PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

DECEMBER 2002

PYTHAGORAS

42ste jaargang nummer 2
ISSN 0033 4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

Internet
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofdredactie
Marco Swaen

Eindredactie
Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Bladmanager
Reinie Erné

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
pythagoras@science.uva.nl

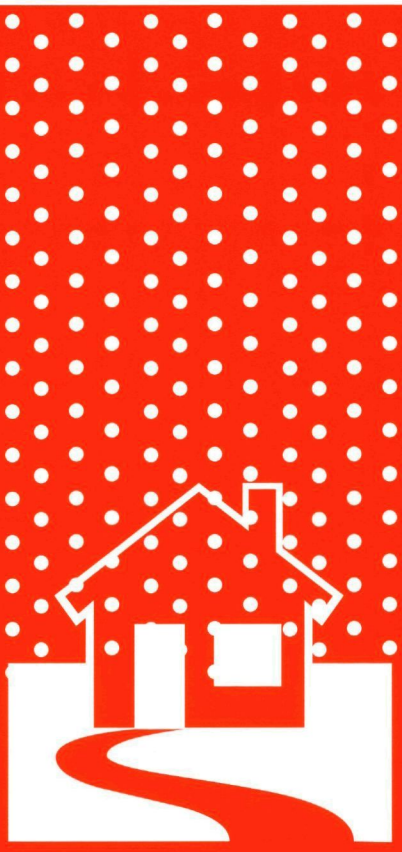
Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
Tel. 071 5277 121
Fax 071 5277 101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
Tel. 0522 855 175
Fax 0522 855 176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met 2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Medewerkers
prof. dr. J.M. Aarts is hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft. **drs. A.J. van den Brandhof** is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. L.A.M. van den Broek** is docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **drs. J.M. Notenboom** is docent aan de FEO te Utrecht. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **F. Roos** is docent natuurkunde te Tolbert. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **prof. dr. A.K. van der Vegt** was hoogleraar chemie aan de TU Delft. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. M. Vermeulen** is manager bij de VNU Business Information Europe te Haarlem. **drs. C.G. Zaal** is docent wiskunde aan de UL.

Omslag
Voetbaltrainer Milano Sarmaat (foto's: R. Joore) en de 'landkaart' van de afgeknotte icosaëder, het veelvlak waarop de voetbal is gebaseerd.



INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 8 **Op zoek naar halfregelmatige veelvlakken**

9 - 11 **Breuken vouwen**

12 - 13 **Problemen – Oplossingen**

14 - 16 **Van Antwerpen naar Beijing**

17 **Boekbespreking**

18 - 21 **Zelf veelvlakken maken (2)**

22 - 23 **Journaal**

24 - 25 **Pythagoras Olympiade**

26 - 30 **De formule van Euler**

31 **Oplossingen nr. 1**

32 **Activiteiten**

door **Chris Zaal**

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes



Euro's

Als je mocht kiezen, wat heb je liever: een ton (1000 kilo) euro's of vijf kilometer euro's (liggend) op een rij?

Kaneelstok

Een kaneelstok is 32 cm lang en heeft een omtrek van 6 cm. De kaneelstok is versierd met een rode streep, die van onder tot boven precies vier keer om de kaneelstok heen slingert. Hoe lang is deze rode streep?



Leesvoer

Ik heb een boek waar het voorwoord na de epiloog komt, waar het einde in de eerste helft van het boek staat, en waar de index voor de introductie afgedrukt is. Welk boek is dit?





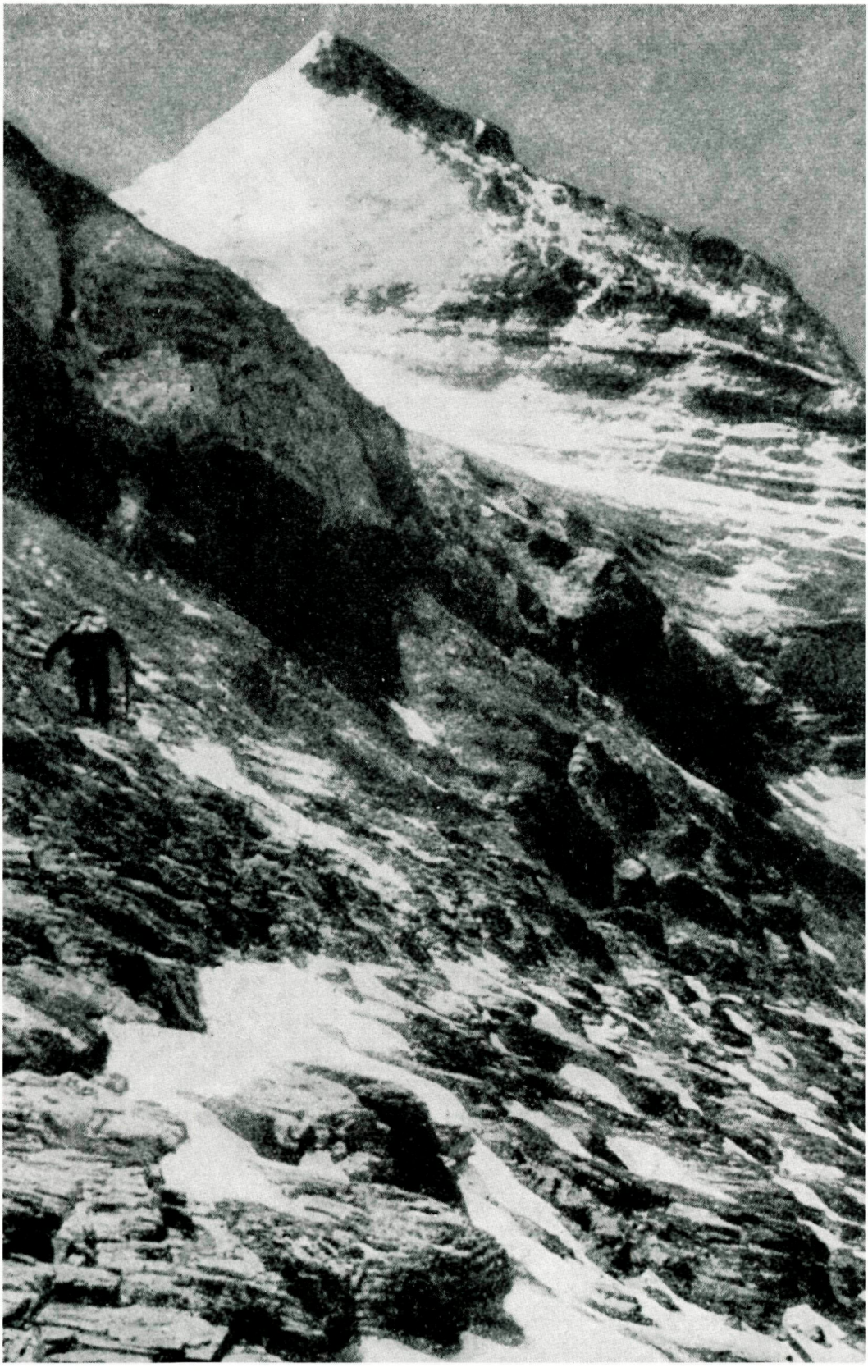
Scheurkalender

Als het vandaag maandag is, wat voor dag is het dan na de dag voor de dag voor morgen?

Eeuwig jong

De echte geboortedatum van Maria is een goed bewaard geheim. Wanneer iemand vraagt hoe oud ze is, zegt ze: tweeënveertig. Daarbij rekent ze de zondagen niet mee, want op zondagen werkt Maria niet, dus wordt ze ook niet ouder. Hoe oud is Maria in werkelijkheid?





door A.K. van der Vegt en Marco Swaen

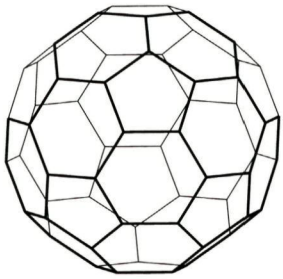
Op zoek naar halfregelmatige veelvlakken

Op een plaatje in een boek zien kristallen er mooi uit, meer indruk maken ze als je ze in het echt kunt zien. Maar het mooiste is het kristal dat je zelf vindt, tussen rotspuin na een lange zoektocht.
Zo is het eigenlijk ook met veelvlakken. Er bestaan prachtige overzichten van veelvlakken in soorten en maten. Die zullen zeker aan de orde komen in de komende nummers van Pythagoras. Maar in dit artikel nodigen we je uit zélf op zoek te gaan naar een beroemde serie veelvlakken. Die speurtocht levert je overigens niet alleen die serie op, maar ook de zekerheid dat de veelvlakken die je gevonden hebt, de enige veelvlakken zijn die aan de gestelde eisen voldoen.

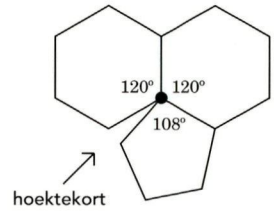
Halfregelmatige veelvlakken

Om *halfregelmatig* te zijn moet een veelvlak voldoen aan de volgende drie eisen:
1. de zijvlakken zijn regelmatige veelhoeken;
2. de hoekpunten zijn congruent;
3. het veelvlak is convex.

Vijf veelvlakken die aan deze eisen voldoen, ken je waarschijnlijk al, namelijk de vijf Platonische lichamen. Een ander bekend voorbeeld is de afgeknotte icosaëder, dat ook bekend staat als het voetbalveelvlak, zie figuur 1. Dit veelvlak is opgebouwd uit 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken. In overeenstemming met eis 2 zit elk hoekpunt op dezelfde manier in elkaar: er komen één regelmatige vijfhoek en twee regelmatige zeshoeken bij elkaar. Die opbouw van een hoekpunt kan kortweg beschreven worden met het rijtje getallen 6-6-5. Dat rijtje noemen we de *hoeksamenstelling*. De hoeksamenstelling van een kubus is bijvoorbeeld 4-4-4 en die van een octaëder 3-3-3-3.



Figuur 1. De afgeknotte icosaëder, oftewel het voetbalveelvlak.



Figuur 2. Bij een hoekpunt van het voetbalveelvlak komen twee zeshoeken en een vijfhoek samen. De hoekensom is 348° en het hoektekort is 12°.

De hoeksamenstelling bepaalt vanwege eis 2 de vorm van halfregelmatige veelvlakken in hoge mate. Zet je regelmatige vijf- en zeshoeken aan elkaar met steeds twee zeshoeken en één vijfhoek in een hoekpunt, dan kun je niets anders krijgen dan het voetbalveelvlak. Slechts bij één bepaalde hoeksamenstelling, namelijk 4-4-3-4, bestaan er twee echt verschillende halfregelmatige veelvlakken.

De hoekensom

Welke halfregelmatige veelvlakken zijn er? Net als bij de Platonische lichamen ligt het voor de hand alle mogelijke hoeksamenstellingen na te gaan.

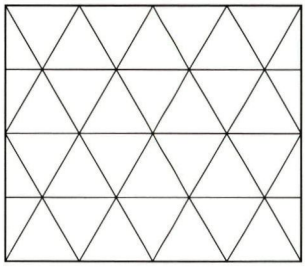
Omdat het veelvlak convex moet zijn, kunnen er niet willekeurig veel veelhoeken in een hoekpunt bij elkaar komen. Bij het voetbalveelvlak komen bijvoorbeeld twee zeshoeken en een vijfhoek bij elkaar, zie figuur 2. Aan het hoekpunt dragen die twee zeshoeken ieder 120° bij, de vijfhoek nog eens 108°. In totaal zijn de vlakke hoeken in het hoekpunt dus 348°. Dit getal noemen we de *hoekensom*. Het verschil van de hoekensom en 360° noemen we het *hoektekort*. In figuur 2 zie je de hoekensom en het hoektekort van het voetbalveelvlak.

Wil een veelvlak convex zijn, dan moet de hoekensom (in elk hoekpunt) kleiner dan 360° zijn.

Als de hoekensom precies 360° is, heb je een plat hoekpunt en is geen bijbehorend veelvlak mogelijk. Wel kan er een vlakvulling met die hoeksamenstelling bestaan. Het loont de moeite die vlakvullingen in je zoektocht te betrekken, omdat ze mooi passen bij hun ruimtelijke halfregelmatige verwanten.

