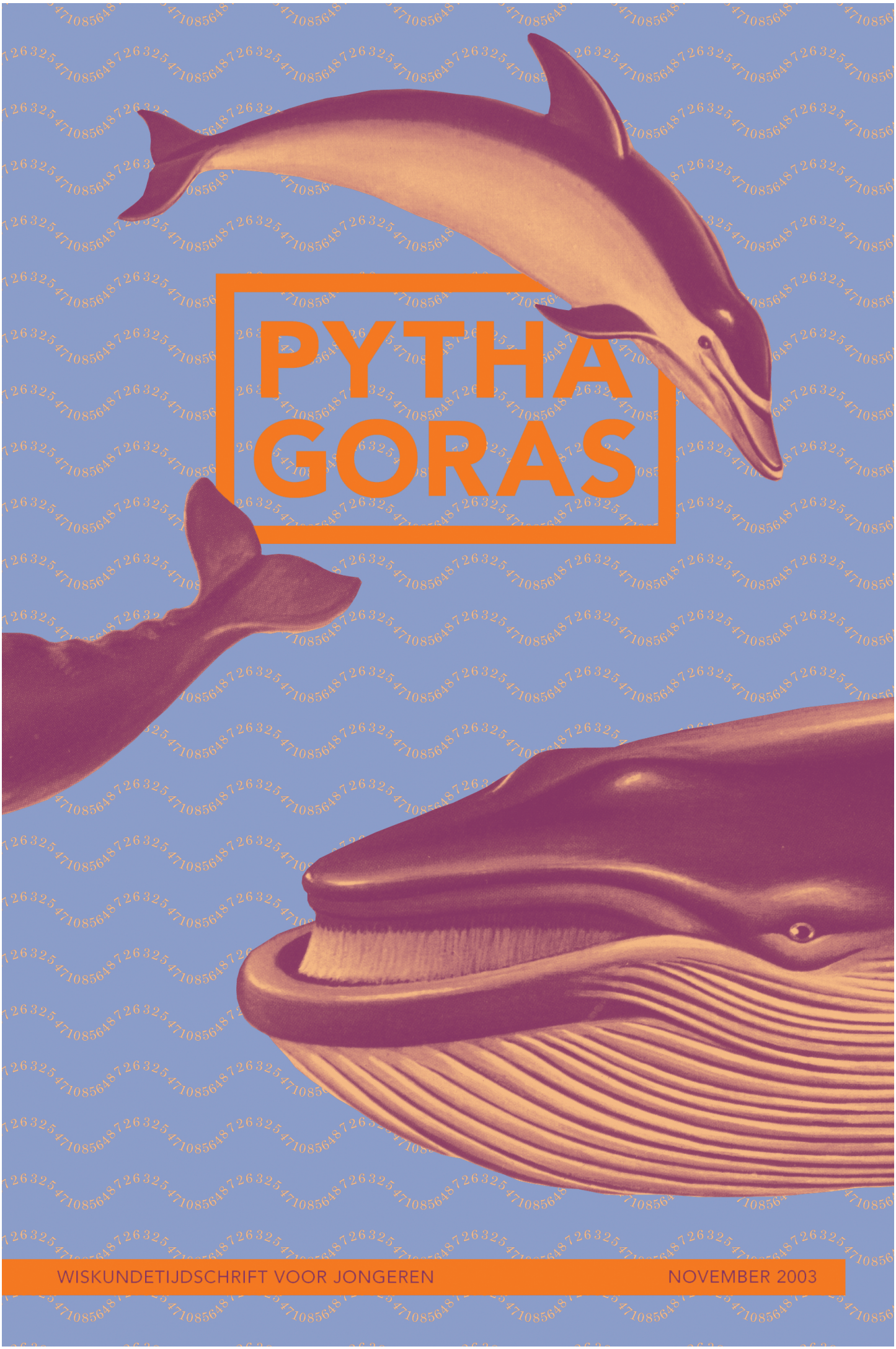


WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN NOVEMBER 2003

PYTHAGORAS

43ste jaargang nummer 2
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden. Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 19,95, € 22,50 (België), € 25,50 (overig buitenland), € 16,95 (leerlingabonnement), € 13,75 (bulkabonnement). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), prof. dr. F. van der Blij, emeritus hoogleraar wiskunde aan de UU (vanderblij@tiscali.nl), dr. L.A.M. van den Broek, docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen (vdbroek@math.kun.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. R. Erné, bladmanager van Pythagoras en Nieuw Archief voor Wiskunde (erne@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), drs. J.S. Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag (j.sgroot.member2@freeler.nl), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), T. Moene, medewerker aan het KNMI te De Bilt (moene@knmi.nl), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), L.Y. van de Wiel, student natuurkunde aan de UU (l.y.vandewiel@phys.uu.nl), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag
Illustraties van zeemonsters

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met 2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

RuG TU/e TU Delft CWI EURANDOM

INHOUD

2 - 3 **Kleine nootjes**

4 - 7 **Rekenwerk bij het KNMI**

8 - 11 **Zeemonsters (deel 2)**

12 - 13 **Rekenen met sutra's**

14 - 15 **Kampuzzel**

16 - 17 **Pythagoras Olympiade**

18 - 19 **De rij $\sqrt[n]{n}$**

20 - 21 **Problemen – Oplossingen**

22 - 24 **Inpakken**

25 **Journaal**

26 - 29 **Uitslag veelvlakken-prijsvraag**

30 - 32 **123456789**

33 **Oplossingen nr. 1**

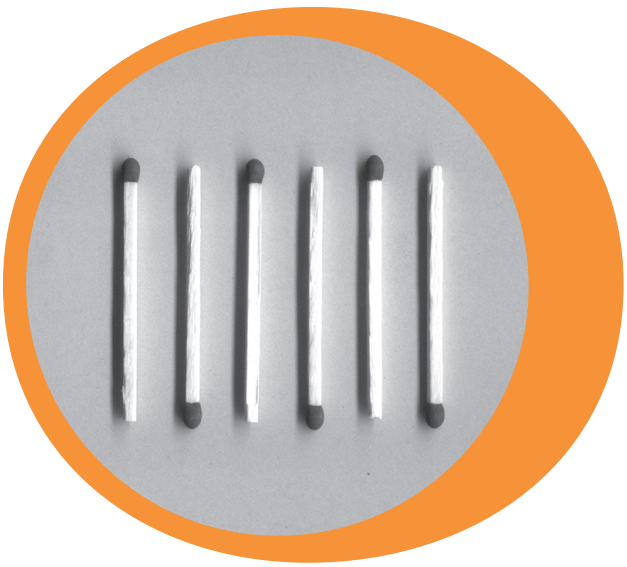
door **Dick Beekman**
www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.

Kleine nootjes

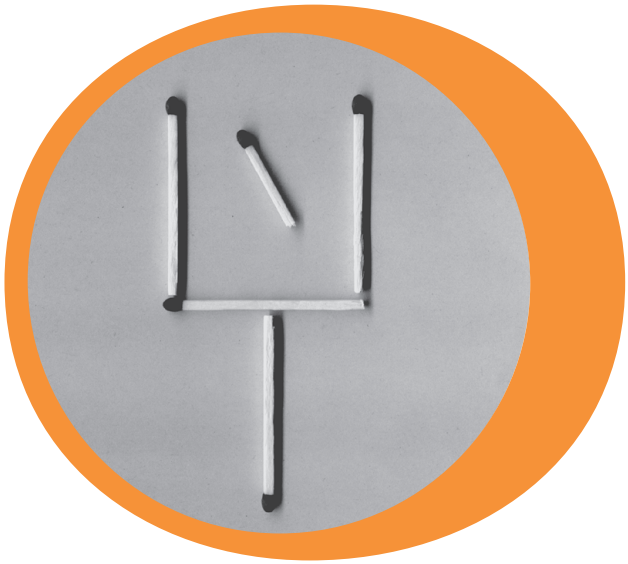
Vier driehoeken
Hoe maak je met 6 lucifers 4 identieke driehoeken?

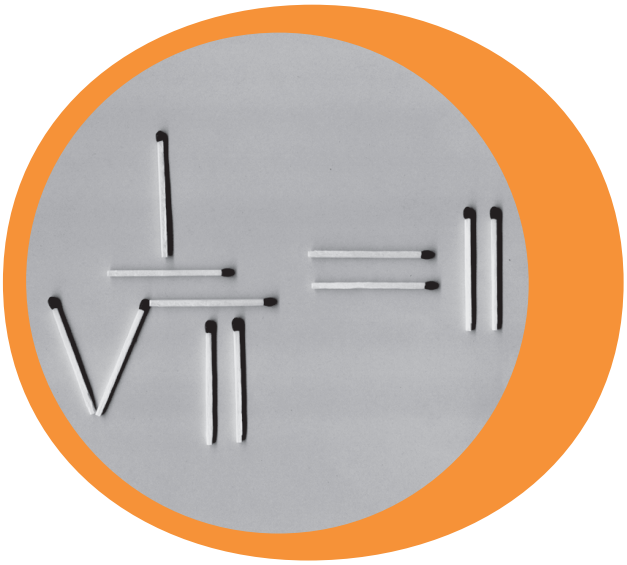
Rechtop en ondersteboven
Er liggen zes lucifers voor je: drie rechtop en drie ondersteboven. Uit dit rijtje mag je twee naast elkaar liggende lucifers kiezen en deze gezamenlijk vooraan of achteraan de rij laten aansluiten. Probeer in zo min mogelijk zetten de rechtopstaande lucifers bij elkaar te krijgen.



Veger en blikje

Op een blikje (van het bekende veger en blikje) ligt een klein lucifertje. Het blikje bestaat hier uit 4 lucifers. Verplaats 2 grote lucifers en het kleine lucifertje ligt naast het blikje.



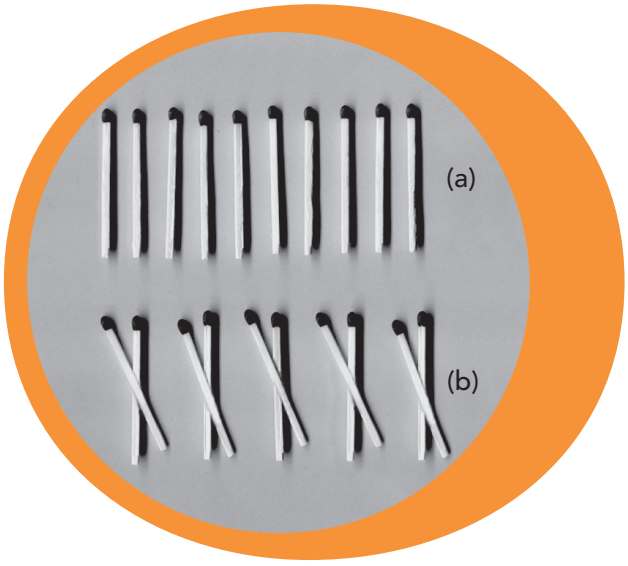


Vergelijking

Hiernaast staat de niet-kloppende vergelijking $1/\sqrt{2} = 2$. Verplaats één lucifer zodanig dat de vergelijking klopt.

Vijf kruisjes

Leg 10 lucifers naast elkaar (figuur a). Pak een lucifer op, spring hiermee over 2 andere heen en plaats hem kruiselings over de eerstvolgende lucifer. Kun je het zo doen dat je met 5 kruisjes (figuur b) eindigt?



door **Matthijs Coster** en **Toon Moene**

Rekenwerk b

Bij het opstellen van een verantwoorde weersverwachting komt heel wat zware wiskunde kijken. Voor het rekenwerk dat met de voorspelling gemoeid gaat, is dan ook een zeer krachtige computer nodig, een zogenaamde *supercomputer*. Hoe dat alles precies in zijn werk gaat, kun je in dit artikel lezen.

Supercomputer bij het KNMI

In eerste instantie zul je misschien verbaasd zijn iets over het KNMI te lezen in het wiskundetijdschrift Pythagoras. Vanuit het thema 'het rekenwerk' is het echter niet zo verbazingwekkend, op het KNMI wordt namelijk ontzettend veel gerekend. Voor dat rekenwerk beschikt men over een supercomputer (zie kader op pag. 6) van het type SUN FIRE 15000, zie figuur 1. Deze machine bevat maar liefst 54 CPU's (zie kader op pag. 6). Elke CPU in deze machine is net zo krachtig als die in een geavanceerde PC. Maar belangrijker is dat de SUN FIRE goed is uitgerust om de CPU's met elkaar te laten communiceren. De computer wordt gebruikt voor meerdere doeleinden. Het belangrijkst zijn de weersverwachtingen die ermee worden doorgerekend, maar de computer wordt ook gebruikt om klimatologische voorspellingen te doen. Men probeert antwoord te vinden op vragen zoals: Bestaat er een broeikaseffect? Wordt het warmer? In dit artikel gaan we alleen in op de weersverwachting.

Rekenen met de elementen

Bij de weersverwachting speelt een groot aantal variabelen een rol:

- temperatuur
- windrichting, -snelheid
- hoeveelheid zon
- luchtdruk
- vochtigheid, neerslag
- bodemgesteldheid.

Er zijn nog veel meer elementen, dit zijn slechts de belangrijkste.

