PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN JUNI 2003

PYTHAGORAS

42ste jaargang nummer 6
ISSN 0033 4766

E-mail
pythagoras@science.uva.nl

Internet
www.pythagoras.nu

Redactie
Matthijs Coster
Dion Gijswijt
Jan Guichelaar
Klaas Pieter Hart
René Swarttouw
Chris Zaal

Hoofdredactie
Marco Swaen

Eindredactie
Alex van den Brandhof

Grafisch ontwerp
Sonja en Esther, Amsterdam

Drukwerk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Bladmanager
Reinie Erné

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap
Postbus 80010
3508 TA Utrecht

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
pythagoras@science.uva.nl

Redactiesecretariaat
Pythagoras
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
Tel. 071 5277 121
Fax 071 5277 101

Abonnee-administratie
Adreswijzigingen
Mirjam Worst
Drukkerij Giethoorn Ten Brink
Postbus 41
7940 AA Meppel
Tel. 0522 855 175
Fax 0522 855 176

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met 2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Medewerkers
D.H. Beekman is auteur van diverse boeken over getallenraadsels. **drs. A.J. van den Brandhof** is docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam. **dr. M.J. Coster** is wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie. **dr. R.A. Erné** is bladmanager van Pythagoras en Nieuw Archief voor Wiskunde. **drs. D.C. Gijswijt** is aio discrete wiskunde aan de UvA. **dr. J. Guichelaar** is algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid. **dr. K.P. Hart** is docent topologie aan de TU Delft. **prof. dr. G. Koole** is hoogleraar optimalisatie van bedrijfsprocessen aan de VU te Amsterdam. **drs. J.M. Notenboom** is docent aan de FEO te Utrecht. **R. Pannekoek** is student wiskunde aan de RUG. **J.A.F. de Rijk** (alias **Bruno Ernst**) is auteur van diverse boeken over Escher en onmogelijke figuren. **F. Snik** is student technische natuurkunde aan de TU Eindhoven. **dr. M.D.G. Swaen** is docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam. **dr. ir. R.F. Swarttouw** is docent wiskunde aan de VU. **J. Tuitman** is student wis- en natuurkunde aan de RUG. **prof. dr. A.K. van der Vegt** was hoogleraar chemie aan de TU Delft. **A. Veldman** is student wiskunde en informatica aan de UL. **drs. C.G. Zaal** is educatief ontwerper aan het FI te Utrecht.

Omslag
Frans Snik met een model van één van zijn ruimtevullers.

Vanwege het verschijnen van het dubbelnummer in februari, is dit alweer de laatste Pythagoras van de 42ste jaargang en dus ook het laatste nummer met het thema veelvlakken. Pythagoras is terug in september: dan verschijnt het eerste nummer van de volgende jaargang. Mocht je ons missen in de zomermaanden, bezoek dan onze geheel vernieuwde website. Het adres is: www.pythagoras.nu.

INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 7 **Een vernuftige oriëntatiemethode**

8 - 9 **Sleutelhangerpuzzel**

10 - 13 **Gelijke stapels kubussen**

14 - 19 **Een extra dimensie aan regelmatige vlakvullingen**

20 - 21 **Pythagoras Olympiade**

22 - 23 **Journaal**

24 - 25 **Problemen – Oplossingen**

26 - 27 **Zelf veelvlakken maken (5)**

28 - 29 **Een veelvlak met vele gezichten**

30 **De post**

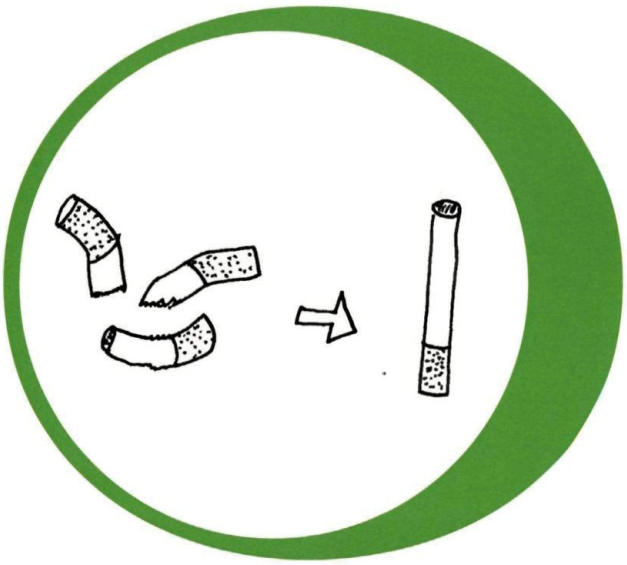
31 **Oplossingen nr. 5**

32 **Activiteiten**

door **Dick Beekman**
www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes



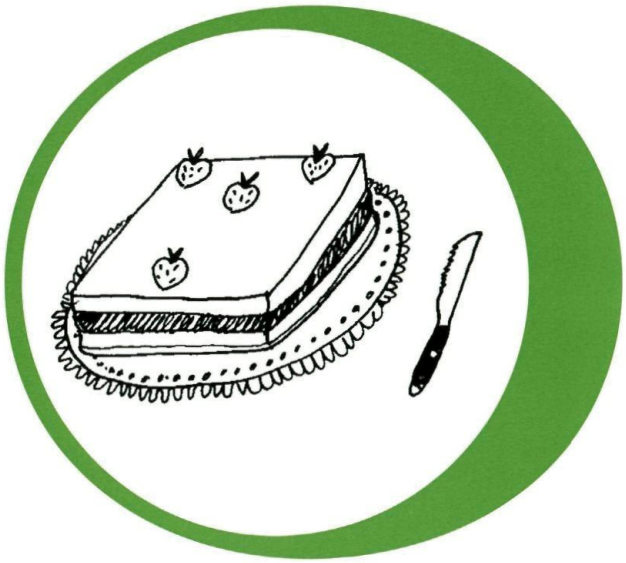
Sigarettenpeukjes
Een zwerver maakt van 3 peukjes een nieuwe sigaret. Hoeveel sigaretten maakt hij van 10 peukjes?

Tapijt
Een meubelzaak heeft een opgerold tapijt met dikte 5 millimeter. Hoe kom je vrij nauwkeurig achter de lengte, zonder het tapijt af te rollen?

Hoogspringen
Een hoogspringer van 1.80 meter gaat over de lat van 2 meter. Hoe hoog zou de lat op de maan (1/6 van de aardse zwaartekracht) gelegd mogen worden voor deze atleet?

Fietstocht
Op een mooie dag maak je een fietstocht. Thuisgekomen stel je je de vraag: 'Welk wiel heeft de grootste afstand afgelegd?'

Taart verdelen
De vierkante taart met vier knoeperds van aardbeien die hiernaast is afgebeeld, moet eerlijk worden verdeeld tussen vier mensen. Ze krijgen allemaal evenveel en op ieders stuk prijkt een aardbei. Hoe wordt deze taart aangesneden?



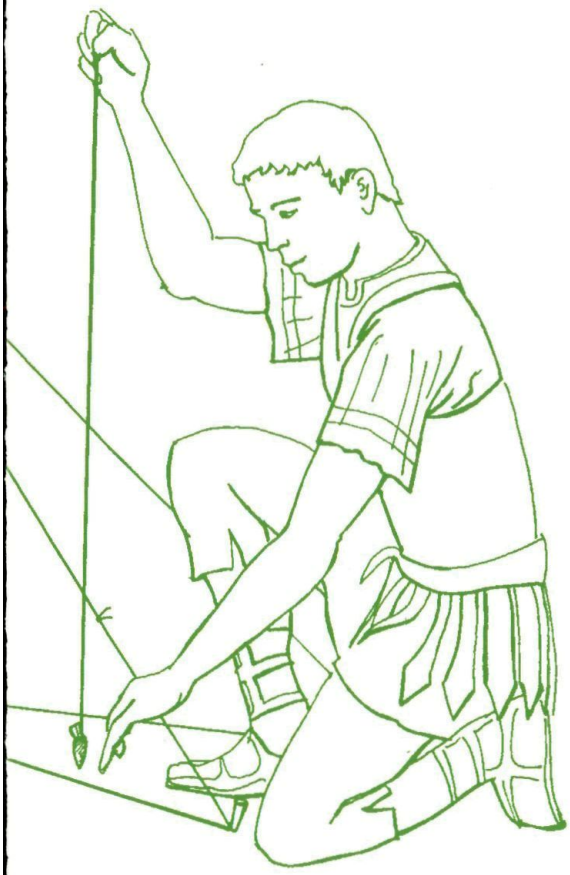
door J.A.F. de Rijk

°Een vernufti
oriëntatieme

Met een stok op een zonnig strand en wat geduld is het niet moeilijk is. Maar heb je nog twee stokjes, en wat touw, dan kun je zelfs ontde je op aarde bevindt. De methode stamt uit de oudheid en was van gr nog niet je exacte plaats op aarde met één telefoontje kon achterha

ge
thode

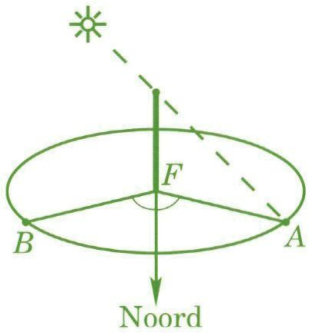
vast te stellen waar het zuiden
kken op welke breedtegraad je
ote waarde in een tijd dat je
en.



De Romeinse architect Vitruvius, die in de eerste eeuw voor Christus leefde, schreef tijdens de regering van keizer Augustus zijn beroemde werk *De Architectura*. Dit werk beslaat tien boeken. In het eerste boek behandelt hij de zogenaamde Indische methode om de noord-zuidrichting te bepalen. Die methode zullen wij als eerste bespreken. Daarna richten we onze aandacht op een tweede, van oorsprong waarschijnlijk Griekse methode, die overgeleverd is. Deze methode is bijzonder vernuftig en levert met drie willekeurige waarnemingen van de zonneschaduw van een punt niet alleen de oostwestrichting, maar ook de stand van het vlak waarin de evenaar ligt (het 'vlak van de evenaar', ofwel het *equatorvlak*).

De Indische methode

In hoofdstuk IV van het eerste boek over architectuur geeft Vitruvius de manier aan waarop je een noordzuidlijn kunt vastleggen. Het komt in het kort hierop neer: plaats een stok (gnomon) loodrecht in de grond en markeer in de morgen de schaduw van de top van de stok (punt A), zie figuur 1. Trek dan vanuit het voetpunt F van de stok een cirkel door dat punt. In de namiddag wacht je tot de schaduw van de top van de stok op de cirkel komt. Markeer dan ook dit punt (punt B). De deellijn van de hoek AFB is nu de noord-zuidlijn.

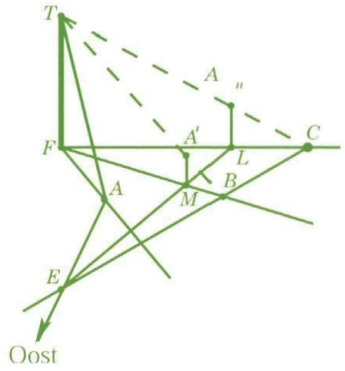


Figuur 1. De schaduw van de top van een stok valt 's morgens op punt A en in de namiddag op punt B

Deze werkwijze behoeft nauwelijks enige toelichting, omdat ze op eenvoudige symmetrie berust. Dat kan zeker niet gezegd worden van de oriëntatiemethode die we hierna beschrijven.

Constructie van de oost-westlijn en de stand van het equatorvlak

In het, waarschijnlijk in de renaissance geschreven *Scriptoribus rei agrariae*, vinden we een ingenieuze oriëntatiemethode, die daar aan de Romeinse bouwmeesters wordt toegeschreven. Ze is echter waarschijnlijk van Griekse herkomst. De werkwijze is simpel, de verklaring niet. Er wordt weer een stok TF geplaatst met top T en voetpunt F, zie figuur 2.



Figuur 2. A, B en C zijn de schaduw van T op drie verschillende momenten

De schaduw van T wordt op drie verschillende tijden op de grond vastgelegd (punten A, B en C). Nemen we aan dat A het dichtst bij het voetpunt van de stok ligt, dan passen we de afstand TA af op TB en TC en vinden zo de punten A' en A''. De punten L en M zijn de loodrechte projecties van A' en A'' op de grond. De lijnen LM en BC snijden elkaar in punt E. Dan is EA de oost-westrichting. Het hele procédé is uit te voeren met koordjes en er komt geen berekening aan te pas. Voor een goed begrip heb ik het volgende bewijs opgesplitst in een meetkundig deel en een astronomisch deel.

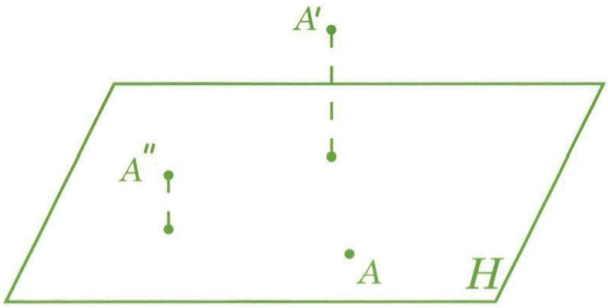
Het meetkundige probleem

Stel, we hebben een vlak H met daarop een punt A, zie figuur 3. Boven dat vlak zweven twee willekeurige punten A' en A''. Door A, A' en A'' brengen we een vlak aan en noemen dit vlak V. De vraag is nu: hoe teken je de snijlijn van vlak V en vlak H?

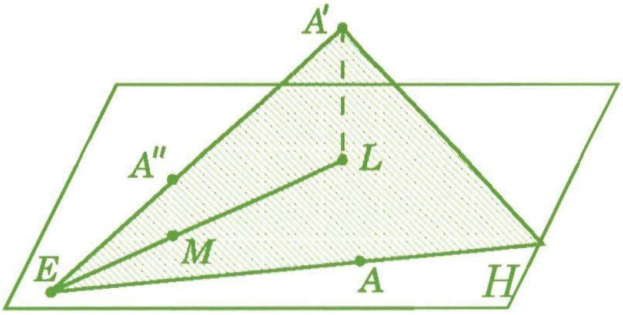
De oplossing is als volgt. Laat uit A' en A'' loodlijnen neer op vlak H. De voetpunten van beide loodlijnen zijn respectievelijk L en M, zie figuur 4. Breng door $A'L$ en $A''M$ een vlak aan. De snijlijn van dit vlak met vlak H is LM. Laat E het snijpunt zijn van $A'A''$ met vlak H. (In onze methode wordt E gevonden door LM met BC te snijden.) Trek dan een lijn vanuit A door E. De lijn AE is nu de snijlijn van vlak H met het vlak V door A, A' en A''.

