is echter lang niet eenvoudig, en die zullen we hier dan ook niet geven.



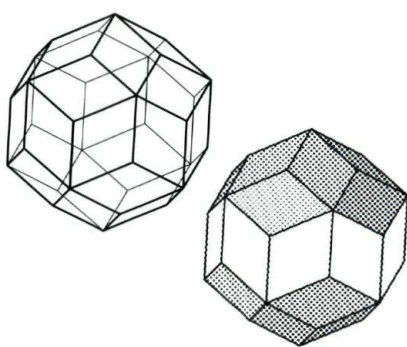
Figuur 3. De twee gulden ruitenzesvlakken. Het scherphoekige zesvlak A_6 (links) en het stomphoekige zesvlak O_6 (rechts). De scherpe hoeken van de ruiten zijn met puntjes aangegeven.

Een band verwijderen

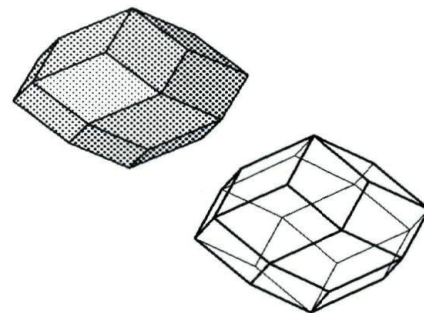
In plaats daarvan keren we terug naar Keplers dertigvlak K_{30} . In figuur 5 zie je hem als draadfiguur getekend, en ook als een veelvlak waarop een aantal zijvlakken wit is gekleurd. Ze vormen een band van ruiten die allemaal via verticale ribben aan elkaar zitten. Het zijn er in totaal tien (de band loopt ook aan de achterzijde door). Als je die tien witte ruiten weghaalt, houd je twee helften over die precies op elkaar passen. Het veelvlak dat je krijgt als je ze samenvoegt, is Fedorows ruitentwintigvlak F_{20} . Zie figuur 6.



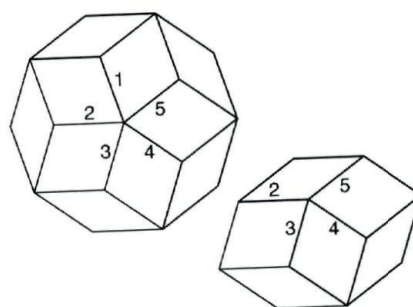
Figuur 4. Uitslagen van de A_6 (links) en de O_6 (rechts).



Figuur 5. Keplers dertigvlak als draadmodel en als veelvlak met een witte band.



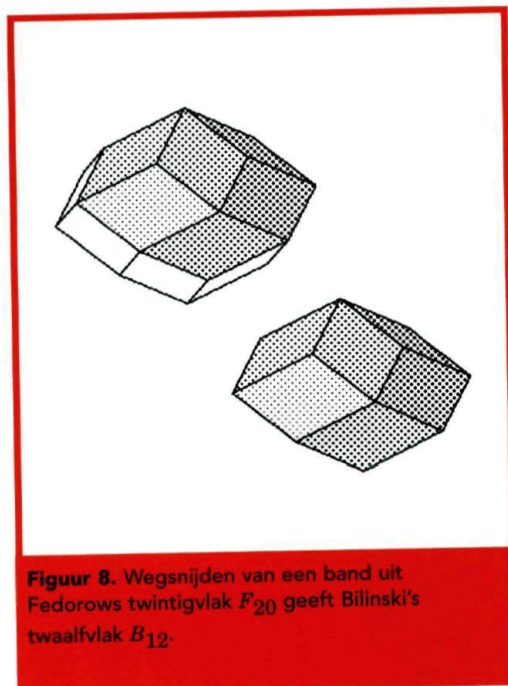
Figuur 6. Fedorows twintigvlak F_{20} als veelvlak en als draadmodel.



Figuur 7. Links het bovenaanzicht van F_{20} en K_{30} . Rechts het bovenaanzicht van B_{12} .

Bovenaanzicht

Fedorows ruitentwintigvlak ziet er van opzij bekeken niet erg symmetrisch uit, maar een bovenaanzicht ervan vertoont nog steeds een vijfvoudige symmetrie. Dat bovenaanzicht is trouwens gelijk aan dat van K_{30} , want F_{20} is uit K_{30} ontstaan door een band van tien verticale ruiten te verwijderen. Misschien heb je al opgemerkt dat de ribben van K_{30} in slechts zes verschillende richtingen voorkomen (namelijk de richtingen van de zes lichaamsdiagonalen van de ingeschreven icosaeëder). Door het wegsnijden van de witte band zijn alle ribben in de verticale richting verdwenen, en houden we nog maar ribben in vijf richtingen over. In figuur 7 (links) hebben we die richtingen genummerd. De verticale richting zou je met het cijfer 0 kunnen aanduiden. De weggesneden witte band bevat alle ruiten waarvan één zijde richting 0 heeft.



Figuur 8. Wegsnijden van een band uit Fedorows twintigvlak F_{20} geeft Bilinski's twaalfvlak B_{12} .

Het twaalfvlak van Bilinski

De band van acht ruiten van F_{20} waarvan een van de zijden richting 1 heeft, is in figuur 8 wit gemaakt. Wegsnijden van die band verdeelt het veelvlak weer in twee helften (kijk ook naar figuur 6, rechts!). Samenvoegen van die twee delen levert een twaalfvlak op: het ruitentwaalfvlak B_{12} van Bilinski (figuur 8, rechts). De ribben van B_{12} hebben nog maar vier richtingen: 2, 3, 4 en 5.

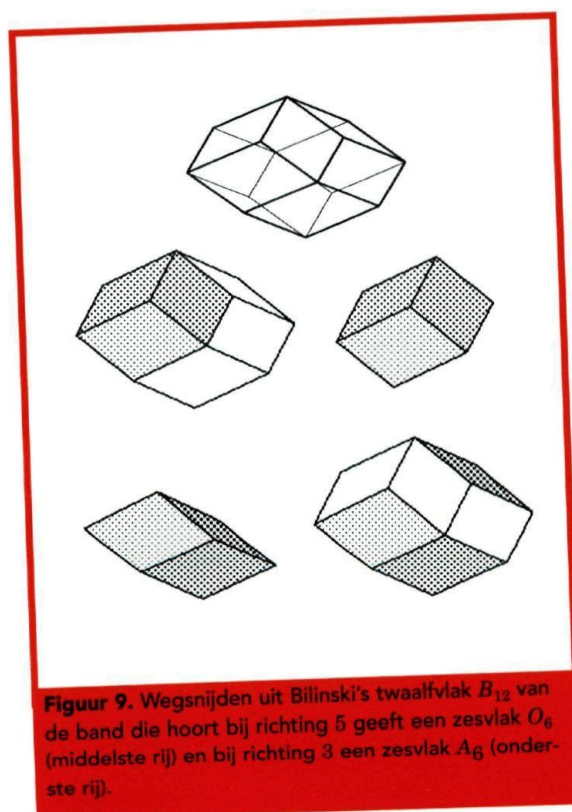
We kunnen de truc nu nog één keer uitvoeren. Er zijn daarvoor dan in wezen twee verschillende mogelijkheden. Bij allebei wordt een band van zes witte ruiten verwijderd waardoor er een zesvlak overblijft. Verwijderen van richting 2 of 5 levert een zesvlak O_6 , en verwijderen van 3 of 4 levert een zesvlak A_6 . Ga maar na aan de hand van figuur 9.