De mogelijke hoeksamenstellingen

In een hoekpunt van een halfregelmatig veelvlak komen minstens drie en hoogstens vijf zijvlakken bij elkaar. Betrek je vlakvullingen in het onderzoek, dan is er ook nog één hoeksamenstelling van zes, namelijk 3-3-3-3-3-3. De bijbehorende vlakvulling zie je in figuur 3.



Figuur 3. Een vlakvulling met gelijkzijdige driehoeken: in elk hoekpunt komen zes driehoeken bij elkaar.

Het is dus zaak alle drie-, vier- en vijftallen veelhoeken op te sporen die een hoekensom opleveren van hoogstens 360°. Daartoe zouden we een lijst willen aanleggen van drie-, vier- en vijftallen natuurlijke getallen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ met $k = 3, 4, 5$ en $n_i = 3, 4, 5, \ldots$ met als voorwaarde dat de bijbehorende hoekensom hoogstens 360° is. Die voorwaarde laat zich gemakkelijk vertalen in een formule. In een regelmatige n-hoek zijn de hoeken namelijk ieder $(n-2)/n \cdot 180°$. Dat de bijbehorende hoekensom niet te groot is, betekent dus dat

$$\frac{(n_1-2)}{n_1} \cdot 180° + \frac{(n_2-2)}{n_2} \cdot 180° + \\ + \cdots + \frac{(n_k-2)}{n_k} \cdot 180° \leq 360°.$$

Het bespaart veel moeite in de lijst te werken met rijtjes getallen van groot naar klein, dus met de extra voorwaarde

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k .$$

Als eenmaal duidelijk is dat een bepaald rijtje mogelijk geschikt is, dan kun je de verschillende hoeksamenstellingen die erbij horen, uitproberen.

De beoogde lijst is in deze vorm eindeloos, maar vanaf een zeker punt gemakkelijk af te kappen. Want naarmate het aantal hoekpunten van de zijvlakken groter wordt, worden de afzonderlijke hoeken groter en blijven er minder mogelijkheden over. Je zult zien dat vanaf zeg $n_1 = 12$ het altijd weer dezelfde combinaties zijn, die óf overduidelijk niets opleveren, óf horen bij veelvlakken van een heel overzichtelijk bouwschema.

Evengoed gaat het nog om een aanzienlijk aantal combinaties, ook onder de $n_1 = 12$. Twee principes kunnen je helpen flink in de lijst te schrappen, zodat er een acceptabel aantal kandidaten overblijft. Die twee principes hebben we de 'hoekenwet' en de 'burenwet' gedoopt.

De hoekenwet

We hebben het *hoektekort* d gedefinieerd als het verschil van de hoekensom en 360°. In het artikel 'De formule van Euler' (zie blz. 26) wordt uitgelegd dat het totale hoektekort voor veelvlakken zoals wij die hier bestuderen, altijd 720° is. Bij halfregelmatige veelvlakken is het hoektekort in elk hoekpunt gelijk, zodat geldt:

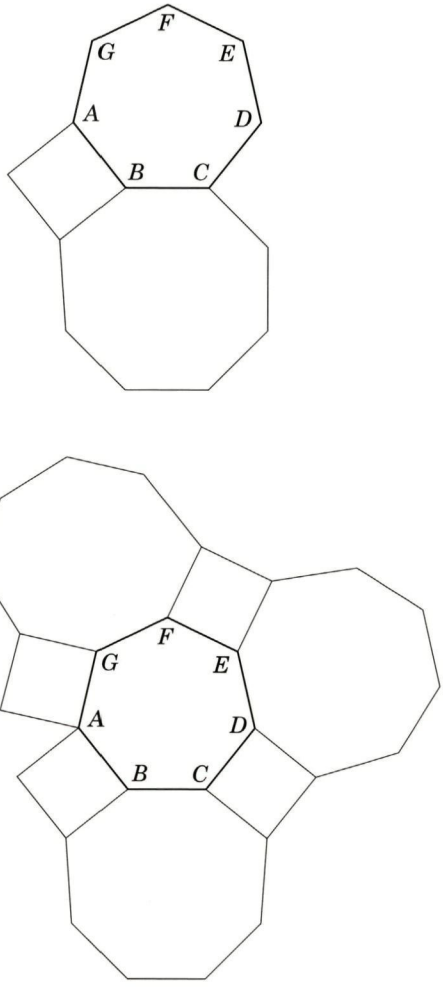
$$d \times h = 720,$$

waarbij h staat voor het aantal hoekpunten. Deze formule noemen we de *hoekenwet voor halfregelmatige veelvlakken*. Met deze wet kun je snel berekenen hoeveel hoekpunten het halfregelmatige veelvlak bij een gegeven hoeksamenstelling zou moeten hebben. Het hoektekort bij 6-6-5 is 12°, dus het voetbalveelvlak zou 720/12 = 60 hoekpunten moeten hebben, en dat is inderdaad zo.

Bij veel hoeksamenstellingen kom je op een hoektekort uit, dat niet deelbaar is op 720. Het bijbehorende veelvlak zou dan een gebroken aantal hoekpunten moeten hebben, wat uiteraard niet mogelijk is. De betreffende combinaties kun je dus uit de lijst van kandidaten schrappen.

De burenwet

Veel combinaties vallen alsnog af op het moment dat je het betreffende veelvlak in elkaar probeert te zetten. Dat gebeurt vaak bij veelhoeken met een oneven aantal hoekpunten.
Neem bijvoorbeeld het drietal 8, 7, 4. Op grond van het hoektekort zou 8-7-4 kunnen horen bij een veelvlak met 56 hoekpunten. We proberen dit 56-hoekige veelvlak in elkaar te zetten. We beginnen met een zevenhoek, met hoeken A, B, C, D, E, F, G, H. In punt B leggen we een vierkant en een achthoek aan, zeg, we leggen het vierkant aan de ribbe AB en de achthoek aan de ribbe BC, zie figuur 4a. In punt C moeten we weer een achthoek en een vierkant hebben. De achthoek ligt er al, dus we leggen aan de ribbe CD een vierkant. Als we zo doorgaan, komen er om de zevenhoek



Figuur 4a en b. Om een zevenhoek worden afwisselend vierkanten en achthoeken gelegd, maar één punt kan geen twee verschillende buren hebben.

afwisselend vierkanten en achthoeken te liggen. Maar omdat de zevenhoek een oneven aantal zijden heeft, komen er in punt A twee vierkanten, in plaats van een vierkant en een achthoek, zie figuur 4b. Hiermee krijgt punt A een hoeksamenstelling van 7-4-4, in plaats van 8-7-4.

In het algemeen geldt: als in een hoeksamenstelling één n-hoek zit, waarbij n oneven is, dan kan die n-hoek niet twee verschillende buren hebben. Dit principe noemen we de *burenwet*. Op grond van deze wet kun je vele combinaties schrappen, zoals alle combinaties van de vorm a, b, 3 met $a \neq b$, beide ongelijk aan 3.

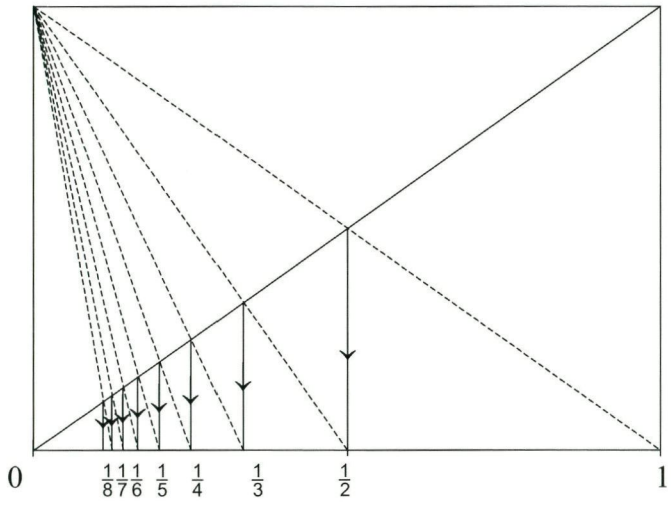
Meer informatie is te vinden in *Regelmaat in de ruimte* van A.K. van der Vegt, ISBN 90-407-1274-3 Delft Univerity Press.

Op 15 april 2002 overleed A.K. van der Vegt.

door **Leon van den Broek**

Hoe kun je zonder rekenwerk, maar door middel van vouwen, op de onderkant van een vel papier de breuken $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$ afzetten? Daarover gaat dit artikel: de breukenvouwkunst van Leon van den Broek.

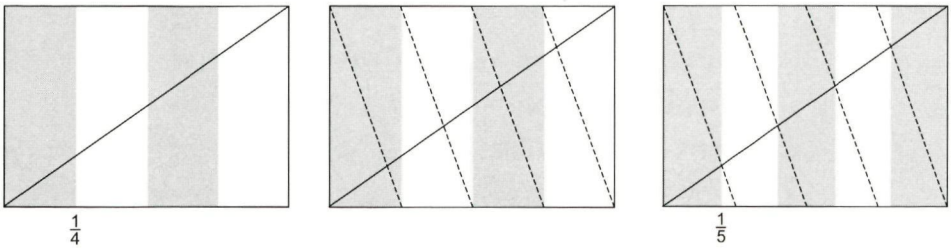
Breuken vouwen



Figuur 1. De plaats van $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ en $\frac{1}{8}$, gevonden door nauwkeurig te vouwen

Om de breuken $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ op de onderkant van een vel papier af te zetten, heb je praktisch geen vouwinstructie nodig. Neem een baadje A4 en vouw beide diagonalen. De plaats van $\frac{1}{2}$ zal je niet verbazen, zie figuur 1. Van daaruit vind je de plaats van $\frac{1}{3}$, enzovoort; steeds via de diagonaal van linksonder naar rechtsboven.

In figuur 1 is de te verdelen zijde 84 mm lang. En 84 is deelbaar door 2, 3, 4, 6 en 7, zodat je gemakkelijk met een liniaal kunt controleren dat het klopt voor $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{7}$ (in elk geval zo ongeveer). Maar snap je ook waarom het exact klopt?



Figuur 2a, b en c. Uitgaand van $\frac{1}{4}$ vind je in drie stappen de plaats van $\frac{1}{5}$

In drie plaatjes leggen we op een 'primitieve' manier uit hoe je van $\frac{1}{4}$ naar $\frac{1}{5}$ komt. Primitief omdat er geen enkele kennis van wiskunde bij nodig is.

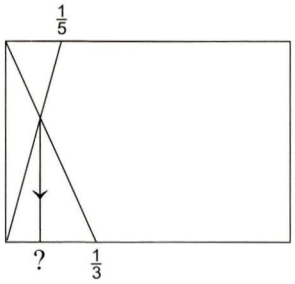
Van $\frac{1}{4}$ naar $\frac{1}{5}$

We verdelen de rechthoek met diagonaal in vieren, zie figuur 2a. In elke baan trekken we een diagonaal, zoals in figuur 2b. Die verdelen de diagonaal van de rechthoek in vijf (!) gelijke stukken. Vervolgens maken we nieuwe banen door de snijpunten, zodat de rechthoek wordt verdeeld in vijven, zie figuur 2c.

Met dit procédé kun je van $\frac{1}{2}$ naar $\frac{1}{3}$ gaan, van $\frac{1}{3}$ naar $\frac{1}{4}$, enzovoort. Zodoende krijg je het plaatje van figuur 1.

Algemener

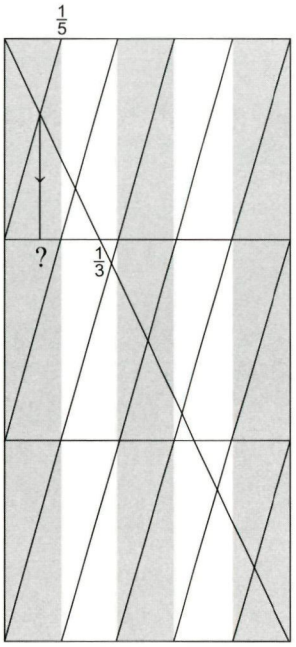
Bekijk figuur 3. Twee lijnen vanuit een hoekpunt snijden van de horizontale zijden $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{5}$ af. We vragen ons af welke breuk bij het vraagteken hoort. Ook die kun je op een primitieve manier vinden.



