

Luister... als Mabel
en Natasja allebei gaan,
dán ga ik dus echt
niet mee!

$M \wedge N$

Huh?... maar
dan gaat Omar dus
niet mee?

$M \Leftrightarrow$

O

PYTHA GORAS

Ja, ik wil wel mee,
maar als Omar meegaat,
dan moet Natasja ook
meegaan.

$O \Rightarrow N$

Ja hoor...
ik ga wel mee,
maar alleen als Omar
én Mabel allebei
meegaan.

$N \Leftrightarrow$

$O \wedge M$

PYTHAGORAS

43ste jaargang nummer 3
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofredacteur

Marco Swaen

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Reinie Erné

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden. Telefoon 071 5277 121,
fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV
Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus
41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522
855 176

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 19,95, € 22,50 (België), € 25,50 (overig buitenland),
€ 16,95 (leerlingabonnement), € 13,75 (bulkabonne-
ment). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken
(dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof,
docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amster-
dam (alex@pythagoras.nu), dr. L.A.M. van den Broek,
docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen
en organisator van de Kangoeroe Wiskundewedstrijd in
Nederland (vdbroek@math.kun.nl), dr. M.J. Coster,
wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van
Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. R. Erné, blad-
manager van Pythagoras en Nieuw Archief voor Wis-
kunde (erne@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio dis-
crete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu),
dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholen-
gemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu),
dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft
(kp@pythagoras.nu), D. Odegard, docent wiskunde aan
het Alberdink Thijm College te Hilversum (d.odegard
@klg.nl), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG
(pytholym@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent
wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amster-
dam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw,
docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu),
A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL
(pytholym@pythagoras.nu), dr. F. Wiedijk, wiskundige
aan de KUN te Nijmegen (freek@cs.kun.nl), drs. C.G.
Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris
@pythagoras.nu).

Op het omslag

Mabel, Natasja en Omar

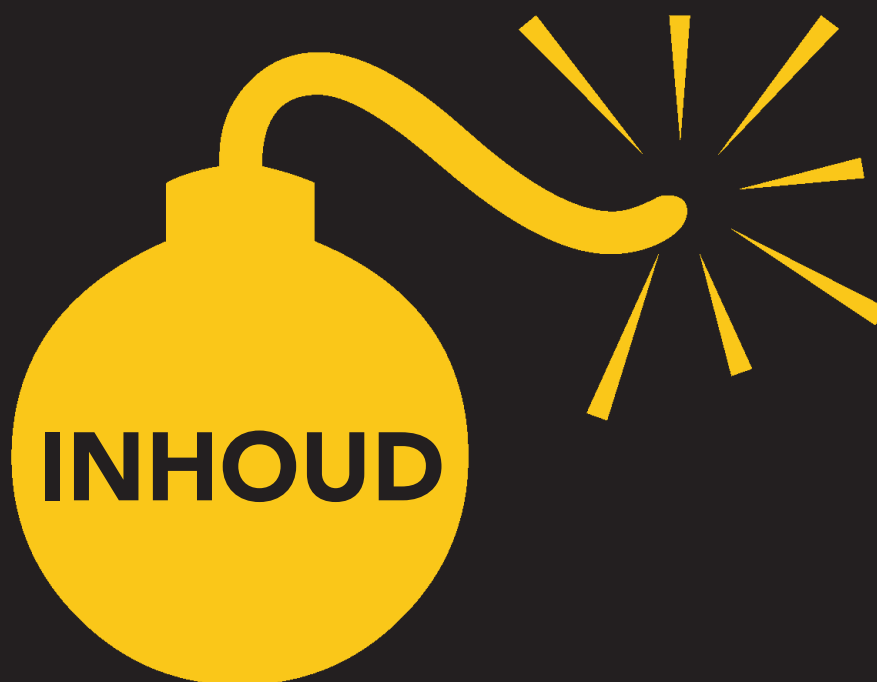
Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die
de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder
rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis
vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen
vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met
2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas
nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets
verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bij-
dragen van de onderstaande instituten en instellingen:





2 - 3	Kleine nootjes	22 - 23	De drieschijf ingepakt
4 - 7	Bewijzen nalopen met de computer	24 - 25	Journal
8 - 13	Logisch denken of rekenen	26	Passen en meten
14 - 15	Rekenen met sutra's	27	De post
16 - 17	Kangoe Solitair	28 - 29	Hoe groot is $n!$ ongeveer?
18 - 19	Pythagoras Olympiade	30 - 32	Gelijk uitpakken
20 - 21	Problemen – Oplossingen	33	Oplossingen nr. 2

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis kan
oplossen.

De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2



Wielrenner

Een wielrenner fietst met 4 km/uur de berg op. Hoe snel moet hij langs dezelfde route afdalen om een totale gemiddelde snelheid van 8 km/uur te halen?

Sokken

Het is duister en je hebt een doos met 12 zwarte, 8 groene en 6 blauwe sokken. Hoeveel sokken moet je er ten minste uitnemen om verzekerd te zijn van een bij elkaar passend stel?



Slapen

Als je in slaap valt tussen 10 en 11 uur, op het moment dat de grote wijzer de kleine bedekt en wakker wordt tussen 4 en 5 uur als beide wijzers in elkaars verlengde staan, hoe lang heb je dan geslapen?