Blokkendoos

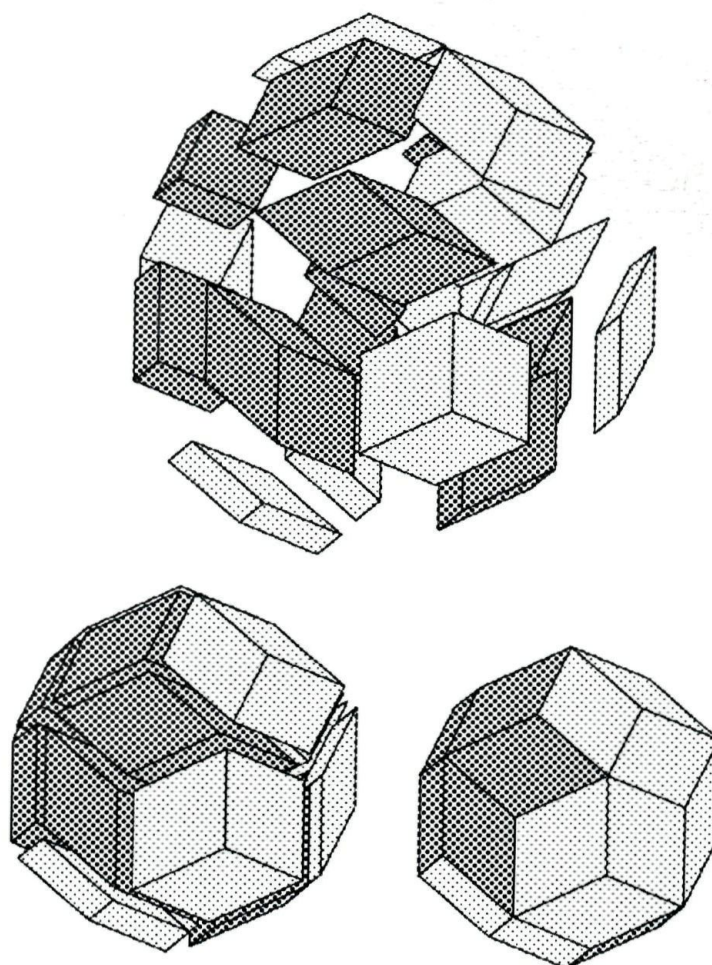
Nu komt het mooiste: met een blokkendoos die 'scheve blokken' bevat in twee soorten (scherpe zesvlakken A_6 en stompe zesvlakken O_6 , allemaal met ribben van een vaste lengte), kun je al die veelvlakken B_{12} , F_{20} en K_{30} samenstellen.

Omdat alle blokken dezelfde gulden ruiten als zijvlakken hebben, passen die precies tegen elkaar. Met wat puzzelen zul je zien dat twee blokken A_6 en twee blokken O_6 tot een B_{12} kunnen worden samengesteld, dat vijf blokken A_6 en vijf blokken O_6 samen een F_{20} maken, en dat tien blokken A_6 en tien blokken O_6 een K_{30} kunnen vormen (zie figuur 10).

Maar met de blokken uit deze blokkendoos kun je nog veel meer fraaie vormen samenstellen. De kunstenaar Gerard Caris heeft er prachtige kunstwerken mee gemaakt, zie bijvoorbeeld de afbeelding op pagina 10. En ook wiskundig is er nog veel interessants over te vertellen: zoals gezegd, kun je er – door ze op de juiste manier te combineren – aperiodieke ruimtevullingen mee maken, analoog aan de Penrose betegelingen van het vlak.



Figuur 9. Wegsnijden uit Bilinski's twaalfvlak B_{12} van de band die hoort bij richting 5 geeft een zesvlak O_6 (middelste rij) en bij richting 3 een zesvlak A_6 (onderste rij).



Figuur 10. Exploded view van Keplers K_{30} , zoals die kan worden opgebouwd uit tien scheve blokken A_6 (donker) en tien scheve blokken O_6 (licht).

15

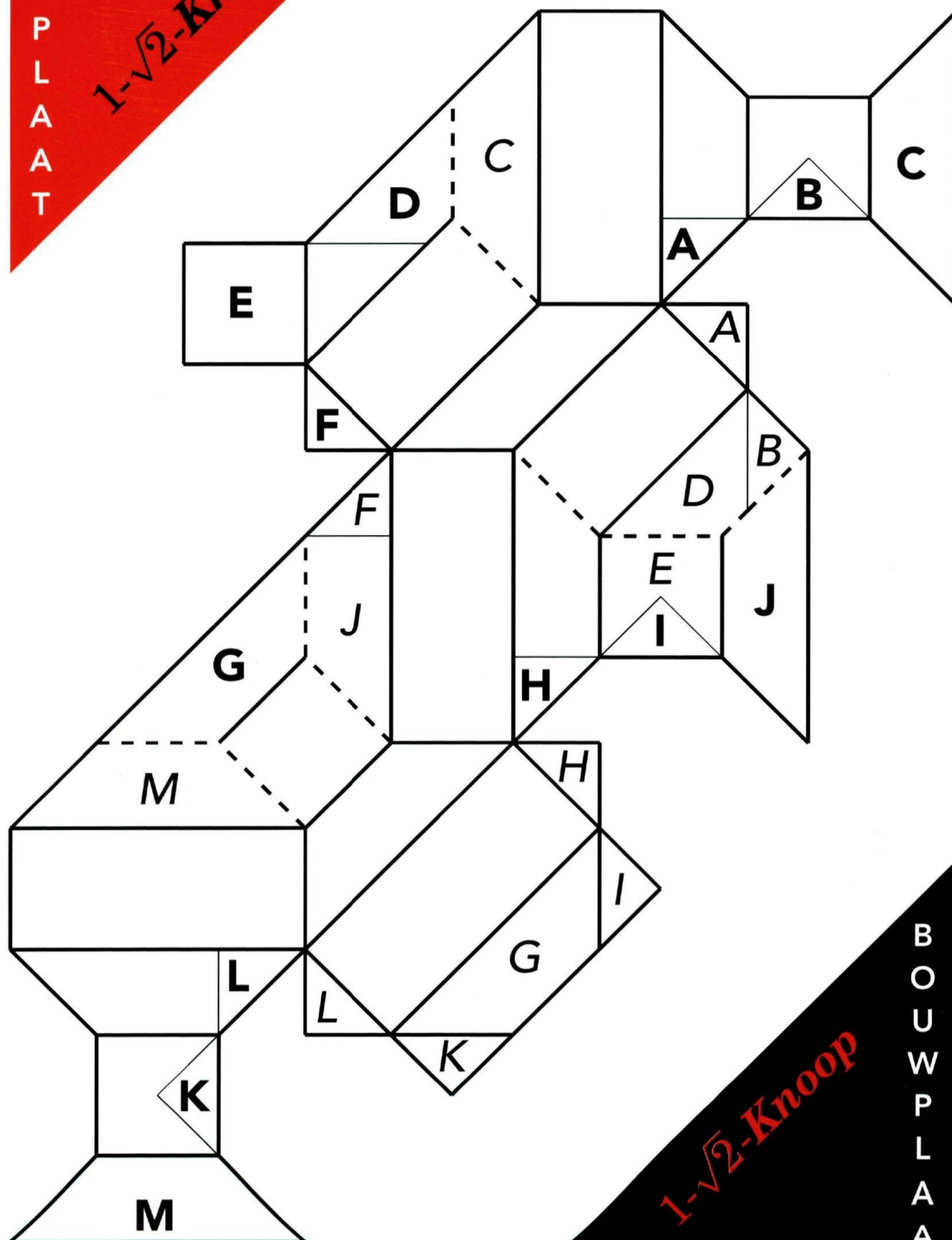
Vragen en opdrachten

1. Onderzoek of er naast A_6 en O_6 nog meer gulden ruitenzesvlakken mogelijk zijn.
2. Laat zien dat de zijvlakken van A_6 hoeken van 72 en 108 graden met elkaar maken, en dat de zijvlakken van O_6 hoeken van 36 en 144 graden met elkaar maken.
3. Laat zien dat de inhoud van A_6 en O_6 zich verhouden als de gulden snede.
4. Als je uit F_6 een band van acht ruiten wegsnijdt, krijg je een B_{12} (zie figuur 8). Hoeveel van die banden zijn er, en maakt het uit welke band je wegsnijdt?
5. Maak voldoende exemplaren van A_6 en O_6 en stel daarmee zelf de veelvlakken

B_{12} , F_{20} en K_{30} samen. Experimenteer vervolgens met het maken van eigen vormen.

6. Als je genoeg exemplaren A_6 en O_6 hebt gemaakt, kun je controleren wat de Japanse architect Koji Miyazaki in 1977 ontdekte: als je twee exemplaren van F_{20} langs hun symmetrieas met de punten tegen elkaar plaatst, kun je de ruimte ertussen en eromheen opvullen met nog dertig exemplaren A_6 en dertig exemplaren O_6 tot een F_{20} met ribben die twee maal zo lang zijn. Door dit proces te herhalen kun je een volledige ruimteevulling krijgen met vijfvoudige symmetrie.