Al deze variabelen verschillen lokaal; om een voorspelling voor Nederland te kunnen doen, moeten we ze kennen voor een gebied dat heel wat groter is. In de praktijk wordt gekozen voor een gebied dat circa 8.000 x 6.000 km^2 groot is, dat is ongeveer $\frac{1}{12}$ deel van het totale aardoppervlak. Deze enorme oppervlakte is noodzakelijk, omdat het kan voorkomen dat binnen een termijn van twee dagen het weer aan de randen van het gebied het weer in Nederland beïnvloedt. In figuur 2 zie je een voorbeeld van een rekengebied.

ij het KNMI

Figuur 1
Een supercomputer van het type SUN FIRE 15000

Voorbereidingen
Voordat de berekening kan beginnen, dienen de weersomstandigheden van dit ogenblik te worden ingevoerd. Liefst heeft men zoveel mogelijk gegevens uit het bovengenoemde gebied. Een groot stuk van het gebied beslaat de Atlantische Oceaan. Daar zijn relatief weinig meetpunten. Daar staat tegenover dat op het vaste land (en ook op de Noordzee) veel meetpunten zijn.

Om het weer over een periode van twee dagen te voorspellen, wordt het eerder genoemde gebied (8.000 x 6.000 km^2) opgesplitst in 130.000 deelgebieden van gemiddeld 22 x 22 km^2 groot. Er wordt van uitgegaan dat de weersomstandigheden in één zo'n gebiedje helemaal gelijk zijn (deze aanname is uiteraard niet geheel juist, maar een fijnere indeling zou inhouden dat er een grotere computer nodig is om het rekenwerk uit te voeren). Binnen zo'n gebied van 22 x 22 km^2 kunnen de variabelen op grotere hoogte sterk verschillen van dicht bij de grond. Daarom wordt het gebied van 0 tot 15 km hoogte ook nog eens onderverdeeld in 31 segmenten.

De berekening
De berekening kan beginnen. Er wordt per gebiedje van 22 x 22 km^2 berekend hoe het weer er over zes minuten uit zal zien, dat wil zeggen: per element zoals luchtdruk, temperatuur en neerslag, wordt er berekend wat daarmee gebeurt in een dergelijke periode.

Het lijkt allemaal heel simpel: door de verplaatsing van de lucht wordt 'het weer' verplaatst, maar er komen nog tal van andere invloeden bij kijken, zoals verdamping uit zee, neerslag en botsende fronten.

Vervolgens moeten de gegevens worden doorgegeven aan de aangrenzende gebiedjes. Deze gegevens dienen dan weer als invoer voor een nieuwe ronde waarin opnieuw het weer na zes minuten berekend wordt. Uiteindelijk 480 berekeningen verder is er een voorspelling berekend voor over een periode van twee dagen.

Het gebruik van een supercomputer
In principe zou één PC deze berekening kunnen uitvoeren. Het zou een PC echter 30 uur kosten. Daar heb je weinig aan als je

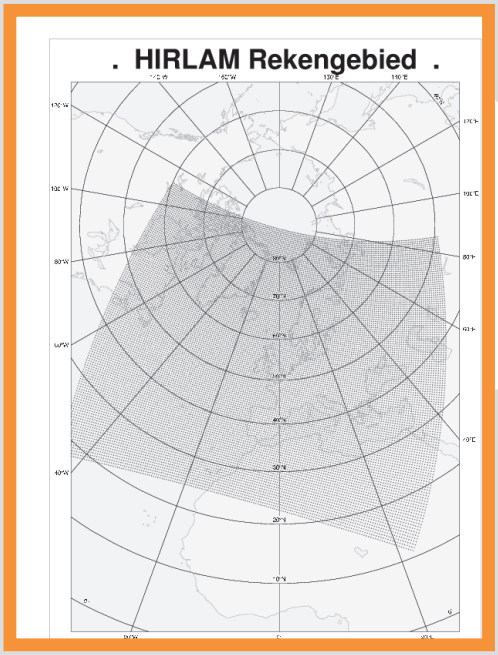
het weer slechts voor 48 uur voorspelt. Vandaar dat de berekening wordt opgesplitst in 36 moten. Elke moot omvat ongeveer 3600 gebiedjes. Een CPU doet de berekening van zo'n moot nu in $\frac{1}{36}$ deel van de oorspronkelijke tijd, dat is 50 minuten.

Er is nu echter een complicerende factor. Als een berekening voor een interval van zes minuten is uitgevoerd, dan moeten gegevens worden uitgewisseld tussen aangrenzende gebiedjes. In het geval van de straalstroom (een op 9 á 10 km hoogte waaiende zeer sterke wind, soms wel meer dan 350 km/uur) kan 'het weer' (dus wolken, temperatuur, etcetera) zich nog veel sneller verplaatsen. In zes minuten tijd kan het weer zich dan twee of drie vakjes verplaatsen. Om met dit soort bewegingen rekening te houden, worden bepaalde gebiedjes aan verschillende CPU's tegelijk toegekend. In dit geval zullen de CPU's met elkaar moeten communiceren. Het KNMI gebruikt een marge van vijf vakjes overlap. Na elke tussenberekening zal deze communicatie opnieuw plaats moeten vinden.

Tenslotte

De bovengenoemde berekening wordt diverse malen per dag herhaald. Als de computer niet wordt gebruikt voor de weersverwachting, dan zijn er mogelijkheden om bijvoorbeeld de computer te gebruiken ten behoeve van berekeningen aan het klimaat.

De toren van het KNMI-gebouw in De Bilt



Figuur 2 Het HIRLAM Rekengebied beslaat ongeveer $\frac{1}{12}$ deel van het totale aardoppervlak

Terminologie

- *CPU*: (Central Processing Unit) De chip in de computer die de berekening uitvoert. Een 'gewone' PC heeft één CPU.
- *byte*: Informatie op de computer wordt opgeslagen in nullen en enen. Een combinatie van 8 nullen en enen heet een byte. Dit is de eenheid waarin *geheugen* in de computer wordt uitgedrukt.
- *Kb, Mb, Gb*: 1 Kb (*kilobyte*) = 1024 byte, 1 Mb (*megabyte*) = 1024 Kb en 1 Gb (*gigabyte*) = 1024 Mb.
- *supercomputer*: een computer die bestaat uit een hele serie van afzonderlijke computers die met elkaar communiceren.

Nederland kent heel wat supercomputers, hier volgt een zeer onvolledig lijstje:

Merknaam	CPU's	Locatie
SGI ORIGIN 3800	1024	SARA, Amsterdam
Itanium	416	SARA, Amsterdam
IBM P III-cluster	1024	Shell Rijswijk
CRAY T3E	128	Universiteit Delft
SUN FIRE 15000	54	KNMI, De Bilt

Vragen en opdrachten

1. Per segment worden de genoemde elementen (temperatuur, neerslag, etcetera) opgeslagen in 48 bytes. Hoeveel gegevens moeten er op één ogenblik worden opgeslagen in de computer? (Houd ook rekening met de 31 segmenten per gebiedje.)

2. Doe vraag 1 opnieuw, maar houd dan rekening met een overlap van vijf vakjes. Voor het gemak mag je ervan uitgaan dat elke CPU 3600 vakjes toegewezen krijgt die in een vierkant liggen van 60 x 60.

3. Schat hoeveel informatie er uitgewisseld moet worden tussen twee aangrenzende CPU's. Hoeveel seconde zou het duren als de communicatie zou verlopen via een 56 Kb/seconde modem verbinding?

4. Het gebied is zo groot gekozen dat het in principe onmogelijk is dat binnen twee dagen weerverschijnselen zoals een orkaan of storm van buiten het gekozen gebied Nederland kunnen bereiken. Kun je nagaan met welke snelheid een orkaan zich beweegt, die nu precies op de rand van het gebied ligt, en over twee dagen Nederland zal bereiken?

KNMI en het klimaat

Het jaar 2003 was zowel qua temperatuur als qua neerslag uitzonderlijk. De zomer van 2003 was voor Nederland de op een na heetste zomer ooit (gemiddeld 18,6 graden Celcius); alleen in 1947 lag de gemiddelde temperatuur over de maanden juni, juli en augustus iets hoger (gemiddeld 18,7 graden). Wat de droogte betreft, was 2003 écht een recordjaar. In de ochtenduren van 17 augustus bereikte de waterstand in de Rijn een historisch dieptepunt. Bij Lobith werd 7,17 meter boven NAP gemeten. Het oude record was 7,22 meter op 13 september 1991.

In de afgelopen tien jaar kwamen vijf van de tien warmste zomers voor. Daarnaast is de gemiddelde temperatuur in 100 jaar tijd met 0,6 graden gestegen. Is dat een reden om te zeggen dat het warmer wordt in Nederland? Het KNMI is uiterst voorzichtig om dergelijke algemene beweringen te doen. Maar uit berekeningen van het Centrum voor Klimaatonderzoek (CKO), die in september zijn afgerond, is wél gebleken dat een herhaling van de recordzomers van 1947 en 2003 waarschijnlijker wordt.

Voor het onderzoek is drie maanden gebruik gemaakt van een van de supercomputers in het Amsterdamse rekencentrum SARA. De uitslagen suggereren voor Nederland een sterk toegenomen kans op extreme hitte in de zomer. De berekeningen laten hoge uitschieters naar boven zien; tot zomers met een gemiddelde temperatuur van bijna 21 graden aan toe. De kans op een Elfstedentocht-winter neemt volgens het rekenmodel zichtbaar af en extreem koude winters, zoals in 1963 (gemiddeld min 3,2 graden), komen volgens de computer over dertig jaar zelfs helemaal niet meer voor in Nederland.

De supercomputer deed niet één berekening, maar ruim zestig, steeds op basis van miljoenen metereologische variaties. Dat alles om een theoretisch, maar statistisch verantwoord beeld te krijgen van alle mogelijke zomers en winters tot aan het jaar 2080. Het onderzoek brengt de kans op extremen in een opwarmende wereld voor het eerst in kaart, maar een echte voorspelling van klimaatverandering is het niet.

Lees meer over het klimaat op de websites www.knmi.nl en hirlam.knmi.nl.

ZEE

door **Jos Groot**

Wat vooraf ging

Dit artikel is een vervolg op *Zeemonsters* dat verscheen in het vorige nummer van Pythagoras. Daarom geven we eerst een korte samenvatting van dat artikel. De bioloog Charles Paxton had uit vroegere publicaties achterhaald wanneer 'zeemonsters' (in zee levende dieren die langer dan twee meter zijn) voor het eerst gevonden werden. Uit die gegevens bleek dat nieuwe soorten steeds minder vaak ontdekt worden. Uiteindelijk zullen ze immers allemaal ontdekt zijn. Hij voorspelde dat er vanaf 1998 nog ongeveer 51 nieuwe soorten ontdekt zullen worden. Op grond van een populair-wetenschappelijk artikel in het tijdschrift *Intermediair* probeerde ik zijn model te achterhalen. Laten we dat model (1) noemen:

$$B(t) = 271(1 - 0{,}9961^{\,t-1572}). \qquad (1)$$

Dit model geeft het aantal bekende (ontdekte) soorten B als functie van de tijd t (in jaren). De grenswaarde waar B naar toe gaat is 271. Het vanaf 1998 nog te ontdekken aantal is volgens (1) dus inderdaad $271 - B(1998) \approx 271 - 220 = 51$.

Paxtons model

Uit contact met Paxton bleek verrassenderwijs dat zijn model er heel anders uitzag:

$$B(t) = 264 - \frac{10169}{t - 1767}. \qquad (2)$$

Volgens dit model (2) is het uiteindelijke aantal zeedieren 264. Vanaf 1998 zouden er volgens Paxton dus nog $264 - B(1998) \approx 264 - 220 = 44$ te ontdekken soorten over zijn, wat verschilt van de 51 in het Intermediair-artikel, en in mijn model (1). De afwijking is te verklaren doordat er in het Intermediair-artikel wat recentere gegevens stonden dan waar Paxton zijn model op had gebaseerd. Maar wat vooral opvalt, is dat de vorm van model (2) wezenlijk verschilt van die van model (1). Om model (1) met (2) beter te kunnen vergelijken, stuurde Paxton mij de oorspronkelijke gegevens (het aantal nieuw ontdekte soorten per jaar, van 1829 tot en met 1995) waarmee hij de parameters in model (2) had bepaald. Toen ik die gegevens gebruikte om de drie parameters in mijn model (1) opnieuw te bepalen, wachtte mij een verrassing: het aantal nog te ontdekken soorten was nu nog maar 3!

MONSTERS

Deel 2

In de praktijk komt het regelmatig voor dat je meetgegevens met een model wilt vergelijken. Dat gebeurt vaak door een (niet-)lineaire kleinste-kwadraten fit. Wat deze wiskundige techniek inhoudt, wordt in dit artikel uitgelegd. Een voorbeeld toont aan dat je wel voorzichtig met de resultaten om moet springen.

Het aantal bleek dus heel afhankelijk van het model.

Om te verklaren waarom dat in dit geval zo is, moet ik eerst iets uitleggen over hoe je de (model)parameters uit data haalt volgens een zogenaamde *fit*-procedure.