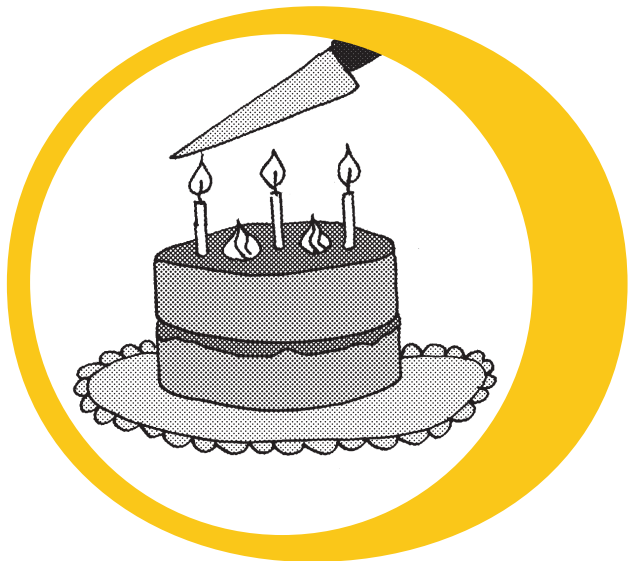
Schaatstocht

Bij het schaatsen staat een stevige wind precies in de lengterichting van de baan. Dat betekent dat een schaatser de helft van het parcours de wind tegen heeft en de andere helft de wind mee. Zal zijn eindtijd beter, slechter of hetzelfde zijn als het windstil is?

3

Taart verdelen

Een ronde taart moet met drie messneden in acht gelijke stukken worden verdeeld. Hoe? (Niet in lagen verdelen en niet twee helften op elkaar leggen.)



BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALOPEN MET DE COMPUTER
 BEWIJZEN NALO|

DE QED UTOPIE

door Freek Wiedijk

In tegenstelling tot wat je misschien zou verwachten, gebruiken wiskundigen computers nauwelijks om hun wiskunde mee te doen. Ze gebruiken ze als tekstverwerker (om hun artikelen en boeken mee te schrijven) en ze gebruiken ze voor experimenten (om te kijken hoe speciale gevallen van hun stellingen zich gedragen), maar ze gebruiken ze niet om bewijzen mee te controleren. Wiskundige bewijzen zitten in mensenhoofden of zijn opgeschreven in mensentaal, maar tot nog toe zijn ze bijna nooit zó opgeschreven dat er geen menselijk begrip nodig is om ze te kunnen nalopen.

In 1994 publiceerde een anonieme

groep wiskundigen en informatici het *QED Manifesto*. 'QED' is de afkorting van 'Quod Erat Demonstrandum' ('dat wat bewezen moest worden'), traditioneel de manier om een bewijs af te sluiten. In het QED Manifesto wordt een toekomst beschreven waarin alle wiskundige bewijzen in de computer zijn gecodeerd. De QED utopie – een wereld waarin de computer wiskundige bewijzen routinematig op correctheid controleert – is het onderwerp van een aantal onderzoeksprojecten. Deze projecten hebben hun doel nog niet bereikt, maar in Nijmegen werkt een groep onderzoekers die hopen dat dat binnenkort zal veranderen.



Oktober 1975, feestelijk wordt de laatste regel van de Automath-versie van Landau's *Grundlagen der Analysis* gecontroleerd met de computer. Geheel rechts prof. N.G. de Bruijn.

Automath en zijn opvolgers

De pionier van het *formaliseren* (het met de computer wiskundige bewijzen controleren) is de Nederlander prof. N.G. de Bruijn. Hij leidde in de jaren zeventig in Eindhoven het Automath project. 'De Automath' was zijn naam voor een machine die voldoende precieze wiskundige bewijzen kan begrijpen. In die tijd dachten de meeste wiskundigen dat het volkomen onpraktisch zou zijn om interessante bewijzen op een dergelijke manier in volledig detail uit te werken. Maar prof. De Bruijn heeft als eerste laten zien dat dat wel degelijk kan!

Er zijn tegenwoordig een vijftiental serieuze systemen voor verificatie van wiskunde. De opvolger van Automath is het Franse systeem Coq. Dit systeem is ontworpen voor bewijzen over computerprogramma's (dus niet primair voor wiskundige bewijzen), en is soms wat onhandig omdat het werkt met een afwijkend soort wiskunde dat *intuitionisme* heet, maar het kan ook voor echte wiskunde gebruikt worden. In Nijmegen wordt Coq hiervoor geschikter gemaakt. Om uit te vinden wat voor verbeteringen er daarvoor aan Coq nodig zijn, vertalen ze daar een aantal niet-triviale

bewijzen in de Coq taal.

Een systeem dat wél gemaakt is voor wiskunde, is het Poolse systeem Mizar ('Mizar' is de naam van een ster uit het sterrenbeeld de Grote Beer). Dit systeem stamt niet van Automath af, maar is onafhankelijk in de jaren zeventig ontwikkeld. Jarenlang is dit systeem eigenlijk nauwelijks in het westen bekend geweest, maar al die tijd hebben de Polen (en een groep Japanners) bewijzen in de Mizar taal zitten vertalen. Inmiddels heeft de Mizar bibliotheek met gecodeerde wiskunde een indrukwekkende omvang. Het bewijst veertigduizend uitspraken en is ongeveer anderhalf miljoen regels lang.

Oneindig veel priemgetallen

Priemgetallen zijn natuurlijke getallen groter dan 1, die door slechts twee getallen deelbaar zijn (1 en zichzelf). Er is geen grootste priemgetal. Dit werd al bewezen door Euclides, die 300 jaar voor Christus leefde; in het kader op pagina 7 kun je de letterlijke vertaling van zijn bewijs lezen. Tegenwoordig wordt het bewijs vaak op de volgende manier gepresenteerd.