BOUWPLAAT
BOUWPLAAT
BOUWPLAAT
 $1-\sqrt{2}$ -Knoop



16

BOUWPLAAT
 $1-\sqrt{2}$ -Knoop
BOUWPLAAT

door **Leo van den Raadt**

In Pythagoras van oktober 2001 staat een stukje over de $1-\sqrt{2}$ -knoop. De $1-\sqrt{2}$ -knoop, ontworpen door Koos Verhoeff, is opgebouwd uit 15 balken. De breedte en de dikte zijn 1 respectievelijk $\sqrt{2}$, zodat schuin afgezaagde uiteinden vierkanten met een zijde $\sqrt{2}$ zijn. Hierdoor kunnen de balken op verschillende manieren aan elkaar worden gekoppeld. Als je de foto goed bekijkt of de knoop maakt, zie je dat er twee typen balken voorkomen; balken waarvan twee zijvlakken een parallellogram zijn en andere waarvan twee zijvlakken een trapezium zijn.

Bouwplaat

De knoop is opgebouwd uit driemaal een deel van vijf balken (linkerpagina). Deze drie delen worden door de koppelstukjes (hieronder) onder een hoek van 90 graden aan elkaar gekoppeld. De bouwplaat is zo gemaakt dat tenslotte alle lijnen en aanwijzingen niet meer zichtbaar zijn op het eindproduct.

Kopieer de uitslag op de linkerpagina ten minste drie keer en de uitslag hieronder ten

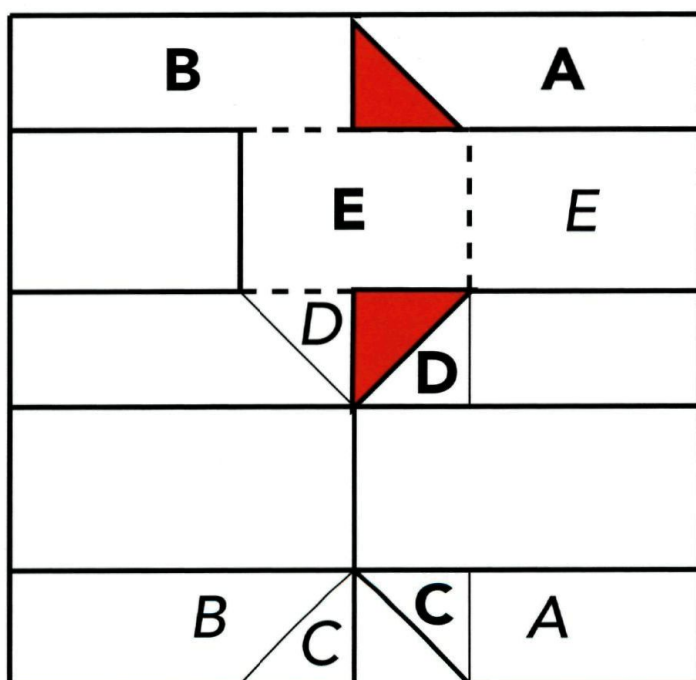
minste één keer. Om de knoop niet te klein te laten uitkomen, kun je ze het beste iets vergroten (bijvoorbeeld 150%). Knip de figuren uit langs de rand en knip daarbij ook in langs de stippellijnen. De rode delen (in de figuur hieronder) moeten eruit worden geknipt. Vouw vervolgens nauwkeurig alle lijnen.

In de bouwplaat zijn de delen die op elkaar moeten worden geplakt, aangegeven door dezelfde letter. Een cursieve letter geeft aan dat de lijm aan de achterzijde moet worden aangebracht; een vette letter dat de lijm aan de voorzijde moet worden aangebracht. Het is natuurlijk voldoende om één van de vlakken in te smeren.

Plak nu de delen *in alfabetische volgorde* aan elkaar. Je zult merken dat het mogelijk is de bouwplaat zo te vouwen, dat de te plakken delen op elkaar vallen.

Wanneer je de handelingen goed hebt uitgevoerd, kunnen de drie in elkaar gezette delen (van de linkerpagina) met behulp van de koppelstukjes (hieronder) op de juiste wijze in elkaar worden gezet. Daarna kunnen de delen definitief worden vastgeplakt.

Tekening bouwplaat: Jaap Bak



o

Pythagoras Olympiade

Kun jij de volgende opgaven oplossen? Stuur dan je oplossing naar het onderstaande adres en maak kans op een boekenbon van 20 euro!

De Pythagoras Olympiade is ook een laddercompetitie. De stand wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras. Aan het eind van het jaar zijn er boekenbonnen ter waarde van 120, 100 en 80 euro voor de drie leerlingen die bovenaan staan in de laddercompetitie.

Opgave 85

Er staan n soldaten op een rij. Ieder kijkt naar links of naar rechts. De commandant wil niet dat twee naast elkaar staande soldaten elkaar aankijken, en hij kan twee elkaar aankijkende soldaten het bevel geven zich allebei om te draaien. Bewijs dat hij dit maximaal $(\frac{n}{2})^2$ keer hoeft te doen totdat niemand elkaar meer aankijkt.

Opgave 86

$ABCD$ is een vierkant met zijde 1. DCE is een gelijkzijdige driehoek die zijde DC gemeen heeft met het vierkant. Bepaal de waarden die hoek AEB kan aannemen.

Stuur je oplossing naar:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: pytholym@math.leidenuniv.nl

Vermeld bij de oplossing je naam, adres, school en klas. Stuur bij de antwoorden ook een toelichting, waarin uitgelegd wordt hoe je aan het antwoord gekomen bent (een berekening of een bewijs). Insturen is mogelijk tot en met 15 september 2002. Onder de inzenders van goede oplossingen wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Let op: het is de bedoeling dat je de oplossing zelf vindt!

Hierna volgen de oplossingen van de opgaven uit het aprilnummer.

Veel succes!

René Pannekoek, Jan Tuitman en Allard Veldman.

Opgave 81

Iemand kiest n punten willekeurig op de omtrek van een cirkel. Wat is de kans dat de cirkel in twee gelijke helften gesplitst kan worden zodat alle n punten op dezelfde helft liggen?

Oplossing. Als alle n punten op één cirkelhelft liggen, is er, wanneer we met de klok mee over de cirkel lopen, altijd precies één punt van de verzameling dat we als eerste tegenkomen (tenzij er twee punten samenvallen, maar de kans hierop is nul). De kans dat alle andere $n-1$ punten binnen een halve cirkelomtrek na dit punt liggen, is gelijk aan $(\frac{1}{2})^{n-1}$. Maar omdat elk van de n punten het eerste punt kan zijn, moeten we deze kans met n vermenigvuldigen. Het goede antwoord is dus $\frac{n}{2^{n-1}}$.

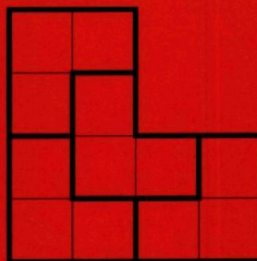
Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen.

Opgave 82

We hebben een schaakbord van 2^n bij 2^n vakjes waar een hoekje van 1 bij 1 uit verwijderd is. Bewijs dat dit bord volledig en zonder overlappingsen bedekt kan worden met stukjes van deze vorm:



Oplossing. We gaan dit bewijzen met volledige inductie (zie eerdere nummers voor een uitleg van dit principe). Voor $n = 1$ is het duidelijk: het schaakbord heeft dan precies de vorm van het blokje zelf. Stel nu dat we een oplossing hebben voor $n = k$. Om het geval $n = k+1$ op te lossen, vergroten we het opgeloste schaakbord met $n = k$ met een factor 2, zodat er een schaakbord van 2^{k+1} bij 2^{k+1} ontstaat waar een hoek van 2 bij 2 uit is. We kunnen een van onze stukjes gebruiken om dit gat te reduceren tot een enkel vakje. We hebben nu een manier gevonden om het schaakbord op te delen in stukjes die twee keer zo groot zijn als de stukjes die we tot onze beschikking hebben. Deze kunnen we echter weer op de volgende manier verdelen:



Zo hebben we met volledige inductie bewezen dat het probleem voor elke n is op te lossen.