Het astronomische probleem

Eerst merken we op dat een kegel, met zijn top in het middelpunt van een bol, deze bol snijdt volgens een cirkel, zie figuur 5.
Dat is zonder verdere uitleg duidelijk en hebben we in het volgende nodig. Figuur 6 stelt de hemelbol voor met de poolas, de horizon en de baan van de zon in de zomer. Op deze bol doorloopt de zon in een dag een cirkel die evenwijdig is aan het equatorvlak en de zonnestralen beschrijven in 24 uur een kegelmantel met het middelpunt van de bol als top.
We mogen deze bol willekeurig verkleinen, zonder dat richtingen of vormen veranderen. We laten het middelpunt van de bol samenvallen met de top van de stok die in figuur 2 gebruikt is (zie figuur 7) en tekenen

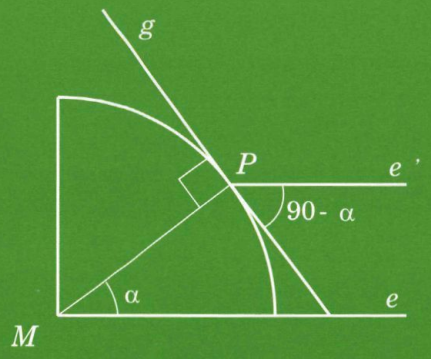


Figuur 3. Een vlak H met daarop punt A. A' en A'' zweven boven het vlak



Figuur 4. De lijn EA is de oostwestrichting

Het *equatorvlak op een plaats* P op aarde is het vlak ter plaatse dat evenwijdig is aan het vlak van de evenaar. In de onderstaande figuur zie je (een deel van) een dwarsdoorsnede van de aarde, met middelpunt M, en een plaats P ergens op het oppervlak. Getekend zijn e (het vlak van de evenaar) en e' (het equatorvlak in P). De breedtegraad α van P is de hoek van MP met e. Het grondvlak in P is g, en je ziet gemakkelijk in dat de hoek tussen e' en g gelijk is aan $90° - \alpha$. Zo kun je in P, zodra je e weet, α bepalen.
Overtuig je er ook van dat de snijlijn van het grondvlak met het equatorvlak evenwijdig loopt aan de evenaar, dus de oostwestrichting in P aangeeft. Dit laatste geeft de geografische breedte, een gegeven dat bijvoorbeeld in de scheepvaart van groot belang was.

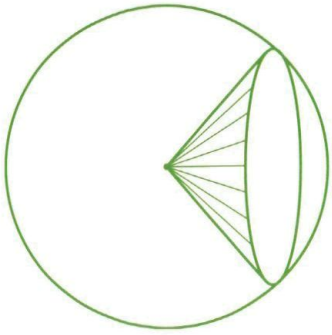


Een kwart van een dwarsdoorsnede van de aarde

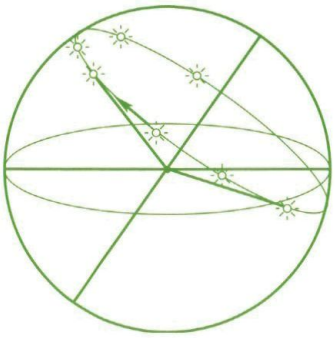
de zonnebaan en de kegel. Punt T werpt een schaduw die door A gaat. Punt A ligt op het verlengde van de kegelmantel die de voortzetting is van de kegel die erboven getekend is. Punt A ligt dus ook op een cirkel die evenwijdig is aan het equatorvlak. Door A brengen we een horizontaal vlak H aan. Nemen we nog twee andere plaatsen van de zon aan, dan vinden we op de onderste cirkel A' en A'' die boven het aangebrachte horizontale vlak zweven.
Het slimme van de hier behandelde oriëntatiemethode is, dat men de punten A' en A'' ook werkelijk in de ruimte vastlegt, door vanaf de top van de stok de stukken TA' en TA'' af te passen die gelijk zijn aan TA. De punten A, A' en A'' liggen nu op een cirkel die evenwijdig is aan het equatorvlak. Daardoor krijg je de situatie die hiervoor beschreven is in het meetkundige deel: construeer door A, A' en A'' een vlak V en bepaal de snijlijn van dit vlak met het horizontale vlak H. Omdat V evenwijdig is aan het equatorvlak, loopt deze snijlijn oostwest. Het aardige van deze methode is, dat de snijlijn van de kegel met het horizontale vlak, die in de loop van het jaar verschillende hyperboolvormen aanneemt, helemaal niet wordt gebruikt.

De stand van het equatorvlak

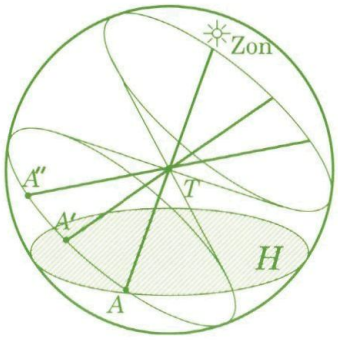
Het equatorvlak snijdt het horizontale vlak in de oostwestlijn, maar gaat niet door de top van de stok. De punten A' en A'' liggen wel in het equatorvlak en omdat deze punten in de ruimte vastliggen en ook gemarkeerd kunnen worden, vinden we het equatorvlak door een vlak (een plank of dik stuk karton) met een rechte zijde op de oost-westlijn te leggen en het op punt A' of A'' te laten rusten. Hiermee is het equatorvlak ook materieel vastgelegd.



Figuur 5. Een kegel, met zijn top in het middelpunt van een bol, snijdt deze bol volgens een cirkel



Figuur 6. De hemelbol met de poolas, de horizon en de baan van de zon in de zomer



Figuur 7. De punten A, A' en A'' liggen op een cirkel die evenwijdig is aan het equatorvlak

door **Chris Zaal**

Sleutelhanger puzzel

Een echte hersenkraker, maar ook een decoratieve sleutelhanger, dat is deze touw-en-bal puzzel. De opdracht is *niet* de kralen van het koord te halen (dat kan niet), maar de twee grote kralen naast elkaar te krijgen op het koord.

Benodigdheden

- 1 (oude, ongebruikte) sleutel,
- ongeveer 30 cm koord of touw (bijvoorbeeld polypropyleen of nylon),
- 2 grote houten knopen (doorsnede 30 mm),
- 1 kleine houten knoop (doorsnede 20 mm),
- schaar, eventueel een aansteker.

Zelf maken

Vind een ongebruikte sleutel met een gat dat groot genoeg is om het koord dubbelgevouwen door te laten. Als je thuis geen ongebruikte sleutel kunt vinden, vraag dan de sleutelmaker om een mislukt exemplaar. Op het Waterlooplein in Amsterdam is een kraam met gevonden voorwerpen van de NS, met onder meer bossen sleutels.
Haal het koord door het gat van de sleutel als op de foto.
Rijg de kralen aan het koord. De kralen moeten soepel over het koord lopen. Houten kralen met voldoend grote gaten zijn verkrijgbaar bij de betere hobbywinkel. Eigenlijk maakt de grootte van de kralen niet uit, als je maar twee (of drie) verschillende kralen hebt.
Maak de uiteinden van het koord aan elkaar vast met een platte knoop. Of beter, als je polypropyleen koord kunt vinden: las de uiteinden aan elkaar met behulp van een aansteker of kaarsvlam – uiteinden smelten, even laten afkoelen, tegen elkaar drukken en tenslotte de las gladrollen tussen je vingers. Pas op: smeltend polypropyleen is heet!

Oplossen

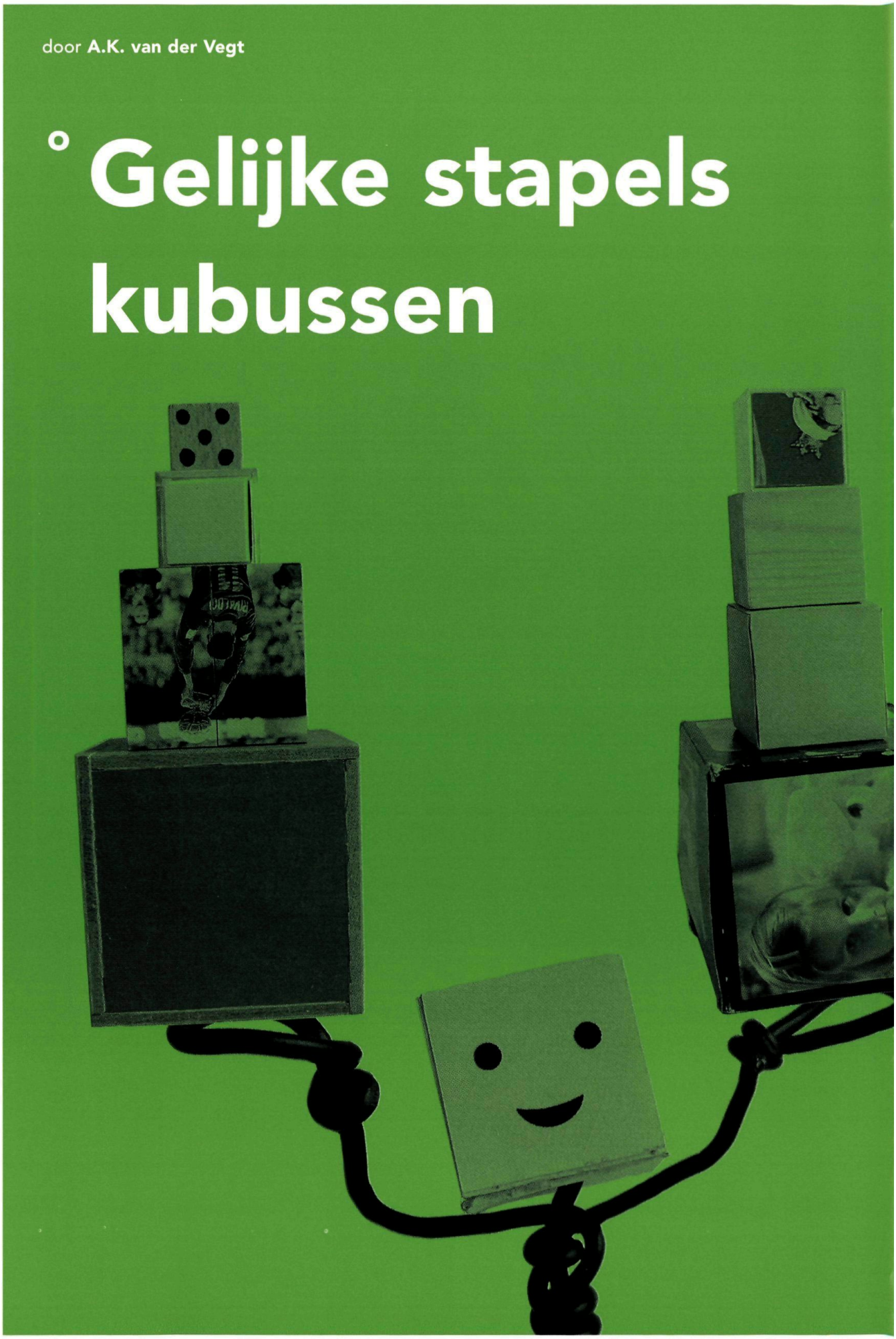
De twee grote kralen zijn van elkaar gescheiden door de kleine kraal. De opdracht is de twee grote kralen naast elkaar te brengen. De kleine kraal en de sleutel zitten in de weg, dat is precies de uitdaging. Omgekeerd, als het je gelukt is de twee kralen naast elkaar te krijgen, kun je weer proberen ze te scheiden met de kleine kraal.
De oplossing vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Bron

Wei Zhang, *Exploring math through puzzles*, Key Curriculum Press, 1996, ISBN 1-55953-222-X

door **A.K. van der Vegt**

° Gelijke stapels kubussen



Stel dat er een stuk of twintig kubussen van verschillende grootte voor je liggen; hun ribben zijn 1, 2, 3, enzovoorts, tot en met 20 centimeter. Je vraagt je af of je stapeltjes van evenveel kubussen kunt maken, die niet alleen even hoog zijn, maar samen ook evenveel wegen. Het mooiste zou zijn als je dit niet alleen bij massieve, maar ook bij holle, dunwandige kubussen zou lukken.
Dat zou betekenen dat je een getal A zó op twee manieren kunt opsplitsen in twee, drie of meer getallen, dat beide rijtjes (a, b, c,... en p, q, r,...) niet alleen dezelfde som hebben (stapeltjes even hoog), maar dat ook de sommen van de kwadraten (totaal oppervlak) en van de derde machten (totale inhoud) gelijk zijn. En misschien wil het met hogere machten ook nog wel lukken.
In dit artikel zullen we zien dat dit kan, en dat het niet eens zo erg moeilijk is om dat uit te rekenen.

Holle kubussen

Eerst bekijken we het eenvoudigste geval: reeksjes waarbij het alleen om de sommen van de termen en de sommen van de kwadraten van de termen gaat (dus holle kubussen).
Met rijtjes van twee getallen lukt dit nooit, want als a, b c en d verschillend zijn, en $A = a + b = c + d$, is er geen oplossing voor $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. We blijven dan steken in gelijke sommen van de eerste machten, en daaraan is niet veel te beleven!
Maar zou het wel lukken met rijtjes van drie? Het eenvoudigste is, om eerst maar eens wat te proberen met kleine getallen.

Dat kan – nogal omslachtig – met de hand, maar het gaat vlotter met behulp van een eenvoudig programma op de computer of op de grafische rekenmachine, dat je zelf kunt schrijven. De lijst die je dan vindt, bevat onder meer de gevallen die je in figuur 1 kunt zien.