Stelling (Euclides). Er zijn oneindig veel priemgetallen: voor ieder getal n bestaat er een priemgetal p dat groter is dan n .

Bewijs. Neem een natuurlijk getal n . Beschouw het getal $k = n! + 1$ (waarbij $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$). Kies een priemgetal p dat k deelt. Dan is $p > n$. Want als $p \leq n$ zou zijn, dan zou p een deler zijn van $n!$, en dus niet van $k = n! + 1$. Maar we hadden p juist als deler van k gekozen. QED

Dit bewijs kan in deze vorm niet door een computer worden begrepen. Het is geschreven in mensentaal en daardoor zijn de stapjes in het bewijs te vaag. Hier is de Mizar versie, die wel begrijpelijk is voor een computer:

```
theorem Euclides:
  for n ex p st p is prime & p > n
proof
  let n;
  set k = n! + 1;
  n! > 0 by NEWTON:23;
  then n! >= 0 + 1 by NAT_1:38;
  then k >= 1 + 1 by REAL_1:55;
  then consider p such that
A1: p is prime & p divides k by INT_2:48;
A2: p <> 0 & p > 1 by A1,INT_2:def 5;
  take p;
  thus p is prime by A1;
  assume p <= n;
  then p divides n! by A2,NAT_LAT:16;
  then p divides 1 by A1,NAT_1:57;
  hence contradiction by A2,NAT_1:54;
end;
```

Zoals je ziet, lijkt dit erg op een computer-programma. Het formaliseren van een bewijs lijkt dan ook erg op programmeren. In feite combineert formaliseren het leukste van programmeren en van wiskunde. (Sommige bewijssystemen zijn hierdoor bijna een soort computerspel: de te bewijzen stelling is dan het 'level' dat je aan het spelen bent.) Om de Mizar versie van het bewijs te kunnen begrijpen, moet je weten wat de verwijzingen naar de Mizar bibliotheek betekenen:

```
NEWTON:23    for s holds s! > 0
NAT_1:38     i < j + 1 iff i <= j
REAL_1:55    x <= y & z <= t implies
              x + z <= y + t
INT_2:48     1 >= 2 implies ex p st p is
              prime p divides 1
INT_2:def 5   p is prime iff p > 1 & for n st
              n divides p holds n = 1 or n = p
NAT_LAT:16   j <= 1 & 1 <> 0 implies j
              divides 1!
NAT_1:57     i divides j & i divides j + h
              implies i divides h
NAT_1:54     0 < j & i divides j implies
              i <= j
```

Dit zijn dus acht van de veertigduizend uitspraken in de Mizar bibliotheek, de *MML* (Mizar Mathematical Library).

Chips zonder bugs

De QED utopie is helaas nog maar een utopie. Het is momenteel nog onpraktisch veel werk om wiskunde voor een *bewijsassistent* (een systeem om bewijzen mee te controleren) uit te werken. Om een indruk te geven: het kost ongeveer een week van heel hard werken om één pagina uit een wiskundeboek te coderen. Bewijsverificatie is dus nog geen gemeengoed in de wiskunde.

Maar er is een ander vakgebied waar het controleren van bewijzen al wel een hogere vlucht heeft genomen: de informatica. Hierbij gaan de bewijzen niet over wiskundige stellingen, maar over de correctheid van chips of van computerprogramma's. Het gaat dan bijvoorbeeld om medische of ruimtevaarttoepassingen, waarbij het van het grootste belang is om zeker te weten dat er geen fouten zijn.

In 1997 was er een versie van de Pentium chip die een bug bevatte. Sommige berekeningen die die chip maakte, gaven een fout antwoord. Dit heeft Intel, het bedrijf dat de Pentium maakt, heel veel geld gekost. Daarom hebben ze bij Intel tegenwoordig onderzoekers in dienst die als taak hebben met behulp van bewijsassistenten te *bewijzen* dat er niet meer van dit soort bugs in de Pentium processors zitten. Een van deze onderzoekers heeft de fraaie

bewijsassistent HOL Light gebouwd. Dit systeem blijkt ook heel geschikt voor het formaliseren van wiskunde.

In credit cards zit tegenwoordig vaak een chip waarop hele kleine computerprogrammaatjes draaien. Sommige van die programmaatjes zijn geschreven in een dialect van de programmeertaal Java met de naam *Java Card*. In Nijmegen wordt met behulp van de bewijsassistent PVS technologie ontwikkeld om te bewijzen dat zulke programmaatjes foutloos zijn. Dat is erg belangrijk omdat zulke programmaatjes potentieel op zeer grote aantallen credit cards draaien: als er dan een probleem mee is, hebben

daar erg veel mensen last van.

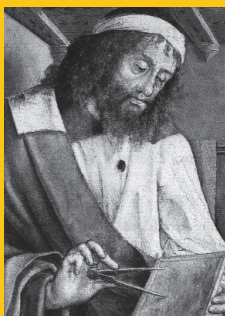
Voor de toepassingen in de informatica werkt een groot aantal onderzoekers aan bewijsassistenten. Dit maakt die systemen ook steeds geschikter voor wiskunde. Dus wellicht dat de QED utopie toch binnenkort werkelijkheid wordt!

Meer informatie

Mocht je geïnteresseerd zijn geraakt in het formaliseren van wiskunde:

- Het QED Manifesto:
<http://www.cs.kun.nl/~freek/qed/qed.html> • Een lijst met systemen voor wiskunde in de computer:
<http://www.cs.kun.nl/~freek/digimath/>
- De website van het Mizar systeem: <http://mizar.org/> (Mizar is gratis te downloaden en draait zowel onder Windows als Linux.)