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, P. Dekker van het Erasmus College te Rotterdam en H. Verdonk te Den Haag. De boekenbon gaat naar P. Dekker.

° Problemen

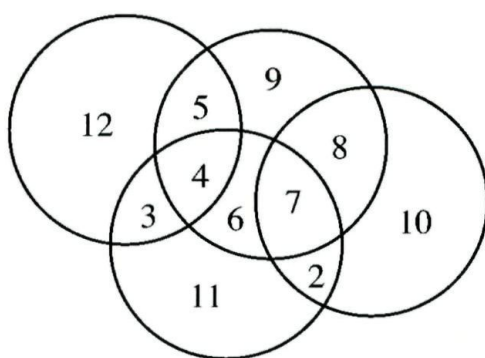
door **Dion Gijswijt**

Een klas vol leugenaars

In een klas van 20 leerlingen spreekt elke leerling óf altijd de waarheid, óf liegt altijd. De nieuwe leraar is hiervan op de hoogte en wil graag weten waar hij aan toe is. Daarom vraagt hij aan iedere leerling hoeveel leugenaars er in de klas zitten. De antwoorden lopen nogal uiteen: 14, 14, 17, 12, 16, 12, 14, 17, 16, 15, 14, 18, 16, 13, 13, 16, 15, 11, 15, 14. Toch kan de leraar uit deze antwoorden afleiden wie de leugenaars zijn en wie de waarheid spreekt. Hoe?

Wat is de omtrek?

Het vlak is door vier cirkels in twaalf gebieden verdeeld. Van elf gebieden is de omtrek gegeven, zie de figuur. Bepaal de omtrek van de buitenste rand, dat wil zeggen: de rand van het buitengebied.

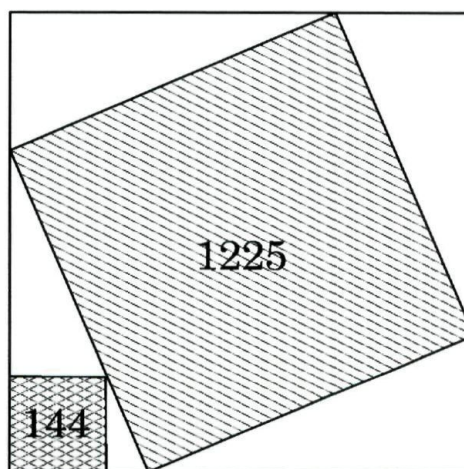


Zeven colleges

Arie, Bart, Carmen, Daniel, Esther, Francien, Gerben en Hendrik volgen samen zeven wiskundecolleges. Bij ieder college werken ze in groepjes van twee aan het huiswerk. Geef aan hoe ze dit op zo'n manier kunnen doen, dat ieder tweetal bij precies één college samenwerkt.

Wat is de oppervlakte?

In de figuur zijn de oppervlaktes van de twee gearceerde vierkanten gegeven. Wat is de oppervlakte van het grote vierkant?



Oplossingen

nr.5

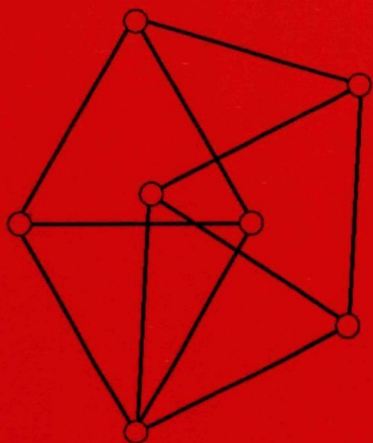
door **Dion Gijswijt**

Wie van de drie

Zet de drie verdachten op een rij naast elkaar, met hun rug naar je toe. Vraag aan de linker zuster: "Staat de moordenaar links van de andere leugenaar?" Stel de volgende vraag aan de middelste zuster als het antwoord 'Ja' is, en anders weer aan de linker verdachte: "Spreekt de moordenaar altijd de waarheid?" Als het laatste antwoord 'Nee' is, dan is de rechter verdachte de moordenaar. Is het eerste antwoord 'Nee' en het tweede antwoord 'Ja', dan is de linker verdachte de moordenaar. Wordt op beide antwoorden 'Ja' geantwoord, dan heeft de middelste zuster de moord gepleegd.

Kleur het vlak

Bekijk de volgende configuratie van zeven punten in het vlak. De lijnstukken geven punten op onderlinge afstand 1 aan. Als je deze zeven punten met drie kleuren kleurt, dan zijn er altijd twee verbonden punten met dezelfde kleur.



De constante van Kaprekar

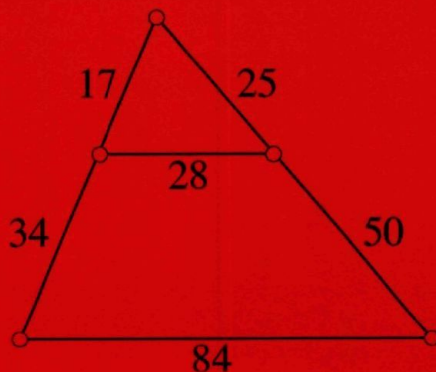
Het gezochte getal is 6174, want $6174 = 7641 - 1467$. Als je met een getal van vier verschillende cijfers begint en de gegeven procedure herhaalt, zul je meestal al snel op dit getal uitkomen. Bijvoorbeeld: $1234 \rightarrow 3087 \rightarrow 8352 \rightarrow 6174$.

Kan iemand dit merkwaardige feit verklaren?

Zes lengtes

De verhouding tussen de oppervlaktes van de kleine en de grote driehoek is 1:9, dus de corresponderende zijden verhouden zich als 1:3, zodat de omtrek van de grote driehoek 210 cm is. Hiermee kunnen we de basis van beide driehoeken berekenen: 28 en 84 centimeter. Van de kleine driehoek kunnen we nu ook de hoogte berekenen: 15 centimeter.

Nu we van de kleine driehoek omtrek, basis en hoogte weten, kunnen we met behulp van de stelling van Pythagoras ook de zijden berekenen. De andere lengtes volgen dan met behulp van verhoudingen.



Journaal

door Alex van den Brandhof en Marco Swaen

pythagoras

augustus 2002

nummer 06

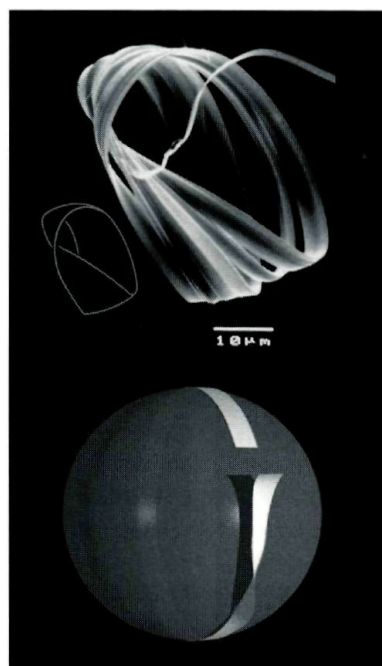
Minuscule Möbiusbandjes

Een Möbiusband is een band met een slag erin. Door de slag heeft de Möbiusband een ongewone topologie. Zo heeft een gewone band (zonder slagen) twee kanten (binnen- en buitenkant) en twee randen; de Möbiusband heeft daarentegen maar één kant en één rand.

Een groep natuurkundigen van de universiteit van Hokkaido (Japan) is erin geslaagd minuscule Möbiusbandjes te maken van één enkel Niobium-Seleen-kristal. De bandjes zelf zijn ongeveer 1 micrometer dik, terwijl de diameter van de ring ongeveer 50 micrometer is. Zij

maakten de bandjes door een mengsel van Niobium en Seleen te laten kristalliseren langs de evenaar van heel kleine Seleen-druppeltjes. Door plotselinge temperatuurveranderingen boog het bandje voor het zich sloot zodat er een slag in kwam. Met dezelfde techniek is het de onderzoekers gelukt om ook andere kristallen met een afwijkende topologie te maken. Behalve dat het een technisch hoogstandje betreft, bieden deze kristallen mogelijk een nieuwe weg om topologische effecten in quantummechanica te bestuderen.

Bron: www.nature.com



ILLUSTRATIE TAKU TSUNETA, LID VAN HET ONDERZOEKSTEAM.

