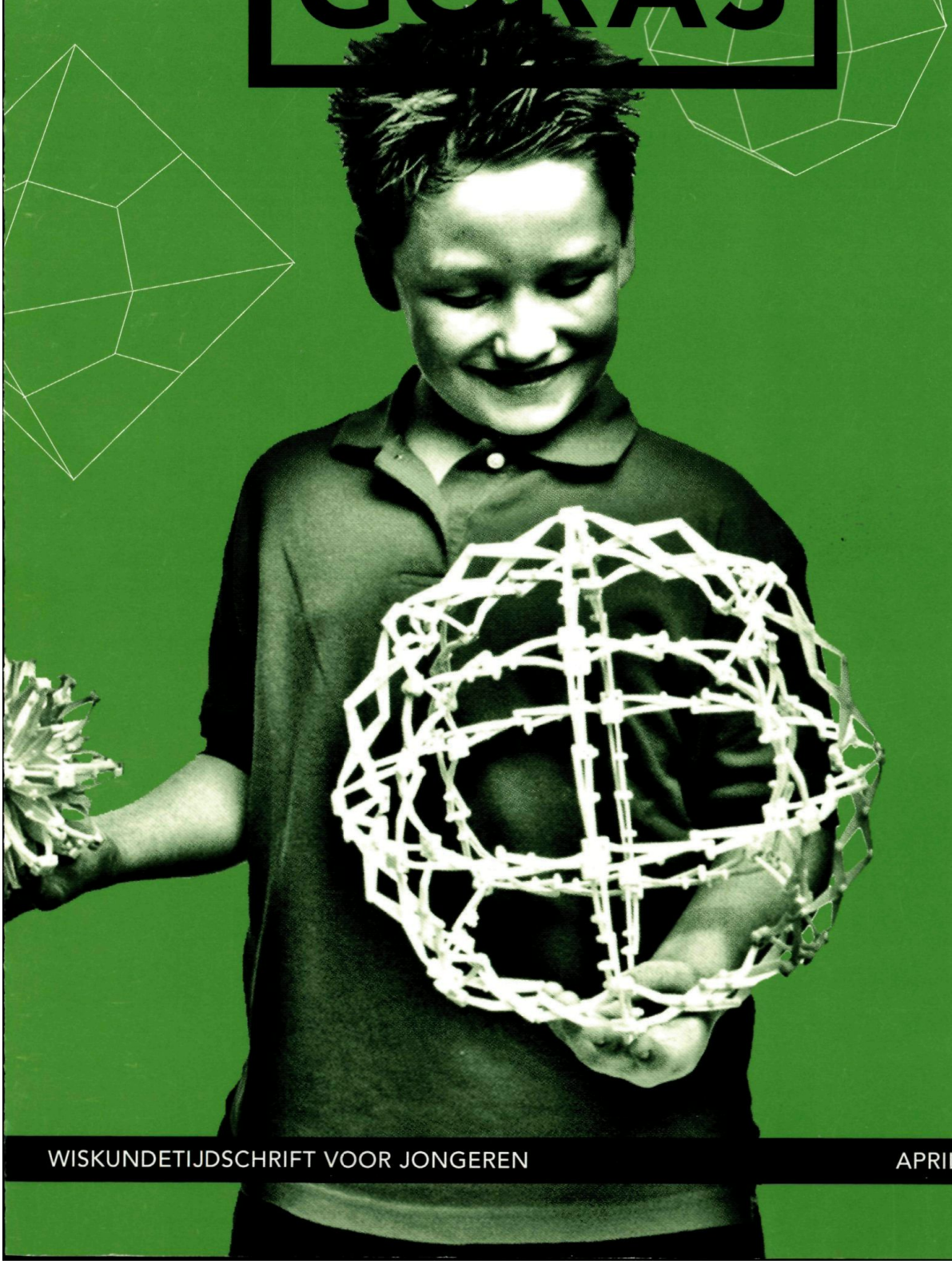
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN APRIL 2003

PYTHAGORAS

42ste jaargang nummer 5
ISSN 0033 4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

Internet
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Redactie
Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofdredactie
Marco Swaen

Eindredactie
Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Bladmanager
Reinie Erné

Uitgever
Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
pythagoras@science.uva.nl

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
Tel. 071 5277 121
Fax 071 5277 101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
Tel. 0522 855 175
Fax 0522 855 176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met 2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Medewerkers
drs. A.J. van den Brandhof is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. L.A.M. van den Broek** is docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **drs. J. Donkers** is onderzoeker bij de vakgroep Informatica aan de Universiteit Maastricht. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **prof. dr. G. Koole** is hoogleraar optimalisatie van bedrijfsprocessen aan de VU te Amsterdam. **drs. J.M. Notenboom** is docent aan de FEO te Utrecht. **D.A. Odegard** is docent wiskunde aan het Alberdingk Thijm College te Hilversum. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **dr. ir. J.W.H.M. Uiterwijk** is universitair hoofddocent Informatica aan de Universiteit Maastricht. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is educatief ontwerper aan het FI te Utrecht.

Omslag
De *Mini Sphere*, ontworpen door de Amerikaan Charles Hoberman.

INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 7 **Mancala-puzzels**

8 - 9 **Pythagoras Olympiade**

10 - 11 **Tweeling-puzzel**

12 - 15 **Met wiskunde naar de zon**

16 - 17 **Problemen – Oplossingen**

18 - 21 **Zelf veelvlakken maken (4)**

22 - 26 **Het vliegervierentwintigvlak**

27 - 28 **Inhoudsopgave**

29 **Journaal**

30 - 31 **Oplossingen nr. 3/4**

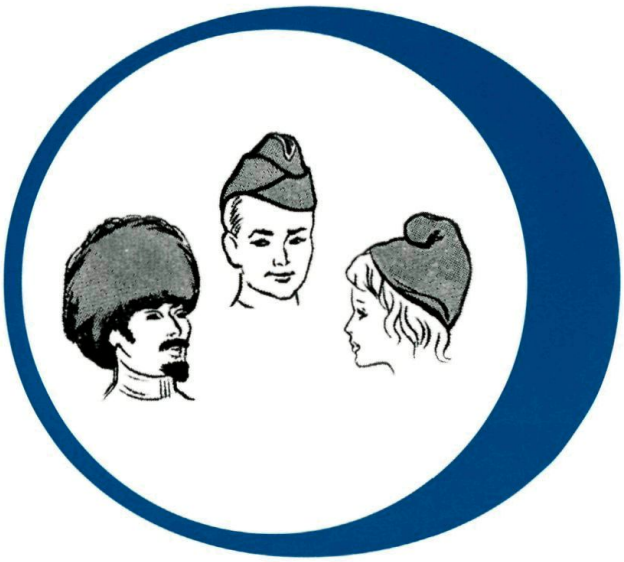
32 **Activiteiten**

door **Chris Zaal**

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes

2

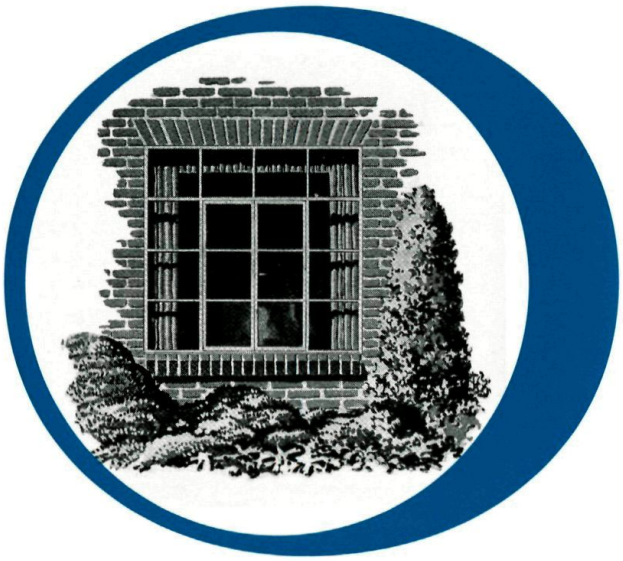


Zwijgen is goud

In een gesloten tas zitten drie groene en twee rode mutsen. Alice, Bart en Cees sluiten hun ogen, trekken elk een muts uit de tas en zetten die op. Wanneer ze hun ogen openen, ziet Alice de mutsen van Bart en Cees, maar daaruit kan ze niet de kleur van haar eigen muts afleiden. Nu probeert Bart hetzelfde, maar ook hij is niet absoluut zeker. Wat is de kleur van de muts van Cees?

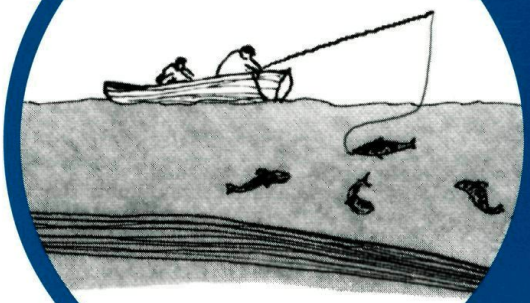
Uitzicht

In de voorgevel van mijn nieuwe huis zitten twee ramen. Beide zijn 1 meter hoog en 1 meter breed. Toch is het ene raam twee keer zo groot als het andere. Hoe kan dat?



Hengel

Joerie heeft een hengel gekocht van 3 meter lang. De hengel is verpakt in een cilindervormige verpakking langer dan 3 meter. Hij stapt in de bus op weg naar huis, maar de buschauffeur staat geen pakketten toe die in welke richting dan ook meer dan 2 meter meten. Joerie gaat terug naar de winkel en staat even later weer buiten om de volgende bus te pakken. Wat deed hij in de winkel?

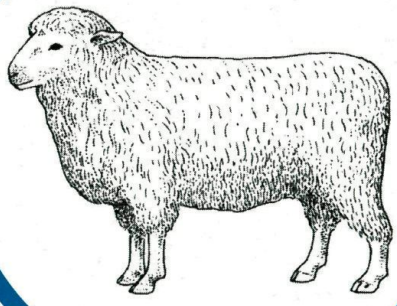


Klokkijken

'Klokje, klokje aan de muur, hoeveel van de dag is reeds voorbij?' Het klokje antwoordt: 'Er resteert tweemaal tweederde van de verstreken uren.' Hoe laat is het?

Schapen scheiden

Een veehandelaar wil op een veemarkt zes schapen verkopen. De schapen wil hij scheiden met behulp van 12 dranghekken, die alleen aan de uiteinden aan elkaar vastgemaakt kunnen worden. Hoe kan hij de dranghekken opstellen?



door **Jeroen Donkers** en **Jos Uiterwijk**

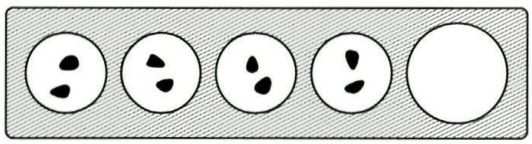
Mancala-puzzels

Een speelbord van Dakon.
Foto: Collectie Wereldmuseum Rotterdam

In het vorige nummer van Pythagoras hebben we mancala-spelen geïntroduceerd: Wari en Kalah. In dit artikel bespreken we andere vormen van mancala, onder andere een spel dat je alleen kunt spelen.

Tchuka ruma

Tchuka ruma is een mancala-spel dat je alleen kunt spelen, bijvoorbeeld op het strand. Maak vier kuiltjes in het zand op een rij en maak er een vijfde grote achteraan, zie figuur 1. Dit laatste vakje heet de *ruma*. Leg in alle vakjes, behalve de ruma, twee schelpen. Het doel is om alle acht de schelpen in de ruma te krijgen. Een zet gaat als volgt: kies een kuiltje (maar niet de ruma) en neem alle schelpen daaruit. Zaai de schelpen van links naar rechts, te beginnen bij het vakje rechts van wat je leeg hebt gemaakt. Neem de ruma tijdens het zaaien mee. Als je na de ruma nog steeds schelpen hebt om te zaaien, ga dan verder met het eerste vakje aan de linkerkant. De plek waar de laatste schelp terechtkomt, is belangrijk: is dat de ruma, dan mag je nog een beurt; is dat een vakje waar al schelpen in zaten, dan moet je al die schelpen eruit nemen en doorgaan met zaaien. Komt de laatste schelp in een leeg vakje terecht, dan ben je af.



Figuur 1. De beginpositie van Tchuka Ruma. Het doel is om de acht steentjes in het grote kuiltje te krijgen.