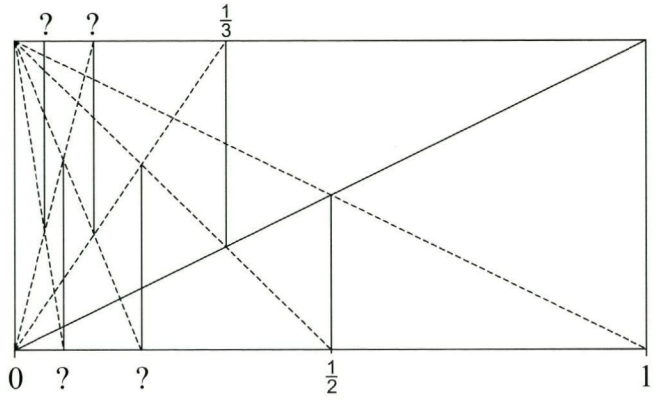
Figuur 3. Bij het vraagteken hoort de breuk $\frac{1}{8}$

We tekenen drie van de rechthoeken onder elkaar, verdeeld in vijf banen, zie figuur 4. Het verlengde van de lijn die $\frac{1}{3}$ afsnijdt, is de diagonaal van linksboven naar rechtsonder.

In elke baan is een diagonaal getekend. Zodoende wordt de diagonaal van linksboven naar rechtsonder verdeeld in $5 + 3 = 8$ gelijke stukken. Bij het vraagteken hoort dus $\frac{1}{8}$.



Figuur 4. De rechthoek van figuur 3 driemaal onder elkaar, verdeeld in vijf banen

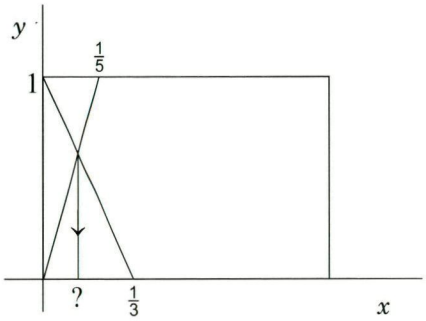


Figuur 5. Welke breuken horen bij de vraagtekens?

Heb je het principe door? Als we $\frac{1}{3}$ door $\frac{1}{8}$ vervangen (en $\frac{1}{5}$ gewoon handhaven), welke breuk hoort dan bij het vraagteken?
In figuur 5 is dit idee gevolgd: beurtelings worden de breuken naar boven en naar beneden aangegeven.

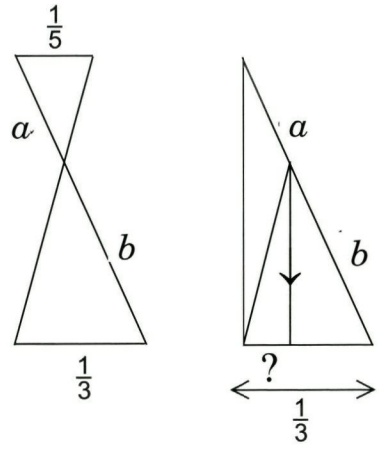
Opgave. Welke breuken horen bij de vraagtekens in figuur 5? De noemers vormen een bekende rij; herken je die?

Wiskundige technieken
Je kunt dus gewoon 'zien' welke breuken je vouwt. Misschien vind je het leuk om met meer wiskundige technieken te berekenen welke breuken je krijgt.
Dat kan door handig een assenstelsel te kiezen en het snijpunt van twee lijnen te berekenen, zie figuur 6. Voor figuur 3 zou dat kunnen door de lijnen $y = 5x$ en $y = 1 - 3x$ te snijden. Het snijpunt is $(\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$.



Figuur 6. De lijnen $y = 5x$ en $y = 1 - 3x$

Het kan ook door twee keer gelijkvormigheid toe te passen, zie figuur 7. Voor figuur 3 zou dat geven $a : b = \frac{1}{5} : \frac{1}{3} = 3 : 5$ en $? : \frac{1}{3} = a : (a + b) = 3 : 8$. Dus $? = \frac{1}{8}$.



Figuur 7. Een zandloper- en een snavelfiguur

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

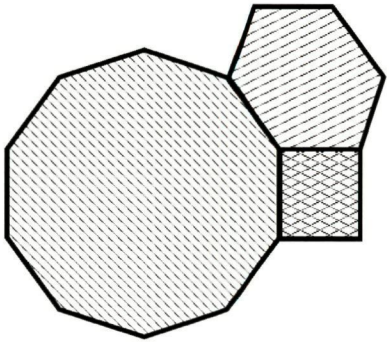
Kaartspel
Op een rij van links naar rechts liggen tien speelkaarten open op tafel. De twee spelers doen ombeurten een zet. Een zet bestaat eruit een open kaart te kiezen, die om te draaien en ook alle kaarten rechts ervan om te draaien. Wie geen zet meer kan doen, wint. De ander verliest. Wie wint dit spel, de eerste of de tweede speler?

De sokken van Harmen
Harmen heeft tien paar verschillende sokken. De twintig sokken liggen als een grote warboel in een lade. Harmen pakt, zonder te kijken, twee willekeurige sokken uit de la. Als ze een paar vormen, legt hij ze netjes samen op bed. Als ze geen paar vormen, dan doet hij ze allebei terug in de la, mengt de sokken goed door elkaar en pakt opnieuw een tweetal sokken. Dit herhaalt hij totdat de la leeg is en alle sokken in paren zijn verdeeld. Wat is de verwachting van het aantal keer dat hij een tweetal sokken moet trekken?

Grillige rij
Een rij gehele getallen a_1, a_2, a_3,... is als volgt gedefinieerd: $a_1 = 0$, $a_{2n} = 2a_n + 1$ en $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1} - 1$ voor $n \geq 1$. De rij begint dus als volgt: 0, 1, 0, 3, 0, 1, 2, 7, ...
Komen er ook negatieve getallen in deze rij voor?

Het feestje van Mr. Bean
Mr. Bean is jarig en nodigt al zijn vrienden uit op zijn feestje. Op het feestje van Mr. Bean doet het merkwaardige feit zich voor dat iedere aanwezige een ander aantal vrienden heeft onder de aanwezige gasten. Hoeveel mensen waren er aanwezig op Mr. Beans feestje?

Veelvlak
In elk hoekpunt van een convex veelvlak komen drie zijvlakken samen: een vierhoek, een zeshoek en een tienhoek. Bepaal het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken van het veelvlak en ook het aantal zijvlakken dat een vierhoek, zeshoek en tienhoek is.



Oplossingen nr. 1

door **Dion Gijswijt**

Raar veelvlak
Het antwoord is nee! Stel dat we wel zo'n veelvlak hebben. Als we per zijvlak het aantal ribben in dat zijvlak tellen, krijgen we $1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 5 \times 3 = 43$. Omdat elke ribbe in precies twee zijvlakken ligt, hebben we zo alle ribben tweemaal geteld. Er zijn dus $\frac{43}{2}$ ribben, wat onmogelijk is.

$3n$ + 1-probleem voor breuken
Stel dat je een lus van lengte 6 wilt maken. Zo'n lus ziet er als volgt uit:

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_6 \to x_1 ,$$

met bijvoorbeeld $x_2 = (3x_1 + 1)/2$, $x_3 = (3x_2 + 1)/2$, $x_4 = x_3/2$, $x_5 = (3x_4 + 1)/2$, $x_6 = x_5/2$ en $x_1 = x_6/2$. De vraag is: bestaat er een x_1 die dit resultaat geeft? In ieder geval moet dan gelden $\frac{27x_1+23}{64} = x_1$, dus $x_1 = \frac{23}{37}$. Inderdaad geeft deze keuze van x_1 precies het gewenste resultaat:

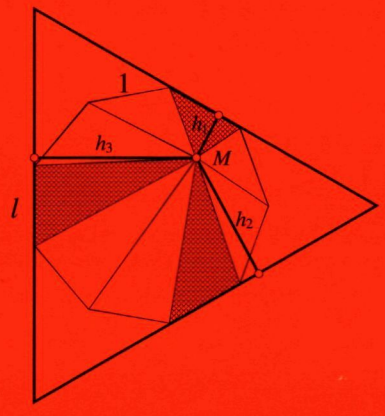
$$\frac{23}{37} \to \frac{53}{37} \to \frac{98}{37} \to \frac{49}{37} \to \frac{92}{37} \to \frac{46}{37} \to \frac{23}{37}.$$

Dat x_1 de gewenste lus geeft, is geen toeval. Je kunt bewijzen dat er altijd precies één breuk is die het juiste resultaat geeft. Dat moet dan dus wel de breuk zijn die je op bovenstaande manier hebt uitgerekend.

Cijferslot
Iemand vóór jou heeft een aantal knoppen ingedrukt, waardoor het slot niet in de 'beginpositie' staat.
Toets nu 012340123401234 in en de deur gaat open.

Dobbelen
Als je nog k van de zes mogelijke aantallen ogen moet zien te gooien, dan duurt het gemiddeld $\frac{6}{k}$ beurten voordat je een nieuw aantal ogen gooit. In totaal duurt het daarom gemiddeld $1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14\frac{7}{10}$ beurten voordat je alle aantallen ogen hebt verzameld.

Regelmatige negenhoek
Neem aan dat de zijden van de negenhoek lengte 1 hebben. Kies een van de drie kleuren en teken om de negenhoek de gelijkzijdige driehoek D die aan de drie gebiedjes in die kleur grenst. De grootte van D is onafhankelijk van de gekozen kleur.
De oppervlakte van D is gelijk aan $\frac{l}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$, waarbij l de lengte van de zijde van D is en h_1, h_2, h_3 de lengtes van de hoogtelijnen uit punt M.
We weten dus dat $h_1 + h_2 + h_3$ onafhankelijk is van de gekozen kleur. De oppervlakte van het gebied in de gekozen kleur is juist $h_1 + h_2 + h_3$, zodat de drie verschillend gekleurde gebieden dezelfde oppervlakte hebben.



Antwerpen

van A

Beijing, de hoofdstad van China, is hier ver vandaan. In de atlas kun je opzoeken dat Beijing ligt op 116° 25′ OL en 39° 55′ NB. Weet je nou ook nog wat de geografische ligging is van de plaats waar je zelf bent, dan kun je uitrekenen hoeveel eerder de zon in Beijing opkomt dan hier, en hoeveel kilometer je moet afleggen om die zonsopkomst daar echt te zien.

door **Frank Roos**

Geografische coördinaten

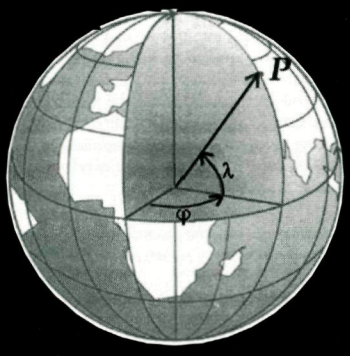
Om een plaats op aarde in coördinaten uit te drukken, is de vorm van de aarde uiteraard het uitgangspunt voor het te gebruiken coördinatensysteem. Alle punten liggen op ons aardoppervlak, een vorm die met al zijn bergen en dalen onmogelijk perfect wiskundig te beschrijven is. Bovendien is de aardbol bij de polen een beetje afgeplat. We doen echter alsof de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 kilometer. Het bepalen van een plaats op aarde gebeurt met behulp van twee verschillende soorten cirkels. Cirkels die de noord- en zuidpool verbinden, worden *meridianen* of *lengtecirkels* genoemd. De meridiaan door Greenwich (bij Londen) heet de *nulmeridiaan*. Greenwich is de vestigingsplaats van de Koninklijke sterrenwacht van het Verenigd Koninkrijk. Cirkels die evenwijdig zijn met de evenaar worden *breedtecirkels* genoemd. Met behulp van lengte- en breedtecirkels kun je elke plaats op aarde bepalen.