De priemgetallenstelling bij Euclides



In boek IX van Euclides' *De Elementen* vinden we bij Stelling 20 onze priemgetallenstelling. In moderne ogen ietwat merkwaardig is dat bij Euclides getallen de lengtes zijn van lijnstukken. Euclides heeft het

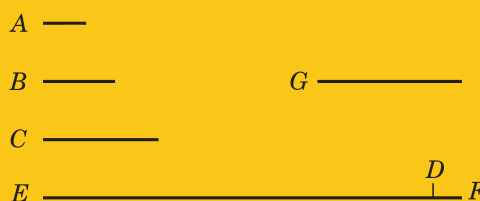
over 'de lengte a meet de lengte b' ', waar wij zouden zeggen 'getal a is een deler van getal b' '. Bij Euclides ziet de stelling er zo uit:

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Vrij vertaald luiden de stelling en het bewijs als volgt.

Stelling 20. Er zijn meer priemgetallen dan elke voorgeschreven hoeveelheid priemgetallen

Bewijs. Gegeven een voorgeschreven hoeveelheid priemgetallen, zeg A , B en C . Ik beweer dat er nog meer priemgetallen moeten zijn behalve deze A , B en C . Immers, neem het kleinste getal gemeten



(deelbaar) door A , B en C , zeg dat dat de lengte van lijnstuk DE is. Verleng ED met de eenheidsmaat DF . Dan is EF wel priem of niet priem.

Stel eerst eens dat EF wel priem is; dan hebben we priemgetallen A , B , C en EF gevonden, dus meer dan de voorgeschreven A , B en C .

Stel nu dat EF niet priem is, dan moet het meetbaar (deelbaar) zijn door een zeker priemgetal (volgens Stelling 31, boek VII). Laat het meetbaar zijn door G . Ik beweer dan dat G niet een van de getallen A , B of C is. Want, stel dat het dat wel zou zijn, dan, omdat A , B en C passen in DE , past ook G in de lengte DE . Maar G meet ook EF . Dus G , als getal, meet de rest, dus de eenheid DE , hetgeen onzinnig is. Daarom is G niet gelijk aan A , B of C , maar volgens de aanname wel priem. Aldus hebben we de priemgetallen A , B , C en G , en dat zijn er meer dan de veronderstelde A , B , C alleen.

QED

door Marco Swaen



8

Logisch denken of rekenen

Ooit werd logisch denken gezien als een geweldige prestatie waar alleen de mens toe in staat is. Veel van dat logisch denken echter blijkt te vangen in simpele rekenregeltjes. Pas je die regeltjes consequent toe, dan kom je al rekenend trefzekerder tot de goede conclusies dan wanneer je hard aan het denken slaat. Zo kan een domme computer het in logisch denken gemakkelijk winnen van de hele menselijke soort.

Logisch denken is niet voorbehouden aan volwassenen, kinderen beginnen er al vroeg mee, zoals je kunt merken bij een spelletje als het volgende. Houd een peuter een mooie knikker voor, doe de knikker dan achter je rug in één van je twee handen en steek vervolgens beide handen gesloten voor je uit. 'Kies maar!' Stel, de peuter kiest je linkerhand, je doet die open, en de peuter ziet dat daar geen knikker zit. Dan schiet meteen de blik van de peuter naar je rechterhand. De peuter heeft niet gezien dat je een knikker in je rechterhand hebt, maar komt tot die conclusie zuiver door logisch nadenken.

Mogelijke werelden

Hoe in de hersenen van de peuter die conclusie tot stand komt, weten wij niet. Wel kunnen we tot hetzelfde resultaat komen met een methode uit de logica, de *waarheidstabel* geheten, die in plaats van denkwerk alleen rekenwerk vergt. Het voordeel van de methode is dat hij ook nog werkt als de situatie zo complex is dat we er al redenerend niet meer uitkomen.

De methode van de waarheidstabel berust erop dat je eerst een lijst opstelt van alle denkbare manieren waarop de betreffende situatie in elkaar zou kunnen zitten: de zogenaamde 'mogelijke werelden'. Vervolgens streep je de werelden weg die niet stroken met de verdere informatie. Is er nog maar één mogelijke wereld over, dan is dat de werkelijkheid.