Van zo'n lijst op zich leer je weinig, tenzij je er een systeem in kunt ontdekken. Als we de rijtjes wat nader bekijken, kunnen we iets bijzonders aan deze opsplitsingen zien. De nummers 1, 3 en 7 lijken op elkaar: bij 3 zijn alle termen 1 groter dan bij 1 en bij 7 zijn de termen wéér 1 groter. Hetzelfde geldt als we 2 en 6 met elkaar vergelijken. Dit is begrijpelijk. We hadden het wel van tevoren kunnen bedenken: als

$$a + b + c = d + e + f$$

en

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2,$$

dan is natuurlijk

$$(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = (d + 1) + (e + 1) + (f + 1),$$

maar ook

$$(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2 = (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 + 2c + 1) = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c) + 3 = (d^2 + e^2 + f^2) + 2(d + e + f) + 3.$$

1. $12 = (1 + 5 + 6) = (2 + 3 + 7)$ en $(1^2 + 5^2 + 6^2) = (2^2 + 3^2 + 7^2) = 62$,
2. $15 = (1 + 6 + 8) = (2 + 4 + 9)$ en $(1^2 + 6^2 + 8^2) = (2^2 + 4^2 + 9^2) = 101$,
3. $15 = (2 + 6 + 7) = (3 + 4 + 8)$ en $(2^2 + 6^2 + 7^2) = (3^2 + 4^2 + 8^2) = 89$,
4. $18 = (1 + 7 + 10) = (2 + 5 + 11)$ en $(1^2 + 7^2 + 10^2) = (2^2 + 5^2 + 11^2) = 150$,
5. $18 = (1 + 8 + 9) = (3 + 4 + 11)$ en $(1^2 + 8^2 + 9^2) = (3^2 + 4^2 + 11^2) = 146$,
6. $18 = (2 + 7 + 9) = (3 + 5 + 10)$ en $(2^2 + 7^2 + 9^2) = (3^2 + 5^2 + 10^2) = 134$,
7. $18 = (3 + 7 + 8) = (4 + 5 + 9)$ en $(3^2 + 7^2 + 8^2) = (4^2 + 5^2 + 9^2) = 122$,
8. $20 = (1 + 7 + 12) = (3 + 4 + 13)$ en $(1^2 + 7^2 + 12^2) = (3^2 + 4^2 + 13^2) = 194$.

Figuur 1. Een computer-output van rijtjes van steeds twee keer drie getallen waarvoor geldt dat de som van zowel de getallen als de kwadraten van die getallen van het ene tripel gelijk is aan de som van de getallen (respectievelijk kwadraten) van het andere tripel.

De sleutel

Hier ligt een belangrijke sleutel om ons probleem op een elegante manier op te lossen! Vooral als we bedenken dat we, in plaats van gelijke getallen bij de termen op te tellen, die ook kunnen aftrekken, net zolang tot $a + b + c = 0$; ook dan blijven de relaties gelden.

Bekijk figuur 1 nogmaals. Bij nummer 1 krijgen we, als we elke term met 4 verminderen:

$$0 = (-3) + 1 + 2 = (-2) + (-1) + 3$$

met, natuurlijk, ook gelijke kwadraatsommen:

$$(-3)^2 + 1^2 + 2^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 3^2 = 14.$$

Dit verschaft ons een veel gemakkelijkere manier om de reeksen te maken. Neem gewoon $a + b = c$, dan heb je de twee reeksen $-a, -b, c$ en $a, b, -c$, waarvoor de som van de termen en de som van de kwadraten van de termen gelijk zijn. Tel nu bij alle getallen A op. Dan krijg je de twee reeksen $(A - a), (A - b), (A + c)$ en $(A + a), (A + b), (A - c)$, die dan ook aan onze eis voldoen.

De nummers 1 tot en met 7 (zie figuur 1) zijn allemaal van deze soort. Merk op dat bij dit type reeksen de som van de getallen altijd een drievoud is; immers $A - a + A - b + A + c = 3A - (a + b - c) = 3A$.

In de twee drietallen van nummer 8 is de som echter 20, dus niet deelbaar door 3; hier hebben we blijkbaar met een ander soort reeks te maken.

Om bij nummer 8 bijbehorende basisreeksen te krijgen, moeten we elk getal verminderen met $\frac{20}{3}$. De basisreeksen worden dan:

$$-\frac{17}{3}, \frac{1}{3}, \frac{16}{3} \text{ en } -\frac{11}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{19}{3}.$$

Deze reeksen kunnen worden getransformeerd tot –17, 1, 16 en –11, –8, 19 (vermenigvuldigen met dezelfde factor mag natuurlijk altijd).

Hierbij zijn de waarden dus niet elkaars tegengestelde, maar stuiten we op een van de zeldzamere gevallen dat $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ voor 'echt' verschillende drietallen, hier:

$$17^2 + 1^2 + 16^2 = 11^2 + 8^2 + 19^2 = 546.$$

Naast het onderzoek met kleine getallen $a + b = c$ blijken dus ook nog andere mogelijkheden te bestaan, hoewel aanzienlijk minder in aantal.

Massieve kubussen

Tot dusver hebben we gekeken naar reeksjes van drie getallen waarvan de sommen en ook de sommen der kwadraten gelijk zijn. Kunnen we verder gaan? Zijn er reeksjes waarbij bovendien de sommen der derde machten gelijk zijn? Net zomin als we met reeksjes van twee de sommen der kwadraten gelijk konden krijgen, zal het met reeksjes van drie niet lukken om ook gelijke sommen van de derde machten te realiseren. Daarom proberen we het met reeksjes van vier:

$$a + b + c + d = e + f + g + h,$$

met

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

en ook

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = e^3 + f^3 + g^3 + h^3.$$

Het ligt voor de hand om hierbij, net als bij de kwadraten, de reeksen te reduceren tot

$$a + b + c + d = e + f + g + h = 0.$$

De gemakkelijkste oplossingen vinden we dan voor $b = -a$, $d = -c$, $f = -e$ en $h = -g$. Dan zijn automatisch

$$a + b + c + d = e + f + g + h,$$

en ook

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = e^3 + f^3 + g^3 + h^3.$$

Rest nog de eis voor de kwadraatsommen:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$

ofwel

$2a^2 + 2c^2 = 2e^2 + 2g^2$,

wat weer gelijkwaardig is met

$a^2 + c^2 = e^2 + g^2$.

De mogelijkheden hiervoor vinden we in de getallen die op twee manieren als de som van twee verschillende kwadraten geschreven kunnen worden, zoals

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$,

of

$85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$.

We kunnen dus proberen: $a = 1$, $b = -1$, $c = 8$, $d = -8$, $e = 4$, $f = -4$, $g = 7$, $h = -7$, en vinden inderdaad:

$a + b + c + d = e + f + g + h = 0$,
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 130$,
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = e^3 + f^3 + g^3 + h^3 = 0$.

Hieruit kunnen we, door optelling met willekeurige getallen, weer net zoveel reeksenparen als we willen genereren die aan alle drie de voorwaarden voldoen: gelijke sommen, gelijke sommen van kwadraten en gelijke sommen van derde machten.
We geven twee voorbeelden:
Voor (9 + 1), (9 – 1), (9 + 8), (9 – 8) en (9 + 4), (9 – 4), (9 + 7), (9 – 7), ofwel 10, 8, 17, 1 en 13, 5, 16, 2 geldt:

$10 + 8 + 17 + 1 = 13 + 5 + 16 + 2 = 36$,
$10^2 + 8^2 + 17^2 + 1^2 = 13^2 + 5^2 + 16^2 + 2^2 = 454$,
$10^3 + 8^3 + 17^3 + 1^3 = 13^3 + 5^3 + 16^3 + 2^3 = 6426$.

Met $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$ vinden we:
(10 + 2), (10 – 2), (10 + 9), (10 – 9) en (10 + 6), (10 – 6), (10 + 7), (10 – 7), ofwel 12, 8, 19, 1 en 16, 4, 17, 3. Aan de drie eisen wordt inderdaad voldaan:

$12 + 8 + 19 + 1 = 16 + 4 + 17 + 3 = 40$,
$12^2 + 8^2 + 19^2 + 1^2 = 16^2 + 4^2 + 17^2 + 3^2 = 570$,
$12^3 + 8^3 + 19^3 + 1^3 = 16^3 + 4^3 + 17^3 + 3^3 = 9100$.

Zo kunnen we doorgaan met de bekende dubbele kwadraatsommen. We kunnen op deze manier inderdaad stapels van vier kubussen samenstellen, die samen even hoog zijn, samen hetzelfde wegen en bovendien samen hetzelfde oppervlak hebben, zoveel we willen!

Ook vierde machten
Kunnen we nog verder doorgaan, door bijvoorbeeld met reeksjes van vijf te komen tot niet alleen gelijke sommen, kwadraatsommen en derde-machtsommen, maar ook vierde-machtsommen? Dan zou ook moeten gelden:

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = f^4 + g^4 + h^4 + i^4 + j^4$.

Ook dat is mogelijk, maar het wordt te uitvoerig om het hier te beschrijven.
Je moet dan mikken op combinaties $a, b, c, -d, -e$ en $-a, -b, -c, d, e$, waarbij dan $a + b + c = d + e$. Iedere liefhebber kan dit voor zichzelf uitzoeken. Eén frappant resultaat noemen we hier.

Het getal 50
Het getal 50 is heel bijzonder. Dat wisten we al: het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden gesplitst in twee kwadraten ($5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2$). Maar nu blijkt dat het óók het kleinste getal is dat op twee manieren kan worden gesplitst in vijf termen waarvan niet alleen de sommen gelijk zijn, maar ook de sommen van de kwadraten, die van de derde machten én die van de vierde machten, namelijk:

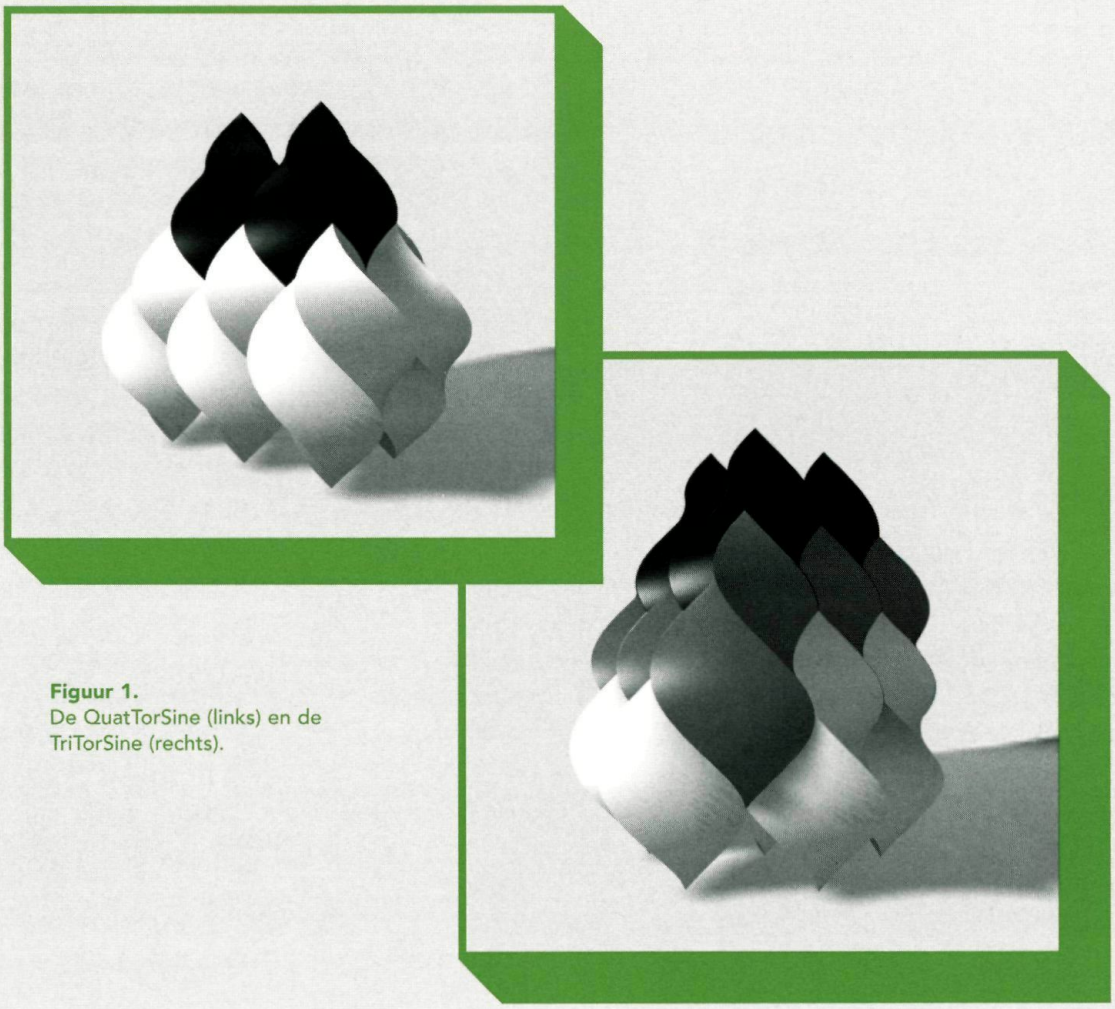
$50 = 2 + 3 + 11 + 15 + 19 = 1 + 5 + 9 + 17 + 18$,

reken maar na!
Je zou kunnen zeggen dat deze rijtjes gelden voor gestapelde vierdimensionale 'hyperkubussen', waarbij zowel de hoogte van de stapeltjes, alsook hun totale oppervlak, hun driedimensionale inhoud én hun vierdimensionale inhoud gelijk zijn.
Ook bij nog hogere machten zijn er mogelijkheden te vinden. Stof genoeg om er urenlang plezier aan te beleven!