Een punt op aarde wordt beschreven door een *geografische lengte* φ en een *geografische breedte* λ. Ze worden uitgedrukt in graden (notatie: °) en (boog)minuten (notatie: ′). Eén minuut is gelijk aan $1/60$ deel van een graad, dus $60' = 1°$. De boog tussen de nulmeridiaan en de meridiaan waarop een punt P ligt, noemen we de *geografische lengte* van het punt P, zie figuur 1. Ten oosten van Greenwich spreken we van *oosterlengte* (OL), ten westen van *westerlengte* (WL).

De boog tussen de evenaar en de breedtecirkel waarop P ligt, noemen we de *geografische breedte* van P, zie weer figuur 1. Ten noorden van de evenaar spreken we van *noorderbreedte* (NB), ten zuiden van *zuiderbreedte* (ZB).

naar B

Elke halve lengtecirkel en elke breedtecirkel snijden elkaar in precies één punt van het aardoppervlak. Derhalve is een plaats op aarde volledig bepaald door haar geografische lengte en breedte. De geografische coördinaten variëren van 90° NB tot 90° ZB en van 180° OL via 0° tot 180° WL.
Uiteraard is 180° OL = 180° WL.



Figuur 1. De geografische coördinaten van een punt P

Tijdsverschil
We gaan ervan uit dat de aarde gelijkmatig om haar as draait en ook gelijkmatig om de zon. Vanwege de ellipsvorm van de baan en de aantrekking van de maan en de planeten wijkt onze theorie iets af van de werkelijkheid.
Het tijdsverschil tussen twee plaatsen A en B op aarde wordt voornamelijk bepaald door het verschil van de geografische lengtes van A en B. Omdat de aarde in 24 uur 360° draait, geldt dat het tijdsverschil theoretisch precies 4 minuten per graad geografisch lengteverschil is. Dat is juist gelijk aan 4 seconden tijd per boogminuut. Meer naar het oosten gelegen steden lopen daarbij voor (daar is het later) op meer naar het westen gelegen steden.

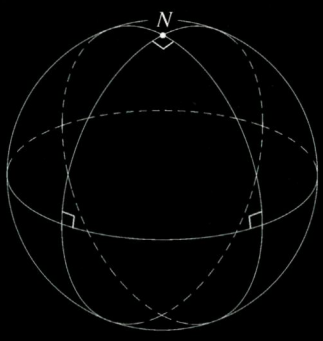
Antwerpen en Beijing
Laten we bij onze berekeningen uitgaan van Antwerpen. De geografische ligging van Antwerpen en Beijing is:

	Antwerpen	Beijing	verschil
φ	$4^\circ\ 25'$ OL	$116^\circ\ 25'$ OL	$112^\circ\ 00'$
λ	$51^\circ\ 13'$ NB	$39^\circ\ 55'$ NB	$11^\circ\ 18'$

Ga na, dat Beijing 7 uur en 28 minuten (afgerond) vóór loopt op Antwerpen, omdat het geografische verschil 112° is. Dat betekent dat de zon in Beijing 7 uur en 28 minuten eerder opkomt dan in Antwerpen. Doordat het aardoppervlak verdeeld is in tijdzones, verschillen de aanwijzingen van de klokken gehele uren, in dit voorbeeld 7 uren. Op Teletekst pagina 777 kun je dat controleren. Je moet er rekening mee houden dat in de ene stad wel en in de andere geen zomertijd ingevoerd kan zijn. Dat kan nog een bijstelling van een uur betekenen.

Grootcirkels en boldriehoeken
De kortste weg van A naar B op een boloppervlak loopt langs een *grootcirkel*, dat wil zeggen: een cirkel door A en B met als middelpunt het middelpunt van de aarde.

Door elk tweetal punten op een bol gaat precies één grootcirkel, tenzij die punten toevallig elkaars tegenvoeterpunten zijn. Meridianen zijn voorbeelden van grootcirkels; breedtecirkels niet, behalve de evenaar. Om de afstand tussen de steden te kunnen bepalen, moet je iets afweten van boldriehoeken. Een boldriehoek heeft drie hoekpunten op de bol, drie hoeken en drie zijden (delen van grootcirkels). Niet alleen de hoeken, maar ook de zijden worden uitgedrukt in graden of radialen. De grootte van een zijde AB is dan de grootte van hoek AMB met M het middelpunt van de grootcirkel.
De som van de hoeken van een boldriehoek is groter dan 180°. Kijk maar eens naar de boldriehoek die je op een globe kunt tekenen met de noordpool en twee punten op de evenaar: je zit direct boven de $2 \times 90^\circ$. De boldriehoek in figuur 2 is $\frac{1}{8}$ deel van het totale boloppervlak. De drie hoeken zijn elk 90°.



Figuur 2. De som van de hoeken in deze boldriehoek is 270°

Cosinusregels
In een platte driehoek kennen we de cosinusregel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Hierin zijn a, b en c de zijden van de driehoek en γ de hoek tegenover c. Een vergelijkbare formule bestaat er voor boldriehoeken. Neem een boldriehoek ABC met zijden a, b en c, γ de hoek tegenover c, die gevormd wordt door de raaklijnen aan de bogen a en b op de bol in het hoekpunt C.

Dan geldt de *cosinusregel van de zijden*:

$$\cos c = \sin a \sin b \cos\gamma + \cos a \cos b.$$

Het lastige bewijs laten we hier achterwege. Het is te vinden op: http://star-www.st-and.ac.uk/~fv/webnotes/chapter2.htm.

De boogafstand van de twee steden
Eerst kiezen we bij de twee steden A(ntwerpen) en B(eijing) een derde punt C op het aardoppervlak om een geschikte boldriehoek te krijgen. We nemen daarvoor de noordpool. De afstand tussen de steden is c. Het verschil tussen de oosterlengtes van de steden is dan γ. De zijde a is 90° min de breedte van Beijing. En de zijde b is 90° min de breedte van Antwerpen. Invullen levert:

$$\cos c = \sin(50^\circ 05') \sin(38^\circ 47') \cos(112^\circ) + \cos(50^\circ 05') \cos(38^\circ 47').$$

Ga na dat $c = 71^\circ 19'$.

De afstand tussen de steden
De volgende evenredigheid geldt: *de afstand tussen twee punten langs hun grootcirkel staat tot de boogafstand van deze punten in graden* is gelijk aan *de omtrek van de aarde (40.000 km) staat tot 360°*. Bereken zelf dat de afstand tussen Antwerpen en Beijing 7924 kilometer is.

Seizoensinvloeden
Bij het berekenen van het verschil tussen de tijdstippen waarop de zon in Beijing en Antwerpen opkomt is er stilzwijgend van uit gegaan dat op alle plaatsen op een vaste breedtegraad de zon op hetzelfde moment opkomt. Dit klopt eigenlijk alleen als de zon recht boven de evenaar staat. In de zomer en winter is er wel degelijk verschil; denk maar aan de lange nachten in de winter in het noorden. We nodigen de lezers van Pythagoras uit hoe groot het verschil zal zijn op bijvoorbeeld 21 juni en op 21 december.

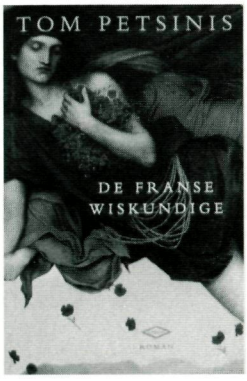
Wiskundigen geen saaie Pieten

door **Michiel Vermeulen**

De Franse wiskundige
Tom Petsinis
Uitgever Cargo/De Bezige Bij

Passie voor wiskunde, revolutionair elan, en op twintigjarige leeftijd gedood in een tragisch duel. Ziehier kort samengevat het leven van Evariste Galois (1811-1832), een van Frankrijks bekendste wiskundigen.

Galois ging naar school in het roerige Parijs van vlak na de Franse revolutie. De strijd tussen monarchisten en republikeinen was allerminst beslecht. Galois was een fervent aanhanger van het republikeinse ideaal. Wiskunde bood Galois een zeker houvast in een onzekere wereld. Op school leer je algemene formules om eerstegraadsvergelijkingen ($ax + b = 0$) en tweedegraadsvergelijkingen ($ax^2 + bx + c = 0$) op te lossen. Als je wiskunde gaat studeren, leer je ook algemene formules om derde- en vierdegraadsvergelijkingen op te lossen. Deze formules maken alleen gebruik van de elementaire bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. Wat Galois op jonge leeftijd bewees, is dat er voor een vijfdegraadsvergelijking (en hogeregraadsvergelijkingen) niet zo'n algemene formule bestaat om de oplossingen te bepalen! Ondanks – of misschien wel juist dankzij – zijn talent voor wiskunde, zakte Galois twee keer voor het toelatingsexamen aan de prestigieuze Ecole Polytechnique. Hij vertikte het eenvoudig zich grondig op de examens voor te bereiden.
Teleurgesteld stortte Galois zich meer en meer op het verwezenlijken van het republikeinse ideaal en was actief lid van een militante republikeinse groep. Hij werd zelfs gearresteerd en enige tijd gevangen gezet vanwege zijn antimonarchistische opvattingen en uitlatingen. Over het hoe en waarom van het duel waarin Galois op zo'n jonge leeftijd de dood vond, doen diverse verhalen de ronde. Het meest waarschijnlijke is dat het duel uitgevochten werd met een rivaal omwille van een meisje waar beide jongens verliefd op waren... Vergeet niet, we praten over bijna tweehonderd jaar geleden!
De Australische schrijver en wiskundedocent Tom Petsinis schreef het prachtige boek *De Franse wiskundige*. Een boek waarin Galois' turbulente leven goed wordt beschreven, een boek dat door de ogen van Galois een schitterend beeld geeft van Parijs aan het begin van de negentiende eeuw, en een boek dat bewijst dat wiskundig getalenteerde jongeren beslist geen saaie Pieten hoeven te zijn.



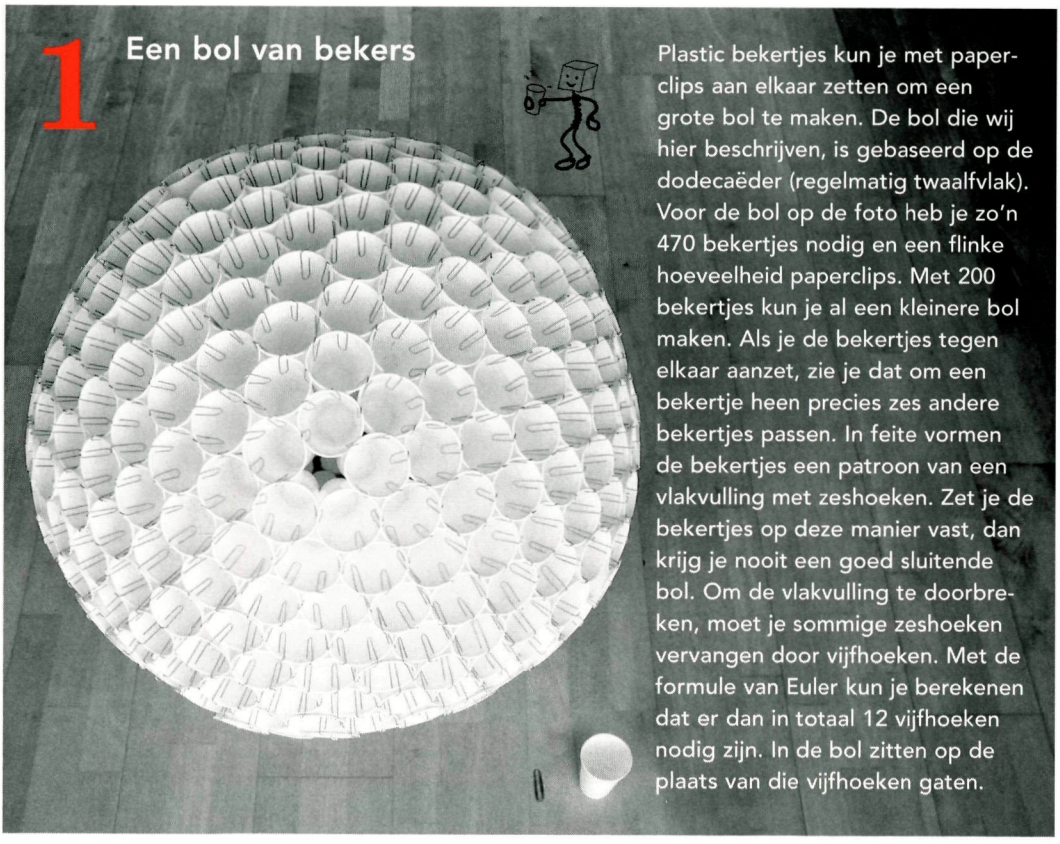
Veelvlakken: driedimensionale geometrische figuren die wiskundigen, filosofen en kunstenaars al eeuwenlang fascineren. Vervaardig ze zelf!