De kleinste-kwadraten fit

Een belangrijke stap in het opstellen van een model is het vinden van een formule waarvan de uitkomsten zo goed mogelijk kloppen met de gegevens. We geven hier een verzonnen voorbeeld. Een leerling heeft bijgehouden hoe lang hij aan proefwerken gezeten heeft (t) en wat het behaalde resultaat was (c). Dat leverde de volgende gegevens (data), die hij uitzet in een grafiek, zie figuur 1 op volgende pagina.

studietijd t (in uren)	cijfer c
0	2
0,5	5
1	7,5
1,5	8
2,5	9

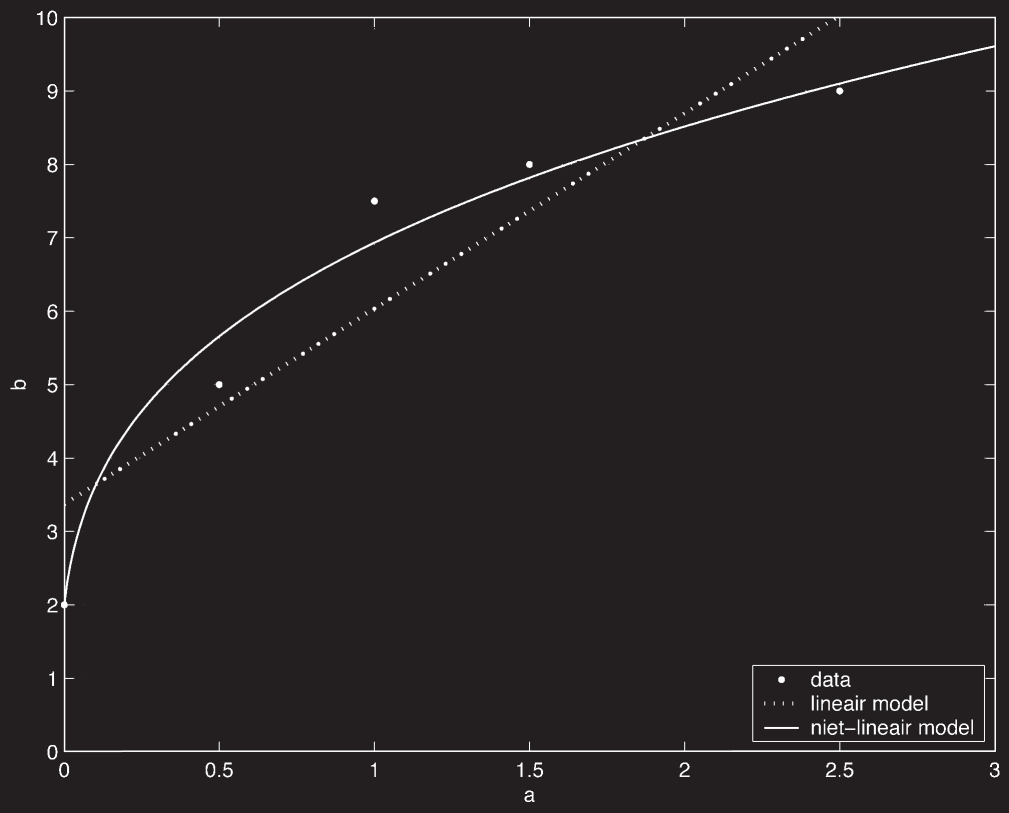
Hij zou ervan uit kunnen gaan dat er een lineair verband is tussen de inspanning en het behaalde resultaat. Hij zoekt dus een formule van de vorm $c = at + b$. Hierin zijn a en b de modelparameters. Geen enkele rechte lijn gaat precies door de vijf punten, maar er is wel een lijn die er zo goed mogelijk bij aansluit; die lijn is in de grafiek gestippeld getekend. Voor deze lijn geldt dat de som van de gekwadrateerde verticale afstanden tussen de lijn en de meetpunten minimaal is. Voor alle andere rechte lijnen (door de oorsprong) is deze som groter. Gevoelsmatig leidt deze 'kleinste-kwadraten eis' in ieder geval tot een lijn die goed aansluit bij de meetpunten, tot een goede 'fit' (Engels voor 'pasvorm').

De parameters voor de kleinste-kwadraten-fit blijken te zijn $a = 2{,}66$ en $b = 3{,}37$, wat het volgende model oplevert:

$$c = 2{,}66t + 3{,}37.$$

De lineaire kleinste-kwadraten fit is snel en exact oplosbaar, daarom zit die ook standaard in veel rekenmachines. Het begrip 'lineair' betekent dat de modelparameters lineair in de vergelijking voorkomen, dus *niet* zoals in bijvoorbeeld

$$c = a(b + t)^{0{,}3}.$$



Figuur 1 Een lineaire en een niet-lineaire fit

Hier zit a wel lineair in de vergelijking, maar b niet. Dit is echter wel precies het model dat de leerling wilde proberen, want hij vond de rechte lijn niet goed aansluiten bij de gegevens: er leek toch echt een kromming in te zitten.

Een niet-lineaire kleinste-kwadraten-fit is moeilijker dan een lineaire. Het probleem is dan het vinden van de positie van het minimum op een denkbeeldig meer-dimensionaal oppervlak. Om dat te doen heb je vaak al een goede beginschatting van die positie nodig. Dit weerhield de leerling van het bovenstaande voorbeeld echter niet, want hij had daar een computerprogramma voor.[1] Hij vond als modelparameters voor de beste fit $a = 6{,}93$ en $b = 0{,}0152$. Dit geeft de doorgetrokken curve in figuur 1. Er is goed te zien dat dit model beter aansluit bij de data.

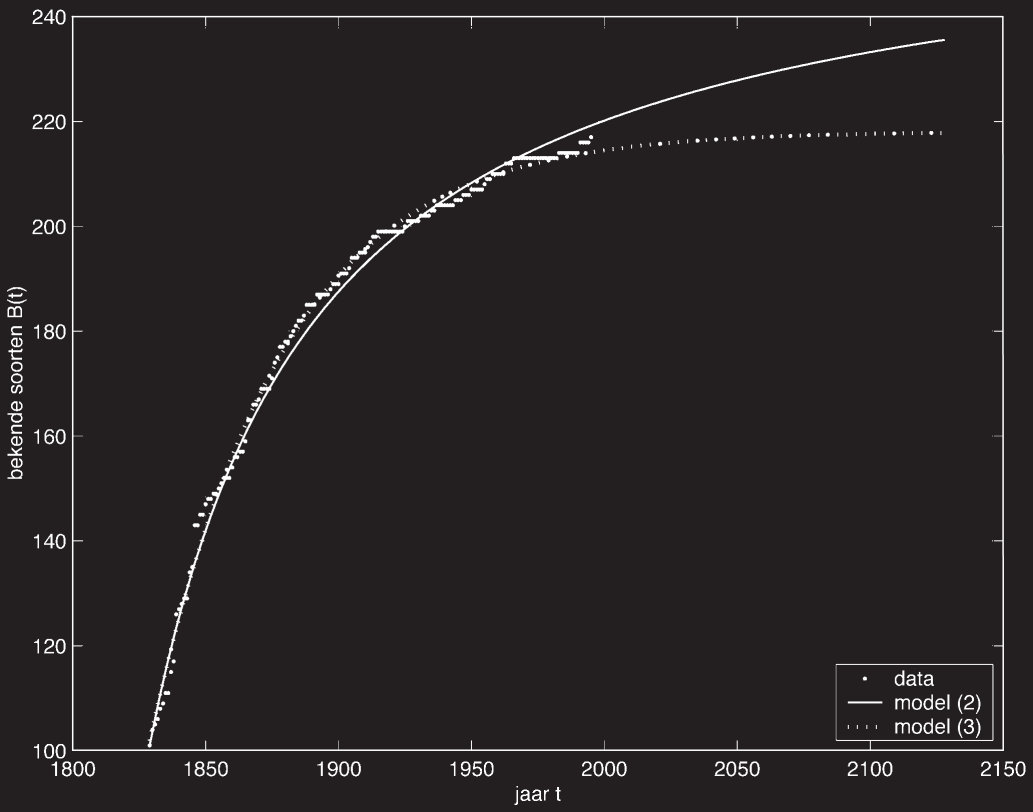
Vergelijking van model (1) en (2)

Na deze uitwijding over lineaire en niet-lineaire fits zijn we dan toch uiteindelijk aanbeland bij waar het om begonnen was: een vergelijking van model (1) met model (2) van Paxton zelf uit het begin van dit artikel. Tenminste, niet precies model (1), maar dat met de modelparameters bepaald met Paxtons oorspronkelijke data. Het Intermediair-artikel ging immers uit van wat andere, deels recentere gegevens. Voor een goede vergelijking waarbij van beide modellen de modelparameters gefit worden aan data, moet je in beide gevallen dezelfde data gebruiken. Met de oorspronkelijke data is er een niet-lineaire fit uitgevoerd. Dit wordt dan het model:

$$B(t) = 218(1 - 0{,}9799^{t-1798}). \qquad (3)$$

De modelparameters verschillen inderdaad van model (1). In figuur 2 zijn de punten Paxtons oorspronkelijke data: per jaar de hoeveelheid in dat jaar bekende soorten. Dat worden er dus steeds meer.

De doorgetrokken curve is Paxtons model (2), de gestippelde is model (3). Duidelijk is te zien dat model (3) een totaal aantal soorten van 218 voorspelt. Op dat moment stijgt de doorgetrokken curve nog gestaag. Om precies te zijn tot 264. Paxtons model voorspelt dus dat er nog 43 soorten ontdekt zullen worden vanaf het jaar 2003, het andere model slechts 3. Dat is een groot verschil.



Figuur 2 Twee fits bij Paxtons oorspronkelijke data

Welk model?

Is uit te maken welk model correct is? Een manier is om te kijken welk model het beste aansluit bij de data. Dat kan door het gemiddelde van de kwadratische verticale afstanden tussen de data en de beide modellen te berekenen. Dat is ook precies wat er geminimaliseerd is door de kleinste-kwadraten fit. Voor model (2) komt dat uit op $6{,}7$ en voor model (3) op $3{,}7$. De punten liggen gemiddeld genomen dus dichter bij model (3) dan bij model (2). Dit suggereert dat model (3) beter is dan (2).

Het ene model kan ook beter zijn dan het andere doordat de uitgangspunten (modelaannamen) beter zijn. Dat is in dit geval niet echt duidelijk het geval.

Maar er is een nog veel belangrijker punt. Het totale aantal soorten komt als een directe parameter in model (2) en (3) voor. Deze parameter wordt dan ook gefit. Dat doet je bijna vergeten dat deze parameter wel degelijk een vergaande extrapolatie is van de data. Kijk maar: de data hebben betrekking op de periode van 1830 tot 2000, maar het totaal aantal soorten stabiliseert zich pas (veel) meer dan 100 jaar later. Kortom, het voorspelde totale aantal soorten is heel gevoelig voor je data. Kleine fouten daarin kunnen leiden tot grote fouten in dat aantal. En daar komt bij dat de exacte vorm van het model niet goed bekend is, maar dat die vorm wel van grote invloed is op het voorspelde aantal.

Conclusie

Mijn conclusie is dan ook dat het moeilijk zal zijn om een betrouwbare voorspelling te doen over het aantal soorten aan de hand van dit soort data. Meer in het algemeen geldt dat je de resultaten van een fit altijd met enige argwaan moet bekijken. De fit procedure doet niet het eigenlijke denkwerk, dat moet je toch altijd zelf doen!

[1] Alle fits zijn verricht met het programma *GraphPad Prism* versie 3.03, waarvan een demoversie is te krijgen op www.graphpad.com.

door Marco Swaen

Rekenen met sutra's

AFLEVERING 2 Uit het hoofd vermenigvuldigen

Vedische wiskunde is gebaseerd op sutra's, korte spreuken die een rekenpatroon aangeven. Rekenen met sutra's is rekenen op een creatievere manier. Als je de technieken oefent, ben je in staat tot indrukwekkend hoofdrekenen, waar klasgenoten versteld van zullen staan. Je past niet klakkeloos steeds hetzelfde recept toe, maar je kiest, bij elke opgave opnieuw, de aanpak die daar het handigste of elegantste is. In deze aflevering kijken we wat je zoal kunt doen met de vermenigvuldigingen 35 x 35 en 32 x 38.

35 x 35

Een vermenigvuldiging als 35 x 35 valt onder de categorie 'kwadraat van een getal dat eindigt op een 5'. Daarvoor bestaat een bekende truc:

Haal de 5 eraf, dan heb je 3; vermenigvuldig dat met 1 meer dan zichzelf: 3 x 4 = 12; zet daar 25 (het kwadraat van 5) achter. Het antwoord is dan: 1225.

Deze werkwijze is een toepassing van de sutra 'Ekādhikena Pūrvena': *met één meer dan de voorgaande.*

Om bijvoorbeeld 105^2 te berekenen, doe je 10 x 11 = 110, en daar zet je weer 25 achter: 11025.

एकाधिकेन पूर्वेन

Ekādhikena Pūrvena

व्यष्टिसमष्टिः

Vyastisamastih

32 x 38

Kwadrateren is een bijzonder geval van vermenigvuldigen. Onze aanpak van 35×35 werkt ook bij andere vermenigvuldigingen, zoals 32×38.

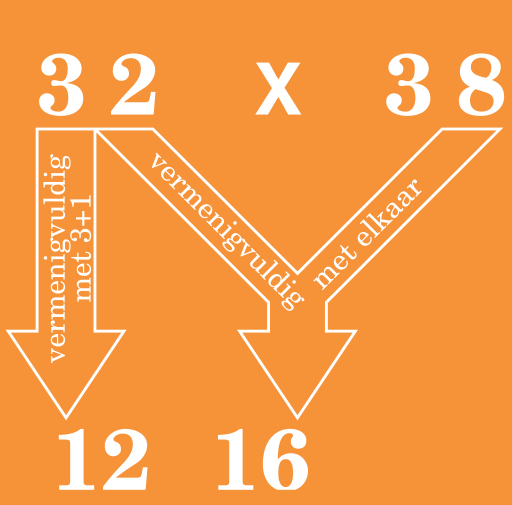
Voorwaarde is nu dat van de twee getallen de achterste cijfers samen 10 zijn, en de cijfers daarvoor gelijk. Je gaat zo te werk:

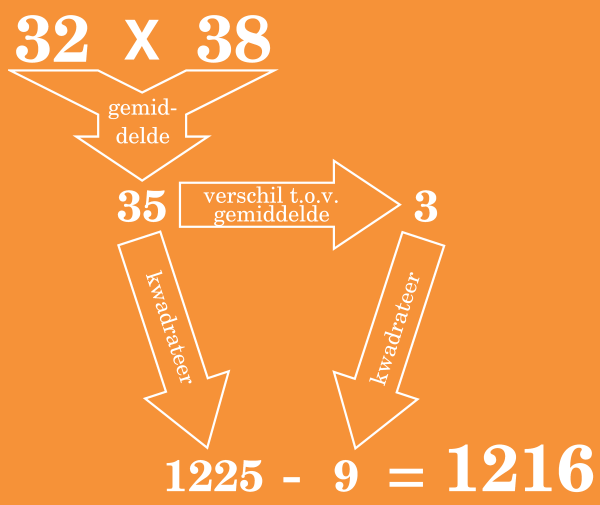
Haal het laatste cijfer weg, dan heb je 3; vermenigvuldig dat weer met 1 meer dan zichzelf: $3 \times 4 = 12$. Vermenigvuldig de laatste cijfers met elkaar: $2 \times 8 = 16$; en zet dat achter elkaar. Het antwoord is dus 1216. Probeer het zelf uit met bijvoorbeeld 84×86.