Op 15 april 2002 overleed A.K. van der Vegt.

door **Frans Snik**

Een extra dimensie aan regelmatige vlakvullingen



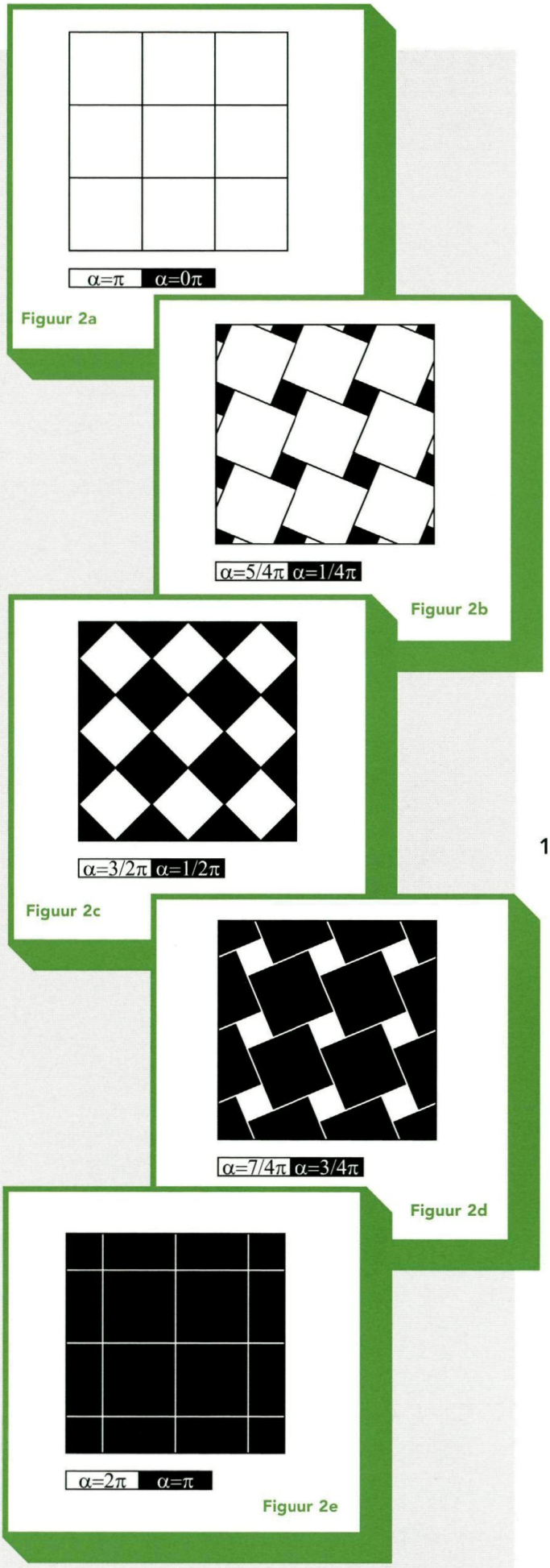
Figuur 1.
De QuatTorSine (links) en de TriTorSine (rechts).

De kubus is een ruimtevuller, omdat je met louter kubusvormige bouwstenen de ruimte geheel zou kunnen vullen. Wiskundigen en kristallografen hebben in de loop van de tijd ook andere ruimtevullers gevonden, maar vooralsnog ontbreekt het overzicht van wat alle elementaire mogelijkheden zijn. In dit artikel beschrijft Frans Snik twee verrassende ruimtevullers, *TTS* en *QTS* geheten, die Russell Towle en hijzelf onafhankelijk van elkaar onlangs ontdekt hebben.

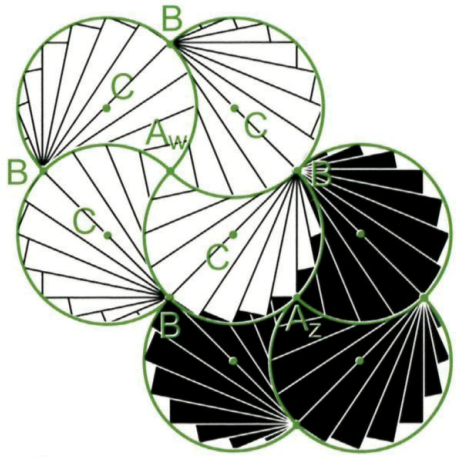
De regelmatige vlakvullingen van de Nederlandse graficus M.C. Escher zijn inmiddels wereldberoemd. Voor Escher waren de geometrische vlakverdelingen vooral een middel om bizarre levensvormen over het papier te laten kruipen, maar zijn studies naar de verschillende mogelijkheden om het tweedimensionale vlak met identieke figuurtjes te vullen, inspireerden vele wiskundigen en kristallografen.
Aangezien Escher gebonden was aan het tweedimensionale speelveld van afbeeldingen op papier, heeft hij zijn verkenningen amper doorgetrokken naar hogere dimensies. Zou hij dit wel gedaan hebben, dan had hij waarschijnlijk een nieuwe bron van inspiratie aangeboord, want alleen al in drie dimensies is de regelmatige opvulling met veelvlakken bijzonder interessant. De simpelste vorm is uiteraard het stapelen van blokken, maar de natuur laat al veel complexere structuren zien in kristalroosters van vaste stoffen.
In dit artikel zal een exotische en erg elegante ruimtevulling besproken worden. De elementaire bouwstenen hiervoor zijn recentelijk ontdekt door Russell Towle bij zijn onderzoek naar veelvlakken met ruitvormige zijvlakken. Towle noemt zijn nieuwe veelvlakken *rombische spiraloëders*. Op zijn website laat hij er prachtige plaatjes van zien. Onafhankelijk van zijn werk en vanuit een heel andere invalshoek ben ik tot gelijksoortige objecten gekomen, die echter geen platte maar gekromde zijvlakken hebben. Ze moeten opgevat worden als limietgevallen van Towles spiraloëders. Mijn uitgangspunten zijn enkele van Eschers vlakvullingen, die ik nu eerst beschrijven zal.

Draaiende vierkanten

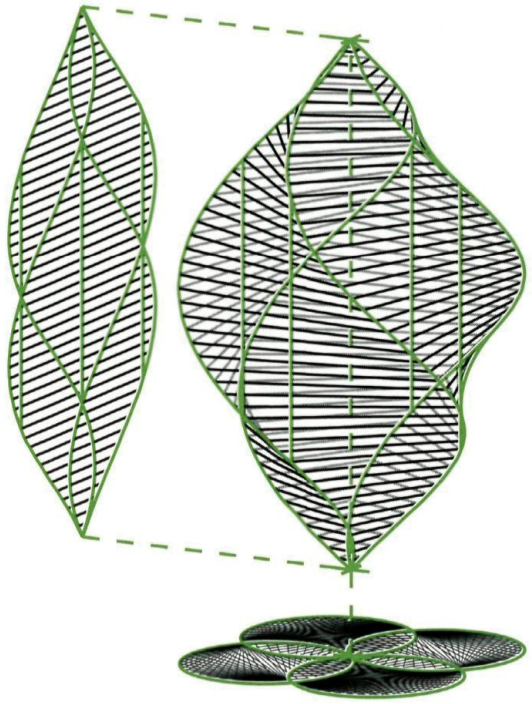
Ga uit van het hokjespatroon van vierkanten, zie figuur 2a. Uit dit patroon kun je een hele serie vlakvullingen laten ontstaan door geleidelijke vervorming. Draai namelijk alle vierkanten een stukje om hun middelpunt en verklein ze tegelijkertijd zó, dat ze net langs elkaar schuren. Je ziet dat er dan in figuur 2b tussen de witte vierkanten kleine zwarte vierkanten ontstaan. Draai je verder,



Figuur 2. Opeenvolgende vlakvullingen – draaiende vierkanten



Figuur 3.
Vaste punten en cirkels in draaiende vierkanten



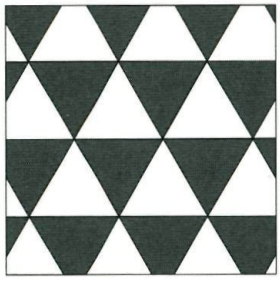
Figuur 4.
QTS met geprojecteerde vaste punten op grondvlak

dan groeien de zwarte vierkanten tot ze even groot zijn als de witte (figuur 2c) en draai je nog verder, dan krimpen de witte tot ze uiteindelijk alleen nog een punt zijn (figuur 2e) en hetzelfde hokjespatroon ontstaat als in figuur 2a, maar dan voor de zwarte vierkanten. Aldus ontstaat een hele film van opeenvolgende vlakvullingen waarin vierkanten al draaiend inkrimpen en weer uitdijen. Voor het afdraaien van die film verwijs ik naar de animaties op mijn website. Nadere bestudering van dit fascinerende patroon leert dat we tijdens de draaiing met drie series vaste punten te maken hebben, zie figuur 3. Behalve de middelpunten van de witte vierkanten (A_w) en de zwarte vierkanten (A_z), zijn dat de punten B die altijd op de grens van twee vierkanten liggen.

De hoekpunten van de witte vierkanten blijken zich over cirkelbanen met middelpunten C te bewegen; een bewijs hiervoor is te leveren met elementaire vlakke meetkunde, zie de website van Pythagoras.
Aangezien de hoekpunten van de zwarte vierkanten over dezelfde cirkels bewegen, is ook in te zien dat de witte en zwarte vierkanten precies dezelfde levensloop hebben, waarbij ze een halve periode van elkaar verschillen.

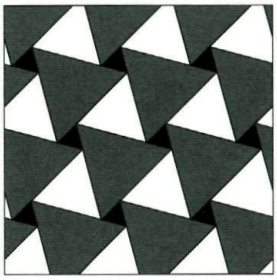
Stap naar de ruimte

Naar deze film van draaiende vierkanten kun je ook anders kijken. Vat ze niet op als opnames van een patroon dat in de tijd verandert, maar als een serie *doorsneden* van een driedimensionaal object. Leg de serie vierkanten in gedachten dus op elkaar tot een stapel, dan vormen ze samen een massief object dat eruit ziet als een soort schroef of een toefje, zie figuur 4.



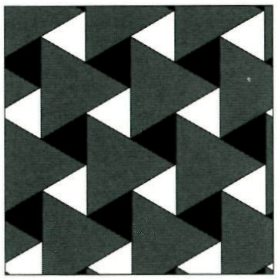
α=4/3π α=2/3π α=0π

Figuur 5a



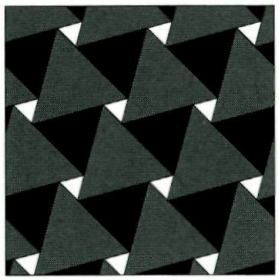
α=3/2π α=5/6π α=1/6π

Figuur 5b



α=5/3π α=π α=1/3π

Figuur 5c



α=11/6π α=7/6π α=1/2π

Figuur 5d

α=2π α=4/3π α=2/3π

Figuur 5e

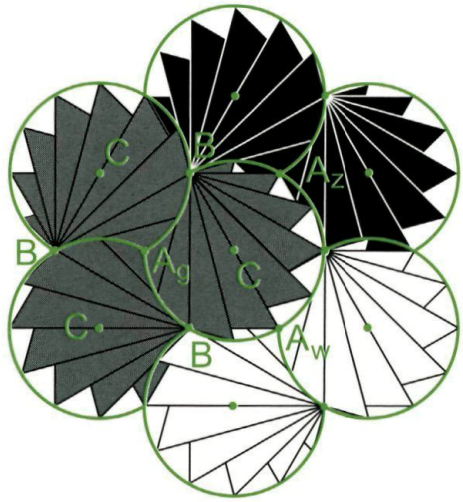
Figuur 5.
Opeenvolgende vlakvullingen – draaiende driehoeken

Omdat de witte en zwarte vierkanten dezelfde levensloop hebben, zijn de hieruit verkregen driedimensionale witte en zwarte objecten identiek. En omdat in elke doorsnede het vlak gevuld is, vullen deze objecten de hele ruimte als in figuur 1 (links) op pagina 14. Ik noem deze driedimensionale *QuatTorSine* (viervoudige, getordeerde sinusoïde) of QTS. Merk op dat er een links- en een rechtsdraaiende variant bestaat van de QTS, met verder precies dezelfde eigenschappen. Hoe lang we de QTS precies maken, is niet belangrijk voor het feit dat de QTS een ruimtevuller is. De vaste punten in het patroon van de draaiende vierkanten onthullen nadere bijzonderheden over de QTS.

Een middelpunt A in de serie vlakvullingen vormt nu een verticale as van een QTS. De vaste punten B, waar de vierkanten langs elkaar schoven, zijn nu rechte lijnen die over de oppervlakken van de QTS lopen. In een met QTS'en gevulde ruimte zou je langs die punten lange dunne naalden tussen de bouwstenen in kunnen steken. De cirkelvormige baan die de hoekpunten beschrijven, zijn nu schroeflijnen waar de verschillende zijvlakken van een QTS aan elkaar zitten. In een bovenaanzicht zien spiralende ribben van de QTS er dus weer uit als cirkels.

Draaiende driehoeken

Er bestaat ook een vlakvulling gebaseerd op gelijkzijdige driehoeken, waarop ongeveer hetzelfde recept als met de vierkanten toegepast kan worden. Maak de driehoeken in dit patroon afwisselend wit en grijs, zie figuur 5a. Draai de witte driehoeken een klein stukje om hun middelpunt en verklein ze daarbij. Laat de grijze meedraaien en vergroot ze, zodat ze langs de witte schuiven. Dan ontstaat er een derde groep (zwarte) driehoeken. De drie groepen driehoeken groeien en krimpen al draaiend om hun middelpunten. Op mijn site kun je hiervan



Figuur 6.
Vaste punten en cirkels in draaiende driehoeken

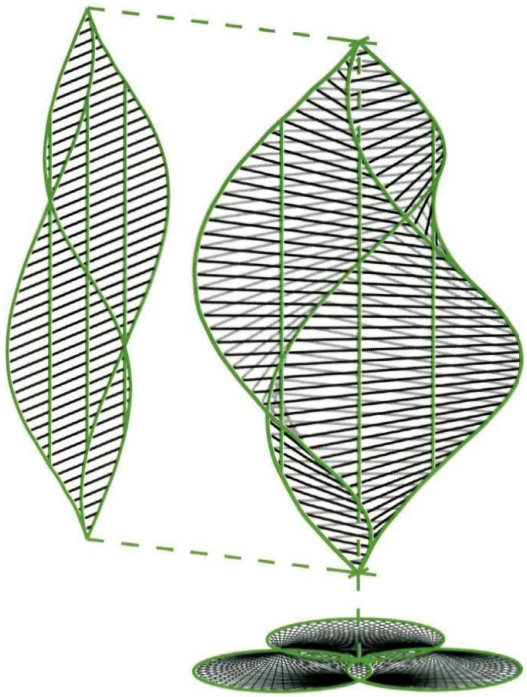
een animatie bekijken. Ook in dit geval blijken er series vaste punten te zijn: de middelpunten van witte (A_w), grijze (A_g) en zwarte driehoeken (A_z), en punten B waar steeds twee driehoeken elkaar raken, zie figuur 6. Ook nu bewegen de hoekpunten zich weer over cirkelbanen met middelpunten C.