22



In oktober 2001 werden de Verenigde Staten opgeschrikt door brieven met miltvuursporen. In totaal raakten 22 mensen besmet met miltvuur, waarvan er vijf overleden zijn. Onder de slachtoffers waren journalisten en ambtenaren die de brieven hadden ontvangen, en postbeambten die de brieven verwerkt hadden. Maar ook waren er slachtoffers die niet met de brieven in aanraking waren gekomen. Om te achterhalen

Wiskunde tegen miltvuurbrieven

hoe de besmetting verlopen kan zijn, heeft de wiskundige G.F. Webb samen met epidemiologen een model opgesteld. Het model laat zien dat de feitelijke gebeurtenissen het best overeenkomen met een scenario waarin slechts zes miltvuurbrieven (met daarin enkele miljarden aan sporen) gepost zijn. Uit de zes enveloppen zijn dan in de diverse postdistributiepunten sporen op tenminste 5000 andere poststukken gelekt, waarmee

uiteindelijk vele duizenden mensen in aanraking zijn gekomen. Bij zulke lage doses speelt de ontvankelijkheid van de personen een grote rol, zodat slechts enkelen daadwerkelijk worden besmet. Met het model zal het bij een onverhoopte volgende aanslag met miltvuurbrieven mogelijk zijn sneller de kwetsbare plaatsen te traceren en daar maatregelen te nemen.

Bron: www.sciencedaily.com/releases/2002/05/020514075301.htm

Moeilijke keuze

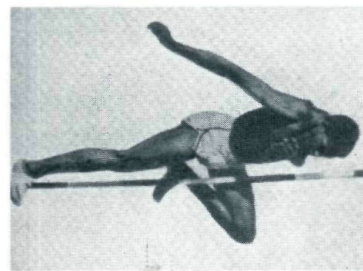
Soms is het niet zo belangrijk of je A danwel B kiest, als er maar niet teveel mensen zijn die tegelijkertijd met jou voor hetzelfde kiezen. Bijvoorbeeld een beurshandelaar die moet beslissen tussen aandelen verkopen danwel meer aandelen bijkopen. Besluit hij tot verkopen, maar besluit de meerderheid tot inkopen, dan heeft hij voordeel. Maar besluit de meerderheid samen met hem tot inkopen, dan heeft hij nadeel. Zulke situaties worden speltheoretisch aangeduid als *minderheidsspellen*. Bij een minderheidspel moet een groep spelers steeds kiezen tussen A en B. De speler die samen met de minderheid heeft gekozen, wint een punt, die met de meerderheid heeft gekozen, verliest een punt. Dergelijke spellen worden gesimuleerd op de computer, waarbij gevarieerd wordt in het aantal spelers en de strategieën die de spelers hantieren. Er wordt niet alleen gelet op optimale strategieën voor

de spelers afzonderlijk, maar ook op het succes van het hele systeem, uitgedrukt in het totaal aantal punten dat de spelers tezamen behalen.

In veel gevallen blijkt een minderheidspel erop uit te draaien dat de spelers na verloop van tijd gegroepeerd raken in verstokte A-kiezers en B-kiezers, die hun keuze niet meer veranderen, met een kleine groep daartussen die hun keuze wel variëren. Shahar Rod en Ehud Nakar in Israël hebben een nieuwe variant bedacht waarbij een goede keuze een beetje voordeel oplevert, maar waarbij je bij een verkeerde keuze heel veel verliest. Het systeem blijkt zich dan anders te gaan gedragen: de spelers blijven hun keuze wisselen. Opvallend is verder dat het systeem veel minder opbrengt dan wanneer alle spelers geen enkele strategie zouden gebruiken en hun keuze gewoon met een worp van een munt zouden bepalen.

Bron: www.nature.com

Atletiekrecords en toeval



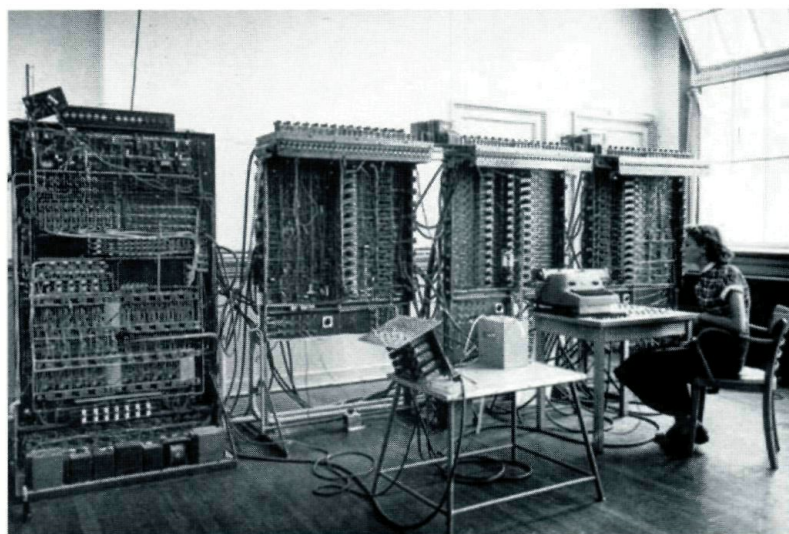
Op bijna elk WK atletiek sneuvelt wel een wereldrecord. Zo krijg je de indruk dat atleten alsmaar beter worden. Volgens Daniel Gembris en zijn onderzoeksteam in Duitsland is dat grotendeels schijn. Met een statistisch model hebben ze laten zien dat ook als de atleten zelf helemaal niet beter worden, records toch heel regelmatig gebroken zullen worden, alleen door de schommeling in omstandigheden tijdens de wedstrijden, zoals temperatuur, luchtdruk, windkracht, en doordat er steeds meer prestaties geregistreerd worden.

Bron: www.nature.com

23

Pythagorasbewijzen

De serie 'Bewijzen van de stelling van Pythagoras' van Bruno Ernst die deze jaargang in dit tijdschrift heeft gestaan, is uitgegeven in een boekje. In deze Epsilon-uitgave, die als titel *De interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras* heeft, staan verder onder meer het bekende 'Chinese bewijs', een bewijs dat gebruik maakt van de ingeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek en een door de auteur zelf bedacht bewijs dat gebruik maakt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek. Voor zover bekend is dit bewijs niet eerder gepubliceerd.



Deze zomer is het 50 jaar geleden dat de eerste Nederlandse computer in gebruik werd genomen. Het was de **ARRA**, Automatische Relais Reken-

machine Amsterdam, in het toenmalige Mathematisch Centrum, nu Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam.



Neer is meestal Neer, maar Ja niet altijd Ja

door Aad Goddijn

In dit artikel, het laatste in de rubriek 'Experimentele wiskunde', geven rekenmachine en computer hun JA-woord bij enkele wiskundige vragen, terwijl jij en ik snel of met enige moeite kunnen zien dat het niet om eeuwige trouw gaat. We gaan ook zien hoe je de computer (en de rekenmachine) de duimschroeven aandraait om tot een eerlijke (beter: eerlijker) bekentenis te komen.

Sommen van wortels

Hieronder staan vier vragen over getallen van de vorm $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, met natuurlijke getallen m en n . Je ziet de antwoorden van een bekende rekenmachine (TI-83) en die van mij.

Vraag	Volgens de TI-83	Volgens mij
a Is $\sqrt{624} + \sqrt{39}$ gelijk aan $\sqrt{156} + \sqrt{351}$?	JA	JA
b Is $\sqrt{836} + \sqrt{155}$ gelijk aan $\sqrt{162} + \sqrt{820}$?	JA	NEE
c Is $\sqrt{944} + \sqrt{236}$ gelijk aan $\sqrt{531} + \sqrt{531}$?	NEE	JA
d Is $\sqrt{101} + \sqrt{102}$ gelijk aan $\sqrt{103} + \sqrt{104}$?	NEE	NEE

Twee keer zijn we het eens, twee keer oneens!

Regel d is makkelijk te doorzien; hier trapt de TI niet in en ik ook niet.