32 x 38 met het gemiddelde

Je kunt zulke vermenigvuldigingen ook aanpakken met het *merkwaardige product*: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. In de Vedische wiskunde gebeurt dat volgens de sutra 'Vyastisamastih': *specifiek en algemeen.* Hier gaat het erom het gemiddelde (het algemene) te gebruiken. Dat doe je als volgt:

Het gemiddelde van de twee getallen is 35; het kwadraat daarvan is 1225.
Het verschil ten opzichte van het gemiddelde is 3, daarvan is het kwadraat 9. Haal dat af van het eerste kwadraat en je hebt het antwoord: $1225 - 9 = 1216$.





door **Chris Zaal**

Kampuzzel

Een puzzel in de vorm van een kam, of beter: zes kammetjes die in elkaar passen. Deze originele puzzel vond ik in de ontvangstruimte van een faculteitsbureau. Niemand kon mij vertellen waar deze puzzel vandaan kwam.

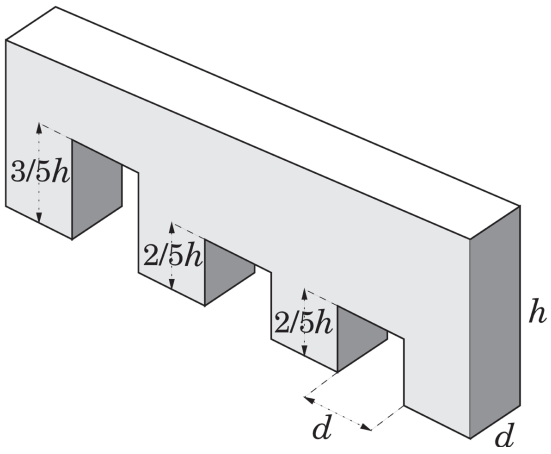
Twee kammetjes passen via inkepingen op elkaar. Er zijn twee soorten inkepingen: diepe en ondiepe. Een diepe inkeping past precies in een ondiepe. Twee ondiepe inkepingen passen niet.

De puzzelstukjes passen in elkaar tot een vierkant: drie stukjes parallel naast elkaar met de inkepingen naar boven, dwars daarop de andere drie stukjes met de inkepingen naar onder. Het resultaat is een soort houten 'onderzetter' waarin geen enkel balkje uitsteekt.

Zelf maken

Deze kampuzzel kun je maken van een houten balkje met een rechthoekige doorsnede. Hardhout is het mooist. Ik kocht een latje met een doorsnede van 7 bij 18 millimeter en een lengte van 40 centimeter. Uit dit balkje zaag je zes stukjes met een lengte van iets meer dan zeven keer de dikte. In mijn voorbeeld zijn het zes stukjes van 55 millimeter lang.

Maak dan de inkepingen volgens het schema van figuur 1. De breedte van de inkepingen is steeds de dikte van het hout – een ander balkje moet daar precies in passen. Er zijn twee soorten inkepingen, diepe en ondiepe. Neem voor de diepte daarvan respectievelijk $3/5$ en $2/5$ van de hoogte van de balk, zie figuur 2. In mijn voorbeeld kreeg ik inkepingen van 11 millimeter en 7 millimeter diep. Zorg tenslotte dat de diepe inkepingen sluitend passen op de ondiepe.



Figuur 2 De afmetingen van de inkepingen

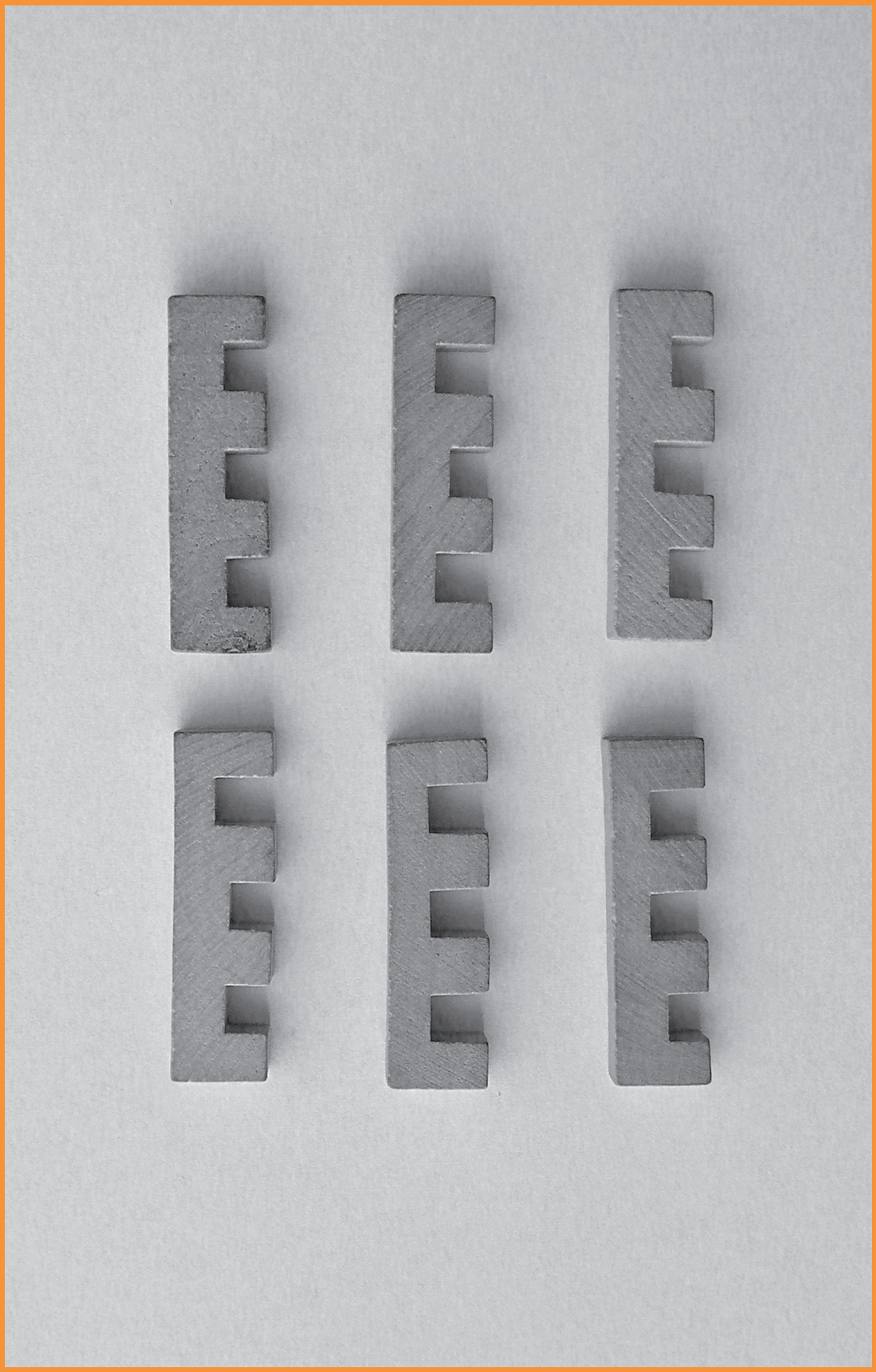
Oplossen

Pas de stukjes in elkaar: drie balkjes parallel met de inkepingen omhoog, drie balkjes dwars daarop met de inkepingen omlaag. De zes balkje moeten netjes sluiten in één plat vlak. Er is meer dan één oplossing. Hoeveel echt verschillende oplossingen kun jij vinden? Onze oplossingen staan in het volgende nummer.

Binaire getallen

De vorm van de stukjes wordt bepaald door het volgende patroon: 000, 001, 010, 011, 101, 111. Dit zijn precies de getallen 0, 1, 2, 3, 5 en 7, maar dan *binair* genoteerd. De getallen 4 en 6 zijn weggelaten, want hun binaire schrijfwijze 100 en 110 is het spiegelbeeld van 001 en 011. Die patronen hadden we al: puzzelstukjes kun je gewoon omdraaien. Kortom, er is een nauw verband tussen deze kampuzzel en rijtjes van drie nullen of enen. Wie bedenkt een puzzel gebaseerd op rijtjes van vier nullen en enen?

Figuur 1 (rechts)
De zes verschillende stukjes van de kampuzzel



Pythagoras Olympiade

door **René Pannekoek**, **Jan Tuitman** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden
Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzending vermeld je je klas, de naam van de wiskundedocent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 december 2003.

OPGAVE 100

Bewijs dat er een veelvoud van 5^{100} bestaat dat in de decimale schrijfwijze geen nul bevat.

OPGAVE 101

a. Bewijs dat je de getallen 1 tot en met 32 zó kunt rangschikken dat voor elk tweetal getallen geen enkel getal dat ertussen staat gelijk is aan het rekenkundig gemiddelde van die twee getallen.
b. Kun je dit ook zo doen met de getallen 1 tot en met 100?

OPLOSSING 96

Een politicus en zijn vrouw hadden vier andere echtparen uitgenodigd voor een feestje. Verschillende van de aanwezigen (niet per se allemaal) groetten elkaar door elkaars hand te schudden. Aan het eind van het feestje vroeg de politicus aan elke aanwezige hoeveel handen hij of zij geschud had; hij kreeg negen verschillende antwoorden. Aangenomen dat geen enkel koppel elkaar twee keer begroet heeft, en dat geen enkel echtpaar elkaar de hand schudde: hoeveel handen hebben de politicus en zijn vrouw geschud?

Oplossing. Omdat er tien mensen zijn en geen enkel echtpaar elkaar de hand schudt, kan niemand meer dan acht handen geschud hebben. De negen verschillende antwoorden moeten dus $0, 1, 2, \ldots, 8$ zijn. Laat P_i de persoon zijn die i handen geschud heeft. Aangezien iedereen P_8 een hand gegeven heeft, behalve de partner van P_8, kan P_8 alleen maar getrouwd zijn met P_0. Als we dit echtpaar verder buiten beschouwing laten en ook hun handschuddingen niet meer meetellen, houden we P_1 tot en met P_7 over met respectievelijk $0, 1, \ldots, 6$ handdrukken. Volgens dezelfde redenering moet P_7 nu met P_1 getrouwd zijn. Als we dit proces herhalen, vinden we ook nog de paren $P_6 - P_2$ en $P_5 - P_3$. Nu blijft alleen P_4 nog over, zodat dit de vrouw van de politicus moet zijn. Zij heeft vier mensen de hand geschud en haar man ook, namelijk P_5, P_6, P_7 en P_8.

Deze opgave werd opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Kasper Duivenvoorden van het **Hondsrug College** te Emmen, Anne de Haan van het **Gymnasium Felisenum** te Velsen-Zuid, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda** te Breda, Judith Mulder van het **Christelijk Lyceum Delft** te Delft, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg, Peter Smit van het **Driestar College** te Gouda, Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Anne de Haan.

OPLOSSING 97

Op een bol worden n grote cirkels (cirkels die het boloppervlak in twee gelijke helften delen) getrokken. Geen drie cirkels gaan door één punt. In hoeveel gebieden wordt het boloppervlak door de cirkels opgedeeld?

Oplossing. De eerste cirkel deelt het boloppervlak in twee delen. Elke cirkel die daarna getrokken wordt, snijdt iedere vorige cirkel tweemaal. Voor elk snijpunt levert dit netto één nieuw gebied op (een oud gebied wordt in tweeën gedeeld). Op het moment dat de n-de cirkel getrokken wordt, zijn er $n - 1$ oude cirkels aanwezig en zijn er dus $2 \cdot (n - 1)$ nieuwe snijpunten. Dit geeft ook $2 \cdot (n - 1)$ nieuwe gebieden. In totaal wordt het oppervlak dan in $2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot (n - 1) = 2 + 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) = n(n - 1) + 2$ gebieden opgedeeld.

Deze opgave werd opgelost door: P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda** te Breda, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg, Peter Smit van het **Driestar College** te Gouda en Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda.
De boekenbon gaat naar Johannes Steenstra.

°° De rij $\sqrt[n]{n}$

door **Klaas Pieter Hart**

In de wiskunde kom je een heleboel getallenrijen tegen en veel wiskundigen besteden hun tijd met het onderzoeken van het gedrag van zulke rijen. Bij dergelijk onderzoek is het goed over een voorraadje standaardrijen te kunnen beschikken om andere rijen mee te vergelijken. Eén zo'n standaardrij is gegeven door $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots$, met $\sqrt[n]{n}$ op de n-de plaats.