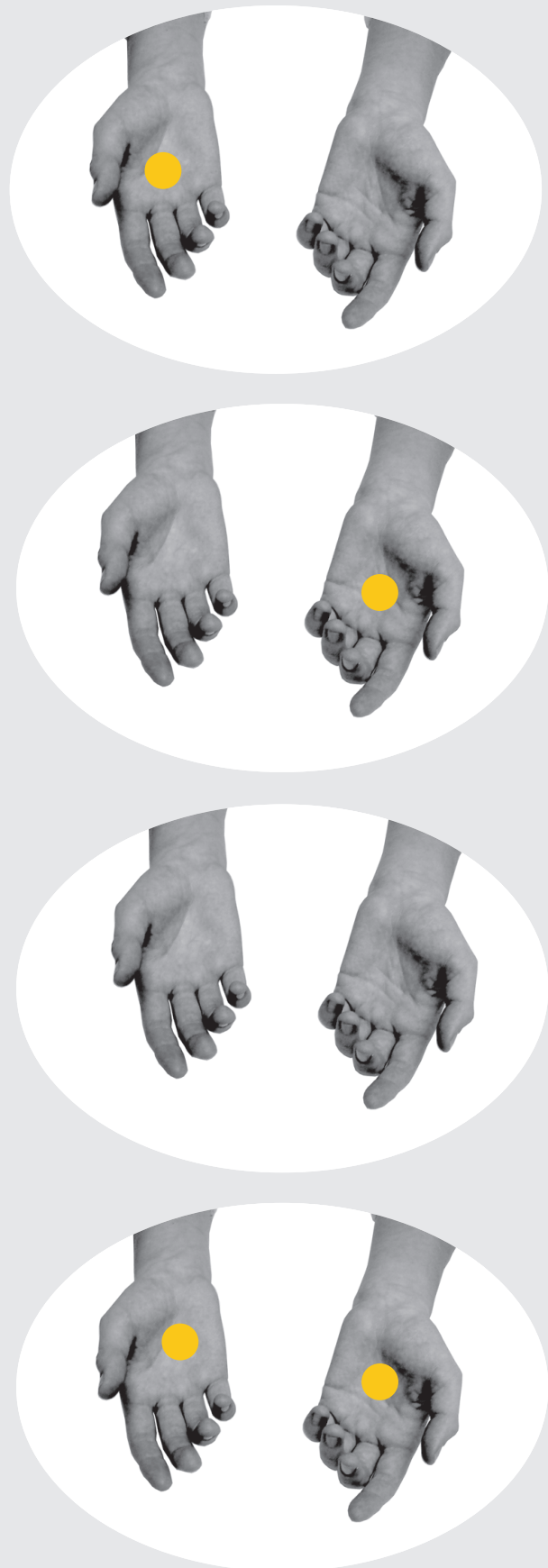
Waarheidstabel

De vraag die de peuter bezighoudt, is waar een knikker te vinden is. Daarvoor komen de linker- en de rechterhand in aanmerking. Er zijn daarom $2 \times 2 = 4$ denkbare werelden, namelijk: links wel of geen knikker en rechts wel of geen knikker.

Voor het gemak korten we af:

L = 'in de linkerhand zit een knikker';
R = 'in de rechterhand zit een knikker'.

De vier mogelijke werelden zetten we als vier rijen in de waarheidstabel, zie figuur 2.



Figuur 1 De vier mogelijke werelden voor de peuter

Zit er in de betreffende wereld in de linkerhand een knikker, dan schrijven we in die rij onder L een *w* (van waar); is L niet waar, dan een *o* (van onwaar). Zo krijgen we dus de vier werelden: *ww*, *wo*, *ow* en *oo*.

Dan de voorwaarden die moeten gelden; dat zijn er twee. Ten eerste is het de peuter duidelijk dat er maar één knikker is, die ergens moet blijven, en niet in beide handen tegelijk kan zitten, dus:

1. 'in de linkerhand zit een knikker óf in de rechterhand zit een knikker';

vervolgens ziet de peuter:

2. 'in de linkerhand zit geen knikker'.

Voor beide voorwaarden maken we een kolom. Met *w* op een regel geef je aan dat de voorwaarde in die wereld vervuld is. In de kolom van voorwaarde 1 schrijven we dus een *w* op de regels waar ofwel bij L ofwel bij R een *w* staat. Bij voorwaarde 2 komt een *w* als er op die regel bij L een *o* staat. Aldus is er nog maar één regel over waar beide voorwaarden een *w* hebben, namelijk de wereld waarin er links geen, maar rechts wel een knikker zit.

L	R	voorwaarde 1: L óf R	voorwaarde 2: niet L
<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>w</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>o</i>
<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>w</i>
<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>

Figuur 2 De peuter-waarheidstabel

In dit simpele voorbeeld van de knikker kost het geen moeite vast te stellen of de voorwaarden in een gegeven wereld gelden.

Moeilijker wordt het als de voorwaarden talrijker en complexer zijn, zoals in het volgende voorbeeld.

$$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow I)$$



Wie gaat er met me uit?

Patty wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vrienden met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vrienden hebben allemaal zo hun eisen; dit zijn de antwoorden die Patty krijgt:

Mabel: 'Ja, ik wil wel mee, maar als Omar meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'

Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Omar én Mabel ook meegaan.'

Omar: 'Ik ga mee, tenzij Mabel en Natasja allebei meegaan.'

We pakken Patty's probleem aan met een waarheidstabel, hoewel we er met logisch denken ook wel uit zullen komen.

De variabelen in dit geval zijn:

M = 'Mabel gaat mee';

N = 'Natasja gaat mee';

O = 'Omar gaat mee'.

Daarmee zijn er dus $2 \times 2 \times 2 = 8$ mogelijke werelden en krijgt de waarheidstabel dus acht regels, zie figuur 5.

De volgende stap is na te gaan per regel welke eisen er vervuld worden. Dat kan door logisch nadenken, maar ook door wat rekenwerk, zoals we zullen zien.

Voegwoorden

In de gestelde eisen komen we de variabelen M , N en O tegen, geschakeld door woord(groep)en als: 'tenzij', 'en', 'maar alleen als', 'als ... dan', 'ja ... maar als ... dan'. Logisch denken is vooral de kunst met zulke voegwoorden en woordgroepen om te springen.

Wij gaan nog niet in op deze specifieke voegwoorden, maar bekijken liever eerst een bekend vijftal, waarmee je al dit soort voegwoorden gemakkelijk kunt omschrijven. Die vijf, met hun symbolen, zijn:

$\wedge$ en
 $\vee$ of
 $\neg$ niet
 $\Rightarrow$ als ... dan
 $\Leftrightarrow$ juist dan als

Bij elk van deze vijf voegwoorden hoort een rekenregel. Om na te gaan of een voorwaarde vervuld is, hoef je alleen deze vijf rekenregels toe te passen. We lopen de vijf voegwoorden na, en bekijken de bijbehorende rekenregels.