We geven een voorbeeld. In het begin is de verdeling $[2,2,2,2,(0)]$. Als je vakje 4 speelt, is na de eerste keer zaaien de verdeling $[3,2,2,0,(1)]$, omdat je na de ruma nog een schelp over hebt, die je dus in het eerste vakje moet stoppen. Nu moet je verder gaan met zaaien: $[0,3,3,1,(1)]$. De laatste schelp komt terecht in vakje 4 dat leeg was. Vakje 4 was dus geen goede keuze, want we zijn bij de eerste beurt al af. Als we het derde vakje hadden gespeeld, zou de verdeling $[2,2,0,3,(1)]$ zijn. Omdat we in de ruma zijn uitgekomen, mogen we nog een keer. In welke volgorde moet je de vakjes kiezen om alles in de ruma te krijgen? Probeer het maar eens.

Hoe kun je op een wiskundige manier een oplossing voor dit spel vinden? Wat voor de hand ligt, is om systematisch een boom te tekenen van alle keuzemogelijkheden en de verdeling die deze opleveren. Zo zie je dat je bij de eerste beurt alleen met vakje 3 niet direct af bent. Je hebt echter een behoorlijk groot vel papier nodig om de hele boom te tekenen en de oplossing te vinden.

Een andere manier is door achteruit te redeneren. Uiteindelijk willen we naar de verdeling $[0,0,0,0,(8)]$. De enige manier om in één beurt hierop uit te komen, is vanuit de verdeling $[0,0,0,1,(7)]$, ga maar na. Nu kun je deze verdeling vervolgens in één beurt bereiken via $[0,0,2,0,(6)]$, maar ook via $[0,1,1,0,(6)]$.

Terwijl je bij het vooruitdenken alleen de spelregels hoeft te volgen, moet je bij het achteruit redeneren steeds denken aan hoe je een verdeling op verschillende manieren kunt bereiken. Dat is veel lastiger. Is er niet een slimmere manier om Tchuka Ruma op te lossen? Nee, tenminste niet in het algemeen. Gelukkig is het voor een computer niet moeilijk om geduldig systematisch alle mogelijkheden te checken.

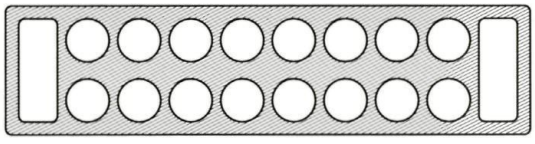
Je kunt Tchuka Ruma ook spelen met andere aantallen schelpen per vakje en andere aantallen vakjes. Je moet daarbij wel opletten: er bestaat niet altijd een oplossing! Als je bijvoorbeeld kiest voor hetzelfde aantal schelpen als dat er vakjes zijn, dan kun je eenvoudig inzien dat waar je ook begint, het laatste schelpje altijd in een leeg vakje uitkomt, namelijk het vakje waar je bent begonnen. Het is wiskundig aan te tonen dat een hoop versies (instanties, zoals we dat noemen) van Tchuka Ruma geen oplossing hebben. Het is, vreemd genoeg, niet wiskundig te bewijzen welke van de andere instanties wél een oplossing hebben. Alleen het systematisch uitproberen van alle mogelijkheden geeft uitsluitsel.

Dakon

Dakon is een mancala-versie uit Zuidoost-Azië. Het wordt op grotere borden

gespeeld dan Kalah en Wari: twee rijen van 7, 8, 9 of meer vakjes plus twee verzamelbakjes, zie figuur 2. In de vakjes liggen bij het begin net zoveel stenen als er vakjes zijn per rij. De spelregels lijken erg op die van Kalah. Het grote verschil is dat, net als bij Tchuka Ruma, je moet doorzaaien als het laatste steentje terechtkomt in een vol vakje.

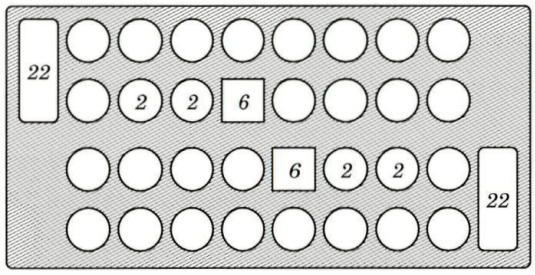
In Dakon kan een zet erg lang duren: het kan lang duren totdat je klaar bent met zaaien en bovendien mag je nog een keer als je in je eigen verzamelbakje terechtkomt. Het eigenaardige aan Dakon is dat het eigenlijk gewonnen is in de eerste beurt: het is mogelijk om de eerste beurt zodanig te doen dat je zoveel stenen slaat dat de tegenstander niet meer kan winnen! Zo'n beurt is wel heel ingewikkeld. Bij Dakon met acht vakjes moet je bijvoorbeeld spelen: 1, 8, 8, 6, 4, 6, 2, 3, 7, 4, 5, 1, 8, 8, 3, 8, 4, 8, 7, 8, 5, 2, 7, 8, 6, 5, 6, 3, 7, 4, 5, 2, 5, 8, 8, 6, 8, 3, 8, 5, 8, 7, 4, 8, 7, 8, 7, 8, 8, 6, 8, 7, 8, 4, 8, 6, 8, 3, 8, 6, 8, 5, 8, 6, 1, 8, 7, 8, 5, 8, 4, 6, 7, 8, 8, 5, 6, 8, 3, 8, 1, 8, 7, 8, 2, 8, 6, 8, 5, 8, 6, 8, 3. Deze oplossing is op de Maladiven helemaal met de hand gevonden! Gelukkig wordt het spel nog steeds gespeeld. Niet iedereen kent deze oplossing, en anders worden de spelregels gewoon een klein beetje aangepast. Zo is er een versie waarbij de eerste beurt door de spelers tegelijkertijd wordt uitgevoerd.



Figuur 2. Een speelbord van Dakon.

Bao

De ingewikkeldste versie van mancala is wellicht het spel Bao dat in Tanzania en op Zanzibar wordt gespeeld. Bao wordt gedaan op een bord met vier rijen van acht vakjes en twee verzamelbakjes, zie figuur 3. Ieder van de spelers heeft twee rijen. De beginverdeling van de steentjes kun je zien in figuur 4. Het zaaien gebeurt alleen op de eigen twee rijen en zonder de verzamelbakjes er bij te betrekken. Net zoals in Dakon gaat het zaaien door totdat er een leeg vakje is bereikt, of totdat er geslagen kan worden. Het slaan in Bao gebeurt als je in je binnenste rij in een vakje uitkomt dat niet leeg is en waartegenover een vakje ligt dat ook niet leeg is. De stenen die je slaat, gaan niet in je verzamelbak, maar die stenen zaai je meteen in je eigen rij terug.



Figuur 4. De beginpositie van Bao. De getallen geven het aantal steentjes aan.

De spelregels van Bao zijn veel te ingewikkeld om hier helemaal uit te leggen. Zo spelen de vierkante vakjes een speciale rol in het spel. Maar uit wat je nu weet, kun je een gekke eigenschap van Bao afleiden: het is mogelijk in Bao dat een beurt oneindig lang duurt. Dit komt doordat je tijdens het zaaien geen stenen kwijtraakt in een verzamelbakje. Bao-spelers willen er moeilijk aan, maar met de computer hebben we aangetoond dat ook tijdens gewone Bao-spelletjes oneindige zaaiingen mogelijk zijn.

Het is niet moeilijk om verdelingen te bedenken die tot eindeloos doorzaaien leiden: leg in de vakjes achtereenvolgens één, twee, drie, tot en met 16 stenen, maar leg een extra steen in het laatste vakje zodat er daar 17 stenen zijn. Speel nu met dit laatste vakje in de richting van het vakje met 15 stenen. Je zult zien dat als je de 17 stenen hebt gezaaid, je precies weer de verdeling 1 tot en met 15 hebt en een vakje met 17 stenen. Je houdt steeds hetzelfde patroon over dat zich over het bord verplaatst. In dit geval duurt het precies zestien ronden totdat je weer precies op het uitgangspunt terug bent.

Figuur 3. Een speelbord van Bao.
Foto: Collectie Tropenmuseum Amsterdam

Er zijn echter ook verdelingen mogelijk die er enorm lang over doen om terug te keren. Het is daarom niet eenvoudig om te zien of een verdeling leidt tot een eindige (maar langdurige) of een oneindige, zich herhalende, zaaiing. In de praktijk hebben spelers hier niet zoveel last van: tijdens het zaaien maak je al gauw een foutje en dan wordt een oneindige cyclus verbroken.
Door de specifieke eigenschappen van Bao is het zeer moeilijk om het spel (ook met de computer) op te lossen. Achteruit redeneren werkt immers niet: alle stenen blijven op het bord en de lange zaaiingen en ingewikkelde beurten maken het achteruit redeneren ook heel erg lastig om uit te voeren. Het eenvoudig nalopen van alle mogelijkheden is ook niet haalbaar: er zijn veel te veel mogelijkheden en oneindige zetten strooien roet in het eten.

Literatuur

Larry Russ (2000), *The complete mancala games book*. Marlowe Company, New York. ISBN 1-56924-683-1.
H.J.R. Murray (1952), *A history of board games other than chess*. London: Oxford at the Clarendon Press.
A.J. de Voogt (1995), *Limits of the Mind: towards a characterisation of Bao mastership*. Leiden: CNWS Publications.

Internet

http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/countcap/pages
http://www.tradgames.org.uk/games/Mancala.htm
http://members.aol.com/hyadessoft/mancala/museum
http://www.cs.uu.nl/~hansb/d.gam/mancala.html
http://www.myriad-online.com/awalink.htm
http://www.cs.unimaas.nl/~donkers/games/ruma
(speel Tchuka Ruma)
http://www.expat.or.id/info/congklak.html
(Dakon of 'Congklak')
http://www.cs.unimaas.nl/~donkers/games/bao
(over Bao)
http://www.cs.toronto.edu/~mackay/games/bao
(oneindige zetten in Bao)

Pythagoras Olympiade

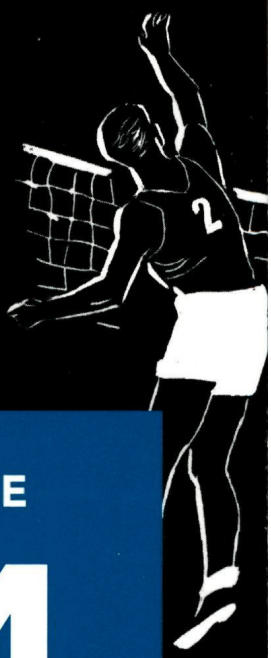
door **René Pannekoek**, **Jan Tuitman** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@math.leidenuniv.nl,
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzending vermeld je je klas, de naam van de wiskundedocent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 mei 2003.



OPGAVE 94

Jij gooit n keer achter elkaar met een munt. Daarna gooi ik ook, één keer vaker dan jij. Hoe groot is de kans dat ik vaker kop gooi dan jij?

OPGAVE 95

Bewijs dat een natuurlijk getal N dat geen priemgetal is, kan worden geschreven als $ab + bc + ac + 1$, voor zekere natuurlijke getallen a, b en c.

OPLOSSING

89

22 bomen staan in een cirkel. In elke boom zit een raaf. Iedere minuut vliegen twee raven elk naar een van hun twee naburige bomen. Is het mogelijk dat na verloop van tijd alle raven in dezelfde boom zitten?

Oplossing. Nummer de bomen met de klok mee van 1 t/m 22 (het maakt hierbij niet uit waar je begint). Elke raaf heeft het nummer van de boom waar hij in zit. Tel na n minuten de 22 nummers van de raven bij elkaar op en noem de som S_n. Dus S_0 is gelijk aan $1 + 2 + \cdots + 22 = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 23 = 253$. Elke minuut verandert het nummer van twee raven van even in oneven of omgekeerd, zodat $S_{n+1} - S_n$ altijd even is. Omdat S_0 oneven is, zal S_n voor elke n dus oneven zijn. Als alle raven echter in dezelfde boom zouden zitten, zou S_n voor zekere n een veelvoud van 22 zijn, dus even. Omdat dit niet kan, zullen nooit alle raven in dezelfde boom zitten.

Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Jeannet Hennipman van het **Van Lodenstein College** te Amersfoort, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda** te Breda, Peter Smit van het **Driestar College** te Gouda en Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda.
De boekenbon gaat naar Johan Konter.

ABUIS

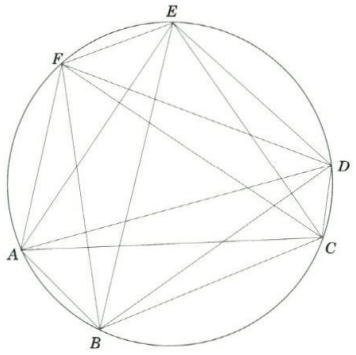
Bij **oplossing 88** in het vorige nummer werd gemeld dat te bewijzen was dat $a^2 + b^2 + c^2$ priem is.
Het moet natuurlijk *niet priem* zijn.