De rij begint stijgend met $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ en daalt dan weer, want $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Maar hoe gaat het verder? Blijft de rij dalen of gaan de waarden later weer omhoog? Een andere vraag is of de getallen zich rond een vaste waarde gaan concentreren en zo ja, welke die waarde dan is.

Als je je rekenmachientje de eerste waarden van de rij uit laat rekenen, lijkt het er inderdaad op dat de rij blijft dalen vanaf $\sqrt[3]{3}$. Verder zijn alle waarden groter dan 1 en misschien is het wel zo dat ze naar 1 toelopen. We gaan beide dingen bewijzen.

Een ongelijkheid

Bij ons werk hebben we eigenlijk niet veel meer nodig dan een feit dat in de analyse veelvuldig gebruikt wordt. Het betreft hier de ongelijkheid van *rekenkundig* en *meetkundig gemiddelde* (zie ook 'Brieven wegen' in Pythagoras augustus 2001). Deze zegt: als je een aantal *positieve* getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neemt, dan geldt altijd

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(tenzij alle a_i gelijk zijn, dan geldt =).
Met behulp van deze ongelijkheid kun je een heleboel dingen afschatten. Bijvoorbeeld $\sqrt{12} < 3\frac{1}{2}$ (neem $a_1 = 3$ en $a_2 = 4$).

Opgave. Neem $a_1 = \frac{1}{3}$ en $a_2 = \frac{1}{4}$; wat kun je hiermee over $\sqrt{12}$ zeggen?

$\sqrt[n]{n}$ gaat naar 1

Zoals je bij het afschatten van $\sqrt{12}$ hebt gezien, gaat het erom de getallen in de ongelijkheid slim te kiezen.

Zo kunnen we bijvoorbeeld $a_1 = n$ en $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$ nemen; dan volgt, omdat $n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$,

$$\sqrt[n]{n} < \frac{n + 1 + \cdots + 1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Conclusie: wat er ook gebeurt, altijd geldt $\sqrt[n]{n} < 2$.

Schrijf nu $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n} \times 1 \times \cdots \times 1$ en pas de ongelijkheid nogmaals toe, we krijgen:

$$\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}.$$

Hieruit blijkt dat de afstand tussen $\sqrt[n]{n}$ en 1 kleiner is dan $\frac{2}{\sqrt{n}}$ en dus dat $\sqrt{n}$ naar 1 toe gedrukt wordt. We concluderen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

De rij daalt

We kunnen de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde ook gebrui-

ken om aan te tonen dat de rij $\sqrt[n]{n}$ inderdaad vanaf $n = 3$ daalt. We weten al dat $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$, we kunnen dus vanaf $n = 4$ werken (dat is op één moment nuttig om te weten).

Het idee is naar het quotiënt van $\sqrt[n]{n}$ en $\sqrt[n+1]{n+1}$ te kijken; als we kunnen aantonen dat dat groter is dan 1, dan weten we ook dat $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Met het quotiënt zelf kunnen we niet zo veel, maar met de $n + 1$-de macht ervan wel, immers:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n\sqrt[n]{n}}{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

We zijn er dus als we kunnen laten zien dat $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}$. We gebruiken hetzelfde product als daarnet, maar nu ondersteboven: met behulp van $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 1 \times \cdots \times 1$ volgt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2\right) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n\sqrt{n}}.$$

Als we dit weer omdraaien, volgt

$$\sqrt[n]{n} > \frac{1}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n\sqrt{n}}}.$$

Nog één stap, dan zijn we er. We schrijven $x = \frac{2}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}}$ en we merken op dat $0 < x < 1$. Nu geldt $1 - x^2 < 1$ en als we links en rechts door $1 - x$ delen, volgt $1 + x < \frac{1}{1-x}$ en dus

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{n}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Omdat $n \geq 4$ (hier hebben we dat nodig), kunnen we concluderen dat $2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq 1$ en dus, eindelijk, dat

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Hiermee hebben we alle geclaimde eigenschappen van onze rij aangetoond.

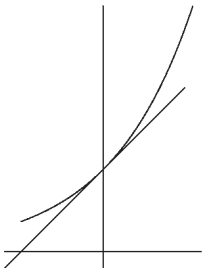
Hoe snel?

Als je je rekenmachientje aan het werk hebt gezet, zul je wellicht gezien hebben dat $\sqrt[n]{n}$ niet echt snel naar 1 loopt. Zo is $\sqrt[1000]{1000} \approx 1{,}006932$. Die lage snelheid kun je al een beetje aan de ongelijkheid $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}$ zien.

Met behulp van de e-macht en de logaritme kunnen we nog iets meer zeggen. Er geldt namelijk dat $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}$. In combinatie met het feit dat $\mathrm{e}^x > 1 + x$ als $x \neq 0$ (zie figuur 1), leid je vervolgens gemakkelijk af dat

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}\ln n.$$

Dit vertelt ons twee dingen, namelijk dat $\sqrt[n]{n}$ inderdaad heel langzaam naar 1 gaat en ook dat $\frac{1}{n}\ln n$ naar 0 convergeert.



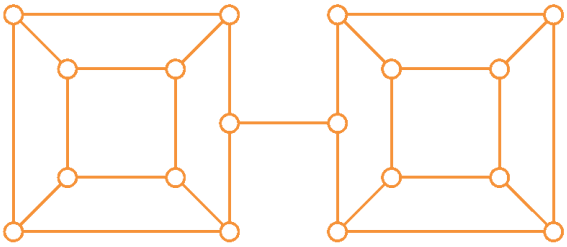
Figuur 1 De grafiek van $y = \mathrm{e}^x$ en van $y = 1 + x$

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

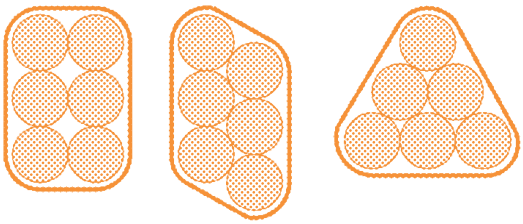
Lijnkleuren

In de figuur zie je een netwerk van 18 knooppunten en 27 verbindingslijnen. Kun je de verbindingslijnen elk rood, groen of blauw kleuren, zó dat in ieder knooppunt een rode, een blauwe en een groene lijn samenkomen?



Blikjes pakken

Zes cyclindervormige blikjes worden met een touwtje bij elkaar gehouden. Dat kan op de drie manieren in de figuur. Maar in welk van de drie gevallen is het touwtje het kortst? Kun je ook een manier verzinnen waarbij het touwtje nog korter is?



$2x + 1$ probleem

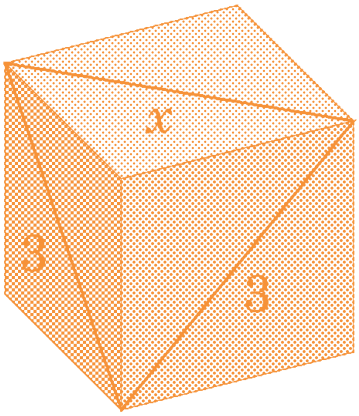
Kies een positief geheel getal. Herhaal nu de volgende stap. Als het getal deelbaar is door 3, 5 of 7, deel het dan daardoor. Zo niet, vermenigvuldig het getal dan met 2 en tel er 1 bij op. Bijvoorbeeld: $23 \to 47 \to 95 \to 19 \to 39 \to 13 \to 27 \to 9 \to 3 \to 1$.
Kom je op deze manier met elk begingetal bij 1 uit?

Mengprobleem

Voor je staan vijf vaten met inhouden van 1, 2, 3, 4 en 5 liter. Het vat van 5 liter is leeg en de andere vier vaten zijn gevuld met vier verschillende vloeistoffen. Je mag nu steeds vloeistof van het ene vat naar het andere vat overgieten, zó dat daarna steeds het ene vat leeg is of het andere vat geheel gevuld. Kun je zorgen dat na een aantal stappen de eerste vier vaten gevuld zijn met de vier vloeistoffen in dezelfde verhouding?

Maximaal volume

Een balk heeft zijvlaksdiagonalen van lengte 3, 3 en x. Wat kan het volume van de balk maximaal zijn?



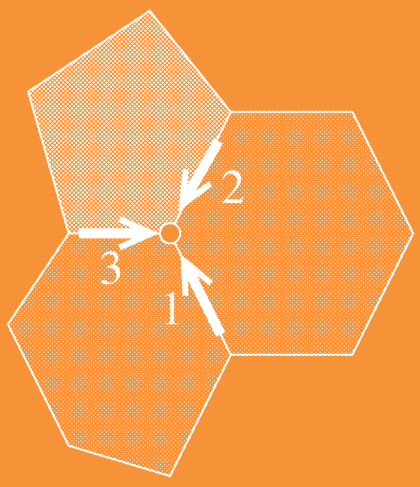
Oplossingen nr.1

Wortels van wortels?
We weten dat $a_1 = 2$ en $a_{n+1} = a_n + 1 + 2\sqrt{a_n} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$. Als we de rij $b_1, b_2, b_3, \ldots$ definiëren door $b_n = \sqrt{a_n}$, dan zien we dat $b_1 = \sqrt{2}$ en $b_{n+1} = b_n + 1$. Dus $b_{11} = \sqrt{2} + 10$ en $a_{11} = (\sqrt{2} + 10)^2 = 102 + 20\sqrt{2}$.

Zeven kleuren
Geef de zeven punten de namen A, B, C, D, E, F en G. Een oplossing is dan: ABC, ADE, AFG, BDF, BEG, CDG, CEF.

Ingeschreven dodecaëder
Voor ieder hoekpunt A van de dodecaëder is er een ander hoekpunt A' zodat het centrum van de bol precies het midden van AA' is. De 10 paren hoekpunten van de vorm AA' geven een bijdrage van $10 \times 4 = 40$. We berekenen nu de bijdrage van de overige 180 paren hoekpunten. Als A en B twee verschillende hoekpunten zijn met $B \neq A'$, dan is $ABA'B'$ een rechthoek met diagonaal 2, zodat $|AB|^2 + |A'B|^2 + |AB'|^2 + |A'B'|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Als we voor ieder tweetal verschillende hoekpunten A en B met $B \neq A'$ het getal $|AB|^2 + |A'B|^2 + |AB'|^2 + |A'B'|^2$ bereken en deze 180 getallen optellen, dan krijgen we viermaal de gezochte bijdrage, en de uitkomst is 180×8. De gevraagde som is dus gelijk aan $2 \times 180 + 40 = 400$.

Mierendoolhof
Het probleem is dat we de mieren niet onafhankelijk van elkaar kunnen sturen. Toch kan dat, tot op zekere hoogte, wel! De mieren bevinden zich namelijk in drie soorten posities. Mier 1 bevindt zich in positietype 1: tussen twee zeshoeken, mier 2 in positietype 2: aan de linkerkant een zeshoek en aan de rechterkant een vijfhoek, en mier 3 bevindt zich in positietype 3 met aan de linkerkant een vijfhoek en aan de rechterkant een zeshoek. Bekijk nu de reeksen commando's $r_1 := (RL^5R)^2$ en $l_1 := (LR^5L)^2$. Hier is $R^3 = RRR$, $(RL)^2 = RLRL$, etcetera. Op mieren in positietype 2 en 3 hebben r_1 en l_1 netto geen effect, maar op een mier in positietype 1 zijn de effecten respectievelijk R^2 en L^2. Met r_1 en l_1 kunnen we mier 1 naar iedere gewenste positie van type 1 bewegen zonder de twee andere mieren te verplaatsen. Met de reeksen $r_2 := R^6$ en $l_2 := (RL^4R)^{20}$ kunnen we mier 2 naar iedere positie van type 2 sturen, zonder de mieren 1 en 3 te verplaatsen. Voor mier 3 kunnen we $r_3 := (LR^4L)^{20}$ en $l_3 := L^6$ nemen. We kunnen de drie mieren dus afzonderlijk sturen, elk binnen z'n eigen positietype en ze een voor een naar punt F brengen.

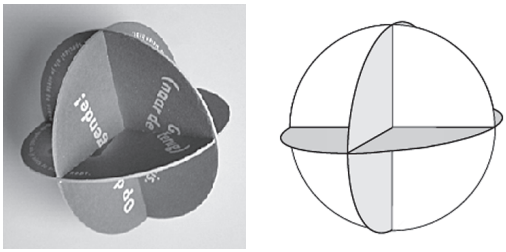


INPAKKEN

Als een cadeautje zich moeilijk laat inpakken, gebruikt een winkelier waarschijnlijk gewoon wat extra papier en vooral veel extra plakband. Een wiskundige kan zich er echter niet zo gemakkelijk vanaf maken; inpakproblemen zijn namelijk interessante meetkundige vraagstukken.
In dit artikel stelt Leon van den Broek ons de vraag: hoe ziet de perfect ingepakte 'drieschijf' eruit?

door **Leon van den Broek**

Steek drie bierviltjes loodrecht door elkaar heen, zodat hun middelpunten samenvallen. Ze vormen zoiets als drie cirkelvormige coördinaatvlakken in de ruimte. Voor het gemak geven we het ding een naam: *drieschijf*.