En, niet, of

Voor het voegwoord **en** ($\wedge$) geldt: aan een voorwaarde $A \wedge B$ wordt voldaan als er aan A en aan B afzonderlijk voldaan is. De bijbehorende rekenregel houdt dus in: staat er een w bij zowel A als B , dan schrijf je bij $A \wedge B$ een w .

In alle andere gevallen (wo , ow en oo) krijgt $A \wedge B$ een o . In de tabel van figuur 3 zie je de rekenregel die bij $\wedge$ hoort in de derde kolom. In figuur 3 zie je ook wat je doet bij **niet** ($\neg$).

Opgelet bij **of** ($\vee$): in het dagelijks taalgebruik wordt **of** op twee verschillende manieren gebruikt. Staat er: 'gratis toegang voor kinderen onder begeleiding van hun vader of moeder', dan geldt dat ook voor kinderen die door hun vader **en** moeder begeleid worden. Op deze **en/of**-manier zullen wij **of** ($\vee$) gebruiken. In de tabel zie je dan ook dat in de kolom van $A \vee B$ bij de regel ww een w staat.

$$N \Leftrightarrow (O \wedge M)$$



11

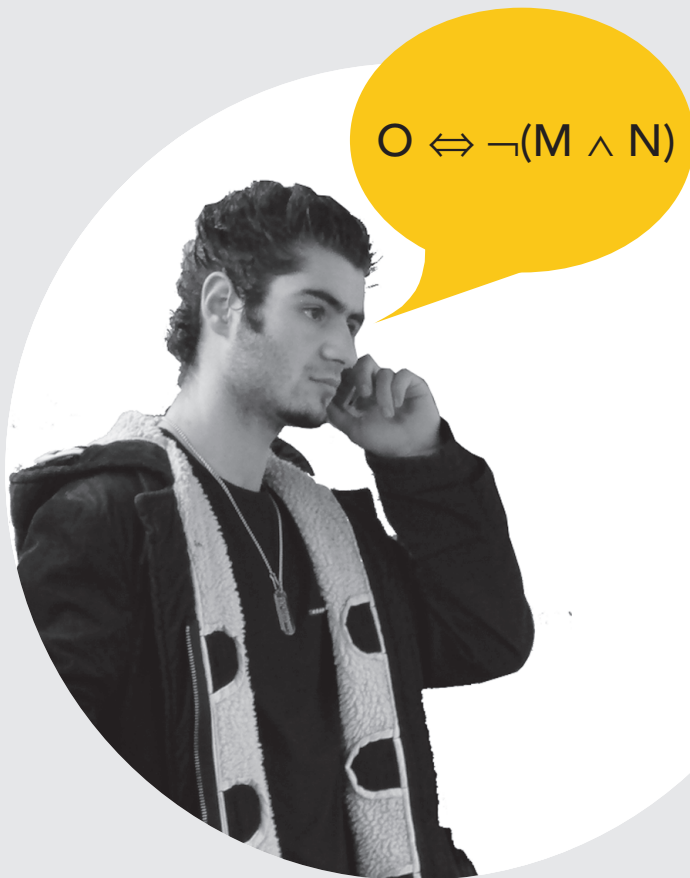
De strengere **óf** ($\underline{\vee}$), met meer nadruk uitgesproken, stelt je voor de keuze **óf** A **óf** B , waarbij je niet allebei mag kiezen. Zoals bij de knikker, die links zat **óf** rechts. In de kolom van $A \underline{\vee} B$ moet dus op de regel ww een o staan.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	o	w	w
w	o	o	w	w	o	o
o	w	o	w	w	w	o
o	o	o	o	o	w	w

A	$\neg A$
w	o
o	w

w = waar
 o = onwaar

Figuur 3 De rekenregels bij de bekendste voegwoorden



De voorwaarde *als A dan B* ($A \Rightarrow B$) eist dat steeds wanneer A het geval is, B ook zo is. In het geval van de buurvrouw: op een dag dat het waait, heeft zij hoofdpijn. Dat betekent dat er drie soorten dagen voor haar mogelijk zijn:

1. met wind, met hoofdpijn;
2. zonder wind, zonder hoofdpijn;
3. zonder wind, met hoofdpijn.

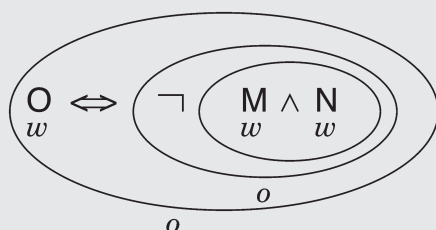
De enige dagsoort die voor haar niet bestaat, is met wind, zonder hoofdpijn. Kortom, $A \Rightarrow B$ krijgt alleen een *o* op de regels waar A een *w* en B een *o* heeft. Op de andere regels (*ww*, *ow* en *oo*) krijgt $A \Rightarrow B$ een *w*, zie de zesde kolom in figuur 3.

Tenslotte is er nog de voorwaarde *juist dan als* ($\Leftrightarrow$). Dit voegwoord wordt in de wiskunde gebruikt als er sprake is van een *als-dan* beide kanten op. Dat is bijvoorbeeld te herkennen in Natasja's antwoord: 'Ja ik ga mee, maar alleen als ...' Ze gaat mee als aan die eis voldaan is, en: *alleen als* aan die eis voldaan is, gaat ze mee. De bijbehorende rekenregel is duidelijk: bij *oo* en *ww* krijgt $A \Leftrightarrow B$ een *w*, bij *ow* en *wo* krijgt $A \Leftrightarrow B$ een *o*.