OPLOSSING

90

Op een cirkel liggen n punten. Tussen elk tweetal punten wordt de verbindingslijn getrokken. De punten zijn zo gekozen dat geen drie verbindingslijnen door hetzelfde punt gaan. Hoeveel driehoeken, waarvan de drie hoekpunten binnen de cirkel liggen, worden op deze manier door de verbindingslijnen gevormd?

Oplossing. Elke inwendige driehoek wordt ingesloten door drie lijnen, die geen punten op de cirkel gemeenschappelijk hebben (twee lijnen die niet samenvallen snijden elkaar immers hoogstens één keer). Per lijn levert dit twee punten op, in totaal zes punten. Voor $n \leq 5$ zijn er dus geen inwendige driehoeken. We kijken nu naar een willekeurig zestal punten op de cirkel, die we A t/m F noemen (zie plaatje). De diagonalen AD, BE en CF vormen altijd een inwendige driehoek, maar met andere combinaties lukt dit niet (ga dit zelf na). Per zestal punten is er dus precies één inwendige driehoek, zodat het totale aantal gelijk is aan het aantal manieren waarop je zes punten uit n kunt kiezen, oftewel $\binom{n}{6}$.



Deze opgave werd opgelost door: Jaap Bak te Amstelveen en Elias C. Buissant des Amorie te Castricum.

Tweeling puzzel

door **Chris Zaal**

Deze puzzel kun je maken met materialen die je gewoon in de schuur kunt vinden. De puzzel bestaat uit twee identieke delen, die als een Siamese tweeling aan elkaar vast zitten. Ze kunnen van elkaar losgemaakt worden. De vraag is: hoe?

Benodigdheden

- 1 stuk pvc electrabuis van 30 cm,
- ongeveer 50 cm koord, bijvoorbeeld polypropyleen van 3 mm dik,
- 2 kleine houten gordijnringen (diameter 35 mm, verkrijgbaar bij de HEMA),
- schaar, ijzerzaag en schuurpapier, eventueel een aansteker.

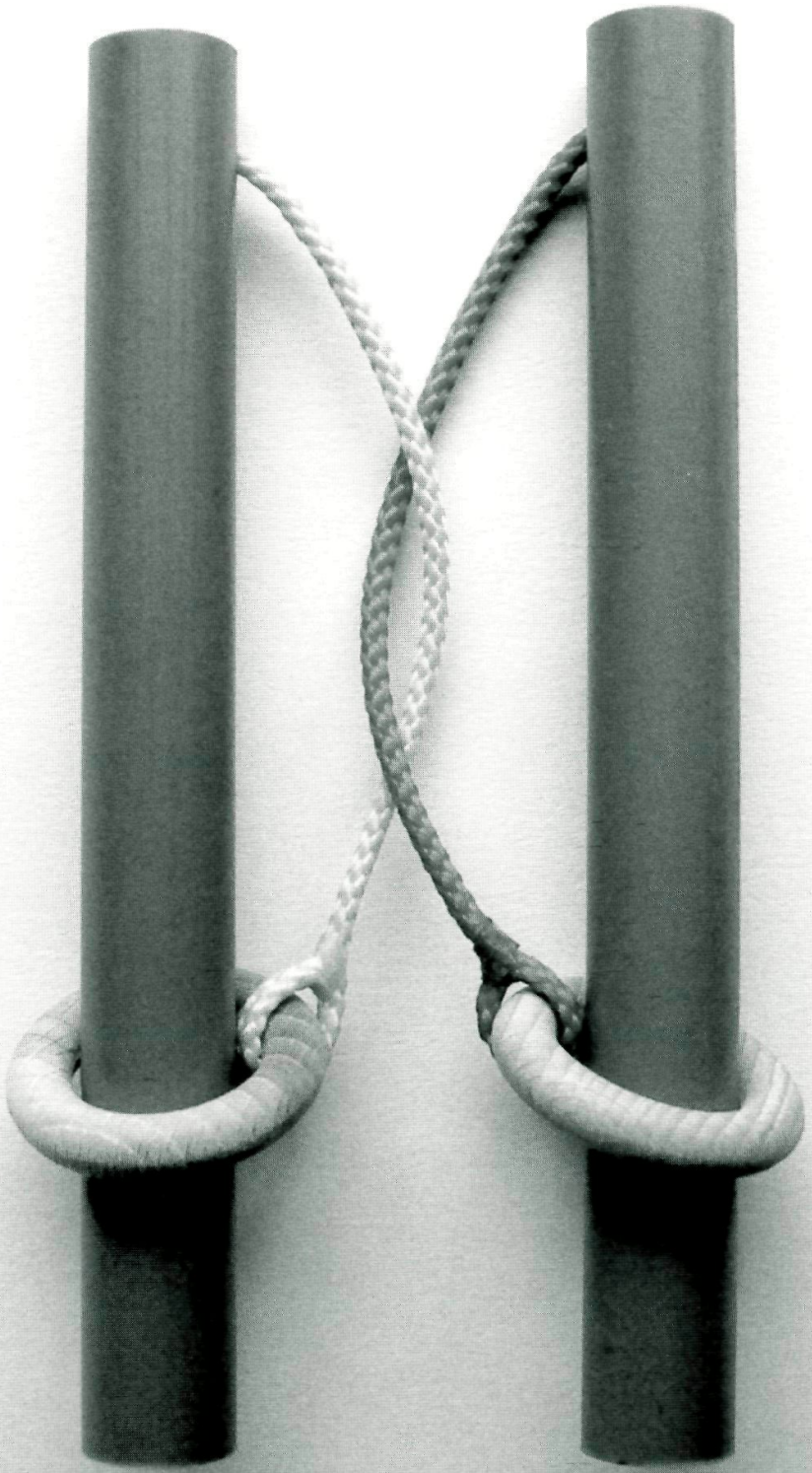
Zelf maken

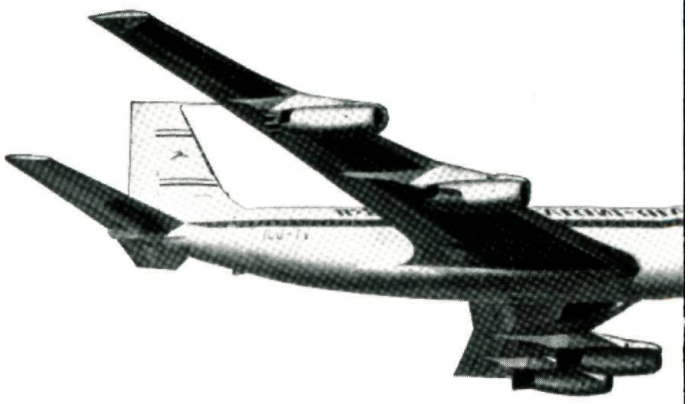
Zaag twee stukken electrabuis af van 15 cm elk. Schuur de uiteinden vlak en glad. Boor op 1 cm van de bovenkant in beide stukken een gat, groot genoeg om het koord door heen te halen.
Knip twee stukken koord af van 25 cm. Knoop het uiteinde van elk stuk aan een houten ring. Of mooier, als je polypropyleen koord kunt vinden: las het uiteinde met behulp van een aansteker of kaarsvlam om de ring heen – uiteinde smelten, even laten afkoelen, om de ring vouwen, tegen het koord aan drukken en tenslotte de las gladstrijken met je vingers. Pas op: smeltend polypropyleen is heet!
Schuif een ring om een stuk pijp. Haal het losse uiteinde van het koord door het gat bovenaan de pijp en leg een knoop in het uiteinde. Zorg ervoor dat de ring niet van het lange eind van de pijp af kan schuiven.
Schuif de andere ring om het andere stuk pijp. Haal het losse uiteinde van het koord door de lus van de reeds gemaakte pijp, en dan door het gat bovenaan. Leg weer een knoop in het uiteinde. Zorg ervoor dat de ring net niet van het lange eind van de pijp af kan schuiven.

Oplossen

Haal de twee stukken pijp van elkaar los. Heb je ze eenmaal los, maak ze dan weer aan elkaar vast.
De oplossing vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

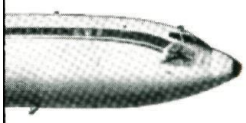
Bron: Wei Zhang, Exploring math through puzzles, Key Curriculum Press, 1996, ISBN 1-55953-222-X





MET WISKUNDE

door **Ger Koole**



NAAR DE ZON

Een korte vakantie naar de zon hoeft niet duur meer te zijn, voor minder dan 100 euro vlieg je al naar Nice of Barcelona en terug. Hoe kan dat zo goedkoop zijn? In dit artikel bekijken we welke rol wiskunde daar in speelt.

Wat is opbrengstmanagement?

Luchtvaartmaatschappijen maken ruim van tevoren hun dienstregelingen. Daarin leggen ze vast op welke tijdstippen er naar welke bestemmingen gevlogen gaat worden. Meestal ligt dan ook (vrijwel) vast met welke vliegtuigen er gevlogen wordt. De vervoerscapaciteit is dus gegeven, de vraag is nu: hoe kan er zoveel mogelijk geld verdiend worden met de beschikbare stoelen? Het voordeel van een luchtvaartmaatschappij is dat zij allerlei mogelijkheden heeft om dezelfde stoelen voor verschillende prijzen te verkopen. De persoon naast je, onderweg in het vliegtuig naar het zonnige Nice, heeft misschien het dubbele of meer betaald voor haar ticket omdat ze laat geboekt heeft, of omdat ze dezelfde dag teruggaat.

Het slim inzetten van de beschikbare capaciteit met als doel zoveel mogelijk geld te verdienen, heet *opbrengstmanagement*. Vrijwel elke luchtvaartmaatschappij gebruikt opbrengstmanagement: van een grote Amerikaanse maatschappij is wel eens beweerd dat het ze op jaarbasis 1 miljard dollar aan opbrengst scheelt!
Opbrengstmanagement is mogelijk als er een vaste capaciteit beschikbaar is en als er de mogelijkheid is van prijsdifferentiatie. Dit is het geval in de luchtvaart, maar ook bij bijvoorbeeld hotels en autoverhuurbedrijven. Het zou ook kunnen worden gebruikt bij bioscopen en theaters. Dit zou neerkomen op hogere prijzen in het weekend en voor late boekers.

Hoe werkt opbrengstmanagement?
Opbrengstmanagement is een combinatie van marketing en wiskunde. De marketeers stellen de prijscategorieën vast, de wiskundigen bepalen op elk moment voor welke prijzen er capaciteit beschikbaar moet zijn. Doel daarbij is de totale opbrengst te maximaliseren.
Er zijn twee omstandigheden die dit moeilijk maken. De eerste is dat klanten die bereid zijn veel te betalen, meestal laat boeken. Dit betekent dat er capaciteit gereserveerd moet worden voor de duurdere categorieën klanten. Hoeveel? Dit hangt af van de vraag naar deze tickets. Maar dan komt de tweede complicatie om de hoek kijken: de vraag naar de verschillende soorten producten is moeilijk te voorspellen. Opbrengstmanagement bestaat wiskundig gezien dan ook uit twee onderdelen: het voorspellen van de vraag en, gegeven die vraag, het maximaliseren van de opbrengst. Hierbij moet je je realiseren dat, hoe goed je de vraag ook kunt voorspellen, het toeval altijd een rol zal blijven spelen.

Een wiskundig model
We bespreken een wiskundig model dat niet al te moeilijk is en dat beide aspecten goed duidelijk maakt. We beschouwen een willekeurige vlucht op een willekeurige dag, met in totaal B stoelen. Stel dat er twee typen klanten zijn, waarbij type 1 altijd later boekt dan type 2. Type 1 brengt r_1 euro op en type 2 brengt r_2 euro op. De type 1 klanten waren de dure klanten, dus $r_1 > r_2$. Stel dat p_k de kans is dat we precies k tickets van type 1 verkopen. We nemen aan dat de vraag naar type 1 tickets nooit groter zal zijn dan B, dus

$$\sum_{k=0}^{B} p_k = 1.$$

Type 2 tickets zijn zo voordelig dat we er zoveel van kunnen verkopen als we willen. De grote vraag is nu: hoeveel tickets van type 2 moeten we verkopen zó dat we de verwachte winst maximaliseren?