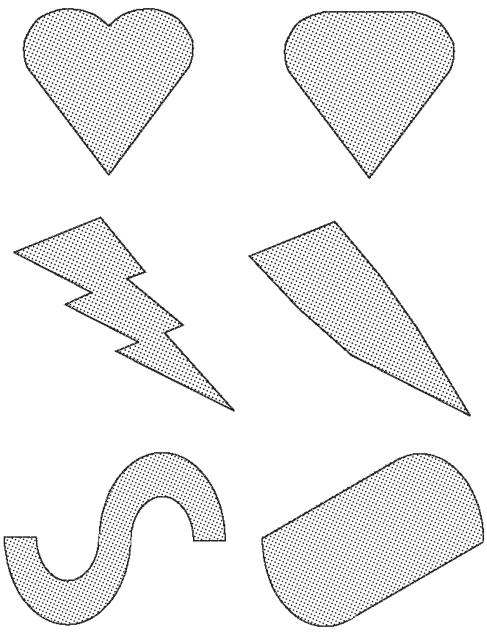
Figuur 1 Een drieschijf maak je van drie bierviltjes. Rechts zie je een getekende versie van de drieschijf.

De drieschijf inpakken

Stel, jij koopt een drieschijf in de winkel en laat hem inpakken door de kassajuffrouw. Die probeert het papier zo strak mogelijk om de drieschijf te krijgen, maar het inpakpapier gaat vanwege de gebogen randen plooien en rimpelen. Strakker zou het gaan met iets elastisch: een ballon, een stuk folie of rubber... of met een zeepvlies? Laten we ons even niets van zulke praktische problemen aantrekken; we maken er een wiskundig probleem van. Veronderstel gewoon dat het inpakmateriaal perfect strak om de drieschijf zit; hoe ziet het pakje er dan uit?

Als het pakpapier strak om de drieschijf zit, neemt het een zo klein mogelijke oppervlakte in. Het heeft geen deuken of bulten. Wat we eigenlijk zoeken, is het zogenaamde *convexe omhulsel* van de drieschijf. Dat is het kleinste convexe lichaam dat de drieschijf omvat. Een lichaam heet convex als alle verbindingslijnstukken van twee punten geheel binnen het lichaam zitten.

Aan de hand van enkele voorbeelden in het platte vlak laten we zien hoe zo'n convex omhulsel eruit ziet. Hieronder zie je links onder elkaar drie niet-convexe figuren. Ga na dat er bij elk van deze figuren, paren punten te vinden zijn waarvan de rechte verbindingslijn niet helemaal binnen de figuur loopt. Rechts van de figuren zie je hun convexe omhulsels.



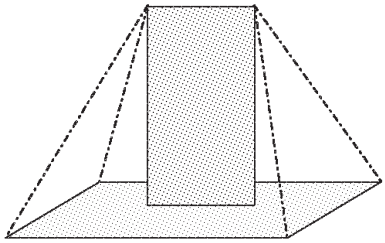
Terug naar de drieschijf: de verbindingslijnstukken van de punten op de rand van de drieschijf moeten in elk geval in het convexe omhulsel zitten. En ook verbindingslijnstukken tussen die verbindingslijnstukken. Dat geeft een onoverzichtelijke bende lijnstukken. Gelukkig zijn alleen de 'buitenste' lijnstukken van belang. Die vormen tezamen het oppervlak: dat is het pakpapier. Maar welke lijnstukken zijn de buitenste?

Eenvoudigere voorbeelden

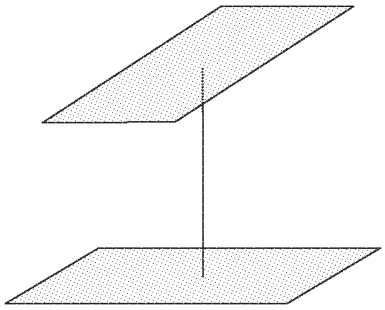
Om te begrijpen hoe de ingepakte drieschijf eruit gaat zien, gaan we eerst enkele eenvoudigere voorwerpen inpakken, oplopend in moeilijkheid. Wat zijn de convexe omhulsels van de voorwerpen in figuur 2? Probeer een precieze omschrijving te geven. Aanzichten kunnen helpen. Bij het eerste voorwerp zijn de nieuwe ribben van het pakje (het convexe omhulsel) al met stippellijnen aangegeven. De antwoorden staan op bladzijde 33.

Heb je de convexe omhulsels van de voorwerpen in figuur 2 gevonden, ga dan weer terug naar de drieschijf. Daar gaat het immers tenslotte om. Hoe ziet het convexe omhulsel van de drieschijf eruit? In het volgende nummer van Pythagoras wordt dat besproken.

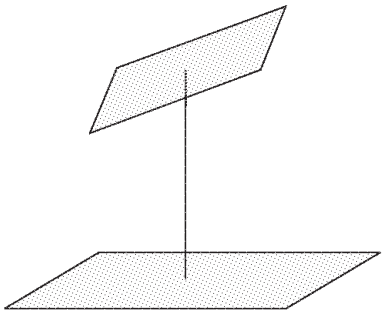
Naar een idee van Jan Willem Bikker uit Eindhoven



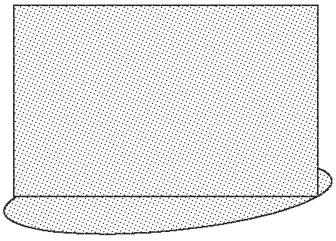
a. een vierkant en een rechthoek, loodrecht op elkaar



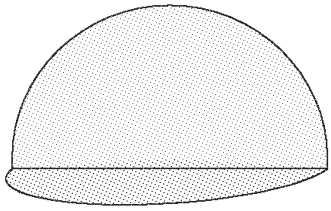
b. twee gelijke evenwijdige rechthoeken, 90 graden ten opzichte van elkaar gedraaid



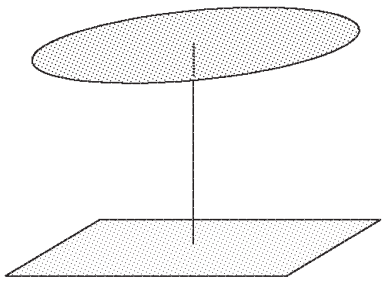
c. twee gelijke evenwijdige vierkanten, 45 graden ten opzichte van elkaar gedraaid



d. een cirkelschijf en een rechthoek, loodrecht op elkaar



e. twee gelijke halve cirkels, loodrecht op elkaar



f. een vierkant en een cirkel, evenwijdig aan elkaar

Figuur 2 Vind de convexe omhulsels van deze zes voorwerpen

door **Alex van den Brandhof** en **Marco Swaen**

Journaal

pythagoras november 2003 nummer 2

Grieks telsysteem is Egyptisch

De antieke Grieken hebben hun telsysteem niet zelf bedacht, maar ontleend aan de Egyptenaren. Volgens dr. Stephen Chrisomalis van de McGill Universiteit in Montreal, Canada, vertonen de Griekse alfabetische cijfers van de zesde eeuw voor Christus meer overeenkomsten dan toevallig kan zijn met de Demotische (een vereenvoudigde vorm van het hiëroglyfenschrift) cijfers uit Egypte, die teruggaan tot de achtste eeuw voor Christus.

Beide systemen gebruiken negen symbolen en een plaats-waarde-systeem (hierin wordt de waarde van een cijfer bepaald door de plaats die het inneemt in een rijtje cijfers). De individuele cijfers lopen daarin van 1 tot en met 9. Geen van beide kenden het getal nul.

Het bijzondere van het Egyptische systeem is dat er één enkel symbool voor een cijfer werd ingevoerd, in plaats van een verzameling streepjes. Tot nog toe werd gedacht dat dat in klein-Azië was uitgevonden, het huidige Turkije dat meer lag in de Griekse dan in de Egyptische invloedsfeer.

Bron: de Volkskrant, 20 september 2003

Magere resultaten bij IWO door Nederlands team

Bij de dit jaar in Tokio gehouden 44ste Internationale Wiskunde Olympiade zijn de Nederlandse deelnemers voornamelijk in de achterhoede geëindigd. In het (officieuze) landenklassement komt ons land op een 64ste plaats (er waren 82 deelnemende landen), met 30 punten (van de maximaal 252). De prestaties van Nederland zakken helaas steeds verder terug. Opmerkelijk is dat de Belgen het juist steeds beter doen: onze zuiderburen behaalden dit jaar een 37ste plaats (met 70 punten), en scoorden daarmee aanzienlijk beter dan in de voorgaande jaren. De beste resultaten werden dit jaar behaald door het team uit Bulgarije (met een score van 227 punten). Dit land behoort de laatste jaren steeds bij de top-5 (evenals China, Rusland en de VS).

Bron: Wiskunde Pers Dienst

Agressiviteit loont

Bij het bekende bordspel *Risk* strijden spelers om de wereldhegemonie. Op een wereldkaart verdeeld in 42 gebieden bouwen de spelers hun legers op en proberen daarmee gebieden op hun tegenstanders te veroveren. Veldslagen worden beslist door het werpen van dobbelstenen. De aanvaller mag afhankelijk van het aantal legers waarmee hij aanvalt met 1, 2 of 3 dobbelstenen gooien, de verdediger met 1 of 2. De hoogste steen van de verdediger wordt gelegd naast de hoogste van de aanvaller, en zo ook de op-een-na-hoogste stenen. Is de steen van de aanvaller hoger, dan verliest de verdediger een leger. Is de steen van de verdediger even hoog of hoger, dan verliest de aanvaller een leger.

De vraag die spelers al jaren bezig houdt is: hoeveel overmacht moet je opbouwen om redelijk zeker te zijn dat je aanval slagen zal? Enkele jaren geleden analyseerde Baris Tan van de universiteit van Istanbul het dobbelen bij *Risk* op grond van de theorie van Markov-ketens. Hij kwam tot de conclusie dat een behoudende spelstrategie de zekerste weg was naar de wereldhegemonie. Zijn conclusies worden nu echter aangevochten door J. Osborne van de Carolina State University. Osborne stelt dat Markov-ketens wezenlijk tekortschieten om de aanvallen bij *Risk* te beschrijven. Op grond van een verfijndere analyse zou blijken dat de kans op succes bij een aanval veel groter is. Volgens Osborne heb je als aanvaller bij een gelijk aantal legers (groter dan 4) al meer kans op overwinning dan je verdedigende tegenstander.

Bron: Nature Science Update, 6 augustus 2003

uitslag VEELV

Het thema van de vorige jaargang van Pythagoras was 'veelvlakken'. In samenwerking met Ars et Mathesis schreef Pythagoras een prijsvraag uit: creëer op originele wijze een veelvlak. Hieronder kun je het juryrapport lezen. De jury bestond uit prof. dr. F. van der Blij (voorzitter), Rijkje Dekker, Piet van Mook, Thijs Notenboom en Govert Schilling. Op de volgende pagina's kun je de winnende inzendingen bekijken. Meer foto's van inzendingen zijn te vinden op onze website.

Rapport van de jury

Op 2 september heeft de jury zich gebogen over de ongeveer zestig inzendingen. Het nauwkeurige aantal kan een punt van discussie zijn, soms waren onderdelen van een inzending in de categorie 'klasseninzending' ook ingezonden als inzending in de categorie 'model'. De inzendingen waren niet gelijkmatig over de categorieën verdeeld.

In iedere categorie heeft de jury één prijs van 500 euro toegekend en de beschikbare extra prijs gebruikt om twee inzendingen met een tweede prijs te belonen. Voorts kent de jury aan een aantal inzendingen een grafische rekenmachine TI-83+ Silver Edition, een pakket Mathematical Explorer danwel een studentenversie van Mathematica toe.

De jury heeft verschillende aandachtspunten, zoals originaliteit, creativiteit en kwaliteit van de uitvoering, laten meewegen. De samenstelling van de jury garandeerde zowel aandacht voor de wiskundige als voor de kunstzinnige facetten van de inzendingen.

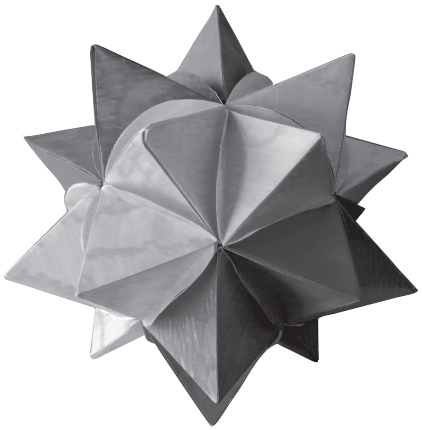
Veel inzenders gingen uit van de regelmatige of halfregelmatige veelvlakken, stelden onderlinge verbanden aan de orde en leefden zich uit in originele materiaalkeuze. Onder de prijswinnaars zijn hiervan mooie voorbeelden te vinden.

Sommige inzenders zochten het in andere aspecten, zoals fractale structuren en ruimtevulling. Alles overziend heeft de jury veel waardering voor al het werk dat de inzenders zich getroost hebben om te voldoen aan de opdracht een veelvlak te bedenken en te maken dat, om welke reden dan ook, bijzonder is! De jury kijkt terug op een dag van hard en prettig werken als volgelingen van Pythagoras in het kader van Ars et Mathesis.

LAKKEN *prijsvraag*

1e prijs model-jong

(tot 15 jaar)



Hier wonnen Chantal Blind en Angelique Volkers van de Rosaschool in Amsterdam, met een in drie kleuren uitgevoerd veelvlak, gebouwd van papieren gelijkzijdige driehoeken die in een cirkel getekend zijn, waarbij de overschietende cirkelsegmenten op handige wijze als versierende plakranden zichtbaar gebruikt werden. Zij vermeldden dat hun hele klas hielp bij het knippen van de zijvlakjes.