Zelf veelvlakken maken

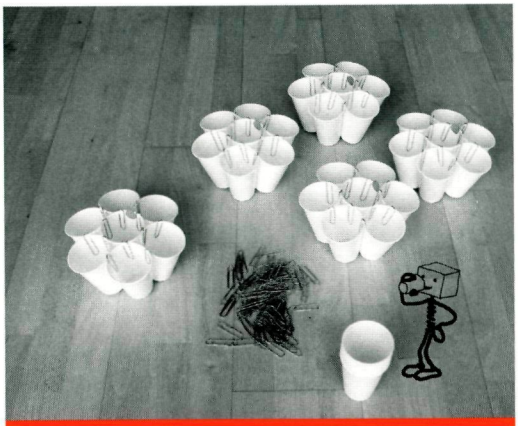
deel 2

door **Thijs Notenboom**

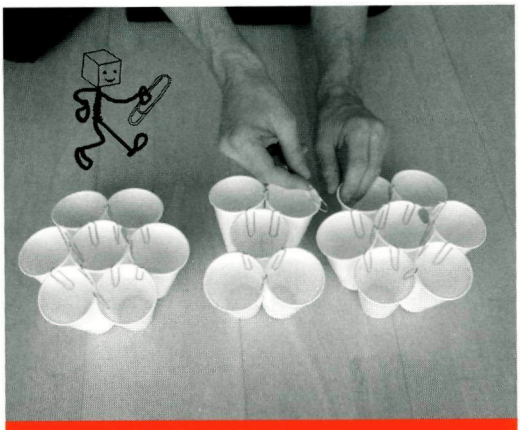
1 Een bol van bekers



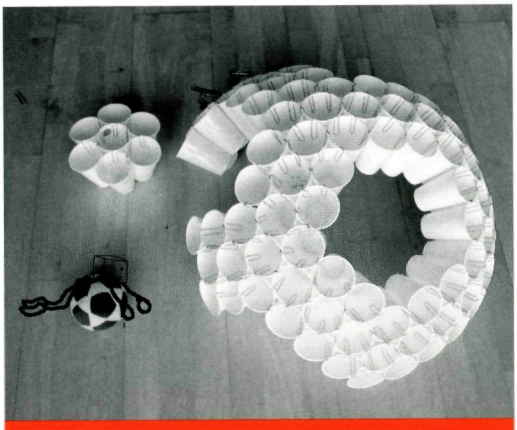
Plastic bekertjes kun je met paperclips aan elkaar zetten om een grote bol te maken. De bol die wij hier beschrijven, is gebaseerd op de dodecaëder (regelmatig twaalfvlak). Voor de bol op de foto heb je zo'n 470 bekertjes nodig en een flinke hoeveelheid paperclips. Met 200 bekertjes kun je al een kleinere bol maken. Als je de bekertjes tegen elkaar aanzet, zie je dat om een bekertje heen precies zes andere bekertjes passen. In feite vormen de bekertjes een patroon van een vlakvulling met zeshoeken. Zet je de bekertjes op deze manier vast, dan krijg je nooit een goed sluitende bol. Om de vlakvulling te doorbreken, moet je sommige zeshoeken vervangen door vijfhoeken. Met de formule van Euler kun je berekenen dat er dan in totaal 12 vijfhoeken nodig zijn. In de bol zitten op de plaats van die vijfhoeken gaten.



2 Onze constructie is gebaseerd op een dodecaëder. Eerst maak je de 20 hoekpunten. Voor elk hoekpunt heb je zeven bekertjes nodig. Die zet je met paperclips aan elkaar. Het is handig met stikkertjes de middelste bekertjes te merken, bij het in elkaar zetten raak je dan minder snel in de war.



3 Dan komt het leukste deel van het werk: het in elkaar zetten van de bol. Dat doe je door de hoekpunten te koppelen door de zijden af te maken. Daarbij zet je twee hoekpunten met de denkbeeldige ribben tegen elkaar en vul je bij elke ribbe de figuur aan met vijf extra bekertjes. Voor de kleinere bol verbind je de hoekpunten met twee in plaats van met vijf bekertjes.



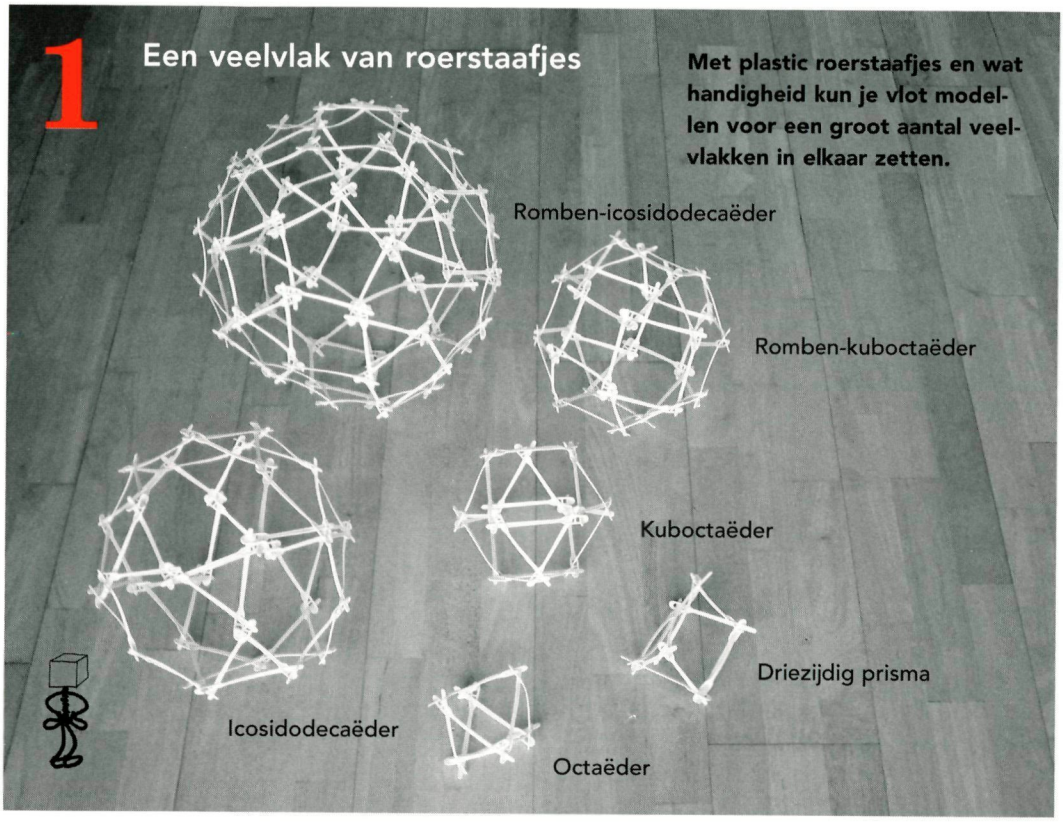
4 Met een model van een dodecaëder erbij kun je goed in de gaten houden dat de zijvlakken van het twaalfvlak moeten corresponderen met gaten in het model waaromheen telkens vijf ribben en vijf hoekpunten komen te liggen.

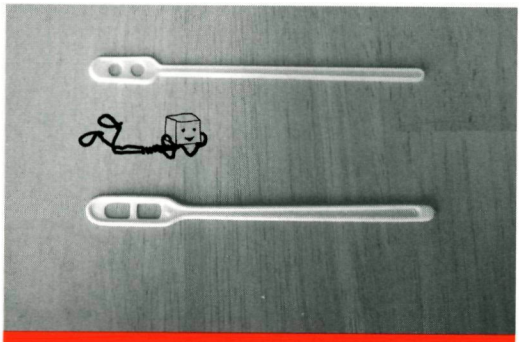


5 De gaten kun je verder invullen met één of twee ringen van bekertjes. De bekertjes zijn een beetje conisch, waardoor ze alleen een bepaalde bolling toestaan. Zijn de bekertjes te conisch, dan krijg je een model dat uitzakt. In dat geval blijft de kleinere bol beter in vorm. Als de bekertjes niet zo conisch zijn, dan gaat de kleine bol wringen bij het in elkaar zetten, en past de grote bol het beste.

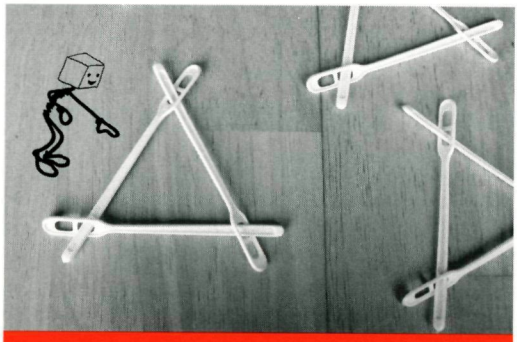
1 Een veelvlak van roerstaafjes

Met plastic roerstaafjes en wat handigheid kun je vlot modellen voor een groot aantal veelvlakken in elkaar zetten.

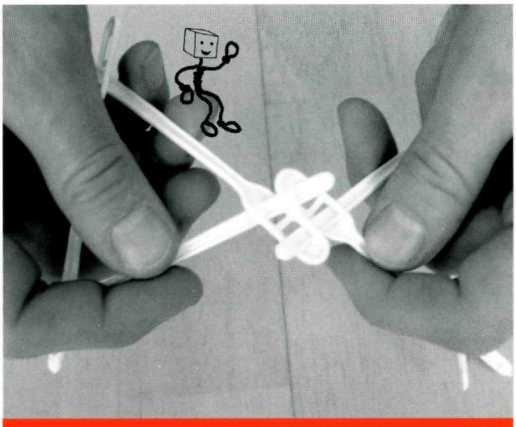




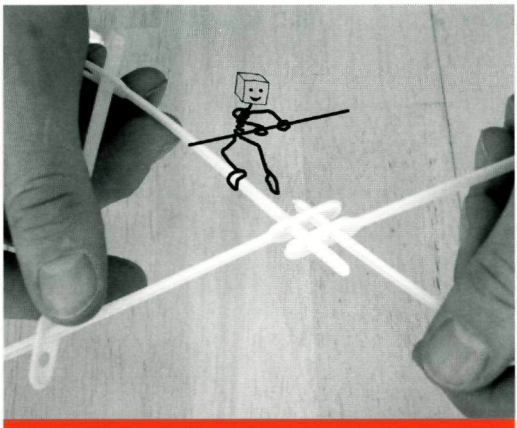
2 Je hebt platte roerstaafjes nodig met twee ronde gaatjes aan een uiteinde. Er bestaan veel verschillende typen staafjes. Op de foto zie je twee typen die geschikt zijn. Je zet de stokjes aan elkaar door het uiteinde van de ene door een gaatje van de andere te steken. Daarbij kan het plastic tussen de gaatjes barsten, maar dat is niet zo erg.



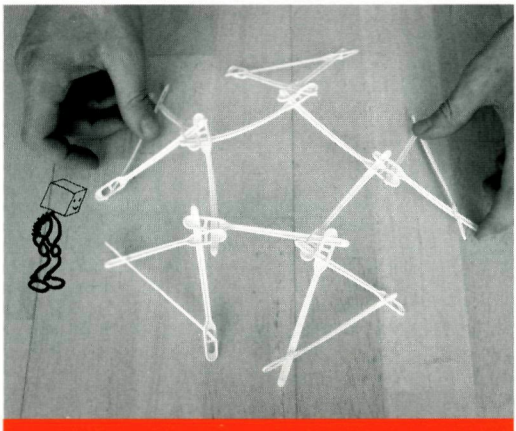
3 De eenvoudigste manier van bouwen, is met driehoeken. Dit systeem werkt uiteraard alleen voor bepaalde veelvlakken. Wij gaan eerst eens een kuboctaëder maken. Een driehoek maak je van drie roerstaafjes door de drie roerstaafjes cyclisch aan elkaar te koppelen. Daarbij steek je elk roerstaafje door het binnenste van de twee gaatjes van het volgende roerstaafje. Het is belangrijk dat alle driehoeken die je maakt op dezelfde manier in elkaar zitten, en niet elkaars spiegelbeelden zijn. Maak voor de kuboctaëder acht driehoeken.