De TI-83 geeft bij b $\sqrt{836} + \sqrt{155} = 41,36356419$ en ook $\sqrt{162} + \sqrt{820} = 41,36356419$. Gelijk, dus JA. Maar ik houd het zelf toch maar op NEE, omdat uit de

gelijkheid $\sqrt{836} + \sqrt{155} = \sqrt{162} + \sqrt{820}$ iets absurds volgt, zie het kader op de volgende pagina. (Ik geef toe dat het weinig scheelt, en dat ik bovendien de berekeningen zelf ook op de TI-83 deed. Maar het is alleen vermenigvuldigen van gehele getallen en dat vertrouw ik mijn rekenmachine nog wel toe.)

Neem eens aan dat:

Kwadrater:

Vereenvoudig:

Kwadrater:

Vereenvoudig:

Kwadrateren tot slot:

Uitrekenen:

En dat klopt niet, dus was de aanname fout.

We hebben bewezen:

$$\sqrt{836} + \sqrt{155} = \sqrt{162} + \sqrt{820}$$

$$836 + 2 \cdot \sqrt{836} \cdot \sqrt{155} + 155 = 162 + 2 \cdot \sqrt{162} \cdot \sqrt{820} + 820$$

$$9 + 2 \cdot \sqrt{836} \cdot \sqrt{155} = 2 \cdot \sqrt{162} \cdot \sqrt{820}$$

$$81 + 36 \cdot \sqrt{836} \cdot \sqrt{155} + 4 \cdot 836 \cdot 155 = 4 \cdot 162 \cdot 820$$

$$36 \cdot \sqrt{836} \cdot \sqrt{155} = 12959$$

$$36 \cdot 36 \cdot 836 \cdot 155 = 12959 \cdot 12959$$

$$167935680 = 167935681$$

$$\sqrt{836} + \sqrt{155} \neq \sqrt{162} + \sqrt{820}$$

De gelijkheid in regel c is gemakkelijker te voorzien. Tip: de getallen 944, 236 en 531 zijn veelvouden van een vast getal. Zoek dat getal en vereenvoudig maar, je komt snel op een overduidelijke gelijkheid. De TI-83 gaf ook hier aanvankelijk gelijke antwoorden bij het berekenen van de twee vormen, namelijk twee keer 46,08687449. Maar ik was wantrouwend en liet ook

$$\sqrt{944} + \sqrt{236} = 46,08687449$$

en

$$\sqrt{531} + \sqrt{531} = 46,08687449$$

uitrekenen. Die verschillen wel: $-2,789 \times 10^{-9}$ en $-2,788 \times 10^{-9}$. De TI hoeft nu niet

al die 'lage' decimalen te laten zien en moet nu bekennen dat een latere decimaal afwijkt. Ook bij regel a kun je met deze aanpak de TI-83 NEE laten zeggen terwijl te beredeneren valt dat het JA moet zijn.

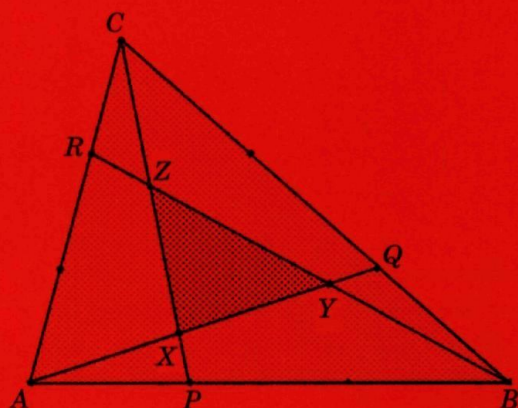
We sluiten deze paragraaf af met twee uitdagende problemen.

Probleem A

Bij verstandig gebruik van de rekenmachine bleek de TI-83 toch wel te kunnen aanwijzen waar het mis gaat bij geval b. Met een rekenmachine die meer decimalen laat zien, gaat het ook. Nu is

$$(\sqrt{836} + \sqrt{155}) - (\sqrt{162} + \sqrt{820}) \approx -3,21 \times 10^{-10}.$$

FIGUUR 1



$$\frac{\text{opp.}(ABC)}{\text{opp.}(XYZ)} = \frac{71,5248}{10,2178} = 7,00$$

De zijden van driehoek ABC zijn ingedeeld in de verhouding 1 : 2 door de punten P , Q en R . De lijnstukken AQ , BR en CP sluiten driehoek XYZ in.

Volgens Cabri is de XYZ -driehoek in oppervlakte $\frac{1}{7}$ deel van ABC . Als je een van de punten A , B en C versleept, blijft die verhouding kloppen.

De uitkomsten waren tot in de negende decimaal gelijk.

De uitdaging is een wortelvormenpaar te vinden, waarvan het verschil nog veel kleiner is, maar beredeneerbaar ongelijk is aan 0. Houd je het op hele getallen onder de duizend, dan is er echt wel wat te vinden, één extra gelijke decimaal is mogelijk. Ga je zoeken bij getallen met vier cijfers, dan vind je mogelijk ongelijke vormen die de TI-83 echt niet kan onderscheiden.

Probleem B

In de gevallen a en c was de gelijkheid bewijsbaar. In beide gevallen hebben de vier getallen in de wortelvormen een gemeenschappelijke gehele deler, ongelijk aan 1. Bij c was dat 59. Er kan door $\sqrt{59}$ worden gedeeld, er komt dan

$$\sqrt{16} + \sqrt{4} = \sqrt{9} + \sqrt{9}.$$

Anders gezegd: dat was een beetje een flauw geval; dat gaan we niet serieus nemen.

Kun je eigenlijk echt wel niet-flauwe gelijkheden krijgen, dat is de vraag. Het antwoord is hier een bewijsbaar NEE. Preciezer: *als de natuurlijke getallen n en m geen gemeenschappelijke factor hebben en zelf*

niet beide kwadraten zijn, dan kan $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ nooit exact gelijk zijn aan een andere uitdrukking $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ met p en q natuurlijke getallen.

Wie komt met een bewijs? Tip: Kijk goed naar de afleiding in het kader. Als er gelijkheid was, zou $\sqrt{836 \cdot 155}$ een rationaal getal moeten zijn. Probeer nu eerst te bewijzen dat de wortel uit een natuurlijk getal A alleen een rationaal getal kan zijn, als A zelf een kwadraat is.

Zevende deel van driehoek, vijfde deel van vierhoek

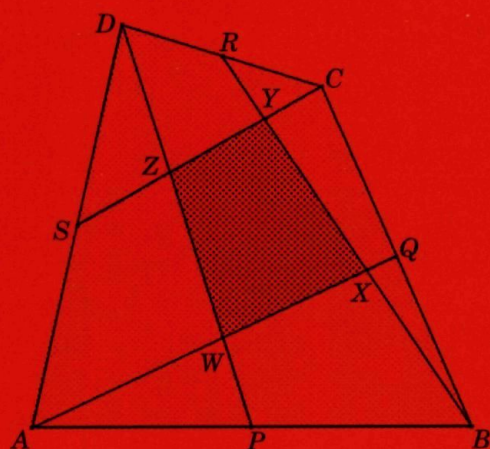
We gaan twee meetkundige figuren onderzoeken. We tekenen ze met Cabri en laten Cabri ook wat oppervlaktes uitrekenen. Zie de figuren 1 en 2.

Twee keer is op eenvoudige wijze een deel van een figuur bepaald. Twee keer lijkt er een constante verhouding in oppervlakte van deelfiguur en geheel te zijn.

Vergeet het maar, tenminste voor de helft: een van de twee beweringen is juist en de andere niet! Toch lijkt het bij het verslepen van de punten er heel aardig op.

27

FIGUUR 2



De zijden van vierhoek $ABCD$ worden door de punten P , Q , R en S door midden gedeeld. De lijnstukken AQ , BR , CS en DP sluiten vierhoek $WXYZ$ in.

Volgens Cabri is de $WXYZ$ -vierhoek in oppervlakte $\frac{1}{5}$ deel van $ABCD$. Als je een van de punten A , B , C en D versleept, blijft die verhouding kloppen.

$$\frac{\text{opp.}(ABCD)}{\text{opp.}(WXYZ)} = \frac{64,79}{12,96} = 5,00$$

Door experimenteren kun je wel vaststellen welke bewering stand houdt en welke niet. Zo nodig haal je de Cabri-bestanden op via de website van Pythagoras. Het gaat om `driezeven.fig` en `vijfvier.fig`. Maar zo eenvoudig houden we het voor de experimenterende wiskundige niet:

Probleem C

De bewering die stand houdt moet bewezen worden!