Ook ditmaal hebben driehoeken van verschillende kleur dezelfde levensloop, maar nu lopen ze $1/3$ of $2/3$ van een periode op elkaar achter.

Interpreteren we de opeenvolgende vlakvullingen als doorsneden van de ruimte, dan komt hier weer een nieuwe klasse (links- en rechtsdraaiende) ruimtevullende objecten uit te voorschijn: *TriTorSine* (drievoudige, getordeerde sinusoïde) of TTS, zie de figuren 7 en 1 (rechts).

Bouwen met alleen maar schroeven

Hoewel je op het eerste gezicht absoluut niet zou zeggen dat je met deze rondvormige en schroevende objecten cementvrij kunt bouwen, blijkt deze ruimteverdeling veel overeenkomsten te hebben met bekende stapelingen. De TTS maakt namelijk net zoals een kubus contact met zes andere bouwstenen; de QTS heeft net als een ruitentwaalfvlak (zie het artikel van Jan van de Craats in Pythagoras van juni 2002) twaalf naaste buren. In de materiaalkunde worden de kristalstructuren van QTS en TTS respectievelijk *body centered cubic* en *hexagonal close packed* genoemd.
Veel van de symmetrie-eigenschappen die toe te schrijven zijn aan kristalstructuren, zijn ook hier van toepassing. Ruimteverdelingen van QTS of TTS zijn translatiesymmetrisch tussen willekeurige roosterpunten en respectievelijk vier- en drievoudig rotatiesymmetrisch om alle assen A en in geval van de QTS tweevoudig om de punten B. Vanwege de links- of rechtsdraaiende spiraalstructuur is er geen sprake van spiegelsymmetrie.



Figuur 7.
TTS met geprojecteerde vaste punten op grondvlak

Een derde ruimtevuller zou je hopen te krijgen uit een patroon van regelmatige zeshoeken. In dat patroon ontstaan echter naast zeshoeken ook driehoeken. Het resultaat is een zeshoekig object, *HexaTorSine* (HTS) geheten, dat de ruimte alleen kan vullen in combinaties met TTS in een verhouding $1:2$.

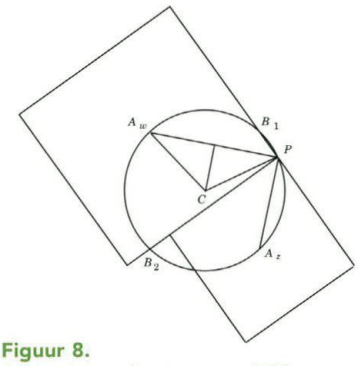
Sinuskromme

Ook de eenzame QTS, TTS of HTS die zich niet in een kristalstructuur bevindt, is wiskundig erg interessant. Zo blijkt in de vorm van deze objecten een sinuskromme verborgen te zitten. Dit valt af te leiden uit de bewegende vlakvullingen.

Ga uit van een van de cirkels waarover de hoekpunten van de vierkanten zich bewegen, zie figuur 8. Nemen we de ribbe van de vierkanten in de startsituatie als uitgangsmaat 1, dan is de straal van zo'n cirkel $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Noem C het midden van de cirkel c, en P het hoekpunt op c van het vierkant met middelpunt $A_{w,z}$. De lijnstukken A_wP en A_zP zijn nu halve diagonalen van een wit en een zwart vierkant. Noem α de draaihoek van A_wC naar PC. Met een loodlijntje vanuit C op A_wP is dan gemakkelijk in te zien dat $A_wP = 2\cdot A_wC \sin\frac{1}{2}\alpha$.

We stelden al vast dat $A_wC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus heeft het witte vierkant een ribbe $r_{\alpha,w} = \sin\frac{1}{2}\alpha$.
Als je de hoogte van een doorsnede van de QTS gelijk laat lopen met α van 0° naar 360°, betekent dit dat de doorsnede op hoogte α een vierkant oplevert met ribbe $r_\alpha = \sin\frac{1}{2}\alpha$. Voor de ribben van de zwarte vierkanten geldt de formule $r_{\alpha,z} = \sin(\frac{1}{2}(\alpha+\pi))$, de zwarte vierkanten liggen immers een halve periode achter op de witte.

In het geval van de vlakvulling met driehoeken is op precies dezelfde manier af te leiden dat ook daar de zijde van de driehoekige doorsnede op hoogte α evenredig is met $\sin\frac{1}{2}\alpha$.



Figuur 8.
Constructietekening voor QTS

De sinusvormigheid van de doorsneden zelf is uiteraard niet te zien als we langs de QTS of TTS kijken, de doorsneden zijn immers getordeerd. Uit de figuren 4 en 7 is in te zien dat voor de QTS en TTS (en ook de HTS) op elke hoogte α de mate van torsie ten opzichte van de onderkant gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$. Door dus de hoekpunten hun cirkelvormige baan geheel te laten doorlopen, ontstaat er een lineaire torsie van 180° over het gehele object.

Bijproduct

De witte en zwarte vierkanten bedekken samen op ieder moment het hele vlak, daaruit volgt dat de oppervlakte van een wit en een zwart vierkant samen constant is.
Met enig rekenwerk volgt hieruit dat

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + \sin^2(\tfrac{1}{2}(\alpha-\pi)) = 1,$$

oftewel de bekende formule dat

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dezelfde beschouwing over de oppervlaktes van een witte, grijze en zwarte driehoek samen levert nu op dat

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}(\alpha+\tfrac{4}{3}\pi)) + \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + \sin^2(\tfrac{1}{2}(\alpha-\tfrac{4}{3}\pi)) = \tfrac{3}{2},$$

hetgeen met enige goniometrie ook af te leiden is.

Verdere informatie
http://home.inreach.com/rtowle/Polytopes/spirallo/
http://www.student.tue.nl/e/f.snik/
http://www.pythagoras.nu

E-mailadres auteur: f.snik@student.tue.nl
3D-figuren: Rikkert Koppes
Aanvullende bewijsvoering: Marco Swaen

°Pythagoras Olympiade

door **René Pannekoek**, **Jan Tuitman** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden
Insturen kan per e-mail:
pytholym@math.leidenuniv.nl,
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzending vermeld je je klas, de naam van de wiskundedocent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juli 2003.

OPGAVE 96

Een politicus en zijn vrouw hadden vier andere echtparen uitgenodigd voor een feestje. Verschillende van de aanwezigen (niet per se allemaal) groetten elkaar door elkaars hand te schudden. Aan het eind van het feestje vroeg de politicus aan elke aanwezige hoeveel handen hij of zij geschud had; hij kreeg negen verschillende antwoorden. Aangenomen dat geen enkel koppel elkaar twee keer begroet heeft, en dat geen enkel echtpaar elkaar de hand schudde: hoeveel handen hebben de politicus en zijn vrouw geschud?

OPGAVE 97

Op een bol worden n grote cirkels (cirkels die het boloppervlak in twee gelijke helften delen) getrokken. Geen drie cirkels gaan door één punt. In hoeveel gebieden wordt het boloppervlak door de cirkels opgedeeld?

OPLOSSING 91

Is het getal 64000...0027, met 10.000 nullen tussen de cijfers 4 en 2, een priemgetal?

Oplossing. Je kunt getallen van de vorm $a^3 + b^3$ schrijven als $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; getallen van deze vorm zijn daarom niet priem. Omdat het gegeven getal gelijk is aan $64 \cdot 10^{10002} + 27 = (4 \cdot 10^{3334})^3 + 3^3$, is dit dus geen priemgetal.

Deze opgave werd opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum te Oisterwijk**, Bert de Schoenmaker van het **Edugo Campus De Toren** te Oostakker (België), Klaartje Vanhaute van het **Edugo Campus De Toren** te Oostakker (België) en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Klaartje Vanhaute.

OPLOSSING 92

Vind alle oplossingen van de vergelijking $2^n = a! + b! + c!$ in positieve gehele getallen a, b en c.

Oplossing. Vanwege de symmetrie mogen we aannemen dat $a \le b \le c$ en dus dat $a! \mid b! \mid c!$ en $a! \mid 2^n$, waarbij $\mid$ staat voor 'is een deler van'. Omdat 3 geen deler van 2^n is, is $a \le 2$. Stel dat $a = 1$. Dan $b! \mid 2^n - 1$, zodat ook $b = 1$. Dit levert twee oplossingen: met $c = 2$ en $c = 3$. Als $a = 2$, dan $b! \mid 2^n - 2$, zodat $b < 4$. Het geval $b = 2$ levert geen oplossingen en het geval $b = 3$ geeft $c = 4$ en $c = 5$ als oplossingen. In totaal zijn er dus 4 echt verschillende oplossingen:

$1! + 1! + 2! = 2^2$,
$1! + 1! + 3! = 2^3$,
$2! + 3! + 4! = 2^5$,
$2! + 3! + 5! = 2^7$.

Deze opgave werd opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Oisterwijk, Bert de Schoenmaker van het **Edugo Campus De Toren** te Oostakker (België), Klaartje Vanhaute van het **Edugo Campus De Toren** te Oostakker (België) en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Victor Pessers.

OPLOSSING 93

In het dubbeldikke februarinummer verscheen naast de opgaven 91 en 92 een extra uitdagende steropgave (opgave 93). Helaas wist niemand deze breinbreker bevredigend op te lossen. Benieuwd naar de correcte oplossing? Kijk op www.pythagoras.nu.

door **Alex van den Brandhof** en **Marco Swaen**

Journaal

pythagoras juni 2003 nummer 06

Regelmaat priemgetallen

Het is een klassieke wiskunde-breinbreker, waar tot op heden nog niemand een sluitend antwoord op heeft kunnen geven: liggen de priemgetallen (getallen die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf) willekeurig op de getallenlijn of liggen ze in een bepaald regelmatig patroon? Drie natuurkundigen van de universiteit van Boston hebben het probleem niet volledig opgelost, maar wel hebben ze enige orde in de eerste vijftig miljoen priemgetallen ontdekt. De lengte van de *intervallen tussen de priemgetallen* (de intervallen tussen de eerste zes priemgetallen zijn 1, 2, 2, 4, 2) is statistisch niet volkomen willekeurig, concluderen ze. Bijna altijd, blijkt uit de studie, wordt een stap omhoog tussen twee intervallen gevolgd door weer een even grote stap omlaag. Voor de derde en vierde stap is dat direct zichtbaar: +2, –2. Bovendien lijken de stappen zich met een regelmatige golfbeweging te herhalen.

De onderzoekers zijn geen experts in getaltheorie. De vondst is eigenlijk toeval, gedaan bij een testrun met een statistisch programma, dat bedoeld was om de pauzes tussen hartslagen te analyseren.

Bronnen:
Nature Science Update, 24 maart 2003, de Volkskrant, 29 maart 2003

Superformule

$$r = \frac{1}{\sqrt[n_1]{\left|\frac{1}{a}\cos\left(\frac{m}{4}\cdot\varphi\right)\right|^{n_2} + \left|\frac{1}{b}\sin\left(\frac{m}{4}\cdot\varphi\right)\right|^{n_3}}}.$$

De Belgische bioloog en wiskundige Johan Gielis heeft een formule bedacht waarmee hij zeer uiteenlopende vormen kan beschrijven. De formule (die hierboven is afgebeeld) werkt met poolcoördinaten en bevat zes parameters (n_1, n_2, n_3, m, a, b).
Er is vrijwel geen vorm die je niet met deze formule kunt maken. Van ijskristal tot zeeschelp, de meest uiteenlopende vormen zijn uit te drukken in deze 'superformule'. Test de mogelijkheden zelf op de grafische rekenmachine. Bij de TI-83 kies je daartoe eerst bij FORMAT voor Polar GC, en bij MODE voor Radian en voor Pol.

Bron: Nature Science update, 2 april 2003

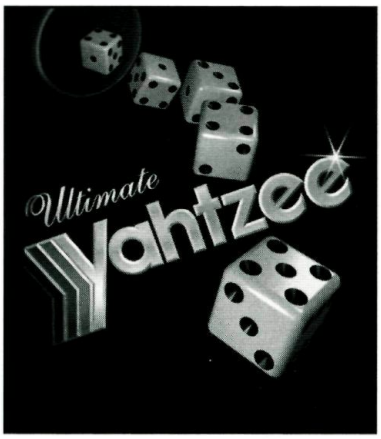
Abelprijs toegekend aan Serre

De Abelprijs 2003 is toegekend aan Jean-Pierre Serre, emeritus hoogleraar aan het College de France, 'for playing a key role in shaping the modern form of many parts of mathematics, including topology, algebraic geometry, and number theory'. De Abelprijs-site (www.abelprisen.no) heeft een toegankelijke beschrijving van deze drie vakgebieden en de bijdrage van Serre hieraan. De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering als wiskundige tegenhanger van de Zweedse Nobelprijs. Elk jaar wijst een commissie van vijf vooraanstaande wiskundigen een kandidaat aan. Aan de prijs is een bedrag van zes miljoen Kronen (760.000 euro) verbonden.

Yahtzee gekraakt!

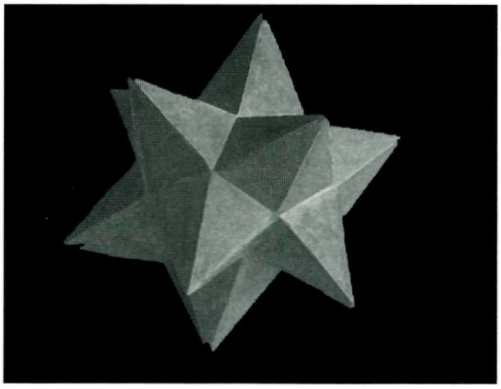
De Engelse statisticus Phil Woodward heeft de oplossing gevonden voor het populaire spel *Yahtzee*. Met behulp van de computer berekende hij alle 1.279.054.096.320 mogelijke uitkomsten, waardoor hij voortaan in staat is om voor elke willekeurige situatie de optimale strategie te berekenen. Zo ontdekte hij onder meer een aantal situaties waarin de juiste beslissing zelfs voor ervaren spelers niet direct duidelijk zal zijn.