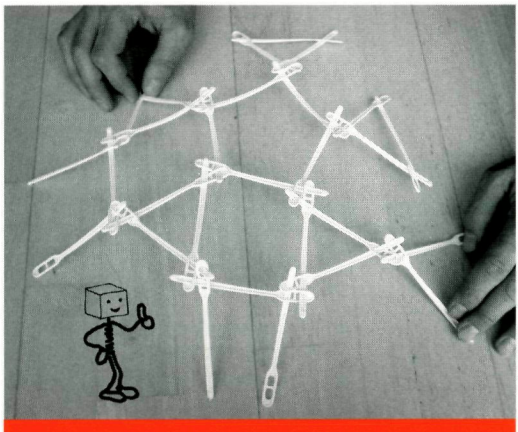
4 Vervolgens zet je de driehoeken aan elkaar. Elk hoekpunt van de driehoek bestaat uit twee uiteinden: een uiteinde met een gaatje en een uiteinde zonder gaatje. Het koppelen gebeurt door de twee uiteinden zonder gaatje door de uiteinden met een gaatje te steken.



5 Zijn de gaatjes kleiner, dan kun je de staafjes op elkaar laten aansluiten zoals hier. Bij sommige staafjes zitten de verbindingen heel strak. In dat geval moet je zorgen dat je de driehoeken meteen al in de goede hoek ten opzichte van elkaar zet. Voor de kuboctaëder is dat ongeveer 109 graden.



6 Heb je eenmaal de slag te pakken, dan kun je ook ingewikkeldere veelvlakken aan, zoals de romben-dodecaëder. Daarvoor heb je twintig driehoeken nodig. Maak een vijfhoek en vlecht aan elke hoek een driehoek.



7 Verbind vervolgens de driehoeken met ribben. Bij elke nieuwe ribbe moet je meteen twee staafjes aanvlechten.

door **Alex van den Brandhof** en **Matthijs Coster**

Journaal

pythagoras december 2002 nummer 02

Is dit getal priem?



Een priemgetal is een getal dat alleen deelbaar is door zichzelf en door 1. Om voor 181 of 187 na te gaan of deze getallen priem zijn, kun je voor de priemen tot en met 13 nagaan of ze deze getallen delen.
Het blijkt dan dat 181 priem is, maar 187 niet. Voor grotere getallen (bijvoorbeeld $10^{100} + 3$) wordt dit al een stuk lastiger. Het is dan ondoenlijk om bovengenoemde test uit te voeren. Er zijn gelukkig andere tests die kunnen worden uitgevoerd. Maar de priemtests die er tot voor kort waren, zijn zeer tijdrovend. Daar is nu verandering in gekomen. Er is door de drie Indiase wiskundigen Manindra Agrawal, Neeraj Kayal en Nitin Saxena (zie foto) van het Indian Institute of Technology in Kanpur een relatief snelle test gevonden die voor ieder getal kan nagaan of het priem is of niet.

Bron: http://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/index.html

Vermoeden van Catalan bewezen

Zeven jaar nadat Andrew Wiles de Laatste stelling van Fermat bewees, is er een nieuw succes in de getaltheorie: het 150 jaar oude vermoeden van Catalan is bewezen. Dit vermoeden zegt dat de vergelijking $x^n - y^m = 1$ voor x, y, m, n geheel en $n, m > 1$ slechts één oplossing heeft, namelijk $3^2 - 2^3 = 1$.

Het is eenvoudig om na te gaan dat dit inderdaad een oplossing is, maar een stuk lastiger is het om na te gaan dat dit de *enige* oplossing is. In 1976 bewees de Leidse wiskundige R. Tijdeman dat áls er een tweede oplossing voor de Catalan-vergelijking zou bestaan, deze oplossing erg groot zou moeten zijn. De wiskundigen Mignotte en Roy konden aantonen dat zou moeten gelden $x, y > 100.000$. In 2000 schreef de wiskundige Preda Mihailescu een bewijs op voor het vermoeden van Catalan. Zijn omgeving zag niet direct in dat het bewijs correct was. Het duurde tot het voorjaar van dit jaar tot de wiskundige Yuri Bilu met een publicatie kwam waaruit blijkt dat het bewijs van Preda Mihailescu inderdaad klopt.

Bron: http://www-math.uni-pader-born.de/~aggathen/vorl/2002ss/osem/mihailescu01.php

Stochastische Fibonacci-getallen

De getallen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 en 55 zijn de eerste tien termen van de beroemde rij van Fibonacci. Vanaf de derde term is elke term de som van de twee voorafgaande termen. Op de rij van Fibonacci bestaan talloze varianten. In plaats van de twee voorafgaande termen bij elkaar op tellen, kun je ook de *drie* voorafgaande termen bij elkaar optellen. Starten we bijvoorbeeld met de getallen 0, 0, 1, dan krijgen we 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, enzovoorts. Deze getallen worden wel *Tribonacci-getallen* genoemd. Op dezelfde manier kunnen we ook de zogenaamde *Tetranacci-getallen*, *Pentanacci-getallen*, *Hexanacci-getallen* construeren. Het is bekend dat het quotiënt van twee opvolgende Fibonacci-getallen (grootste gedeeld door kleinste) convergeert naar 1,618..., het gulden-snede-getal. Dit getal is de positieve wortel van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$. Het quotiënt van twee opvolgende Tribonacci-getallen convergeert naar 1,839..., een van de wortels van $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$, en dat van twee opvolgende Tetranacci-getallen convergeert naar de constante 1,92756... Deze constante waarde komt steeds dichter bij 2 te liggen, naarmate we meer opvolgende termen bij elkaar optellen om de volgende term van de rij te krijgen.

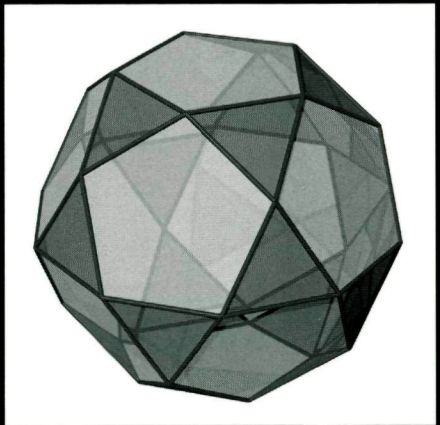
Divakar Viswanath heeft een stochastische variant op de Fibonacci-getallen bedacht. Hij begon met de termen 1 en 1, zoals in de originele rij van Fibonacci. Hierna bepaalt een muntworp de volgende term. Valt 'kop', dan worden de twee voorafgaande termen bij elkaar opgeteld; valt 'munt', dan worden de twee voorafgaande termen van elkaar afgetrokken. De muntworpen KKMMMK geven bijvoorbeeld de rij 1, 1, 2, 3, –1, 4, –5, –1. Als elke keer 'kop' verschijnt, ontstaat de originele rij van Fibonacci. Ook bestaan er rijen met een repeterend patroon, bijvoorbeeld 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, enzovoorts. De kans dat dit soort situaties optreden, is echter nul.

Viswanath heeft een opmerkelijk resultaat gevonden. Hij ontdekte dat, ondanks het kanselement in deze rijen, bij deze *stochastische Fibonacci-getallen* de absolute waarde van het quotiënt van twee opvolgende termen met kans 1 convergeert naar een constante waarde. Indien de munt zuiver is, is deze constante te 1,13198824...

Bron:
Science News Online, Volume 162, No. 14.

veelvlakkenposter

Pythagoras heeft een nieuwe poster uitgebracht, die uiteraard in het teken staat van het thema van deze jaargang. De poster toont diverse families van veelvlakken. Hier zie je de icosidodecaëder, een van de vele veelvlakken die op de poster te zien zijn. De poster (formaat A1) kost 5 euro (exclusief verzendkosten). Zie onze website voor de bestelgegevens.



Meer prijzen bij de prijsvraag

In het vorige nummer is de veelvlakkenprijsvraag uitgeschreven. Goed nieuws: er zijn nóg meer prijzen te winnen, te weten twee pakketten van *Rhinosoros* (de studentenversie), geleverd door de importeur. Rhinosoros is een professioneel 3D-tekenpakket (zie http://www.rhino3d.nl voor informatie). De veelvlakken op de nieuwe poster van Pythagoras zijn hiermee gemaakt. In het volgende nummer vind je meer informatie over de prijsvraag (insturen kan vanaf 15 april 2003).

Pythagoras Olympiade

door **René Pannekoek**, **Jan Tuitman** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerlinginzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@math.leidenuniv.nl,
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzending vermeld je je klas, de naam van de wiskundedocent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 januari 2003.

OPGAVE 89

22 bomen staan in een cirkel. In elke boom zit een raaf. Iedere minuut vliegen twee raven elk naar een van hun twee naburige bomen. Is het mogelijk dat na verloop van tijd alle raven in dezelfde boom zitten?

OPGAVE 90

Op een cirkel liggen n punten. Tussen elk tweetal punten wordt de verbindingslijn getrokken. De punten zijn zo gekozen dat geen drie verbindingslijnen door hetzelfde punt gaan. Hoeveel driehoeken, waarvan de drie hoekpunten binnen de cirkel liggen, worden op deze manier door de verbindingslijnen gevormd?

OPLOSSING

85

Er staan n soldaten op een rij. Ieder kijkt naar links of naar rechts. De commandant wil niet dat twee naast elkaar staande soldaten elkaar aankijken, en hij kan twee elkaar aankijkende soldaten het bevel geven zich allebei om te draaien. Bewijs dat hij dit maximaal $(\frac{n}{2})^2$ keer hoeft te doen totdat niemand elkaar meer aankijkt.

Oplossing. Geef een soldaat die naar links kijkt aan met de letter L en een soldaat die naar rechts kijkt met de letter R. Een bevel van de commandant komt er dan op neer dat RL verandert in LR. We kunnen deze verandering ook opvatten als een verwisseling van plaats van de twee soldaten, dit maakt voor het probleem niets uit. Zo kunnen we het hebben over soldaten die altijd naar links of altijd naar rechts blijven kijken en kunnen we hun aantallen aangeven met x respectievelijk $n - x$. Zolang er ergens in de rij nog oogcontact is, gaat de commandant door met bevelen en dit stopt pas als alle soldaten L links van alle soldaten R staan, dus als elk paar soldaten bestaande uit een L en een R in de volgorde LR staat. Omdat elk bevel een paar verwisselt en elk paar hooguit één keer verwisseld kan worden, is het benodigde aantal bevelen hoogstens gelijk aan het aantal paren LR; dit zijn er $x \cdot (n - x)$. Ga zelf na dat dit maximaal is voor $x = \frac{1}{2}n$, zodat je hooguit $(\frac{n}{2})^2$ bevelen nodig hebt.

Deze opgave werd opgelost door: Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda, Taco Vader van het **Gertrudis College** te Roosendaal en H. Verdonk te Den Haag.

De boekenbon gaat naar Johannes Steenstra.

OPLOSSING

86

$ABCD$ is een vierkant met zijde 1. DCE is een gelijkzijdige driehoek die zijde DC gemeen heeft met het vierkant. Bepaal de waarden die hoek AEB kan aannemen.

Oplossing. Er zijn twee mogelijkheden: E ligt binnen het vierkant of E ligt buiten het vierkant.

Als E binnen het vierkant ligt, is driehoek BCE gelijkbenig en omdat $\angle BCE = 30°$, is $\angle CEB = \frac{1}{2} \cdot (180° - 30°) = 75°$. Op dezelfde manier is $\angle AED = 75°$, zodat $\angle AEB = 360° - \angle AED - \angle DEC - \angle CEB = 150°$.