Laten we deze vraag eens anders stellen: als we al N tickets (van type 2) hebben verkocht, is het dan verstandig nog een $N + 1$-de ticket te verkopen? Als we dat doen, hebben we een directe opbrengst van r_2 euro. Anderzijds, als we wachten op type 1 klanten, hebben we een kans deze stoel te verkopen met als gevolg r_1 euro opbrengst. De grootte van deze kans q_N bepaalt of het zin heeft niet meer dan N goedkope tickets te verkopen. Wat is q_N? Om dat te berekenen, doen we het volgende gedachte-experiment, zie ook figuur 1. Stel je voor dat de type 2 passagiers het vliegtuig van achteruit vullen. Passagiers van type 1 nemen stoelen zo ver mogelijk voorin het vliegtuig. We hebben nu al N stoelen achterin het vliegtuig verkocht, en er zijn dus nog $B - N$ stoelen beschikbaar. De stoel die we op het punt staan te verkopen, is alleen voor type 1 nodig als we $B - N$ of meer stoelen aan type 1 klanten zullen kunnen verkopen. Dus q_N, de kans dat er $B - N$ of meer type 1 tickets worden verkocht, is gelijk aan

$$q_N = \sum_{k=B-N}^{B} p_k.$$

Voor de $N + 1$-de stoel mag je dus verwachten $q_N \cdot r_1$ te krijgen als je hem voor type 1 klanten bewaart, terwijl hij r_2 opbrengt als je hem direct al aan een type 2 klant verkoopt. Zolang $r_2 \geq q_N \cdot r_1$, is het dus verstandig om tickets van type 2 te verkopen, maar zodra $r_2 < q_N \cdot r_1$, moeten de resterende stoelen voor type 1 klanten worden gereserveerd. Het aantal aan type 2 te verkopen stoelen, zodat de verwachte winst maximaal is, is dus de grootste N waarvoor geldt $q_N \leq r_2 / r_1$.

Hoe verder?
De wiskundige heeft zijn werk gedaan en heeft ervoor gezorgd dat zijn werkgever zoveel mogelijk verdient. Toch vertrekken er elke dag nog steeds vliegtuigen met onbezette stoelen, en moet men ook elke dag type 1 klanten teleurstellen wegens gebrek aan plaats: te veel goedkope stoe-

Figuur1. De blauwe stoelen zijn voor type 1 klanten, de zwarte voor type 2 klanten.

len verkocht op deze vlucht! Is daar niet iets aan te doen? De prijsvechters zoals *Basiqair* en *Easyjet* die juist zoveel met opbrengstmanagement doen, zijn er nog niet aan begonnen, maar bij de grote maatschappijen komt het volgende tafereel vaak voor. Bij het inchecken of bij de poort wordt reizigers verzocht tegen geldelijke vergoeding een andere vlucht te nemen. Vooral bij Amerikaanse luchthavens levert dat soms mooi theater op.
Wat schiet een maatschappij daar nu mee op? Wat je niet ziet, is dat zich kort daarvoor een klant van type 1 heeft gemeld, die grif r_1 heeft betaald voor een stoel die eigenlijk gereserveerd was voor iemand die r_2 heeft betaald. Als die nu bereid is voor minder dan $r_1 - r_2$ een vlucht later te nemen, schiet iedereen er wat mee op, de reizigers en de luchtvaartmaatschappij!
Laten we aannemen dat de gemiddelde budgetreiziger tegen contante betaling van $c < r_1 - r_2$ bereid is een andere vlucht te nemen. Wat is dan de nieuwe optimale N?

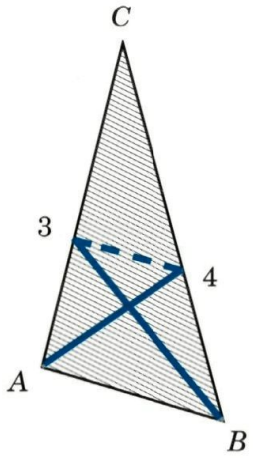
We herhalen dezelfde berekening als zojuist. Als we de N+1-de stoel verkopen aan een type 2 klant, hebben we een directe opbrengst van r_2, en met kans q_N wordt deze stoel opgeëist door een type 1 klant. Die betaalt r_1, maar we moeten $r_2 + c$ aan de type 2 klant terugbetalen. In totaal verwachten we dus een opbrengst van $r_2 + q_N(r_1 - c - r_2)$. Als we de stoel voor een type 1 klant vrijhouden, verdienen we naar verwachting $q_N \cdot r_1$. De optimale N is dus nu de grootste N waarvoor geldt dat $r_2 + q_N(r_1 - c - r_2) \geq q_N \cdot r_1$, dat wil zeggen: $q_N \leq r_2 / (r_2 + c)$. Omdat $r_2 + c < r_1$ en omdat q_N stijgt in N, zien we dat we meer tickets verkopen als we overboeken toestaan. We verdienen ook meer (reken dit zelf door) en we laten geen dure reizigers meer staan, tenzij het hele vliegtuig er mee vol zit. Zo zie je: meer verkopen dan je hebt lijkt op het eerste oog heel onverstandig, maar levert bij nader inzien veel geld op. Het wachten is tot *Easyjet* en *Basiqair* ermee beginnen.

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Elastiekje

Van driehoek ABC is $\angle C = 30°$. Verder is $AC = 3$ en $BC = 4$. In punt A en B zijn de twee uiteinden van een elastiek bevestigd, dat eenmaal om de driehoek heen gewikkeld zit. Wat is de lengte van het (strak gespannen) elastiekje?



Wortelvorm

Bepaal een oplossing van de volgende vergelijking:

$$x = \sqrt{5 + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{5 + 2x}}}.$$

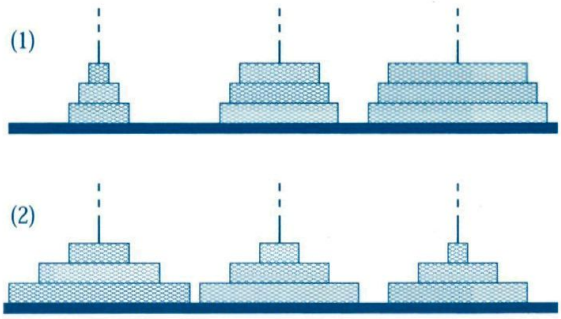
Dodecaëder

De zijvlakken van een dodecaëder zijn gekleurd met de kleuren rood, groen, blauw en paars, en wel zo, dat geen twee zijvlakken met dezelfde kleur aan elkaar grenzen. Hoeveel ribben zijn er waarin een rood en een blauw zijvlak aan elkaar grenzen? (Kömal, 1998)

Torens van Hanoi

Bij het beroemde spel *Torens van Hanoi* zijn er negen schijven met diameter 1 tot en met 9. De schijven zijn verdeeld over drie stokjes waar ze op kunnen worden geschoven. Een *legale positie* is een verdeling van de schijven waarbij geen schijf bovenop een kleinere schijf ligt. Twee voorbeelden van legale posities zie je hieronder.
Een *zet* in dit spel bestaat eruit de bovenste schijf van een stokje te nemen en die bovenop de schijven op een ander stokje te plaatsen. Er moet dan natuurlijk wel weer een legale positie ontstaan.

a. Hoeveel legale posities zijn er?
b. Hoe kun je via zetten van positie (1) naar positie (2) in de figuur komen?
c. Is het mogelijk om van elke legale positie via zetten naar elke andere legale positie te komen?



°Oplossingen nr. 3/4

door **Dion Gijswijt**

Aardappels

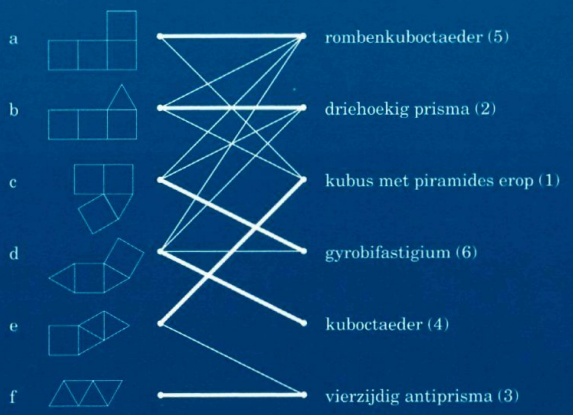
Jan kan in totaal op $2^{11} = 2048$ manieren een aantal van de 11 aardappels kiezen. Elk van deze 2048 mogelijke verzamelingen aardappels heeft een gewicht tussen de 0 en de 2000 gram. Er zijn dus twee verzamelingen A en B van aardappels met op de gram nauwkeurig hetzelfde gewicht. Als Jan nu de aardappels die in A maar niet in B zitten aan de ene kant legt en de aardappels die in B maar niet in A zitten aan de andere kant, dan verschillen de twee hoopjes aardappels minder dan 1 gram in gewicht.

Getallen kleuren

Geef 1 de kleur rood, 2 en 3 de kleur groen, 4 tot en met 7 de kleur blauw, 8 tot en met 15 de kleur paars en 16 tot en met 31 de kleur geel. Voor elk tweetal getallen $a < b$ van dezelfde kleur geldt $b < 2a$, dus b is geen veelvoud van a. Dit is dus een correcte kleuring.
Omdat de getallen 1, 2, 4, 8 en 16 verschillende kleuren moeten krijgen, zijn er ook minstens 5 kleuren nodig. Met vier kleuren gaat het dus niet.

Spoorzoeken

Hoewel sommige sporen bij meerdere veelvlakken kunnen horen, is er een unieke oplossing. In de onderstaande graaf zijn een veelvlak en een spoor verbonden door een lijn als het spoor afkomstig kan zijn van dat veelvlak. De dikke lijnen geven de oplossing: 1e, 2b, 3f, 4d, 5a, 6c.



Kabouters in lijn

De kabouters gaan een voor een in de rij staan. Een kabouter die aan de beurt is om in de rij te gaan staan, houdt zich aan dit recept: ga tussen de meest rechtse bruinoog en de meest linkse blauwoog staan. Zodra de rij is gevormd, weet elke kabouter, op de laatste die in de rij plaats nam na, zijn kleur ogen. De kabouter die op een hoek van de rij staat, neemt opnieuw plaats in de rij, zich houdend aan hetzelfde recept. Dan weet iedereen zijn kleur ogen.

Veelvlakken: driedimensionale geometrische figuren die wiskundigen, filosofen en kunstenaars al eeuwenlang fascineren. Vervaardig ze zelf!

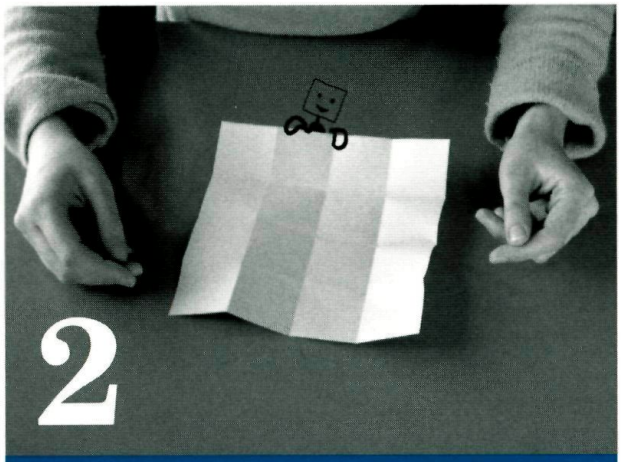
Zelf veelvlakken maken

deel 4

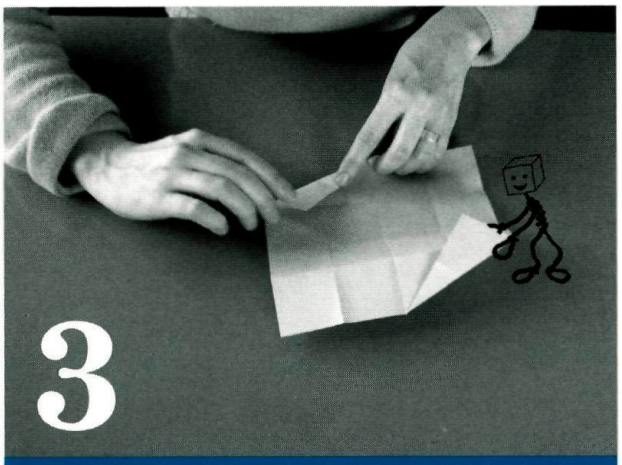
door **Thijs Notenboom**

1 Vouwen van papier

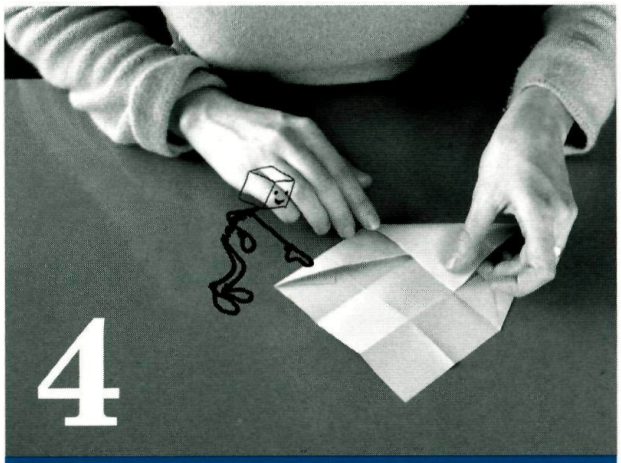
Je hebt nodig: vouwblaadjes die precies vierkant zijn, bijvoorbeeld Origami-blaadjes zoals je in hobbywinkels kunt kopen. We maken de modellen uit een aantal 'bouwsteentjes'. Eerst laten we zien hoe je zo'n bouwsteen vouwt, daarna hoe je met 6 van die bouwstenen een kubus maakt, en met 30 een groter sterveelvlak.