12

Als ... dan, juist dan als

De buurvrouw klaagt: 'Als het waait, dan heb ik meteen hoofdpijn.' Blijkbaar zijn dagen met wind bij haar altijd ook dagen met hoofdpijn. Let op: daarmee zegt ze niet dat ze op dagen dat het niet waait, geen hoofdpijn heeft. Dan had ze het omgekeerde moeten zeggen: 'Als ik hoofdpijn heb, dan waait het.'



Figuur 4 De berekening van Omars voorwaarde, stap voor stap

Doorrekenen

De vijf voegwoorden kun je combineren om ingewikkeldere voorwaarden te formuleren. Omar zei: 'Ik ga mee, tenzij Mabel en Natasja allebei meegaan.' Hij had het ook zo kunnen zeggen: 'Ik ga mee precies dan als Mabel en Natasja niet allebei meegaan,' of in formulevorm:

M	N	O	$M \wedge N$	$\neg(M \wedge N)$	$O \Leftrightarrow \neg(M \wedge N)$
w	w	w	w	o	o
w	w	o	w	o	w
w	o	w	o	w	w
w	o	o	o	w	o
o	w	w	o	w	w
o	w	o	o	w	o
o	o	w	o	w	w
o	o	o	o	w	o

Figuur 5 De waarheidstabel voor de voorwaarde van Omar

$$O \Leftrightarrow \neg(M \wedge N)$$

Overtuig je ervan dat de andere twee voorwaarden geformuleerd kunnen worden als:

$$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$$

$$N \Leftrightarrow (O \wedge M)$$

Nagaan of aan de voorwaarden voldaan is in de acht mogelijke werelden van de bijbehorende waarheidstabel, kost denkwerk. Dat denkwerk kan echter worden vervangen door een berekening.

Neem Omars voorwaarde: $O \Leftrightarrow \neg(M \wedge N)$. Stel, we zitten in de eerste wereld, waarin M, N en O alledrie waar zijn. Omdat M en N waar zijn, is $M \wedge N$ het ook (bij *ww* geeft $\wedge$ een *w*); dus is $\neg(M \wedge N)$ onwaar (want bij *w* geeft $\neg$ een *o*). Aan de andere kant is O wel waar, dus is $O \Leftrightarrow \neg(M \wedge N)$ onwaar (want bij *wo* geeft $\Leftrightarrow$ een *o*). Net als bij een rekensom bereken je de uitkomst (*w* of *o*) stap voor stap, in de volgorde die voor de betreffende bewerkingen geldt, zie figuur 4.

We kunnen deze berekeningen sneller per hele kolom uitvoeren, dus voor alle mogelijke werelden tegelijk. In de tabel maken we dan voor elke tussenstap een kolom, en berekenen stap voor stap de waarheid, zie figuur 5. Eerst de kolom van $M \wedge N$: staat er bij M en bij N een *w*, dan schrijven we een *w*, overal elders een *o*. Vervolgens vullen we bij $\neg(M \wedge N)$ een *o* in als er bij $M \wedge N$ een *w* staat, en andersom. Enzovoorts.

Evenzo rekenen we de waarheid van de andere twee voorwaarden door. In hoeverre de drie eisen in de acht mogelijke werelden vervuld worden, zie je in de tabel van figuur 6. Er blijkt dat de drie voorwaarden alleen vervuld worden in de situatie *oow*, dus als niemand van gedachten verandert, dan gaan Patty en Omar samen op stap, en blijven Mabel en Natasja thuis.

Verder

Een vergelijkbaar vraagstuk is het volgende: 'Jan komt als Marie of Anne komt, Anne komt als Marie niet komt, maar Jan komt niet als Anne komt. Wie komt wel, wie niet?'

De wiskundige theorie achter de waarheidstabellen heet de *propositielogica*. Wil je meer weten over propositielogica, dan kun je op onze site enkele literatuurverwijzingen vinden.

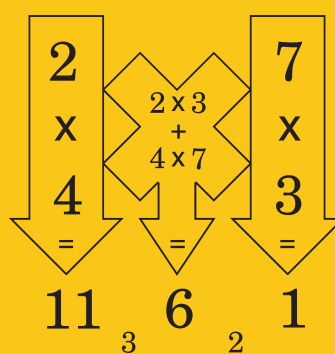
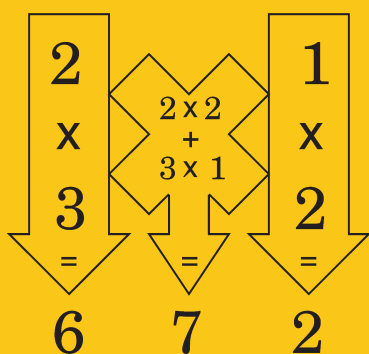
$$O \wedge \neg M \wedge \neg N!$$

M	N	O	$O \Leftrightarrow \neg(M \wedge N)$	$M \Leftrightarrow (O \Rightarrow N)$	$N \Leftrightarrow (O \wedge M)$
<i>w</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>
<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>
<i>w</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>
<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>o</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>w</i>	<i>w</i>
<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>w</i>

Figuur 6 De waarheidstabel voor alle drie de voorwaarden

Rekenen met sutra's

AFLEVERING 3 Productsommen



Op de basisschool heb je het ongetwijfeld vaak geoefend: het product van twee getallen uitrekenen door het ene getal stap voor stap met de cijfers van het andere te vermenigvuldigen, en de uitkomsten – op de juiste manier onder elkaar gezet – op te tellen. In de Vedische wiskunde gebeurt dat handiger, volgens de bekende sutra Urdhva Tiryagbhyam (Verticaal en kruiselings).