Als E buiten het vierkant ligt, is driehoek BCE ook gelijkbenig, maar nu met $\angle BCE = 150°$ en dus $\angle CEB = 15°$. We vinden dat $\angle AEB = 60° - \angle AED - \angle CEB = 30°$.

De waarden die hoek AEB kan aannemen, zijn dus $30°$ en $150°$.

Opmerking: oplossingen die gebruik maken van de inverse tangens of cosinus op de rekenmachine worden niet gezien als een exact bewijs en die hebben we daarom niet goed gerekend.

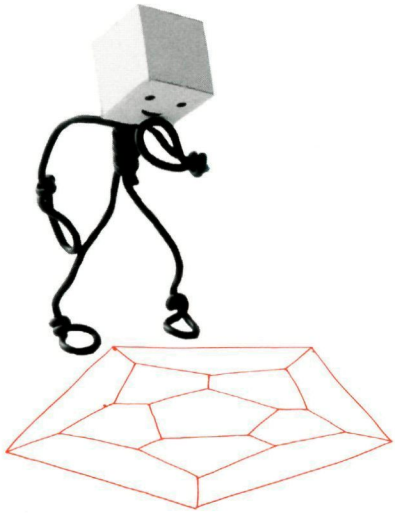
Deze opgave werd opgelost door: Taco Vader van het **Gertrudis College** te Roosendaal en H. Verdonk te Den Haag.

De boekenbon gaat naar Taco Vader.



door **Jan Aarts**

De formule van Euler



Zou je op het idee komen om van veelvlakken de aantallen hoekpunten, zijvlakken en ribben te tellen, dan zou je waarschijnlijk net als Descartes rond 1630 of Euler in 1752 een verrassend verband ontdekken. Over dat verband, dat tegenwoordig bekend staat als de *formule van Euler*, gaat dit artikel. De formule van Euler speelt een belangrijke rol in vele takken van de wiskunde, en is – zoals we je in dit artikel willen laten zien – helemaal niet moeilijk te bewijzen.

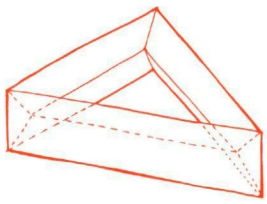
De formule van Euler heeft betrekking op zogenaamde *sferische veelvlakken* (waarvan we straks de definitie zullen geven) en geeft een verband tussen het aantal zijvlakken Z, het aantal ribben R en het aantal hoekpunten H van het veelvlak. De formule luidt

$$Z - R + H = 2.$$

Alle regelmatige en halfregelmatige veelvlakken zijn sferisch; voor die veelvlakken geldt dus de formule van Euler. De dodecaëder (het regelmatige twaalfvlak) in figuur 2 (pagina 28), bijvoorbeeld, heeft 12 zijvlakken, 30 ribben en 20 hoekpunten. Inderdaad is $12 - 30 + 20 = 2$.

Sferische veelvlakken

Wat is een sferisch veelvlak? Een sferisch veelvlak ziet er, ruwweg, uit als een gedeukte bol. Voor een betere beschrijving stellen we ons voor dat het beschouwde veelvlak gemaakt is van ideaal rekbaar en indrukbaar materiaal. Bij een *topologische vervorming* van het veelvlak mogen we het veelvlak rekken en indeuken, maar niet scheuren of plakken. We zeggen nu dat een veelvlak *sferisch* is als we het topologisch kunnen vervormen tot een bol. Een regelmatig veelvlak kunnen we gemakkelijk opblazen tot een bol en is dus sferisch. Het ringvormige veelvlak in figuur 1 is niet sferisch. Bij dit veelvlak vind je voor $Z - R + H$ de waarde 0. De formule van Euler geldt bij dit veelvlak dus niet.



Figuur 1.
Een torus: een ringvormig veelvlak

Een veelvlak als landkaart

Nu we toch met vervormingen van een veelvlak bezig zijn, kunnen we nog een stapje verder gaan en een sferisch veelvlak voorstellen als een landkaart (in het vlak).

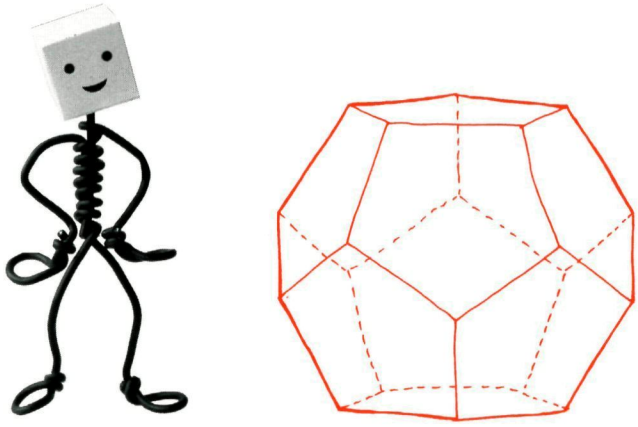
Nadat we het sferisch veelvlak hebben vervormd tot een bol, prikken we een gat in de bol en spreiden hem daarna uit tot hij in het vlak ligt. Voor de dodecaëder wordt dit geïllustreerd in de figuren 3, 4, en 5 op de volgende pagina's.
Het resultaat ziet eruit als een *landkaart*: de landen van de kaart zijn ontstaan door vervorming van de zijvlakken, de ribben corresponderen met de grenzen tussen de landen en de hoekpunten zijn de meerlandenpunten van de kaart geworden. De aantallen zijn hierbij niet veranderd: het aantal landen van de kaart is gelijk aan het aantal zijvlakken van het veelvlak. Hetzelfde geldt voor grenzen en ribben, en voor meerlandenpunten en hoekpunten. Om de formule van Euler af te leiden, kunnen we dus net zo goed de gevormde landkaart bekijken.

Het bewijs van de formule

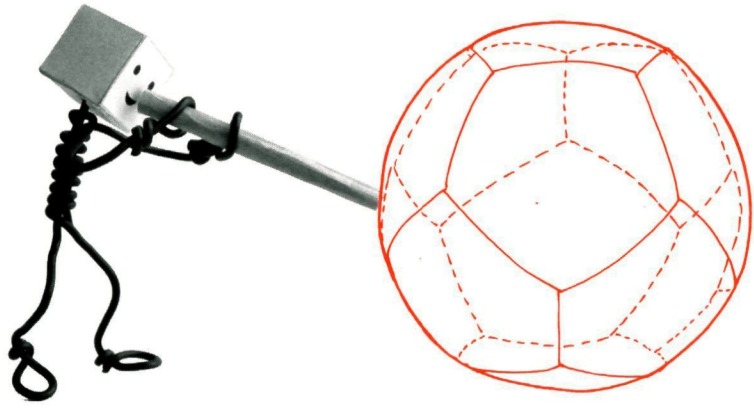
We bekijken de landkaart die ontstaan is uit het sferische veelvlak. Het aantal landen is Z, het aantal grenzen is R en het aantal meerlandenpunten is H. We zullen de grenzen in twee groepen indelen, de *gesloten* en de *open grenzen* geheten. Over de gesloten grenzen kun je niet heen, over de open grenzen wel. Het zal blijken dat het aantal gesloten grenzen gemakkelijk te tellen is, evenals het aantal open grenzen. En uit die twee aantallen volgt dan de formule van Euler.

De gesloten grenzen

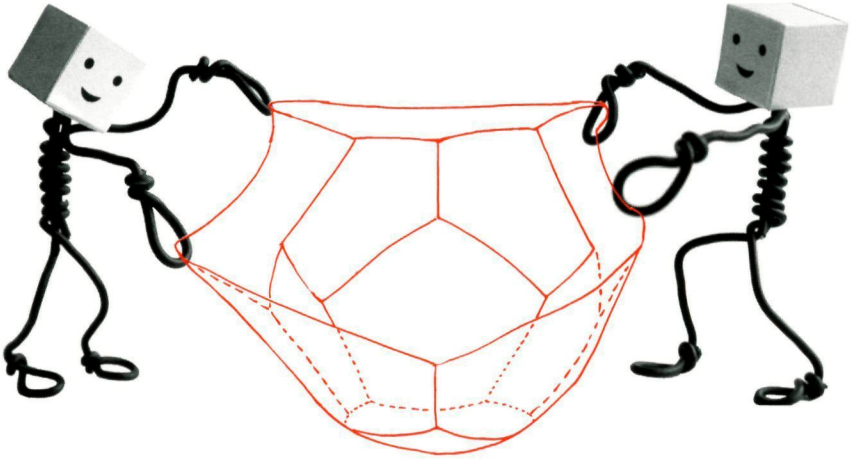
Eerst gaan we zoveel mogelijk grenzen sluiten, maar dat doen we wel zó dat geen enkel land helemaal wordt afgesloten van een ander land. Dit kan op veel manieren, wij beschrijven er hier één die altijd werkt. Begin in een willekeurig meerlandenpunt en sluit alle grenzen die daarin uitkomen. Sluit vervolgens, stap voor stap, telkens een grens die vastzit aan de reeds gesloten grenzen, maar doe dit wel zó dat er geen circuit van gesloten grenzen ontstaat. Hiermee gaan we door tot we niet meer verder kunnen. Op deze manier ontstaat een boom van gesloten grenzen: een *maximaal opspannende boom*. In figuur 6 is voor de kaart van de dodecaëder met dikke lij-



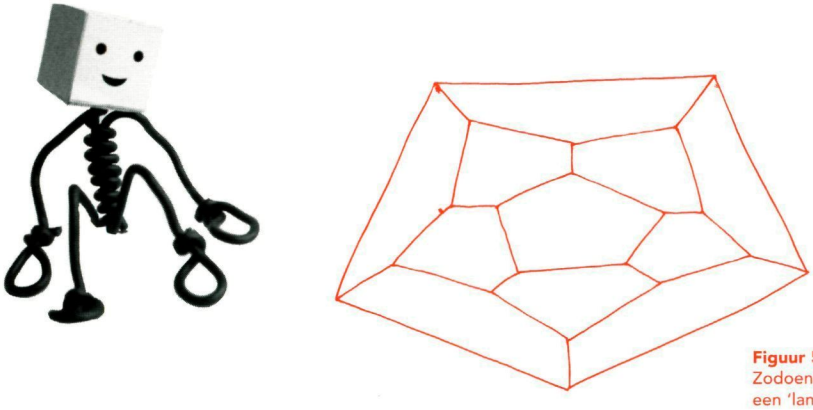
Figuur 2.
De dodecaëder



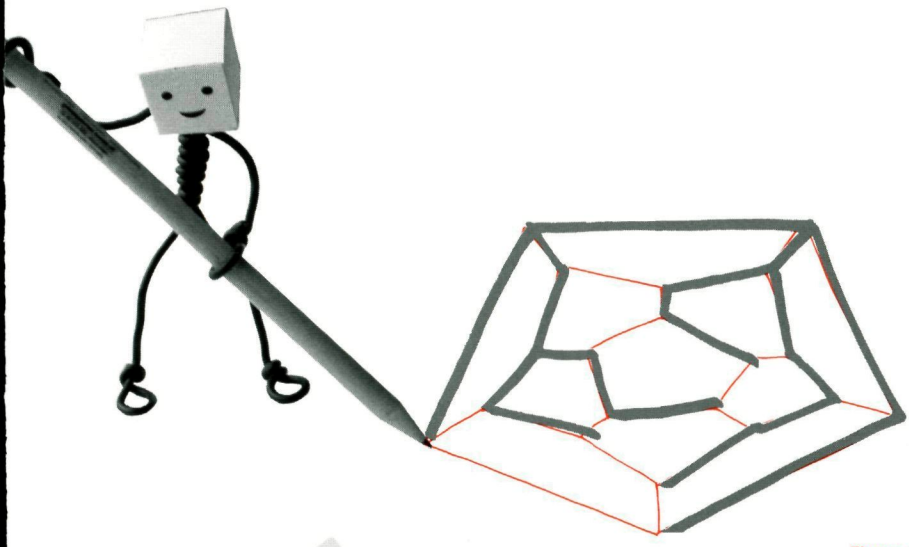
Figuur 3.
De tot een bol vervormde dodecaëder.