Neem een blaadje en vouw het twee keer dubbel in horizontale richting en twee keer in verticale richting.

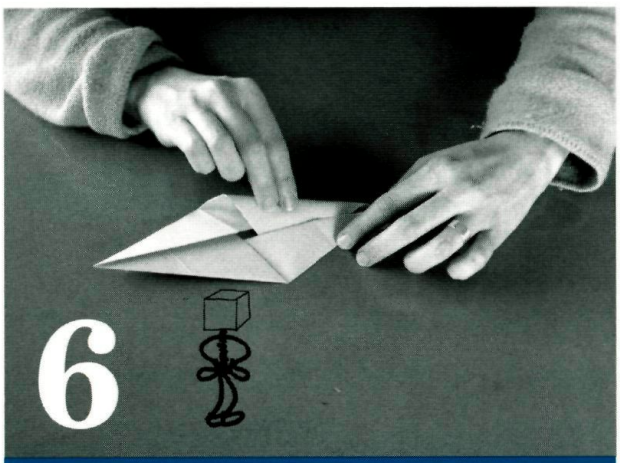


Vouw rechtsonder een punt van 1 bij 2 vierkantjes om; en linksboven ook een punt van 1 bij 2.



Vouw de hele onderste rij om; en vouw daarna linksonder een punt van 2 bij 2 om.

Draai het blad 180 graden en doe hetzelfde als bij 4.

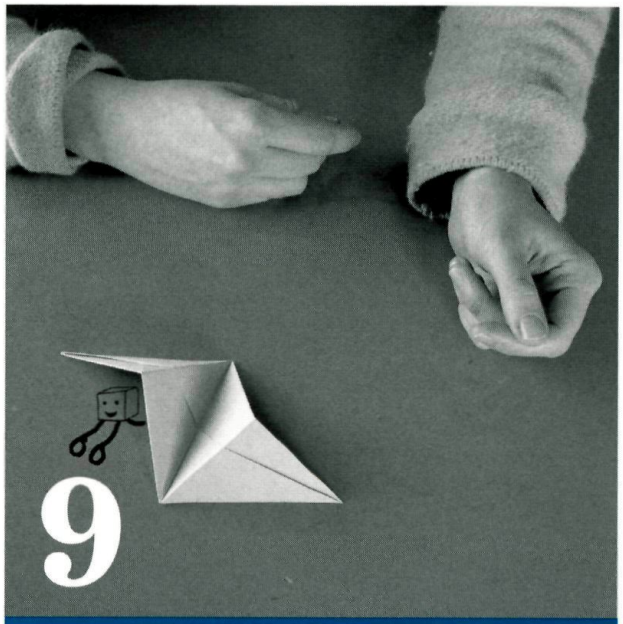


Stop de 2 x 2 punt onder de flap weg.

Draai het blaadje met de achterkant naar voren. Vouw de twee punten naar binnen.

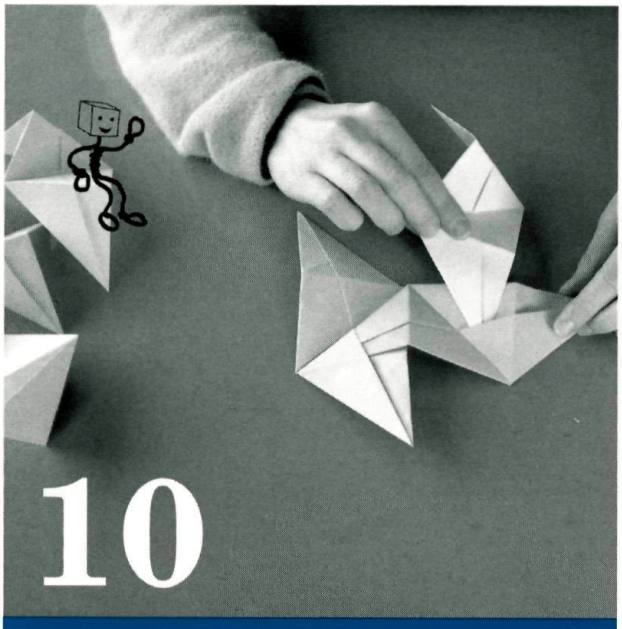
8

Vouw tenstotte ook de diagonaal tussen de twee omgevouwen punten.



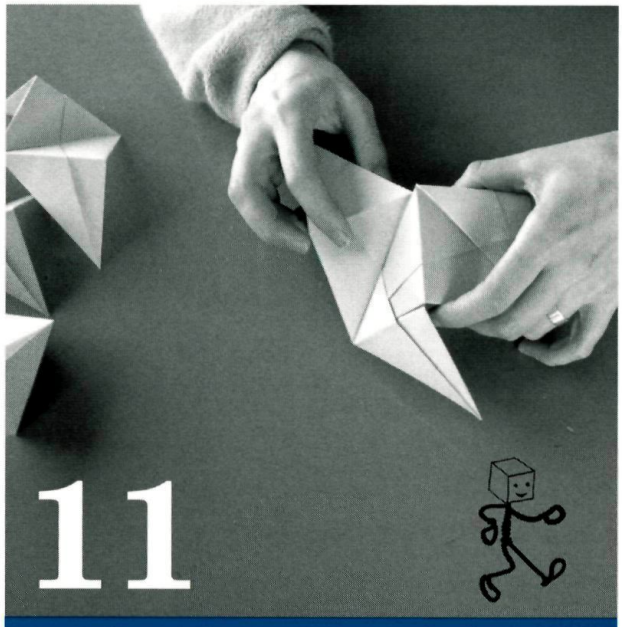
9

Vouw de punten weer terug en de bouwsteen is klaar.



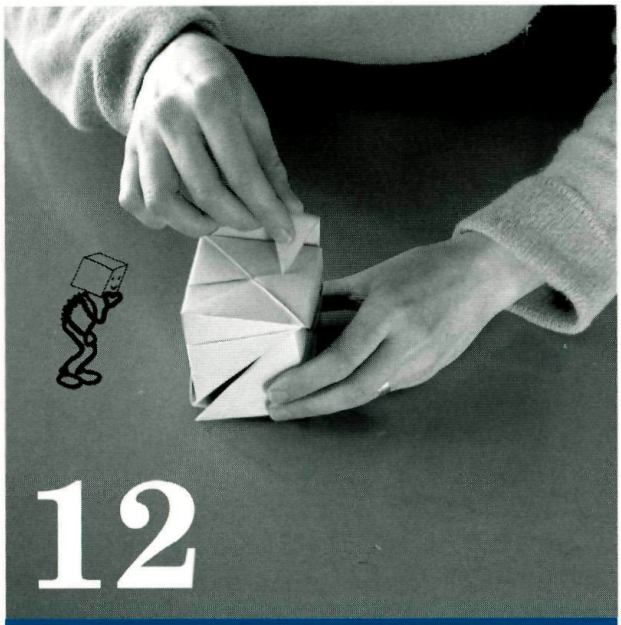
10

Voor een kubus heb je 6 van deze bouwstenen nodig. Neem er drie en schuif de punt van de ene in een gleuf bij de volgende.



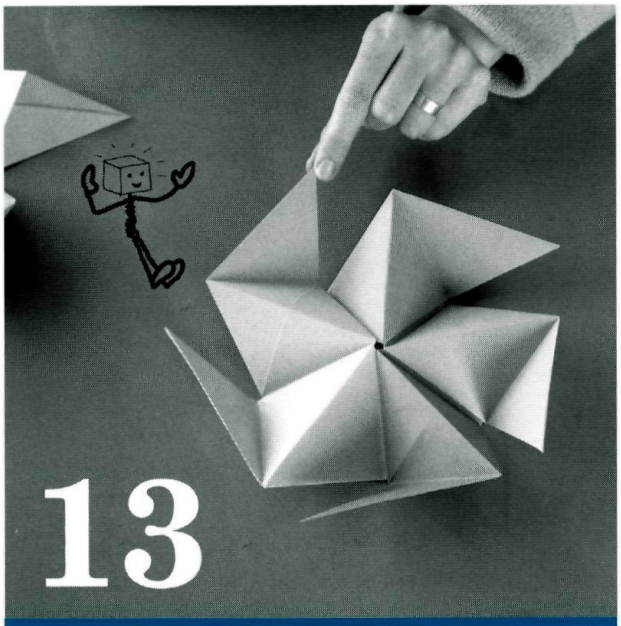
11

Bij de kubus komen de punten en de gleuven aan de buitenkant te zitten.



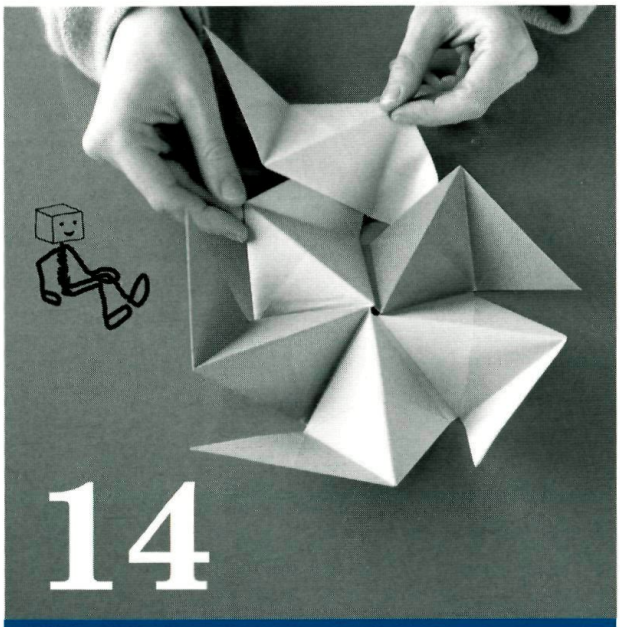
12

Schuif de stukken vast aan de andere. Het resultaat zie je bij 1.



13

Voor het sterveelvlak heb je 30 bouwstenen nodig. De ster is eigenlijk een icosaëder waarvan de zijvlakken ingedeukt zijn. Elke bouwsteen wordt een ribbe van de icosaëder. Neem er om te beginnen vijf en vorm daarmee een hoekpunt. Let op: de gleuven en de punten komen nu aan de binnenkant van het model te zitten.