1e prijs model-oud

(vanaf 15 jaar)

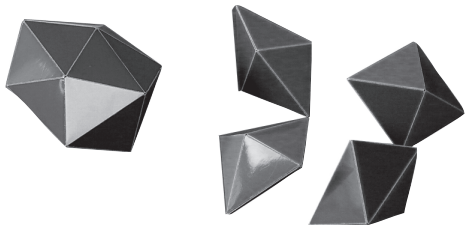
In de categorie 'model-oud' was het voor de jury moeilijk tot een beslissing te komen. Een grote icosaëder bleek een fraai bouwsel van gekleurde icosaëdertjes te bevatten gerangschikt volgens de zijvlakken van een dodecaëder. De prijs werd aan dit 'tuiltje twintigvlakken' van Bartholomeus Roovers uit Nuenen toegekend.

1e prijs klassen-inzending

Klas 2a van het Barlaeusgymnasium in Amsterdam sneed een moeilijk wiskundig probleem aan: de doorsneden van een vierdimensionale kubus door een driedimensionale ruimte. Ingezonden werd een schaalmodel van de klas, waarin een aantal van deze doorsneden was opgehangen. Aan de school wordt bovendien de studentenversie van Mathematica toegekend.

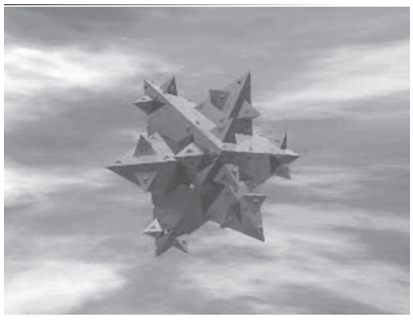
2e prijs model-oud

(vanaf 15 jaar)



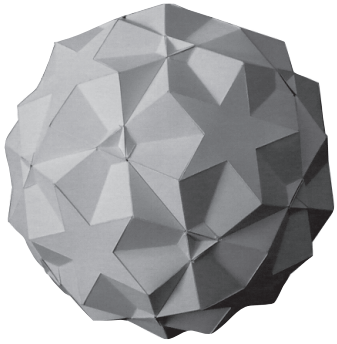
Een tweede prijs werd toegekend aan Frits Göbel uit Enschede die een probleem oploste dat ooit in Pythagoras aan de orde werd gesteld. Uit twintig onderling congruente driehoeken bouwde hij een 'willekeurig twintigvlak'. Bij de inzending voegde hij tevens de vier wezenlijk verschillende 'willekeurige' achtvlakken.

1e prijs animatie



De prijs in de categorie 'animatie' gaat naar het filmpje van Steven en Maarten Deprez uit Nieuwrode (België), waarin een veelvlaksuitvoering van de fractale kromme van Koch zich onder muzikale begeleiding ontwikkelt.

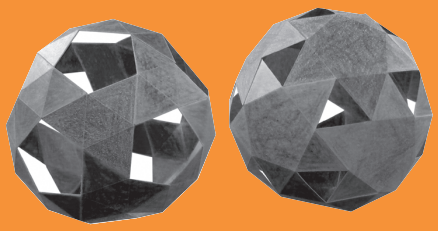
2e prijs klassen-inzending



De andere tweede prijs ging naar de eerstejaars studenten wiskunde van de lerarenopleiding HAN in Nijmegen. De studenten zonden een bijzonder mooie serie modellen in, waarvan hier een sterveelvlak is afgebeeld.

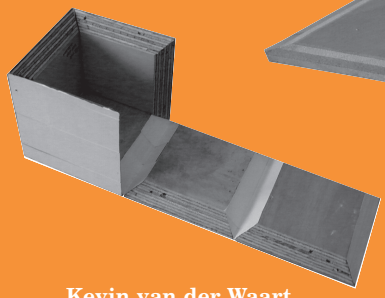
Grafische rekenmachines en Mathematical Explorer

De materiële prijzen gingen naar zeer uiteenlopende inzendingen. Onder andere naar een listig geconstrueerde houten uitslag van een kubus, naar een zeer fraaie serie blauwe veelvlakken en naar een deels in kraaltjes uitgevoerde groep van vijf minuscule veelvlakken.
Jantine Bloemhof uit Amstelveen, Rianne Greve uit Amsterdam, Ton Schotten uit Heerhugowaard en Kevin van der Waart uit Amsterdam wonnen elk een TI-83+ Silver Edition.
Simon Biesheuvel uit Weesp, Wim van den Camp uit Amsterdam, Johan van de Konijnenberg uit Deventer en Elize Kraag uit Breda wonnen het pakket Mathematical Explorer.

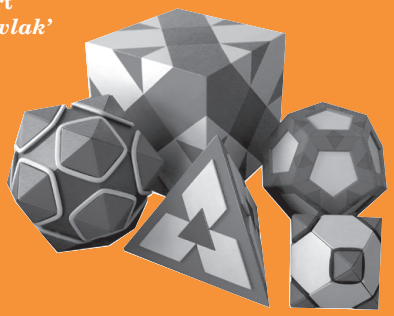


Jantine Bloemhof
'Siblings (broer en zus)'

Rianne Greve
'Uit je dak met een veelvlak'

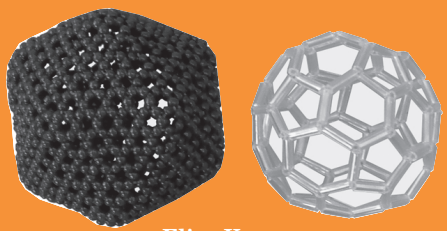


Kevin van der Waart
'Uit je dak met een veelvlak'



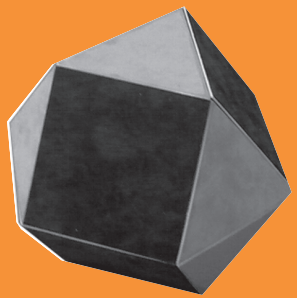
Ton Schotten
'Platonium'

Wim van den Camp
'Geboorte en groei van een viervlak'

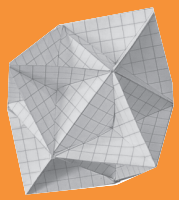


Elize Kraag
'Geometrie is poëzie'

Johan van de Konijnenberg
'Variaties op een afgeknotte kubus'



Simon Biesheuvel
'Sym-on'



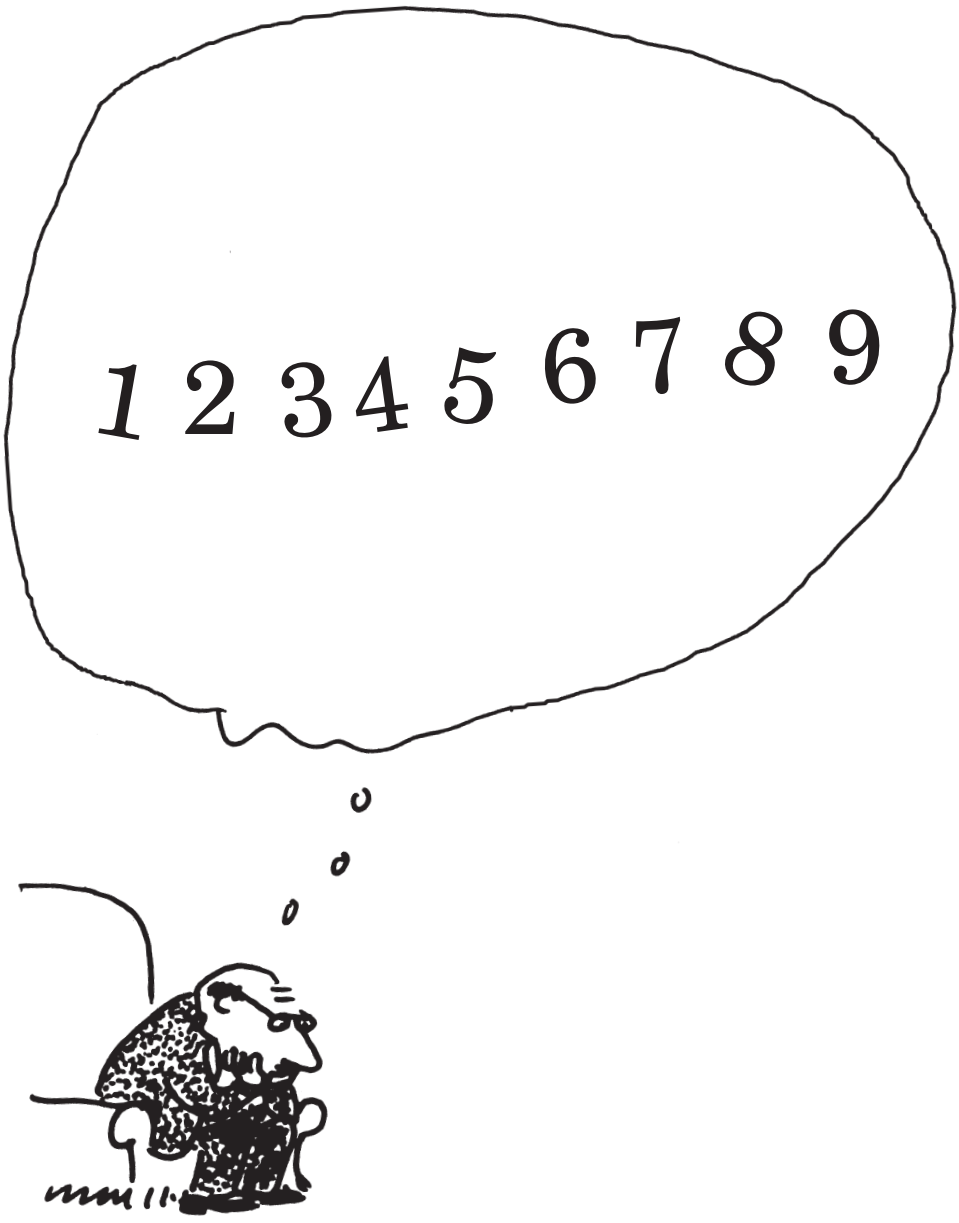
Sarah Ibrahim
'Duivelse kubus'

Eervolle vermelding

Een bijzondere vermelding wil de jury nog maken van het prachtige sterveelvlakje van Sarah Ibrahim, een van de jongste inzenders.

door **Lukas van de Wiel**

Wiskundigen houden zich in hun vrije tijd met de meest uiteenlopende zaken bezig. Soms zijn deze zaken wat minder zinvol, maar wel leuk. Zo zijn er allerlei lieden geweest die zich hebben verdiept in het getal 123456789.



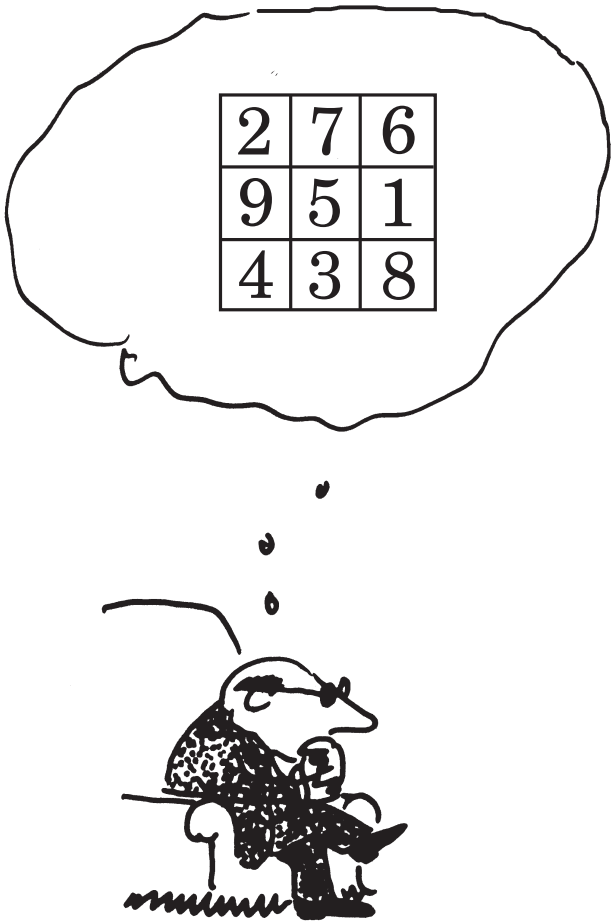
Pandigitalen en nca's

We introduceren hier het woord 'pandigitaal'. Een *pandigitaal getal* is een getal waarin elk cijfer van 0 tot en met 9 precies één keer voorkomt. Bijvoorbeeld het getal 5897230146, dat de som van de eerste 32423 priemgetallen is. Tevens gebruiken we de term *negen-cijfer-anagram* of *nca* voor een getal waarin elk cijfer van 1 tot en met 9 één keer voorkomt, zoals bijvoorbeeld 572469138, de som van de eerste 10701 priemgetallen. Het begrip nca heeft geleid tot een aantal leuke puzzels en een aantal grappige weetjes.

Geschiedenis

De bekendste verschijning van de cijfers 1 tot en met 9 is die in het magische 3 x 3 vierkant, zie figuur 1. Bij een magisch vierkant is de som van de getallen in elke rij, elke kolom en de beide diagonalen steeds hetzelfde. De eerste magische vierkanten dateren uit China, uit de vijfde eeuw voor Christus. Dit mag bij een ieder bekend verondersteld worden. Wij zijn hier vooral geïnteresseerd in grotere getallen.

Omdat het vinden van feiten over dit soort grote getallen vaak eindeloos uitproberen vergt, zou het erg saai zijn om dit met de hand te proberen en gezien wiskundigen en puzzelaars wel wat beters te doen hebben met hun tijd, zijn de echte weetjes pas bekend geworden sinds er computers zijn die met dat soort getallen overweg kunnen. De meeste weetjes en puzzels van dit artikeltje komen dan ook van na 1995.