Probleem D

In de bewering die geen stand houdt, kan het gelijkteken door een kleiner-of-gelijk of groter-of-gelijk teken vervangen worden. Er ontstaat een bewering die wel stand houdt! Het is een forse uitdaging om die bewering te bewijzen. Ter waarschuwing en uitdaging: als het je lukt, ben je (voor zover nu en hier bekend) de eerste!

Probleem E

Zouden er ook constante verhoudingen optreden als we andere verhoudingen dan $1:2$ en $1:1$ toelaten? Gebruik `driezevenvari.fig` en `vijfviervari.fig` om te experimenteren.

Op een rechte lijn of niet?

Hoe teken je een rechte lijn?

Langs een liniaal!

Hoe maak je een rechte liniaal?

Aftekenen langs een...

Nee, dan een cirkel, dat is veel eenvoudiger. Zet een ruwe tak met één spijker ergens vast. De tak kan dan nog draaien om de spijker en elk punt van de tak beschrijft een mooie cirkel, zonder dat er vooraf een cirkel aanwezig was.

Bij de bouw van stoommachines was het van belang een punt (bijvoorbeeld een punt van de zuigerstang) langs een rechte lijn te laten bewegen, zonder dat er iets schoof of gleed. Een van de pogingen tot rechtgeleiding is het stangenmechanisme van Richard Roberts (1789-1864), zie figuur 3.

Er is een driehoek XYZ met twee zijden a en één zijde ter lengte b (in figuur 4 zijn de letters aangegeven). Deze driehoek hangt scharnierend aan twee stangen ter lengte a . Die zitten beweegbaar vast aan de vaste punten A en B die op afstand $2b$ van elkaar liggen. Het is duidelijk dat de driehoek, en dus punt Z ook, nog beweegbaar is. Een tweede mogelijke stand is met dunne lijntjes aangegeven.

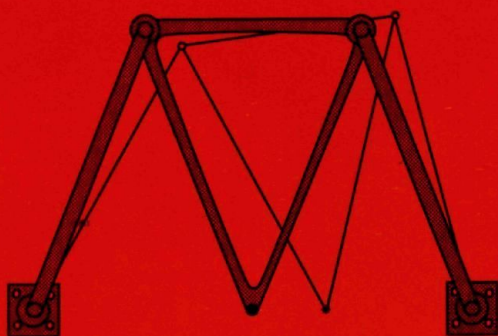
Kijk nu naar punt Z van de bewegende driehoek. Dat kan zich exact midden tussen de twee vaste punten bevinden, maar ook naar de vaste punten toe bewegen. Het lijkt er heel sterk op dat dit punt zich steeds op de verbindingslijn AB bevindt en dat we dus echt rechtgeleiding te pakken hebben!

Je kunt met karton en splitpennen of punaises makkelijk zo'n mechanisme namaken, maar het kan ook met Cabri. Je hebt dan nog het voordeel dat je nauwkeurig en gemakkelijk kunt 'meten'. Je kunt Cabri immers ook afstanden tussen punten laten aangeven.

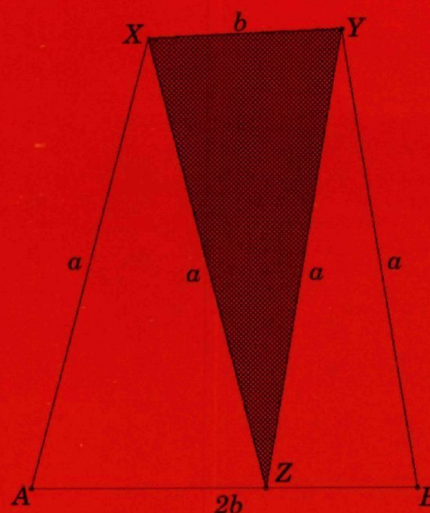
In figuur 4 zie je hoe het eruit ziet als je `manchester.fig` opent. X is het punt waarmee je moet bewegen; je zult merken dat Z inderdaad lijkt te bewegen over de lijn AB . De grote vraag is of dat écht zo is.

Cabri zelf helpt ons aanvankelijk snel uit de droom: ook al zien we het niet, Z ligt niet op AB . Je kunt namelijk lijnstuk AB tekenen en dan de optie 'Ligt punt op...' gebruiken. Omdat het toch wel een foto-finish is, willen we na eerdere negatieve ervaringen graag een bewijs. Zie figuur 5.

Maar ons wantrouwen was echt wel terecht. Probeer het zelf maar, je kunt namelijk Cabri laten zeggen dat Z op AB ligt, terwijl Z duidelijk niet in het midden van AB ligt. Neem daarvoor b heel klein ten opzichte van a ; op het scherm zie je wel waar je dat kunt bijstellen. Door voorzichtig met X te bewegen, kun je krijgen wat je zoekt: de computer zegt ' Z ligt op AB ', maar jij weet wel beter.



Figuur 3. Het stangenmechanisme van Richard Roberts



Figuur 4. Punt Z ligt niet op AB

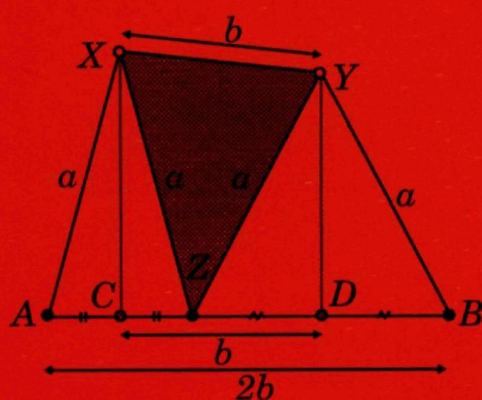
Tot slot

We hadden zoiets slims als het mechanisme van Manchester nodig om Cabri in de fout te krijgen. We konden niet zomaar een paar getallen nemen om een onjuiste uitspraak over wortelvormen te krijgen, dat was echt wel even zoeken! Vooral om de TI-83 duidelijk NEE te laten zeggen, terwijl het JA was, lukte niet heel schitterend. In mijn lijst met wortelvormen was die van voorbeeld c echt wel een witte raaf.

Kortom: als de computer NEE zegt over een bewering, dan denk ik wel tien keer na voor ik de bewering toch probeer te bewijzen. Maar, als de computer JA zegt, dan is enig wantrouwen altijd terecht. Tot je je beweringen bewezen hebt natuurlijk. Je rekenmachine of computer heeft namelijk heel duidelijk een *mogelijke* waarheid getoond. Maar voor zekerheid in de wiskunde, daarvoor kunnen we niet zonder *bewijs*.

29

FIGUUR 5



Een bewijs uit het ongerijmde dat Z niet op AB ligt

Neem eens aan dat Z zich wél op lijnstuk AB bevindt, maar niet in het midden. Teken nu de loodlijnen uit XC en YD op AB . De punten C en D delen AZ en ZB middendoor en daarom geldt dat $CD = b$. Ofwel, die parallelle loodlijnen liggen op een afstand b van elkaar. Maar dat wringt met de schuine stand van XY !

Er geldt: Z ligt alleen maar écht op (het inwendige van) AB , als het mechaniek in de symmetrische stand staat.

OPLOSSINGEN NR 5

Oplossingen Kleine nootjes

Vierkanten

Er zijn zestien vierkanten van 1 bij 1, negen van 2 bij 2, vier van 3 bij 3 en één van 4 bij 4. In totaal zijn dat $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ vierkanten.

Meerpaal

Eenzesde deel meet anderhalve meter. De paal is dus negen meter lang.

Een miljoen uur

Er gaan (gemiddeld) 365,2524 dagen in een jaar, dus er gaan $365,2524 \times 24 = 8766,0576$ uren in een jaar. Eén miljoen gedeeld door dit getal geeft 114,076 jaar. Heel weinig mensen zullen dus een miljoen uur leven.

De trein

De trein doet vier minuten over een kilometer. Na vier minuten is de neus van de trein uit de tunnel. Na nog eens vier minuten de staart. In totaal duurt het dus acht minuten voordat de trein helemaal de tunnel uit is.