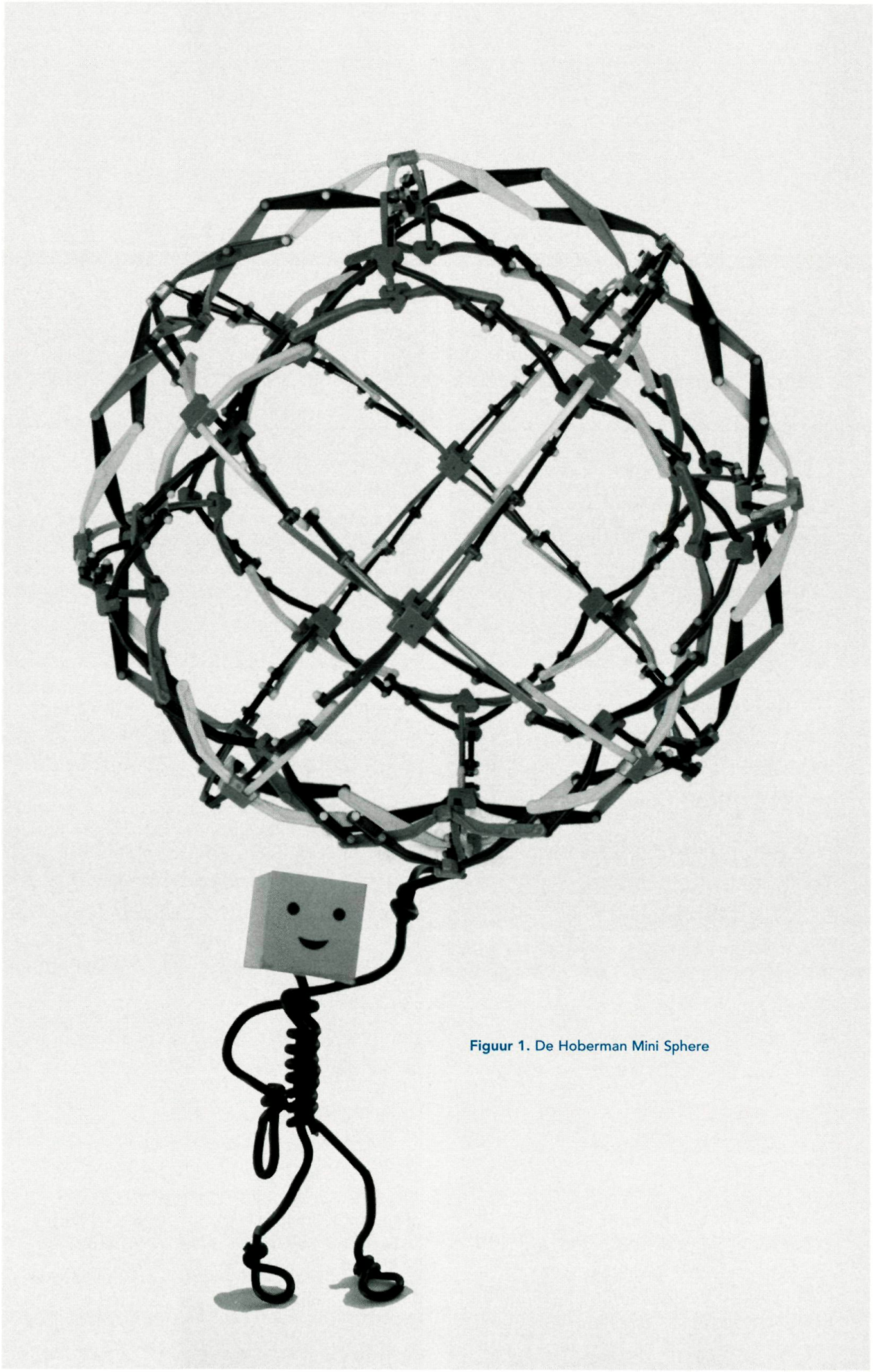


14

Bouw verder, elke nieuwe bouwsteen met een punt in de een, en een gleuf om een ander.

15

Schuif op het laatst de punten niet helemaal aan, zodat er nog genoeg ruimte is om het model te sluiten.
Bij 1 zie je het eindresultaat.



Figuur 1. De Hoberman Mini Sphere

door **Leon van den Broek**

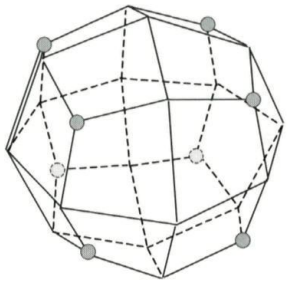
Het vlieger-vierentwintig-vlak

'De Hoberman Mini Sphere is een fraai gekleurde structuur, opgebouwd uit ingenieus aan elkaar gekoppelde kunststof elementen, die je kunt induwen en uitvouwen van 15 cm naar 30 cm doorsnede. Kinderen kunnen er heel leuk mee spelen. Als hij omhoog wordt gegooid, opent bij zich; als hij wordt opgevangen, sluit hij zich weer.' Deze vrij-vertaalde tekst is afkomstig van een speelgoed-website. Op Internet vind je tientallen sites waar de Mini Sphere wordt aangeprezen, ook als educatief materiaal.
De meetkundige benaming voor de Mini Sphere is *vliegervierentwintigvlak*. In tegenstelling tot de Platonische en de Archimedische veelvlakken is het vliegervierentwintigvlak niet zo bekend. In dit artikel gaan we het bestuderen en construeren.

De constructie van de Mini Sphere is bedacht door de Amerikaanse ontwerper Charles Hoberman die hem ook in de handel heeft gebracht. In 1998 was hij de Parents' Choice Approved Award Winner. De Mini Sphere kost 15 dollar of meer, afhankelijk van de uitvoering. Hoberman heeft in zijn collectie nog veel meer 'funfolds'. In Nederland is origineel materiaal van Hoberman te koop bij de Bijenkorf, maar er zijn elders ook veel goedkopere uitvoeringen van de Mini Sphere verkrijgbaar.

Meetkundige beschrijving

Meetkundig is het ding een 'kruising' van een kubus en een regelmatig achtvlak. Je kunt natellen dat het veertien hoekpunten heeft. In acht ervan komen drie staafjes samen, in de andere zes hoekpunten vier. De staafjes zijn enigszins gebogen (het ding heet niet voor niets Mini Sphere). Als we ze vervangen door rechte staafjes krijgen we het draadmodel in figuur 2. De 24 grensvlakken zijn allemaal hetzelfde: het zijn vliegers. Het vliegervierentwintigvlak is dus een zogenaamd gelijkzijdig veelvlak: alle grensvlakken zijn congruent.
Het behoort niet tot de regelmatige (Platonische) veelvlakken of de halfregelmatige (Archimedische) veelvlakken. Die hebben namelijk regelmatige veelhoeken als grensvlak. Andere voorbeelden van gelijkzijdige veelvlakken zijn de ruitenveelvlakken, beschreven in de artikelen van Jan van de Craats in Pythagoras nr. 5 en 6 van de vorige jaargang.

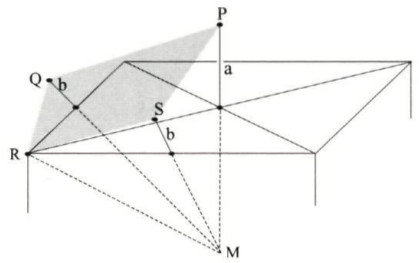


Figuur 2. Draadmodel van de Mini Sphere

Constructie

De hoekpunten waar drie vliegers samenkomen, zijn in figuur 2 met een dikke stip aangegeven: het zijn de hoekpunten van een kubus. De andere zes zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak; ze liggen midden boven de grensvlakken van de kubus, allemaal op dezelfde afstand ervan. Vanuit de kubus gaan we het vliegervierentwintigvlak bouwen.

Gegeven is een kubus met ribbe 2. In figuur 3 is de bovenkant van de kubus getekend. P is het punt op afstand a boven het midden van het bovenvlak. R is een hoekpunt van het bovenvlak. Q en S zijn de punten op afstand b van de middens van de twee ribben van het bovenvlak met hoekpunt R, waarbij Q en S liggen op 'stralen' vanuit middelpunt M van de kubus.

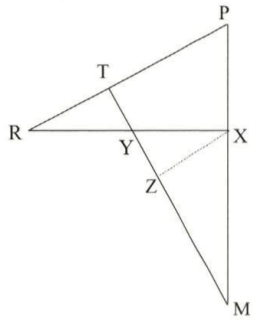


Figuur 3. De bovenkant van een kubus met middelpunt M

In het algemeen liggen de punten P, Q, R en S niet in één vlak. Dat moet wel, wil vierhoek $PQRS$ een vlieger zijn. Je kunt berekenen dat daarvoor moet gelden dat $0 < b < \sqrt{2}$ en $a = \frac{2b}{\sqrt{2}-b}$. Dat kan op allerlei manieren, maar geen van de manieren is echt gemakkelijk. Je moet hier zelf maar eens proberen uit te komen. De volgende twee overwegingen zijn daarbij handig.

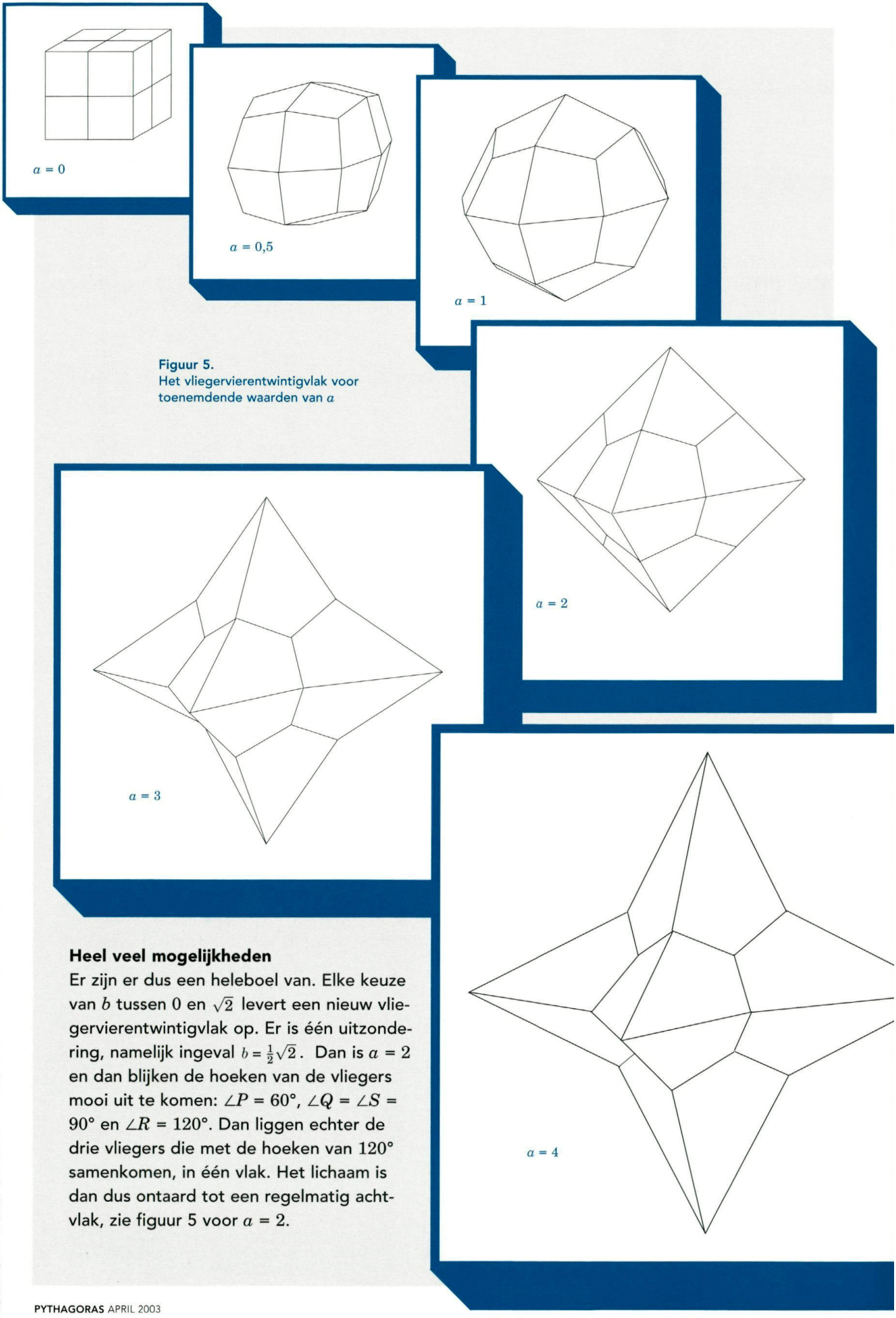
1. Driehoek MQS is gelijkzijdig. Dus $QS = b + \sqrt{2}$ en $MT = \frac{1}{2}\sqrt{3}(b + \sqrt{2})$, waarbij T het snijpunt is van de diagonalen van de vlieger.

2. In het aanzicht in de richting SQ in figuur 4 is X het midden van het bovenvlak van de kubus en is Y het snijpunt van XR en MT. Omdat Y het midden van XR is, is $TY = ZY$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ZXM en TPM volgt dat $a = \frac{2b}{\sqrt{2}-b}$.



Figuur 4. Een deel van het aanzicht in de richting SQ van de kubus in figuur 3

Kiezen we voor b een passende waarde en bepalen daarbij a volgens de formule, dan krijgen we een vlakke vlieger $PQRS$. Door hetzelfde bij de andere drie hoekpunten van het bovenvlak te doen, en het geheel te herhalen bij elk grensvlak van de kubus, ontstaat een vliegervierentwintigvlak.