Figuur 1 Een magisch vierkant van 3 bij 3

Enkele weetjes

- Van het getal π zijn intussen miljarden cijfers bekend. Staat er ergens het getal 123456789 tussen? Jawel! Het 2543568463-ste cijfer achter de komma is de 1.
- Is er een nca x dat op positie x staat? Tot nu toe is er nog geen gevonden, maar nog niet alle nca's zijn geprobeerd (bij het drukken van deze Pythagoras). Wil je zelf zoeken, zie dan eerst de beschikbare 987654330 decimalen van π te ritselen.

Op de volgende pagina staat een link waar ze zijn te downloaden. Als je zelf een computer hebt met minder dan 256 Mb geheugen, dan heb je niet genoeg rekenkracht om het zelf te berekenen binnen afzienbare tijd. Mocht je zo'n nca vinden, dan kun je eeuwige roem verwerven op de nine-digits-page.

- $12 \times 3456^7 + 89$ is een priemgetal. Zijn er nog meer priemen op een dergelijke manier te schrijven zonder dat de volgorde van de cijfers verandert? Nobody knows...

Puzzels

Tijd om zelf aan het werk te gaan! Als je een keer een uurtje niks te doen hebt, als je een keer wilt kijken of je programmeerbare grafische rekenmachine echt brute dingen kan doen, of gewoon zomaar.

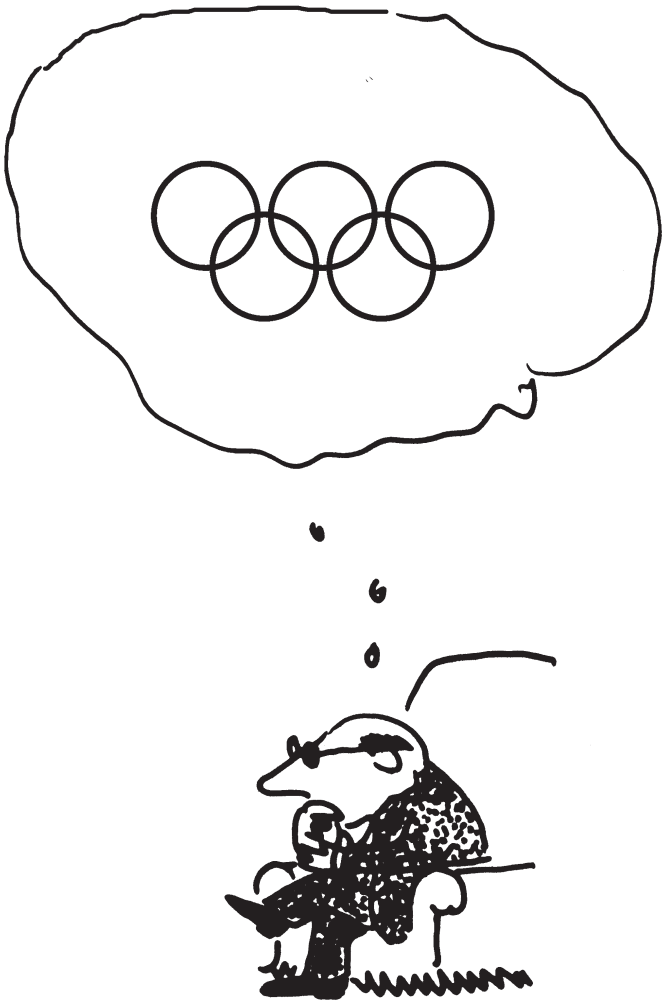
- Een tegellegger krijgt 123456789 vierkante tegels. Hij wil hiervan een rechthoek leggen waarin alle tegels op gaan. De rechthoek moet zo nauwkeurig mogelijk een vierkant benaderen. Als hij bijvoorbeeld 30 tegels zou krijgen, zou de beste benadering 5 x 6 zijn. Wat zijn de zijden van de grote rechthoek?
- Dezelfde tegellegger krijgt nu 987654321 tegels. Wat zal hij nu voor een rechthoek leggen?

- Bedenk een getal n van drie cijfers zó, dat in $(n)(2n)(3n)$ elk cijfer van 1 tot en met 9 slechts één keer voorkomt. Als voorbeeld geven we $n = 192$, want dan is $2n = 384$, $3n = 576$, dus $(n)(2n)(3n) = 192384576$.
- Een *Smith-getal* is een getal waarvan de som van de cijfers gelijk is aan de som van de cijfers van de priemfactoren. Het kleinste nca dat een Smith-getal is, is 123456879. De priemfactoren zijn: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 7, 13, 1861. En $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + (1 + 3) + (1 + 8 + 6 + 1)$. Vind het grootste nca dat een Smith-getal is.
- Neem een willekeurig nca. Probeer het nu te schrijven als de uitkomst van een vergelijking door alleen maar de cijfers van dat getal te gebruiken. Je mag alleen +, –, x, :, ^, (en) gebruiken. Het is niet bekend van welke getallen dit mogelijk is. Als het kan, wordt zo'n getal een *Friedman-getal* genoemd, naar de bedenker van deze puzzel: Erich Friedman. We geven twee voorbeelden: $16759 = 7^5 – 6$ x $(9 – 1)$ en $46256 = 6^6 – (4$ x $5)^2$.
Ook de getallen 987654321 en 123456789 zijn Friedman-getallen. Probeer de vergelijking die erbij hoort te vinden.
- Neem de gelijkheid $(a/bc) + (d/ef) + (g/hi) = 1$. Elk van de letters stelt één van de cijfers voor uit de rij 1 tot en met 9. Er is maar één enkele oplossing. (Een hint: alle tellers zijn oneven.)
- Tussen al het wiskundige werk een wat sportieve opgave. Neem de olympische ringen, geschakeld zoals in figuur 2. De figuur bestaat uit negen afgesloten gebiedjes. Verdeel de cijfers 1 tot en met 9 zo over de gebieden dat het totaal in elke ring hetzelfde is.
- Vorig jaar was het 2002. Dat kon worden geschreven als een vergelijking van de cijfers 1 tot en met 9 waarbij de volgorde in tact bleef, namelijk als 1 x $2 + 34$ x $56 + 7 + 89 = 2002$. Lukt het je om op soortgelijke wijze 2003 of 2004 te maken? Je mag alleen +, –, x en : gebruiken. Heb je een oplossing, dan hoef je over het maken van een nieuwjaarskaart niet meer na te denken.

Bronnen

De meeste van de bovenstaande puzzels komen van de nine-digits-pages:
http://www.worldofnumbers.com/ninedigits.htm
http://www.worldofnumbers.com/ninedig2.htm
Op deze pagina's staan de antwoorden van veel van de puzzels erbij. Dus misschien kun je er beter nog maar even niet kijken. Individuele bijdrages aan de puzzels zijn op die pagina's terug te vinden.

Mocht je nog meer willen weten over Friedman-getallen:
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html
De zoektocht naar leuke getallen in π:
http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html
Een broncode voor veel decimalen van π:
http://ja0hxv.calico.jp/pai/epivalue.html
Wil je toch zelf proberen veel decimalen van π te berekenen, gebruik dan *pifast* (alleen voor Windows):
http://numbers.computation.free.fr/Constants/PiProgram/pifast.html



Figuur 2 Het logo van de Olympische Spelen

Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

Handen schudden
Er worden $n(n-1)/2$ handen geschud. Dat is 28 ingeval $n = 8$.

Vullingen
Voor een aantal van 20 vullingen moet nog een doosje worden geopend. Vanaf 21 stuks kan elk gewenst aantal geleverd worden met complete doosjes van 7, 8 en 9 stuks.

Zonsondergang
Je kunt de zon in het oosten zien ondergaan als je sneller naar het westen gaat dan de aarde draait, bijvoorbeeld reizend per Concorde van Europa naar Amerika.

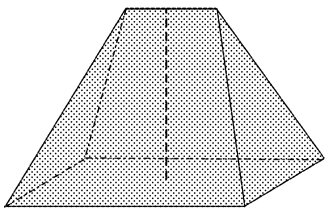
Servet
De vouw valt langs de middelloodlijn van de diagonaal en is 15 cm lang.

Tegels
Er zijn minimaal drie kleuren nodig.

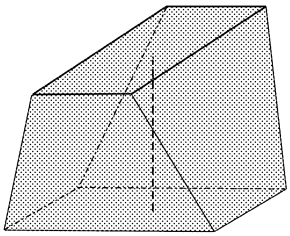
Oplossing Inpakken

Hieronder zie je de convexe omhulsels van de voorwerpen die in figuur 2 op pagina 24 (van dit nummer) staan afgebeeld.

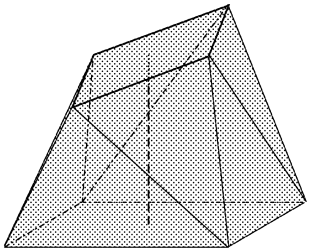
a. een vijfvlak



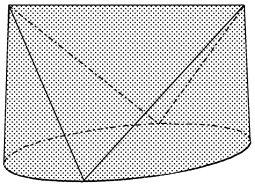
b. een zesvlak: de mantel bestaat uit vier trapezia



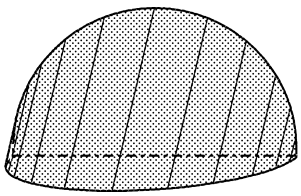
c. een vierzijdig antiprisma: de mantel bestaat uit acht driehoeken



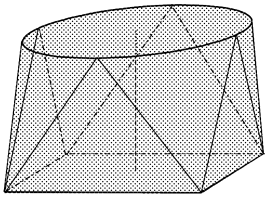
d. een wig: de drie aanzichten zijn een cirkel, vierkant en driehoek; de mantel bestaat uit twee driehoeken en twee stukken van een scheve kegel

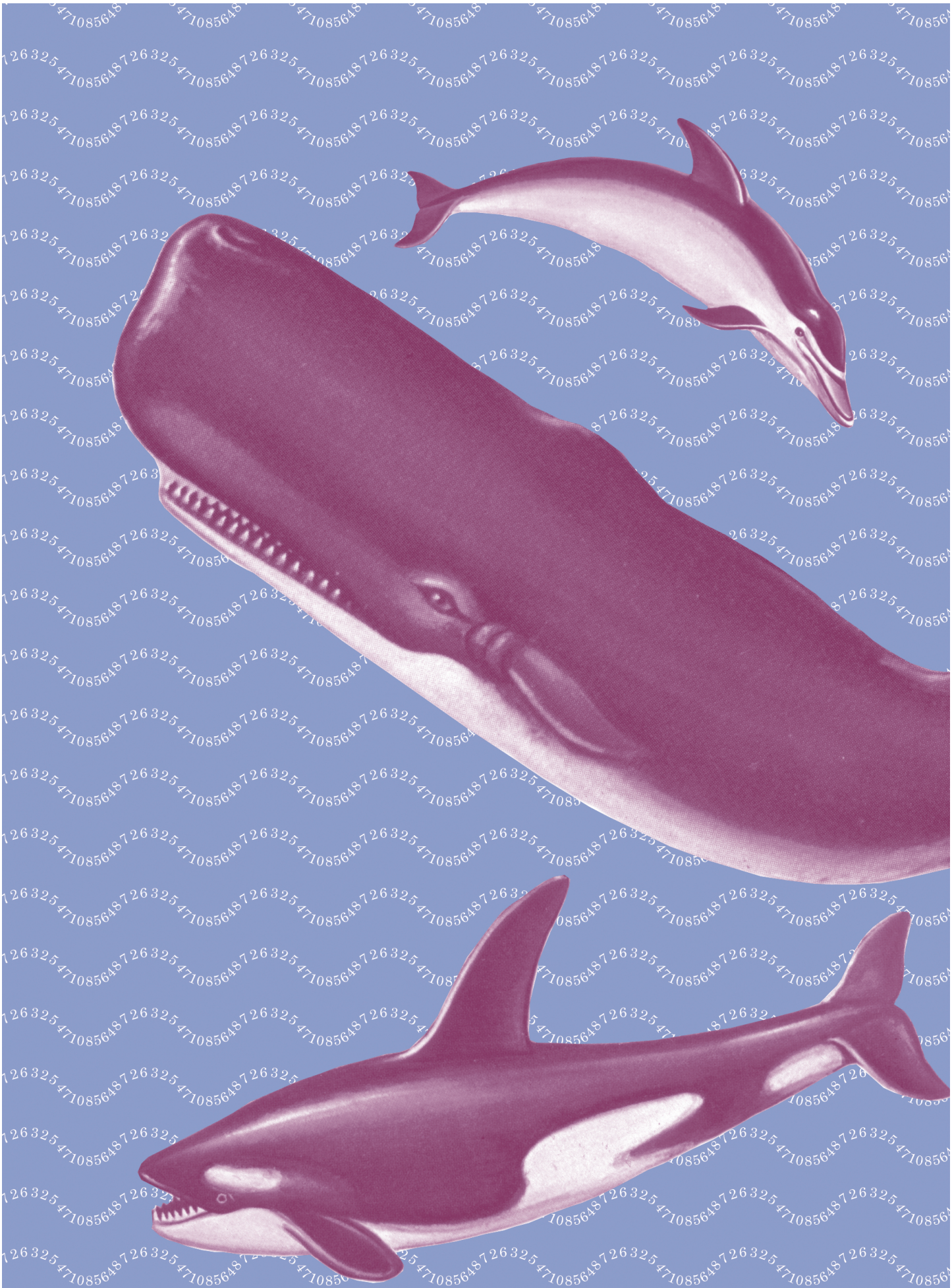


e. een stuk van een scheve cilinder



f. de mantel bestaat uit vier driehoeken met daartussen vier stukken van een scheve kegel





43ste JAARGANG NUMMER 2