Yahtzee is een soort pokeren met dobbelstenen: het is de bedoeling om met vijf dobbelstenen telkens één van dertien voorgeschreven combinaties te gooien: een 'full house' (drie dezelfde en twee dezelfde) levert bijvoorbeeld 25 punten op, terwijl de maximale score van 50 punten wordt verkregen door vijf dezelfde ogen te gooien (een 'yahtzee'). In elke van de in totaal dertien ronden mag een speler drie keer gooien, de eerste keer met alle vijf de dobbelstenen, daarna mogen er afhankelijk van de uitkomst van de worp dobbelstenen worden overgegooid, al is dat niet verplicht. Na maximaal drie worpen moet een keuze gemaakt worden voor welke van de dertien categorieën de betreffende uitkomst telt. Om de optimale oplossing voor Yahtzee te vinden, ging Woodward omgekeerd te werk. Zo keek hij eerst naar



de allerlaatste beslissing die een speler dient te nemen: in de laatste beurt, met nog één worp te gaan. Op de scorekaart is dan ook nog maar één vakje open, zodat je precies kunt berekenen wat elke worp met de dobbelsteen oplevert. Als dat eenmaal duidelijk is, kun je dezelfde methode toepassen voor de een-na-laatste worp en zo steeds verder terugrekenen. Als alle mogelijkheden met behulp van een computerprogramma zijn doorgerekend, kan voor elke willekeurige worp op elk moment van het spel de juiste strategie worden bepaald. Die ligt niet altijd voor de hand. Stel bijvoorbeeld dat je na de eerste worp de combinatie 4-4-6-6-6 of 5-5-6-6-6 hebt gegooid. Deze combinaties kun je bijschrijven als een 'full house' (in beide gevallen 25 punten), een 'three-of-a-kind' (respectievelijk 26 en 28 punten) of als 'drie zessen' (achttien punten). Het is duidelijk dat die laatste keuze niet slim is, maar dat je de eerste het beste als een 'full house' kunt noteren en de tweede als een 'three-of-a-kind', zoals uit Woodwards analyse blijkt, is wel verrassend. Tegen Woodward scoort het programma gemiddeld zo'n zeventig punten hoger, maar omdat elke Yahtzee-speler en ook de computer afhankelijk is van het toeval, wint het programma niet altijd. Woodward hoopt het binnenkort algemeen beschikbaar te maken.

Veelvlakkenprijsvraag: laatste kans!



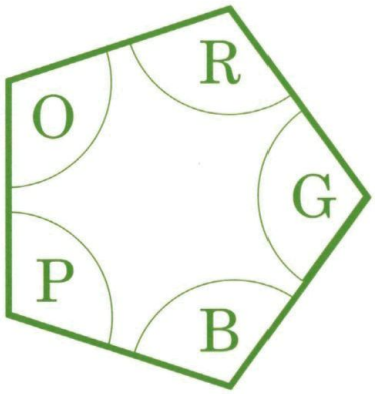
Vergeet niet je eigen kunstzinnige creatie van een veelvlak naar ons op te sturen. Dit is je kans om een fantastische (geld)prijs in de wacht te slepen! Insturen voor de veelvlakkenprijsvraag is nog enkele weken mogelijk. Stuur je kunstwerk, tezamen met een volledig ingevuld wedstrijdformulier (te downloaden via www.pythagoras.nu), naar de afdeling 'Lezersreacties' (zie het colofon in de binnenkant van het omslag voor het adres).

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Gekleurd dodecaëder-paar

De hoekpunten van een regelmatige vijfhoek worden elk rood, groen, blauw, paars en oranje gekleurd, en wel zo dat de hoekpunten verschillende kleur krijgen. Er zijn precies 24 manieren om dat te doen, als we twee kleuringen die een rotatie van elkaar schelen gelijk noemen.
Kun je van deze 24 gekleurde vijfhoeken twee dodecaëders maken, waarbij de kleuren in de hoekpunten aansluiten?



Getalspel

Twee spelers spelen het volgende spel. Op papier staat een rijtje van tien getallen waarvan de som oneven is. Om de beurt mogen de spelers of het eerste of het laatste getal uitgummen en dat bij hun score optellen. Als alle getallen zijn weggeveegd, is degene met de hoogste score de winnaar. Laat zien dat de eerste speler altijd kan winnen.

Derde machten

Laat n een natuurlijk getal zijn. Laat zien dat $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

Honderd gevangenen

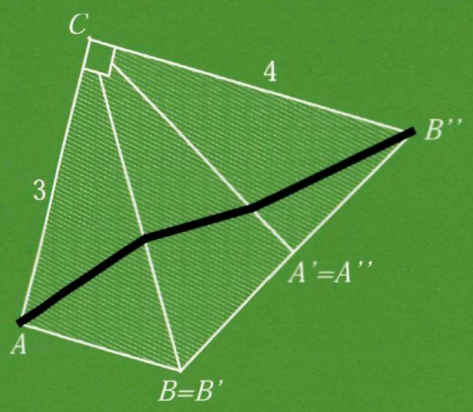
Op een dag worden de honderd gevangenen in een gevangenis bij elkaar geroepen voor een belangrijke mededeling. Vanaf morgen zal er iedere dag een gevangene worden uitgekozen en een paar uur in de isoleercel worden gestopt. Het kan zijn dat een gevangene meerdere dagen achter elkaar de klos is, maar de bewaarders zullen er voor zorgen dat iedereen in de loop der tijd willekeurig vaak aan de beurt zal komen. Daar staat tegenover dat de gevangenen gratie kan worden verleend: als een van de gevangenen op een zeker moment weet dat iedereen ten minste eenmaal in de isoleercel is geweest, dan mag hij dat melden en wordt iedereen vrijgelaten.
De enige manier waarop de gevangenen informatie met elkaar kunnen uitwisselen, is via een schakelaar in de isoleercel met twee standen: 'aan' en 'uit'. Degene die in de isoleercel zit, kan de schakelaar in een gewenste stand zetten en de gevangene die na hem aan de beurt is, kan zien in welke stand de schakelaar staat. De gevangenen krijgen vijf minuten om samen een strategie af te spreken. Kunnen de gevangenen vrij komen?
(Amos Rosenthal, JSG Maimonides)

°Oplossingen nr.5

door **Dion Gijswijt**

Elastiekje

De lengte van het elastiekje is gelijk aan de (kleinste) afstand tussen A en B'' in de figuur. Volgens de stelling van Pythagoras is de lengte dus $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



Wortelvorm

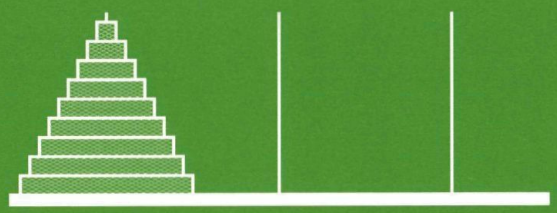
Als x een oplossing is van $x = \sqrt{5 + 2x}$, dan is x ook een oplossing van de gegeven vergelijking. Lossen we op: $x^2 - 2x - 5 = 0$, dan vinden we $x = 1 + \sqrt{6}$ (de oplossing $x = 1 - \sqrt{6}$ voldoet niet).

Dodecaëder

Van de 12 zijvlakken zijn er van elke kleur ten hoogste 3. Daarom zijn er van iedere kleur precies 3 zijvlakken. In elk van de 20 hoekpunten zit tenminste een rood of een blauw zijvlak. Verder zit er in 3 x 5 = 15 hoekpunten een rood zijvlak en in 15 een blauw zijvlak. Er zijn dus 30 – 20 = 10 hoekpunten met zowel een rood als een blauw zijvlak. Daarom zijn er 10/2 = 5 ribben waarin een rood en een blauw zijvlak aan elkaar grenzen.

Torens van Hanoi

Voor iedere verdeling van de negen schijven over de drie stokjes is er precies één legale positie, namelijk die waarbij de schijven per stokje van klein naar groot zijn geordend. Er zijn dus 3^9 legale posities. Bekijk de positie waarbij alle schijven op het linker stokje zijn gestapeld:



Vanuit deze positie is iedere andere legale positie als volgt te bereiken. Verplaats eerst het hele torentje van schijven naar het stokje waar de grootste schijf moet komen. Hoe dat moet, laten we aan de lezer over. De grootste schijf ligt nu op de juiste plaats en kunnen we verder negeren, zodat we een probleem met een schijf minder hebben. Door dit 9 maal te herhalen, kunnen we van groot naar klein de schijven een voor een op de juiste plaats krijgen. Door het bovenstaande proces om te keren, kunnen we ook vanuit iedere legale positie alle schijven op het linker stokje krijgen. We kunnen dus van iedere legale positie naar iedere andere legale positie komen via de positie waarbij alle schijven op het linker stokje zijn gestapeld. Een algoritme om in *zo min mogelijk* zetten van een gegeven positie naar een andere gegeven positie te komen, is bij de redactie niet bekend.

Veelvlakken: driedimensionale geometrische figuren die wiskundigen, filosofen en kunstenaars al eeuwenlang fascineren. Vervaardig ze zelf!

Zelf veelvlakken maken

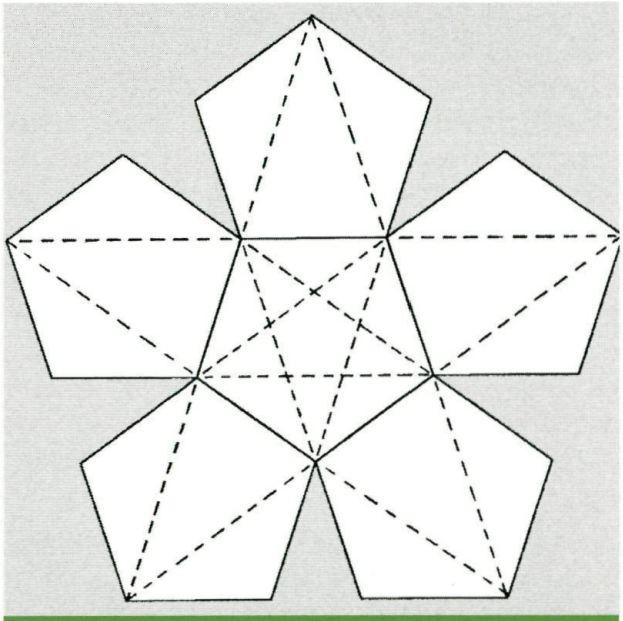
deel 5

door **Thijs Notenboom**

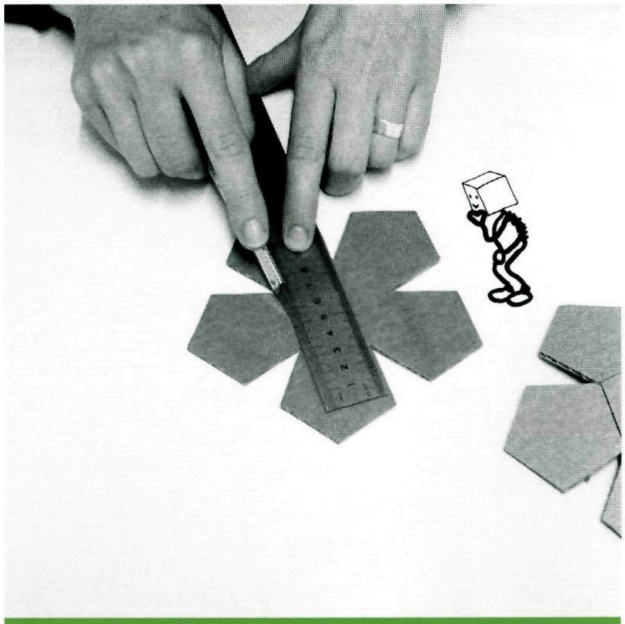
Een uitvouwdodecaëder van ribbeltjeskarton

1

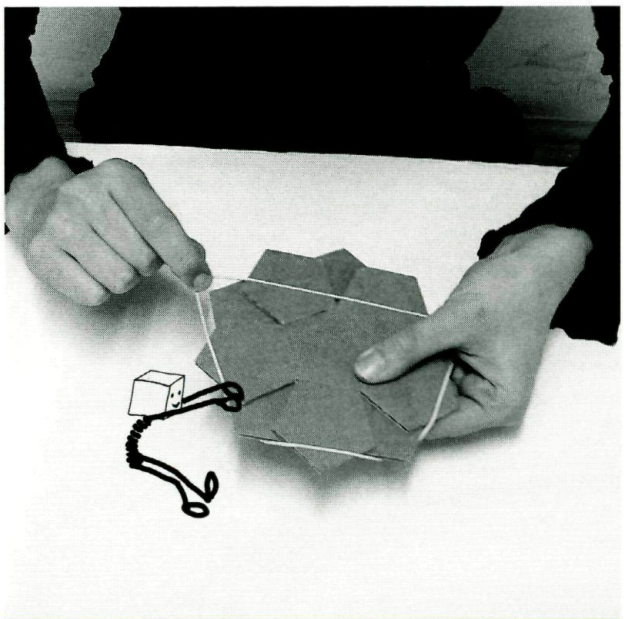
Je hebt nodig: een elastiekje en een stuk verpakkingskarton (met een ribbeltjes-tussenlaag). Als gereedschap gebruik je een mesje en een liniaal. Om regelmatige vijfhoeken te tekenen, heb je een passer en/of geodriehoek nodig.