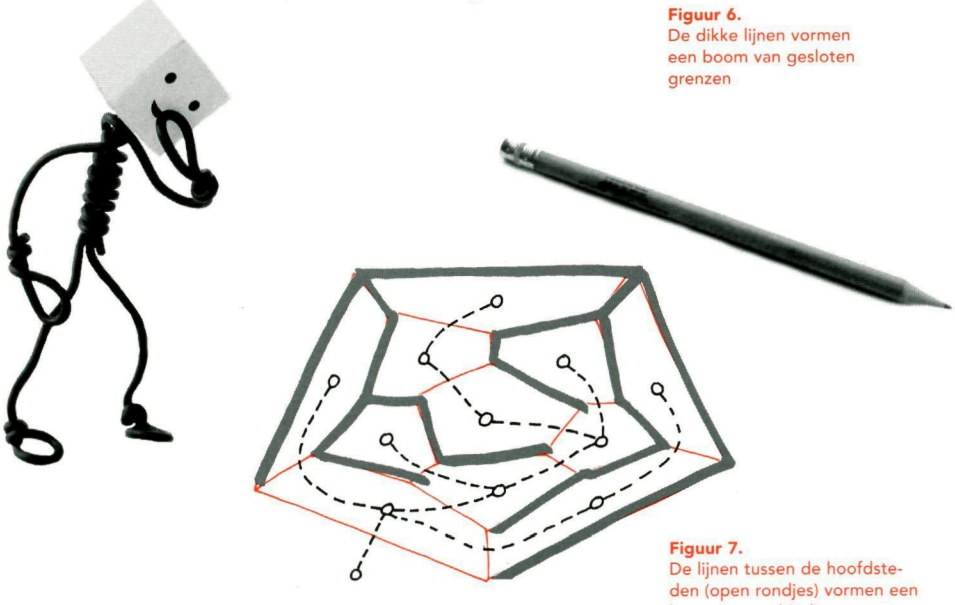
Figuur 4.
In de bol wordt een gat geprikt en de bol wordt uitgespreid.



Figuur 5.
Zodoende ontstaat een 'landkaart'



Figuur 6.
De dikke lijnen vormen een boom van gesloten grenzen



Figuur 7.
De lijnen tussen de hoofdsteden (open rondjes) vormen een boom van verbindingswegen

nen de boom van gesloten grenzen aangegeven. Omdat er in de landen van de kaart geen gaten zitten, kunnen we nu van elk meerlandenpunt via de grenzen lopen naar ieder ander meerlandenpunt. Daarom zitten alle meerlandenpunten in de boom. Het aantal gesloten grenzen is dus gelijk aan aan $H - 1$; het meerlandenpunt waar je begonnen bent, moet je niet meetellen, en daarna tel je bij iedere grens die je sluit het toegevoegde meerlandenpunt.

De open grenzen

Nu kiezen we in ieder land een hoofdstad en gaan proberen de hoofdsteden te verbinden, zónder de gesloten grenzen te overschrijden. Omdat de boom van gesloten grenzen geen circuit bevat, kunnen we van iedere hoofdstad naar iedere andere hoofdstad gaan. Zo ontstaat een boom van verbindingswegen, waarbij ieder weggedeelte (van hoofdstad naar hoofdstad) precies één open grens kruist. In figuur 7 is dit aangegeven voor de kaart van de dodecaëder.

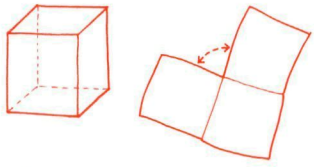
We kunnen nu concluderen dat het totale aantal weggedeelten in de boom van verbindingswegen gelijk is aan $Z - 1$.
Nu zijn alle grenzen aan de beurt geweest; sommige als gesloten grens, andere zijn gekruist door een weggedeelte en dat zijn open grenzen. Hoe weet je nu zeker dat alle grenzen aan de beurt komen? Wel, als een open grens niet wordt gekruist, dan had hij toegevoegd kunnen worden aan de gesloten grenzen. Daarom is

$$R = (H - 1) + (Z - 1).$$

Hieruit volgt de formule van Euler.

Een toepassing: het totale hoektekort

De formule van Euler heeft ontzettend veel toepassingen. Hij kan worden gebruikt voor het inventariseren van de regelmatige en halfregelmatige veelvlakken. De formule speelt een belangrijke rol bij de oplossing van het vier-kleuren-probleem. Ook is hij de sleutel bij vele puzzels.
Hier zullen we de formule gebruiken om het *totale hoektekort* van een sferisch veelvlak te berekenen. Wat is dat, het totale hoektekort? Bekijk eerst eens de kubus. In elk hoekpunt komen drie vierkanten samen. Als je die vierkanten uitvouwt in een plat vlak, dan vormen zij samen een hoek van $270°$. Het verschil met $360°$ is $90°$ en dat verschil noemen we het *hoektekort in dat punt*, zie figuur 8. Tellen we de hoektekorten van alle hoekpunten van de kubus bij elkaar op, dan krijgen we het *totale hoektekort* van de kubus, en dat is $8 \times 90° = 720°$. Doe je dit voor een ander regelmatig veelvlak, dan vind je eveneens een totaal hoektekort van $720°$. Dat kan geen toeval zijn. Er geldt: voor ieder sferisch veelvlak is het totale hoektekort gelijk aan $720°$.



Figuur 8. Het hoektekort van een kubus

We leiden dit af uit de formule van Euler.
We bekijken een sferisch veelvlak met Z zijvlakken, R ribben en H hoekpunten. De zijvlakken noemen we $A_1, A_2, \ldots, A_Z$. Het aantal ribben van het zijvlak A_k noemen we n_k. Het hoektekort in een hoekpunt is $360°$ min de som van de hoeken bij dat hoekpunt. Het totale hoektekort is dan $H \cdot 360°$ min de som van alle hoeken. De som van alle hoeken is makkelijk gevonden. De som van de hoeken van het zijvlak A_k is $(n_k - 2) \cdot 180°$. De som van alle hoeken wordt nu 180 keer

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + \cdots + (n_Z - 2) =$$
$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_Z) - 2Z.$$

Het aantal ribben is $R = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_Z}{2}$.
Immers, A_k heeft n_k ribben, en als je die aantallen bij elkaar optelt, tel je iedere ribbe twee keer. Zo vinden we voor de som van de hoeken $(2R - 2Z) \cdot 180°$.
Met de formule van Euler vinden we dan voor het totale hoektekort

$$H \cdot 360° - (2R - 2Z) \cdot 180° =$$
$$(H - R + Z) \cdot 360° = 720°.$$

OPLOSSINGEN NR 1

Oplossingen Kleine nootjes

Houthakken
Op beide diagonalen staan 9 bomen. De middelste boom in het park hebben de twee diagonalen gemeenschappelijk, dus er moeten $9 + 9 - 1 = 17$ bomen worden omgehakt.

Zonnebril
Stel dat één zonnebril x procent van het zonlicht doorlaat. Dan geldt: $(x/100) \cdot (x/100) = 0{,}04$. Hieruit volgt dat $x = 20$. Dus één zonnebril laat 20 procent van het zonlicht door.

Kangoeroes
Noem het totale aantal kangoeroes n. Dan geldt dat $n : 90 = 70 : 20$. Dit heeft als oplossing $n = 315$.

Maandag wasdag
Nul meter.

Lood om oud ijzer
De staafmagneet is alleen aan de uiteinden (polen) magnetisch, niet in het midden.

Errata

Helaas is er iets fout gegaan in de verwerking van de inzenders van Pythagoras Olympiade 79, 80 en 82. Birgit van Dalen van de *Vlaardingse Openbare Scholengemeenschap* te Vlaardingen heeft deze drie opgaven goed opgelost, maar zij werd niet vermeld bij de goede inzenders. Onze excuses.

In het vorige nummer was de bron van de *Kleine nootjes* verkeerd vermeld. Het moest zijn: Dick Beekman, *Hersenkrakers*, Kosmos-Z&K Uitgevers, 1994. De auteur heeft ook een homepage: http://www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman.

Eindstand Pythagoras Olympiade Laddercompetitie 2001-2002

Er zijn vier winnaars bij de laddercompetitie 2001-2002 van de Pythagoras Olympiade. **Birgit van Dalen** heeft 9 opgaven opgelost en is daarmee winnaar. Zij ontvangt een boekenbon van 120 euro. **Thomas Beuman** is met 7 opgaven tweede. Hij krijgt een boekenbon van 100 euro. De derde plaats wordt gedeeld door **Bram Kuijvenhoven** en **P. Dekker.** Zij losten 6 opgaven goed op. Zij winnen ieder een boekenbon van 40 euro. Gefeliciteerd!

De complete eindstand van de competitie kun je vinden op http://www.math.leidenuniv.nl/rubriek/po/index.php3

Activiteiten

maandag 9 december 2002
Bèta-festival
Voor leerlingen uit bovenbouw vwo en studenten
http://www.science.uva.nl

zaterdag 11 januari 2003
Wintersymposium 'Wiskunde in techniek'
Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Amersfoort
http://www.cs.rug.nl/~bakker/WG/

vrijdag 17 januari 2003
Nederlandse Wiskunde Olympiade 2002-2003, eerste ronde
http://olympiads.win.tue.nl/nwo/

vrijdag 31 januari 2003
UvA-voorlichtingsdag op lokatie
Voor leerlingen uit 6vwo
Wiskunde: Gebouw Euclides, Plantage Muidergracht 24, Amsterdam
http://www.uva.nl/aankomende.studenten/voorlich/

vrij 31 januari, zat 1 februari 2003
Nationale Wiskunde Dagen
Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout
http://www.fi.uu.nl/nwd

zaterdag 8 februari 2003
Voorlichtingsdag Vrije Universiteit
Voor leerlingen uit klas 4, 5 en 6vwo
http://www.vu.nl/voorlichtingsdagen

vrij 14 en zat 15 februari 2003
Krokuscursus
Subfaculteit wiskunde aan de KUN
http://www-math.sci.kun.nl/math/voorlichting/krokusprog-dut.shtml

vrijdag 21 maart 2003
Europese Kangoeroe Wiskundewedstrijd 2003
Voor leerlingen uit de klassen 1 t/m 5
http://www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe/

zaterdag 22 maart 2003
Voorlichtingsdag UvA
Voor leerlingen uit klas 4, 5 en 6 vwo
http://www.uva.nl/aankomende.studenten/voorlich/

Sponsors
Pythagoras wordt gesponsord door de wiskunde- en de logica-afdeling van de Universiteit van Amsterdam, door de wiskunde-afdelingen van de Vrije Universiteit Amsterdam, de Universiteit Leiden en de Rijksuniversiteit Groningen, en door het Centrum voor Wiskunde & Informatica.



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Universiteit Leiden



Rijksuniversiteit Groningen



Centrum voor Wiskunde & Informatica

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras verschijnt deze jaargang vijf keer, met een dubbelnummer in februari.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op een van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855 175,
per fax: 0522 855 176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

Tarieven 2002-2003
Jaarabonnement:
Pythagoras € 19,50
Pythagoras België € 22,00
Pythagoras buitenland € 25,00
Pythagoras én Archimedes € 33,50
Pythagoras én Archimedes België € 38,50
Pythagoras én Archimedes buitenland € 44,50
Losse nummers Pythagoras € 4,00

Leerlingabonnement
Pythagoras € 16,50 per jaar
Pythagoras België € 20,00 per jaar
Leerlingabonnementen zijn voor leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar). Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Bulkabonnement
Pythagoras € 13,50 per jaar
Pythagoras België € 15,00 per jaar
Voor scholen zijn er bulkabonnementen. Minimum afname: vijf stuks, altijd één exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één schooladres gestuurd.
Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgiro krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Gewone abonnementen en leerlingabonnementen zijn doorlopend, tenzij vóór 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:
Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie zijn oude jaargangen en posters te bestellen:
jaargangen 36 t/m 40 € 12,50
jaargang 41 € 18,00
poster 'Zeef van Eratosthenes' € 3,50
poster 'Onmogelijke stelling' € 3,50
poster 'Veelvlakken' € 5,00
Prijzen zijn exclusief verzendkosten.

42ste JAARGANG NUMMER 2