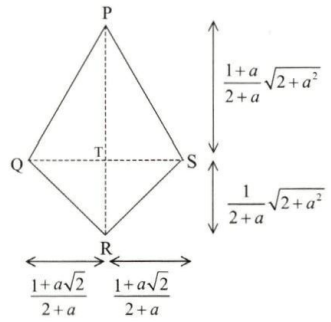
Figuur 5.
Het vliegervierentwintigvlak voor toenemdende waarden van a

Heel veel mogelijkheden

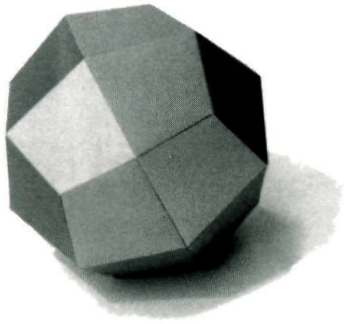
Er zijn er dus een heleboel van. Elke keuze van b tussen 0 en $\sqrt{2}$ levert een nieuw vliegervierentwintigvlak op. Er is één uitzondering, namelijk ingeval $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dan is $a = 2$ en dan blijken de hoeken van de vliegers mooi uit te komen: $\angle P = 60°$, $\angle Q = \angle S = 90°$ en $\angle R = 120°$. Dan liggen echter de drie vliegers die met de hoeken van 120° samenkomen, in één vlak. Het lichaam is dan dus ontaard tot een regelmatig achtvlak, zie figuur 5 voor $a = 2$.

Als $a > 2$, dan is het vliegervierentwintigvlak stervormig, zie figuur 5 voor $a = 3$ en $a = 4$. Als $0 < a < 2$, dan is het vliegervierentwintigvlak convex: het heeft dan geen inspringende hoeken, zie figuur 5 voor $a = 0{,}5$ en $a = 1$.

Je kunt niet elke vlieger als grensvlak kiezen voor een vliegervierentwintigvlak. In figuur 6 staan de lengtes van PT, QT, RT en ST uitgedrukt in a. Het vliegervierentwintigvlak in figuur 7 is gemaakt met $a = 0{,}73$.



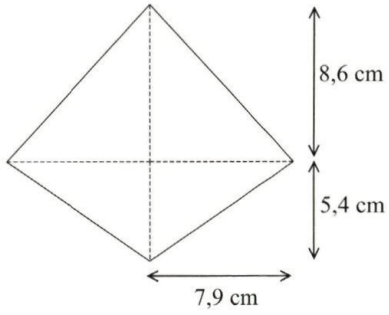
Figuur 6. De lengtes van PT, QT, RT en ST uitgedrukt in a



Figuur 7.
Het vliegervierentwintigvlak voor $a = 0{,}73$

Sphere is dus niet helemaal terecht. Mijnheer Hoberman had het echter niet beter kunnen doen, want een vliegervierentwintigvlak kan geen omgeschreven bol hebben. Immers, dan zou een grensvlak een omgeschreven cirkel hebben. Vlieger $PQRS$ heeft alleen dan een omgeschreven cirkel als de hoeken bij Q en S recht zijn. Maar dan komen in een punt Q vier rechte hoeken samen. En dan hebben we te maken met het regelmatige achtvlak van figuur 5.

Om het vliegervierentwintigvlak te maken van dezelfde vorm en grootte als de Hoberman Mini Sphere, moet je de vlieger in figuur 8 als grensvlak nemen.



Figuur 8.
De door Hoberman gebruikte vlieger

Tot slot

De uitgevouwen Hoberman Mini Sphere is niet ideaal bolvormig. De afstand tussen diametraal gelegen hoekpunten P is 29 cm, die tussen diametraal gelegen hoekpunten Q is 30 cm en die tussen diametraal gelegen hoekpunten R is 31,5 cm. De naam

VEELVLAKKEN *prijsvraag*

Win 500 euro of een andere prachtige prijs, door mee te doen met de veelvlakkenprijsvraag. Creëer op een zo origineel mogelijke wijze het veelvlak dat jij het meest bijzonder, het meest verrassend of gewoon het mooist vindt. De inzendtermijn start op 15 april 2003 en sluit op 15 juni 2003. Vergeet niet een volledig ingevuld wedstrijdformulier mee te sturen. Een wedstrijdformulier (als Word-document of als pdf-file) en het adres waar je je werkstuk naartoe moet sturen zijn te vinden op de website van Pythagoras.

door **Dave Odegard**

inhouds-opgave

De inhoudsformules voor balk, prisma en cilinder zijn makkelijk te verklaren. Dat geldt niet voor de inhoudsformule voor een *piramide:*

$$I = \frac{1}{3}Gh,$$

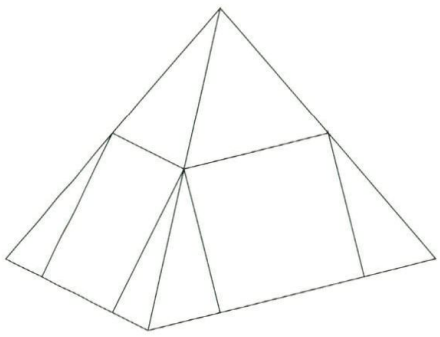
met G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte van de piramide.
In schoolboeken komt deze formule vaak uit de lucht vallen, en wordt dan pas veel later met integraalrekening echt bewezen. Toch is hij te verklaren met elementaire middelen.

In figuur 1 is een piramide met een vierkant als grondvlak op de volgende manier in tien stukken gesneden: op halve hoogte bevindt zich een horizontaal snijvlak, en verder zijn er – zoals aangegeven in de figuur – vier verticale snijvlakken. Het bovenste stuk is weer een piramide, gelijkvormig met de oorspronkelijke. Van de vier hoekstukken is weer zo'n piramide te maken, zie figuur 2. Met deze gegevens kunnen we een vergelijking voor de inhoud I opstellen en oplossen.

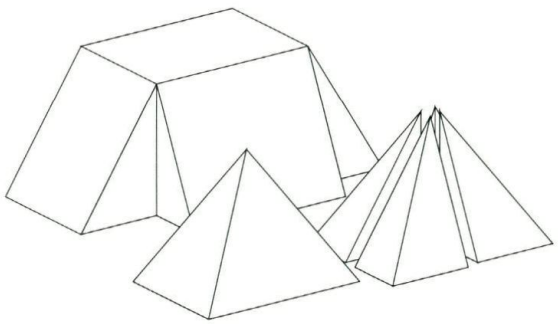
Vragen

1. Kun je de formule nu bewijzen?
2. Geldt de formule nog voor piramides met bijvoorbeeld een regelmatige vijfhoek als basis?
3. Kun je nu ook de formule voor de inhoud van een *kegel* verklaren?

Sla nog niet meteen de pagina om, maar ga eerst zelf aan de slag. Op de volgende pagina vind je de antwoorden op de vragen.



Figuur 1. Een regelmatige piramide met een vierkant als grondvlak, in tien stukken gesneden.



Figuur 2. Van de in tien stukken gesneden piramide is het bovenste stuk weer een piramide en de vier hoekstukken vormen samen eveneens zo'n piramide.

door **Dave Odegard** en **Marco Swaen**

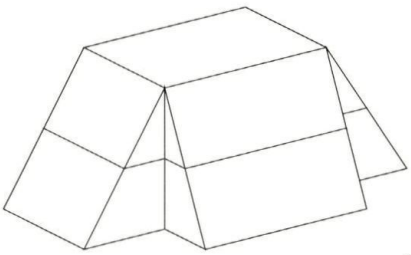
inhoudsopgave OPLOSSING

1. Noem de inhoud van de 'hele' piramide I. De lengtes van de zijden en de hoogte van de kleine piramide zijn $\frac{1}{2}$ keer zo groot, dus deze heeft een inhoud van $(\frac{1}{2})^3 \times I$. In de figuren 3, 4 en 5 is getekend hoe je het overgebleven stuk verder kunt aanpakken. Snij het eerst horizontaal weer op de helft van de hoogte door, zie figuur 3. Klap de stukken die aan de buitenkant zitten naar beneden. Het worden dan balkjes met een hoogte van $\frac{1}{4}h$, zie figuur 4. Verdeel het stuk dat nu nog uitsteekt vanuit het middelpunt in vier stukken; ook dit is in figuur 4 aangegeven. Die vier stukken passen precies op het grondvlak op de overgebleven hoeken, zie figuur 5. Het resultaat is een prisma, waarvan de oppervlakte van het grondvlak gelijk is aan G (deze oppervlakte is immers hetzelfde als de oppervlakte van de oorspronkelijke piramide) en de hoogte is gelijk aan $\frac{1}{4}h$.

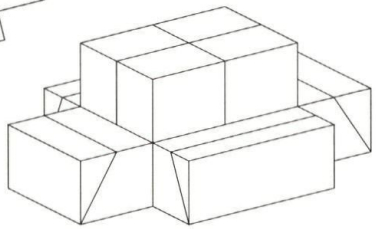
De inhoud hiervan is dus $\frac{1}{4}Gh$.
Nu kunnen we concluderen: I = 2 x (inhoud kleine piramide) + (inhoud prisma) = $2 \times (\frac{1}{8}I) + (\frac{1}{4}Gh) = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}Gh$, dus $\frac{3}{4}I = \frac{1}{4}Gh$.
Hieruit volgt de inhoudsformule $I = \frac{1}{3}Gh$.

2. Bij minder regelmatige piramides kun je op dezelfde manier te werk gaan. In figuur 6 is dat in bovenaanzicht aangegeven voor een piramide met een (onregelmatig) vijfhoekig grondvlak. Problemen treden pas op als het grondvlak geen convexe veelhoek is, of als de top van de piramide niet boven het grondvlak zit (loodrecht gemeten).

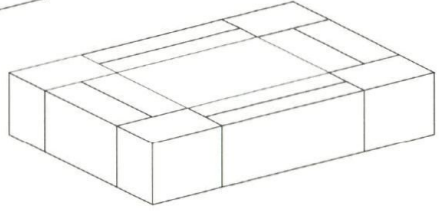
3. De methode werkt zeker bij piramides met als grondvlak een regelmatige n-hoek. Laten we n oplopen, dan benaderen de piramides de vorm van een kegel. Daarom is het niet verwonderlijk dat de inhoudsformule ook geldt voor de kegel.



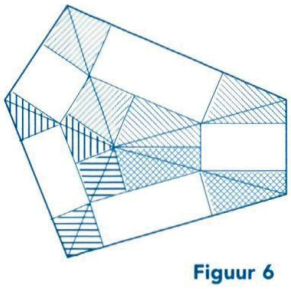
Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5



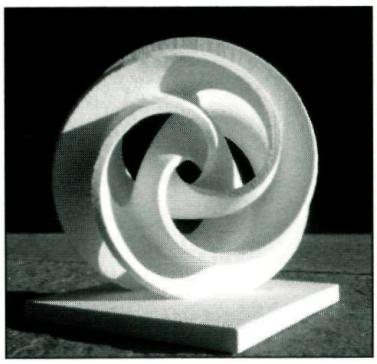
Figuur 6

door **Alex van den Brandhof**

Journaal

pythagoras april 2003 nummer 05

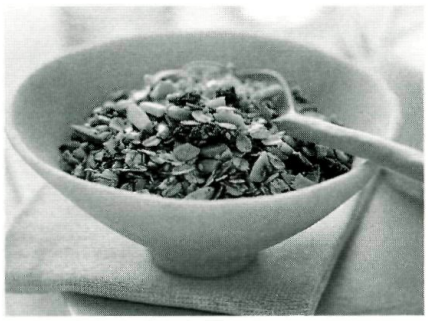
Een wiskundige sneeuwsculptuur



Elk jaar vindt eind januari/begin februari de *International Snow Sculpture Championship* plaats. Dit jaar vond het kampioenschap plaats in Breckenridge, Colorado. Brent Collins, een Amerikaanse 'wiskunstenaar', was dit jaar een van de deelnemers. Hij maakte deel uit van een team onder leiding van de wiskundige Stan Wagon. Hoewel Collins geen wiskundige is, bevatten veel van zijn kunstwerken (voornamelijk houtsculpturen) mathematische structuren. Zo maakte hij prachtige sculpturen die op de Möbiusband zijn gebaseerd. Voor het kampioenschap in Breckenridge maakte hij met zijn team in ruim vier dagen tijd een reusachtige spiraal van sneeuw. Het kunstwerk bevat ingewikkelde vlechten en uitgestrekte zadelvormen. Met deze sneeuwsculptuur – die vanwege het warme weer maar kort heeft gestaan – won het team de tweede prijs.
Het hele bouwproces is te zien op de website van Stan Wagon: www.cs.berkeley.edu/~sequin. De kunstwerken van Brent Collins zijn te vinden op: www.sckans.edu/~bridges/bcollins/bcollins.html.