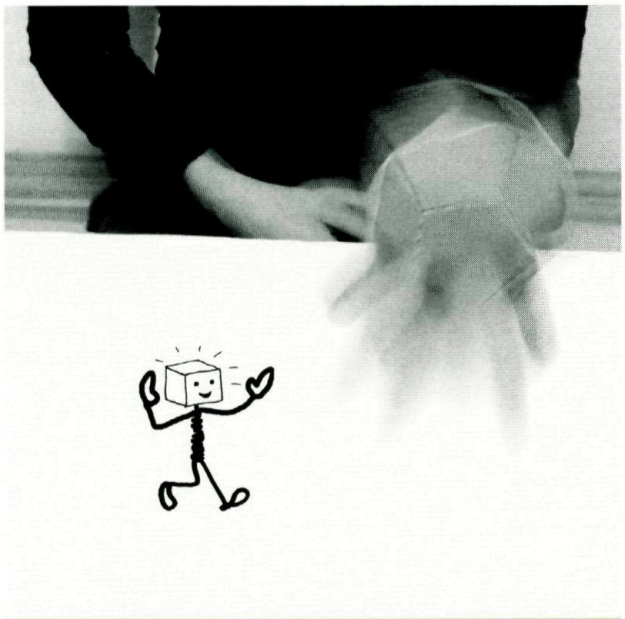
2 De dodecaëder bestaat uit twee van zulke stukken. Teken beide stukken op het karton en snij ze uit.



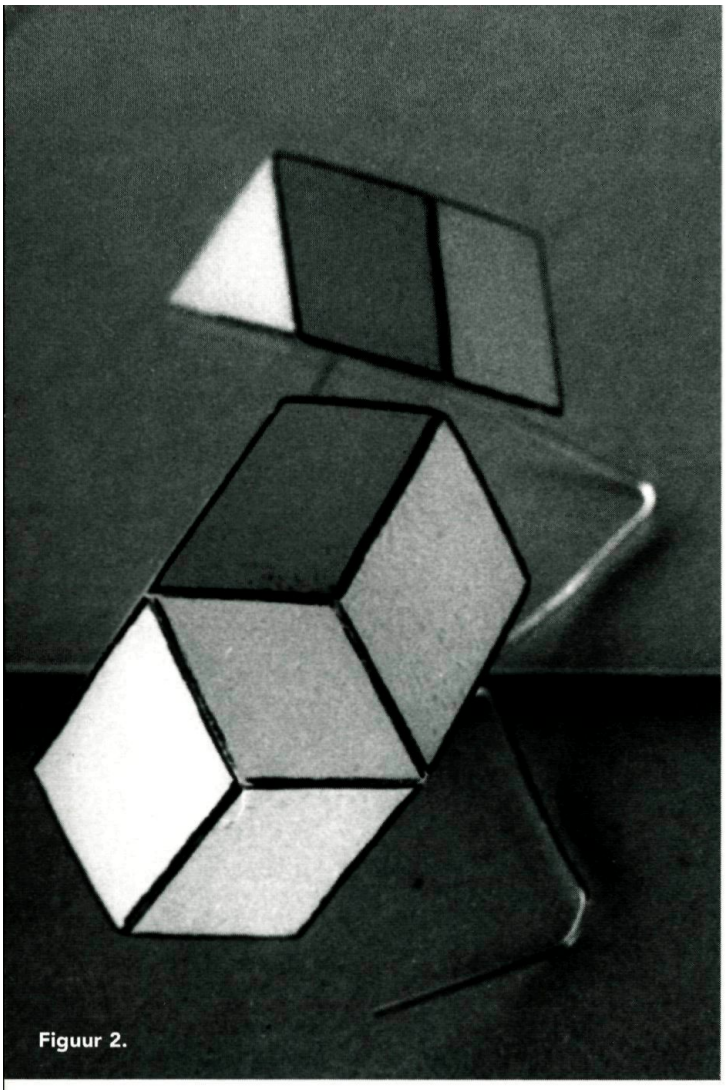
3 Snij de vouwnaden tussen de vijfhoeken één laagje diep in.



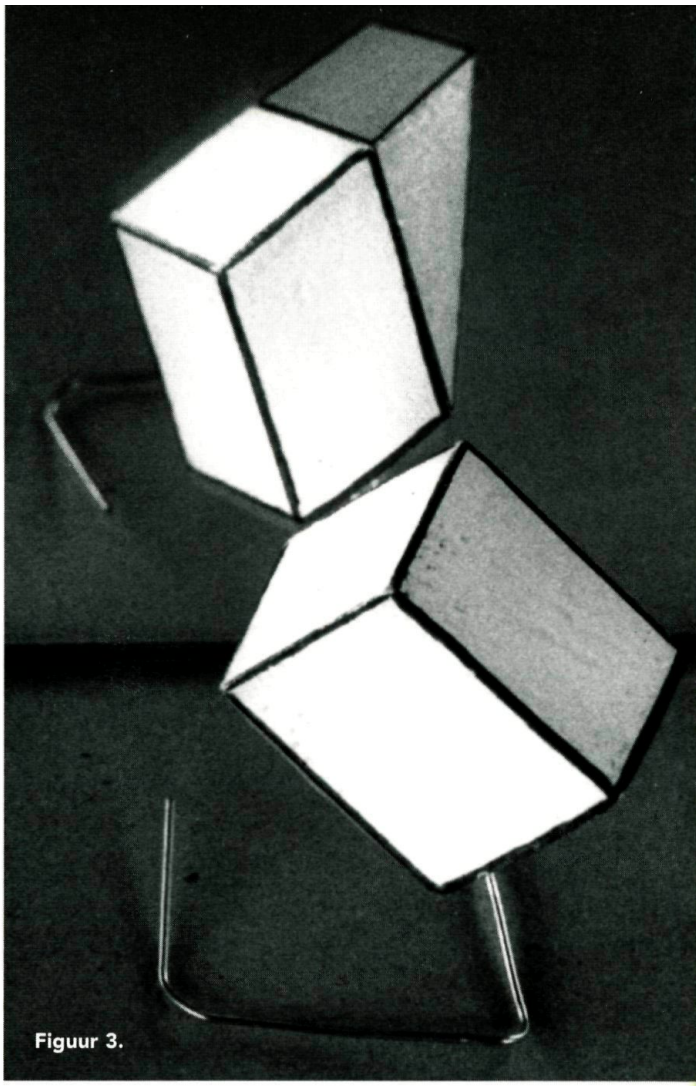
4 Leg de twee delen op elkaar, met de hoekpunten van de een tegenover de inhammen van de ander. Rijg daaromheen het elastiekje over elk hoekpunt heen.



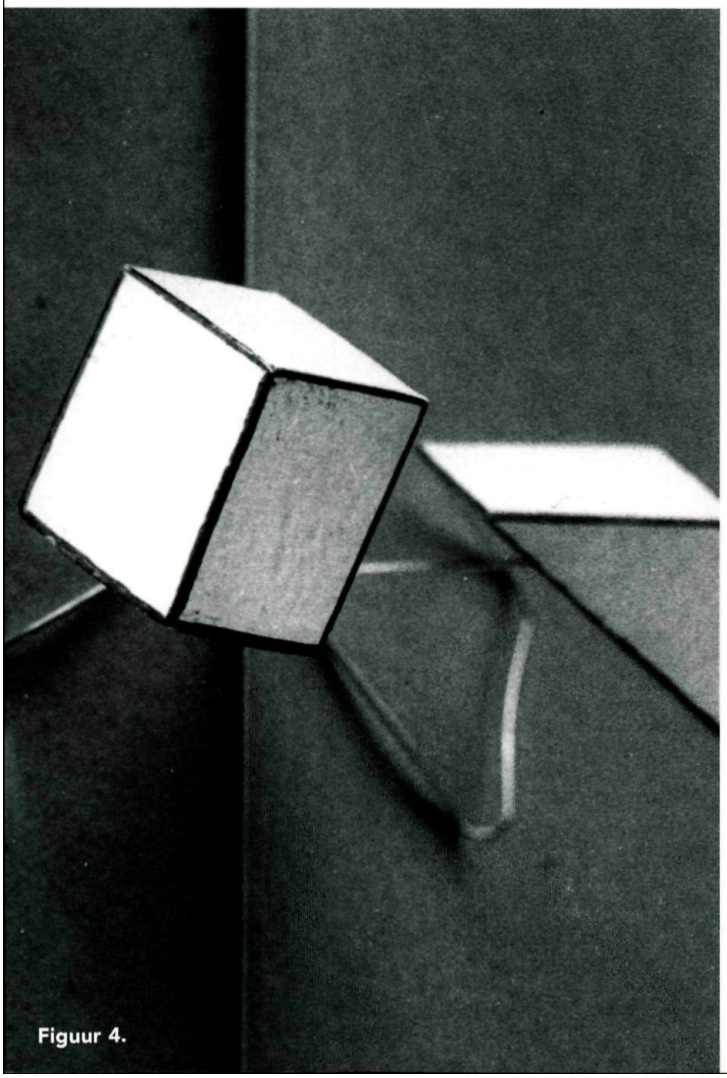
5 Laat los en de dodecaëder is klaar!



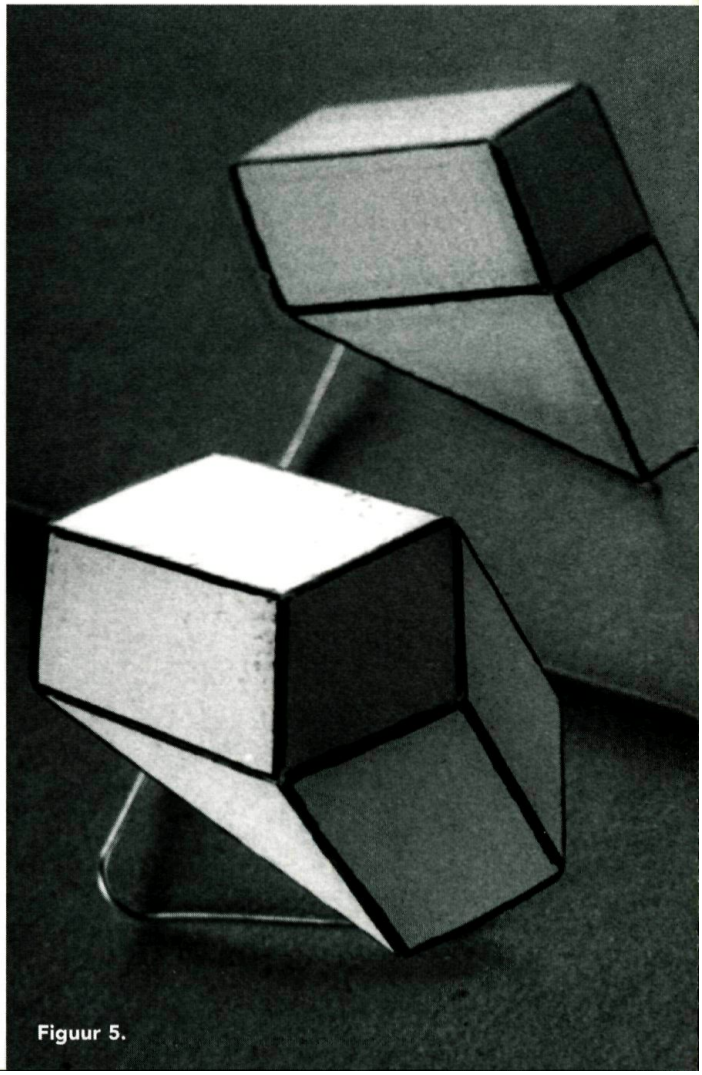
Figuur 2.



Figuur 3.



Figuur 4.

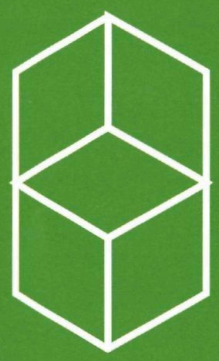


Figuur 5.

door **Bruno Ernst**

Een veelvlak met vele gezichten

In 1895 publiceerde Thiéry een uitgebreid artikel over zijn onderzoek op het gebied van een bepaalde groep optische illusies. Daarin vinden we voor het eerst de figuur die nu zijn naam draagt. Ze is opgebouwd uit vijf ruiten, met hoeken van 60 en 120 graden, zie figuur 1.



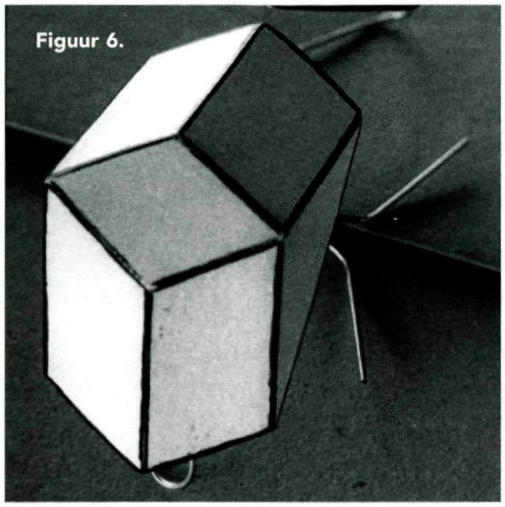
Figuur 1.
De figuur van Thiéry

Het is een figuur die heel gemakkelijk als een ruimtelijk voorwerp wordt gezien. Het lijken twee kubussen. Niet zo vermeldenswaardig, want de gezichtszin in onze hersenen probeert vrijwel alle vlakke beelden op het netvlies ruimtelijk te interpreteren. Maar hier is iets bijzonders aan de hand: als we enige ogenblikken naar de figuur blijven kijken, lijkt het onderste deel een gewone kubus en het bovenste alleen twee losse zijvlakken van een kubus. Plotseling verandert het beeld en zien we bovenaan een kubus en twee zijvlakken onderaan. Het is net een vreemd stoeltje dat je nu eens rechtop en daarna weer op z'n kop ziet.

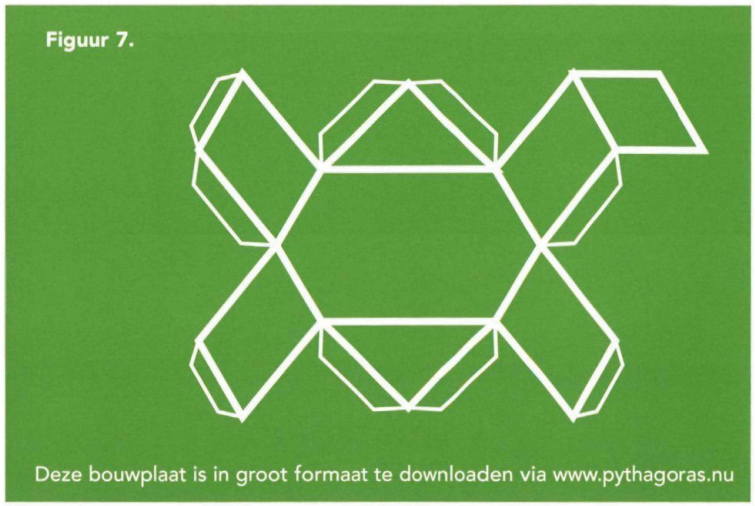
Is het mogelijk om een ruimtelijke figuur te maken die er uitziet als een Thiéry-figuur? Ik denk dat dat op vele manieren kan. Professor Deregowski van de Universieit van Aberdeen (Groot-Brittannië) stuurde mij een veelvlakje dat niet alleen de Thiéry-figuur laat zien, maar ook een reeks van onverwachte andere figuren.