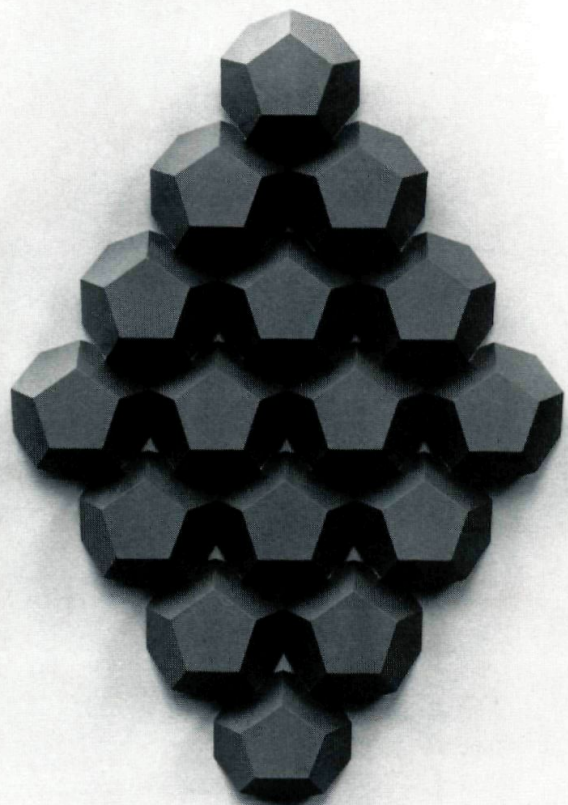
Waar of niet waar?

Ben kan niet zeggen dat Johan zegt dat hij Johan is. Dus is het Johan die zegt: 'Ben zegt dat hij Johan is.'

Rectificatie

Door een onzorgvuldigheid bij het drukproces van het vorige nummer is de afdruk van de afbeelding op pagina 10 (een kunstwerk van Gerard Caris) van slechte kwaliteit. Hiernaast is het kunstwerk (Reliefstructure 1R - 1 uit 1993) nogmaals afgebeeld.

Ook in de afbeelding van het $3n+1$ -probleem (pagina 28/29) is een onzorgvuldigheid geslopen. Van 19 gaat er een pijltje naar 29, maar dit moet 58 zijn. Van 13 gaat er een pijltje naar 20, terwijl dit 40 moet zijn.



Over sneeuwkrystallen en zebrastrepen

door Jan Guichelaar

**Over sneeuwkrystallen en
zebrastrepen**
De wereld volgens de wiskunde
Ian Stewart
Uitgeverij Uniepers,
Abcoude, 2002

In zijn boek *Over sneeuwkrystallen en zebrastrepen* beschrijft Ian Stewart hoe hij sinds zijn geboorte heeft geprobeerd om het raadsel van de vorm van een sneeuwvlok op te lossen. Het leest als een spannend jongensboek, van de eerste tot de laatste bladzijde.

De vragen zijn: waarom heeft bijna elke sneeuwvlok de vorm van een regelmatige zeshoek, maar waarom zijn er ook oneindig veel variaties binnen deze zeshoekige sneeuwvlokken? Er moeten in de natuur mechanismen zijn die allerlei patronen veroorzaken: zebrastrepen en zandribbels, zeshoeken in honingraten en sneeuwvlokken, spiralen in schelpen, vijfarmige zeesterren en zichzelf herhalende patronen (bijvoorbeeld in een varenblad), bewegingen van slangen en duizendpoten. Symmetrieën bepalen alle natuurwetten: bijvoorbeeld spiegelsymmetrie en rotatiesymmetrie, die terugkomen in bloemen, mensen en melkwegstelsels. Dan komen de fractals (bijvoorbeeld in de

groeiwijze van varens): wiskundige vormen die zichzelf op een steeds kleiner niveau herhalen. Deze combineren ondanks hun eenvoudige wiskundige structuur uiteindelijk 'wanorde' met geordende structuur. Ook sneeuwvlokken lijken zo opgebouwd. Stapje voor stapje wordt de lezer meegenomen op de fantastische reis van Ian Stewart, van het kleinste naar het grootste in het heelal, steeds een stapje verder op weg naar het begrijpen van de sneeuwvlok. In de laatste te bescheiden zinnen staat: 'Boven alles ben ik me ervan bewust, hoe armoedig mijn verhaal van de sneeuwvlok is in vergelijking met de glinsterende, bevroren werkelijkheid. Er is nog zoveel te leren. Welke vorm heeft een sneeuwvlok? Een sneeuwvlokform.' Een prachtboek.



Activiteiten

- 23 en 24 augustus 2002 **Vakantiecursus Wiskunde voor leraren**
30 en 31 augustus 2002 Technische Universiteit Eindhoven
Centrum voor Wiskunde & Informatica,
Amsterdam
<http://www.cwi.nl/conferences/VC2002/>
- vrijdag 13 september 2002 **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002**
tweede ronde
TU/e, Eindhoven
- vrijdag 27 september 2002 **Wiskundetoernooi voor scholieren**
Katholieke Universiteit Nijmegen
<http://www-math.sci.kun.nl/math/wistoernooi/>
- zaterdag 16 november 2002 **Jaarvergadering/studiedag Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
<http://www.nvww.nl>
- dinsdag 19 november 2002 **Opening wiskunde-museum 'Mathematikum' in Duitsland**
<http://www.mathematikum.de>
- zaterdag 23 november 2002 **Ars et Mathesis-dag**
Zalencentrum Het Brandpunt, Baarn
<http://www.arsetmathesis.nl>
- vrijdag 29 november 2002 **Voorronde Wiskunde A-lympiade, Wiskunde B-dag**
voor leerlingen 5 havo en 5/6 vwo
met wiskunde A (Wiskunde A-lympiade),
wiskunde B (Wiskunde B-dag)
www.fi.uu.nl/Alympiade
- vrijdag 31 januari **Nationale Wiskunde Dagen**
zaterdag 1 februari 2003 Leeuwenhorst Congrescentrum,
Noordwijkerhout
<http://www.fi.uu.nl/nwd>

Sponsors

Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde- en de logica-afdeling van de Universiteit van Amsterdam, door de wiskunde-afdelingen van de Vrije Universiteit Amsterdam, de Universiteit Leiden en de Rijks Universiteit Groningen, en door het Centrum voor Wiskunde & Informatica.



Universiteit van
Amsterdam



vrije Universiteit amsterdam



Universiteit
Leiden



Centrum voor Wiskunde
& Informatica



RUG

Rijks Universiteit
Groningen

Pythagoras

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van VWO en HAVO. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Abonnementen

Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op één van de volgende manieren:

telefonisch: 0522 855175,

per fax: 0522 855176,

via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

schriftelijk (een postzegel is niet nodig):

Pythagoras, Antwoordnummer 17,

NL- 7940 VB Meppel.

Tarieven 2001-2002

Een jaarabonnement op Pythagoras (6 nummers) kost € 17,92. Losse nummers kosten € 3,86.

Overige prijzen per jaar:

Pythagoras België € 21,07

Pythagoras buitenland € 24,73

Pythagoras én Archimedes € 31,54

Pythagoras én Archimedes België € 36,44

Pythagoras én Archimedes buitenland € 37,89

Betaling

Wacht met betalen tot u een acceptgirokaart krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Alle abonnementen zijn doorlopend, tenzij voor 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie: Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bulkabonnementen

Voor scholen zijn er bulkabonnementen.

Bulkabonnement Nederland: € 12,48 per jaar.

Bulkabonnement België: € 16,11 per jaar.

Minimum afname: vijf stuks, altijd 1 exemplaar gratis.

De nummers en de rekening worden naar één (school)adres gestuurd. Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855175.

Leerlingabonnementen

Voor individuele leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar) zijn er leerlingabonnementen.

Leerlingabonnement Nederland: € 14,75 per jaar.

Leerlingabonnement België: € 18,59 per jaar. Nummers en rekening worden naar het huisadres gestuurd. Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden: 0522 855175.

Bestelservice

Bij de abonnee-administratie in Meppel zijn te bestellen de jaargangen 36 t/m 39 (€ 11,34 excl. verzendkosten) jaargang 40 (€ 17,92 excl. verzendkosten) en de posters 'zeef van Eratosthenes' en 'Onmogelijke driehoek' (€ 3,40 excl. verzendkosten).