Schudden voor én na gebruik

De ervaren muesli-eter weet het pak ontbijtgranen zo te schudden dat noten en rozijnen bovenop komen te liggen. Dit komt doordat kleine deeltjes snel de holtes vullen die tijdens het schudden ontstaan en zo langzaam naar beneden trillen. Zeldzamer is het omgekeerde effect, waarbij de grote delen juist naar de bodem zakken. Dit verschijnsel is door middel van computersimulaties onderzocht. De onderzoekers constateerden dat het zinken of drijven onder andere afhangt van de omvang en het gewicht van de korrels. Een merkwaardig fenomeen waar de onderzoekers tegen aanliepen, is dat *beide* effecten in één en hetzelfde mengsel kunnen optreden, afhankelijk van de schudtechniek. De slimme schudder haalt noten en rozijnen dus naar boven voor eigen gebruik en verstopt ze na zijn ontbijt onderin het pak, zodat huisgenoten slechts havervlokken en gruis aantreffen. De onderzoekers lieten plastic knikkers met een doorsnee van 1 centimeter en glazen knikkertjes met een doorsnee van 4 millimeter bijvoorbeeld tien seconden op en neer bewegen. Was die beweging minder groot dan ongeveer een centimeter, dan kwamen de grote knikkers bovendrijven. Een grotere beweging zette juist het omgekeerde effect in gang.



Bron: www.vpro.nl/noorderlicht

Hongaars wiskundetijdschrift

KöMaL is het broertje van Pythagoras uit Hongarije. Het langer dan 100 jaar bestaande blad, met veel en moeilijke problemen, richt zich op middelbare scholieren, studenten en leraren. Het is tegenwoordig ook in het Engels beschikbaar. Informatie over het tijdschrift en bestelgegevens zijn te vinden op www.komal.hu.

Vierkant Zomerkampen

De stichting *Vierkant voor Wiskunde* organiseert dit jaar voor de tiende maal een zomerkamp met een wiskundige inslag. Logische spelen, denkpuzzels en andere wiskundige opdrachten wisselen elkaar af, maar ook niet-wiskundige activiteiten staan op het programma. Er worden twee kampen georganiseerd: van 4 t/m 8 augustus voor leerlingen van de basisschool en de brugklas, en van 11 t/m 15 augustus voor leerlingen die op de middelbare school zitten. Kijk voor meer informatie op: www.vierkantvoorwiskunde.nl.

OPLOSSINGEN NR 3/4

Oplossingen Kleine nootjes

Verjaardag
Stel dat ik x jaar oud ben. Uit de gegevens blijkt dat $x + 5 = 3(x - 3)$, waaruit volgt dat $x = 7$. Ik ben dus 7 jaar.

Snelweg
Er is inderdaad een plek waarop je op hetzelfde tijdstip zowel op de heen- als op de terugweg bent. Stel je maar voor dat je op dezelfde dag zowel heen- als terugrijdt. Ergens op de weg kom je jezelf dan tegen. Dat is dan de plek waar je op precies hetzelfde tijdstip bent.

Kabelbaan
Ieder gebruikte $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ fles water. De ene man stond dus $\frac{1}{3}$ fles water af aan de vrouw. De andere stond $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ fles water af, dus 7 keer zoveel. Het is daarom logisch om de munten te verdelen in de verhouding 1 : 7. De ene man krijgt dus 1 munt, de andere 7 munten.

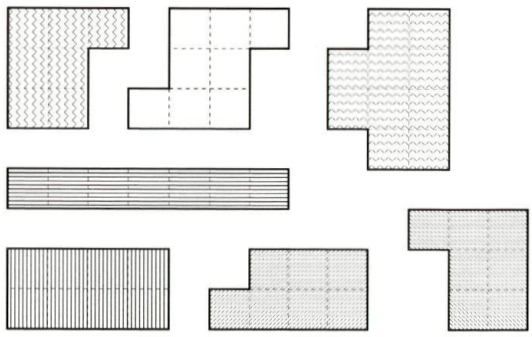
Partygirl
Het is dag.

Eikarton
De laatste persoon pakt het ei én het karton.

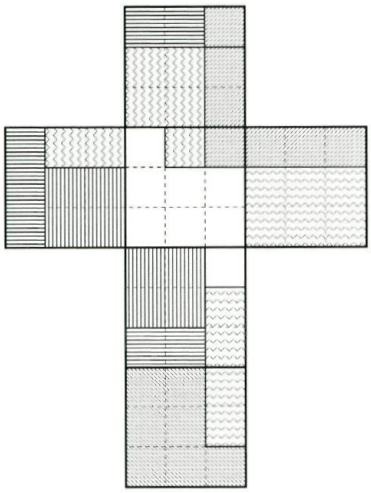
Oplossing 3D-vouwpuzzel

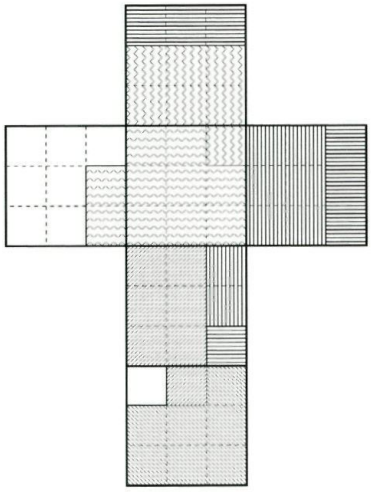
Van Aad van de Wetering uit Driebruggen, Jaap Bak uit Amstelveen, Cor Hurkens van de TU Eindhoven, Eilias Buissant des Amorie uit Castricum, Fred Schalekamp uit Brakel, Neline Floor uit Veenendaal en Fokko van de Bult kreeg de redactie oplossingen van de *Cube wrap* puzzel uit het vorige nummer. Veel van hen konden zelfs aantonen dat er (precies) zes verschillende oplossingen bestaan. Zij schreven hiervoor een computerprogramma dat alle mogelijkheden uitprobeert. De boekenbon gaat naar Cor Hurkens.

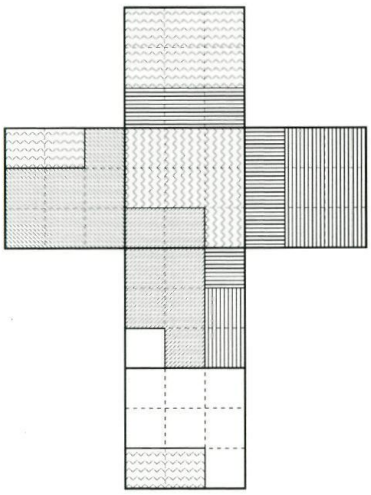
Hiernaast staan de zes oplossingen afgebeeld. De genoemde kleuren bij de legenda verwijzen naar de kleuren zoals die in het vorige nummer werden gebruikt.

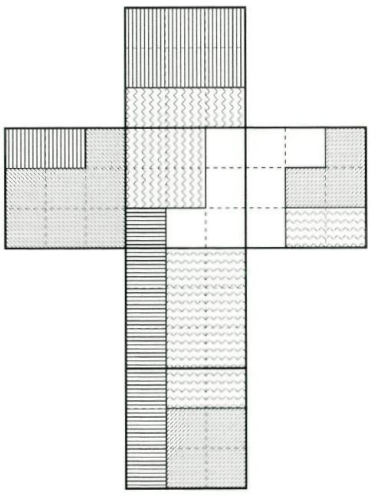


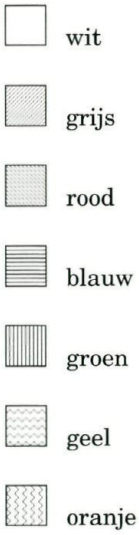
De zeven stukjes van de *Cube wrap* puzzel: samen moeten ze precies een kubus van 3 bij 3 bij 3 bedekken

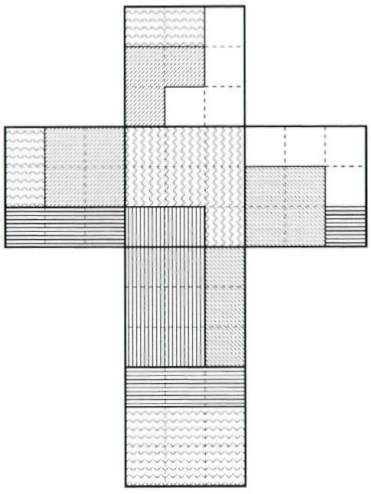


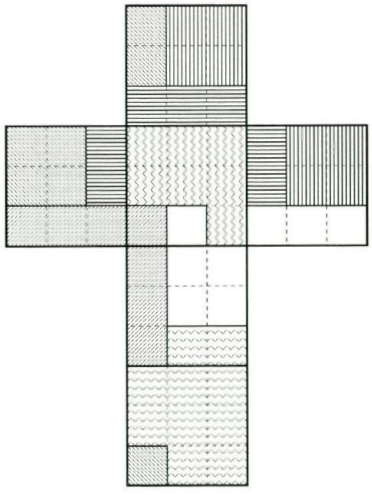







wit
grijs
rood
blauw
groen
geel
oranje





Data voor deze activiteiten-kalender aanmelden bij pyth@cs.vu.nl

Activiteiten

vrijdag 11 april 2003 **Open dag Universiteit Leiden**
http://studiesite.leidenuniv.nl

dinsdag 15 april 2003 **Veelvlakkenprijsvraag**
Start inzending.
http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

donderdag 17 april en dinsdag 22 april 2003 **Voorlichtingsdagen TU Eindhoven**
http://www.tue.nl/studie-info/

donderdag 24 april 2003 **Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs**
APS, Utrecht
http://www.aps.nl/wiskunde/K2.htm

donderdag 1 en vrijdag 2 mei 2003 **Wiskunde nodig en in nood**
39ste Nederlands Mathematisch Congres
http://www.math.kun.nl/nmc2003/

zaterdag 17 mei 2003 **Oude meesters**
Symposium IX van de Historische Kring
Reken- en Wiskunde Onderwijs
Hogeschool Domstad te Utrecht
Meer informatie: e.demoor@fi.uu.nl

woensdag 4 juni 2003 **Voorlichtingsdag RUG voor leerlingen uit 6vwo**
Speciaal voor de late beslissers!
http://www.rug.nl

vrijdag 6 juni 2003 **Voorlichtingsdag op locatie UvA**
http://www.studeren.uva.nl/

4 t/m 8 augustus 2003 **Vierkant voor Wiskunde Zomerkamp**
Voor leerlingen van de basisschool en de brugklas
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

11 t/m 15 augustus 2003 **Vierkant voor Wiskunde Zomerkamp**
Voor leerlingen van de middelbare school
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.

Universiteit van Amsterdam

Vrije Universiteit Amsterdam

Universiteit Leiden

Universiteit Utrecht

Rijksuniversiteit Groningen

TU/e

Technische Universiteit Eindhoven

Centrum voor Wiskunde & Informatica

EURANDOM

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras verschijnt deze jaargang vijf keer, met een dubbelnummer in februari.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op een van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855 175,
per fax: 0522 855 176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

Tarieven 2002-2003
Jaarabonnement:
Pythagoras € 19,50
Pythagoras België € 22,00
Pythagoras buitenland € 25,00
Pythagoras én Archimedes € 33,50
Pythagoras én Archimedes België € 38,50
Pythagoras én Archimedes buitenland € 44,50
Losse nummers Pythagoras € 4,00

Leerlingabonnement
Pythagoras € 16,50 per jaar
Pythagoras België € 20,00 per jaar
Leerlingabonnementen zijn voor leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar). Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Bulkabonnement
Pythagoras € 13,50 per jaar
Pythagoras België € 15,00 per jaar
Voor scholen zijn er bulkabonnementen. Minimum afname: vijf stuks, altijd één exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één schooladres gestuurd.
Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgiro krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Gewone abonnementen en leerlingabonnementen zijn doorlopend, tenzij vóór 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:
Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie zijn oude jaargangen en posters te bestellen:
jaargangen 36 t/m 40 € 12,50
jaargang 41 € 18,00
poster 'Zeef van Eratosthenes' € 3,50
poster 'Onmogelijke stelling' € 3,50
poster 'Veelvlakken' € 5,00
Prijzen zijn exclusief verzendkosten.

42ste JAARGANG NUMMER 5