Deregowski's veelvlak met vele gezichten
Op de pagina hiernaast zie je vier foto's. In figuur 2 is het voorwerpje voor een spiegel gezet: het spiegelbeeld toont een prismatisch lichaam, en verraadt niet hoe het voorwerpje er in werkelijkheid uitziet. In figuur 3 is de Thiéry-figuur zelfs helemaal verdwenen, terwijl het voorwerpje toch tegen een paperclip geleund vóór de spiegel staat. In figuur 4 blijft vóór de spiegel de kubus staan, terwijl het spiegelbeeld al iets van de bouw van het veelvak verraadt. In figuur 5 heeft de Thiéry-figuur er een vlakje bij gekregen en het spiegelbeeld lijkt op de stapeling van twee blokken uit een speelgoedblokkendoos.

Bouwplaat
Je hebt het *veelvlak met vele gezichten* van vele kanten kunnen bekijken. Je kunt het veelvlak ook zelf maken. Als je omslaat, zie je een bouwplaat van het veelvlak.



Figuur 6.



Figuur 7.

Deze bouwplaat is in groot formaat te downloaden via www.pythagoras.nu

door **René Swarttouw**

De post

De constante van Kaprekar (1)
Reinier Langelaar van het Groene Hart Lyceum te Alphen aan de Rijn attendeerde ons op een fout in de postrubriek van februari 2003. Daar wordt vermeld dat 099 de constante van Kaprekar is voor getallen van drie cijfers. Reinier rekent ons echter voor dat dat het getal 495 moet zijn. Bedankt voor deze terechte opmerking!

De constante van Kaprekar (2)
Ton Kool nam de uitdaging aan om te kijken naar de eventueel bestaande constantes van Kaprekar voor getallen van vijf en zes cijfers. Hij komt tot de verrrassende ontdekking dat er dan loops ontstaan. Voor getallen van vijf cijfers zijn er drie loops: (1) 53955, 59994; (2) 61974, 82962, 75933, 63954; (3) 62964, 71973, 83952, 74943. Hij wist ook nog de frequentie van voorkomen te vermelden: voor de eerste loop 3%, voor de tweede 49% en de derde 48%. Voor getallen van zes cijfers is er maar één loop waar je altijd in terechtkomt: 851742, 750843, 840852, 860832, 862632, 642654, 420876.

Bekertjeskubus
Naar aanleiding van het artikel 'Zelf veelvlakken maken' in het decembernummer zijn *Marijke Booy* en *Ineke van Kapel* van de Scholengemeenschap Dalton-Vatel te Voorburg aan de slag gegaan met het nabouwen van een bol van koffiebekers. Door de vorm van de bekertjes bleek een stevige constructie echter niet te maken. Wel ontstond een stevig bouwwerk toen ze besloten de zijvlakken niet vijfhoekig, maar vierhoekig te maken! Foto's van de 'ronde' kubus die zo ontstond, kun je zien op onze website.

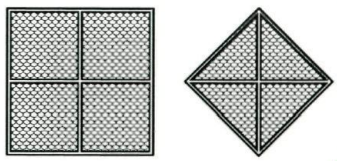
3D-vouwpuzzel
In het aprilnummer kon je de zes oplossingen zien van de 3D-vouwpuzzel uit het februarinummer. *Aad van de Wetering* merkte op dat het pas een echt mooie opgave wordt als er maar één oplossing te vinden zou zijn. Hij stelt daarom voor om van het rode stukje het zijvierkantje één positie te laten zakken. Probeer vervolgens eens de unieke oplossing te vinden!

OPLOSSINGEN NR 5

Oplossingen Kleine nootjes

Zwijgen is goud
De kleur van de muts van Cees is groen. Immers, als Alice het niet weet en Bart ziet dat Cees een rode muts draagt, dan weet Bart dat hij een groene muts op heeft (want anders zou Alice het al kunnen weten). Dus weet Cees dat zijn muts groen is.

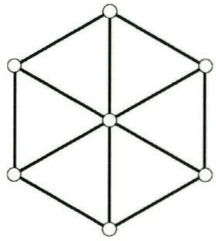
Uitzicht



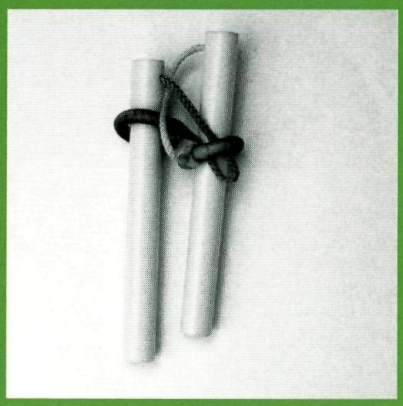
Hengel
De hengel wordt met een lijn gespannen in een halve cirkel. De middellijn daarvan is minder dan 2 meter ($6/\pi$).

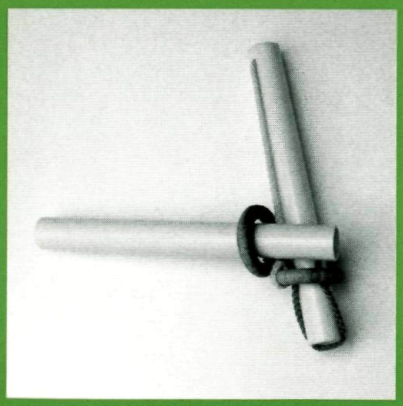
Klokkijken
$10\frac{2}{7}$ uur zijn verstreken. Het is dus zeventien minuten over tien.

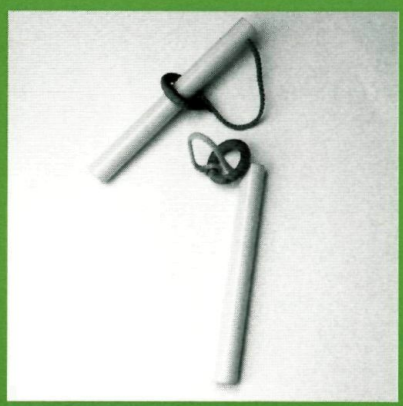
Schapen scheiden



Oplossing Tweelingpuzzel







Activiteiten

4 t/m 8 augustus 2003 **Vierkant voor Wiskunde Zomerkamp**
Voor leerlingen van de basisschool en de brugklas
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

11 t/m 15 augustus 2003 **Vierkant voor Wiskunde Zomerkamp**
Voor leerlingen van de middelbare school
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

Vakantiecursus Wiskunde voor leraren
vrijdag 22 augustus 2003 Technische Universiteit Eindhoven
zaterdag 23 augustus 2003 Centrum voor Wiskunde & Informatica, Amsterdam

vrijdag 12 september 2003 **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2003**
Tweede ronde
Technische Universiteit Eindhoven

vrijdag 26 september 2003 **Wiskundetoernooi voor scholieren**
Katholieke Universiteit Nijmegen
http://www.math.kun.nl/wistoernooi/

vrij 6 en za 7 februari 2004 **Nationale Wiskunde Dagen**
Leeuwenhorst Congres Centrum,
Noordwijkerhout
http://www.fi.uu.nl/nwd

Dit is de laatste gedrukte activiteitenkalender in Pythagoras. Met ingang van de volgende jaargang is deze kalender alleen via onze website beschikbaar.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.

Universiteit van Amsterdam

Vrije Universiteit Amsterdam

Universiteit Leiden

Universiteit Utrecht

Rijksuniversiteit Groningen

Technische Universiteit Eindhoven

Centrum voor Wiskunde & Informatica

EURANDOM

Pythagoras
Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Pythagoras verschijnt deze jaargang vijf keer, met een dubbelnummer in februari.

Abonnementen
Een abonnement op Pythagoras begint in september en eindigt in augustus van het volgende jaar. Aanmelden kan op een van de volgende manieren:
telefonisch: 0522 855 175,
per fax: 0522 855 176,
via Internet: www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
of schriftelijk (een postzegel is niet nodig):
Pythagoras, Antwoordnummer 17, 7940 VB Meppel.

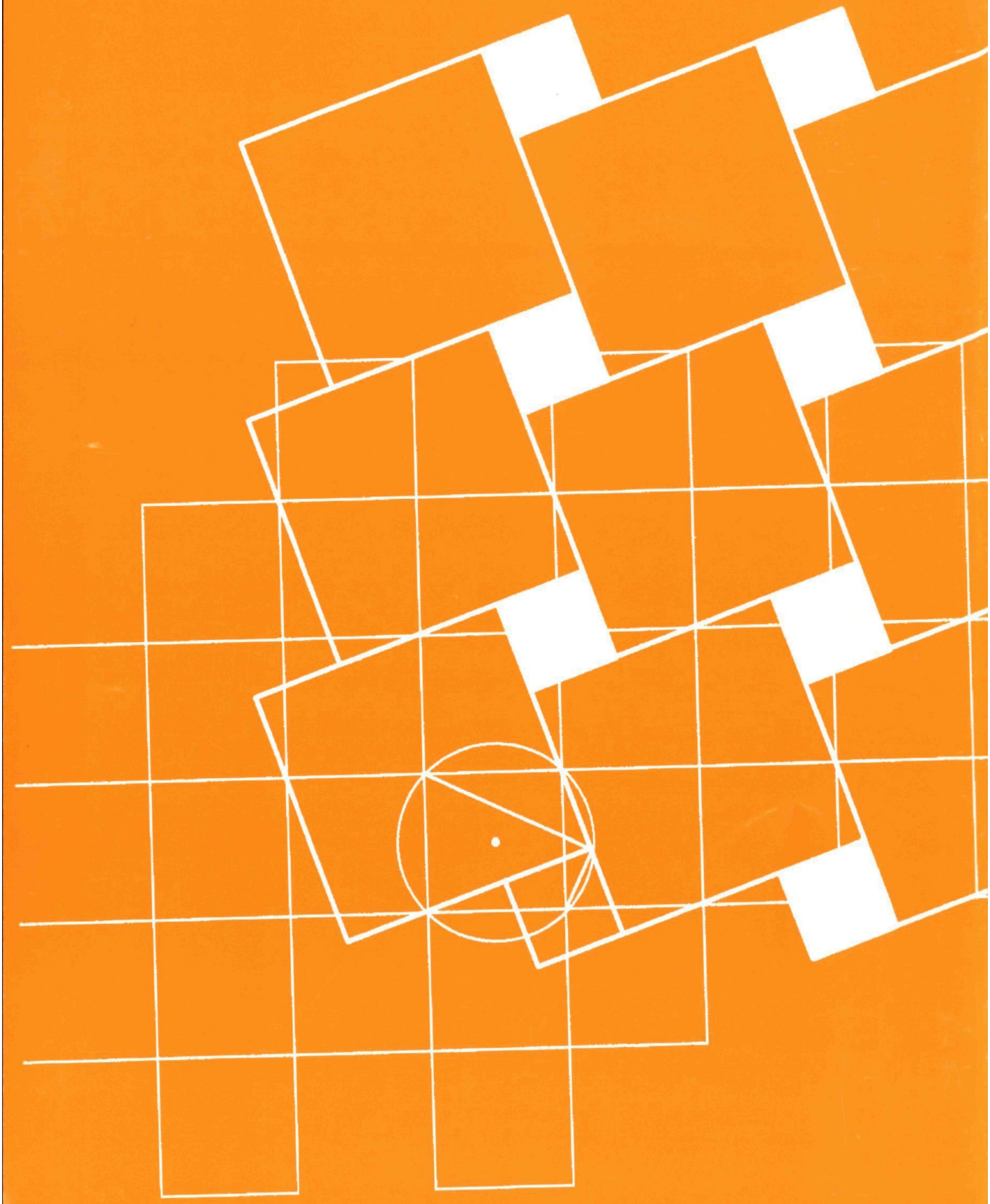
Tarieven 2002-2003
Jaarabonnement:
Pythagoras € 19,50
Pythagoras België € 22,00
Pythagoras buitenland € 25,00
Pythagoras én Archimedes € 33,50
Pythagoras én Archimedes België € 38,50
Pythagoras én Archimedes buitenland € 44,50
Losse nummers Pythagoras € 4,00

Leerlingabonnement
Pythagoras € 16,50 per jaar
Pythagoras België € 20,00 per jaar
Leerlingabonnementen zijn voor leerlingen in het middelbaar onderwijs (tot 18 jaar). Het leerlingabonnement is een doorlopend abonnement. Leerlingen dienen bij aanmelding hun geboortedatum en school te vermelden. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Bulkabonnement
Pythagoras € 13,50 per jaar
Pythagoras België € 15,00 per jaar
Voor scholen zijn er bulkabonnementen. Minimum afname: vijf stuks, altijd één exemplaar gratis. De nummers en de rekening worden naar één schooladres gestuurd.
Dit schoolabonnement loopt aan het eind van het jaar af. Telefonisch aanmelden bij de abonnee-administratie: 0522 855 175.

Betaling
Wacht met betalen tot u een acceptgiro krijgt thuisgestuurd. Bij tussentijdse abonnering ontvangt en betaalt u alleen de nog te verschijnen nummers van de lopende jaargang. Gewone abonnementen en leerlingabonnementen zijn doorlopend, tenzij vóór 1 juli schriftelijk is opgezegd bij de abonnee-administratie:
Pythagoras, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

Bestelservice
Bij de abonnee-administratie zijn oude jaargangen en posters te bestellen:
jaargangen 36 t/m 40 € 12,50
jaargang 41 € 18,00
poster 'Zeef van Eratosthenes' € 3,50
poster 'Onmogelijke stelling' € 3,50
poster 'Veelvlakken' € 5,00
Prijzen zijn exclusief verzendkosten.



42ste JAARGANG NUMMER 6