We beginnen met een eenvoudige opgave: 21×32 . Zet de twee getallen onder elkaar. Werk van rechts naar links. Voor het achterste cijfer neem je het product van de achterste twee: $1 \times 2 = 2$. Voor het tweede cijfer vermenigvuldig je 'kruiselings': $2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$. Voor de cijfers daarvoor vermenigvuldig je de voorste twee cijfers: $2 \times 3 = 6$. Het antwoord is nu: 672.

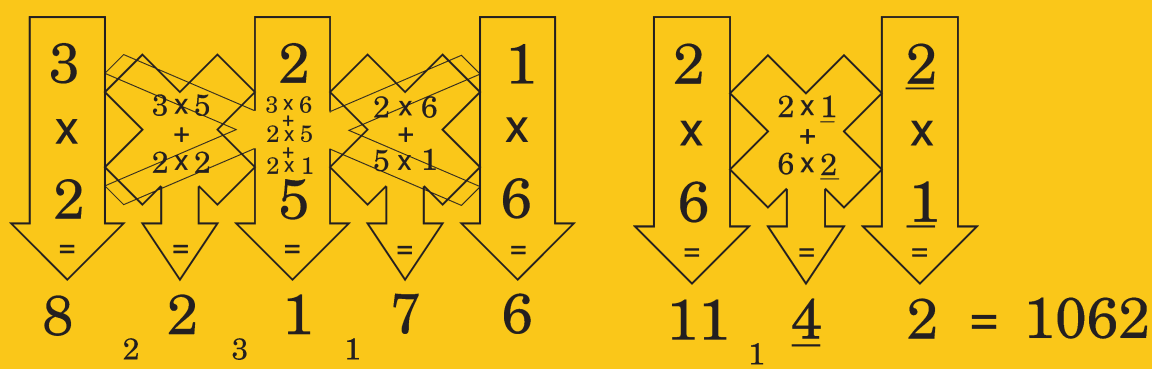
Cijfers meenemen

Beter moet je opletten als de tussenuitkomsten groter worden. Dan moet je cijfers meenemen naar het volgende deel, zoals bij 27×43 .

Begin weer achteraan: $3 \times 7 = 21$; schrijf de 1 op en neem nu de 2 mee voor het volgende cijfer. Voor het volgende cijfer doen we $3 \times 2 + 7 \times 4 = 34$; hierbij komt nog de 2 die we meenamen, dus 36. Schrijf de 6 op en neem de 3 mee. Tot slot doe je $2 \times 4 = 8$; hier komt dan nog de 3 bij, dus 11. Het antwoord is: 1161.

Om de getallen die je mee moet nemen niet te vergeten, kun je ze even opschrijven, zie de getallen op de onderste regel in de schematische weergave hierboven.

Vedische wiskunde is gebaseerd op sutra's, korte spreken die een rekenpatroon aangeven. Het oefent je geest op een meer creatieve manier. Als je de technieken oefent, ben je in staat tot indrukwekkend hoofdrekenen, waar klasgenoten versteld van zullen staan.



Grotere getallen

Hebben de getallen drie cijfers, dan groeien de kruis-producten in het midden mee. Het patroon voor twee driecijferige getallen ziet er als volgt uit:



Als voorbeeld berekenen we 321×256 . Als je het rekenpatroon door hebt, zul je als antwoord 82176 vinden. In de figuur hierboven zijn de getallen op de onderste regel weer de cijfers die moeten worden meegenomen.

Negatieve cijfers

Vermenigvuldigen op de hier gepresenteerde manier wordt moeilijker naarmate er meer hoge cijfers (7, 8, 9) vermenigvuldigd moeten worden. De Vedische rekenaar heeft daar iets op gevonden. Bekijk 19 niet meer als 1 tiental plus 9 eenheden, maar als 2 tientallen *min* 1 eenheid. In plaats van 19 schrijf je dan 21. En met zulke 'negatieve cijfers' kun je eigenlijk net zo goed rekenen. Hoe de berekening van 18×59 dan verloopt, zie je hierboven. Let erop dat het cijfer dat nu wordt meegenomen, wordt *afgetrokken* in plaats van opgeteld.

उर्ध्वतिर्यग्भ्यामं

Ūrdhva Tiryagbhyām

Kangoe Solitair

Iedereen heeft in zijn jeugd wel eens kennis gemaakt met een solitair spel. Daar zijn er een heleboel van. Kijk maar eens op Internet, bijvoorbeeld op <http://sallini.com/games/solitair>. Een van die varianten – driehoeksolitair – was inspiratiebron voor het aandenken van de Kangoeroe Wiskundewedstrijd van 2003.

Spelregels

Bij het speelbord van *Kangoe Solitair* met acht rijen horen 35 'kangoes', dat zijn de pionnen. Leg die allemaal op het speelbord; laat het bovenste veld leeg. Je moet met een kangoe over een buurman heen springen naar een leeg veld. De kangoe waar je overheen springt, neem je weg. De bedoeling is dat je uiteindelijk één kangoe overhoudt op het bovenste veld (het veld dat aan het begin leeg was).

Vragen

Je kunt het spel ook op een bord met meer of minder dan acht rijen spelen. Ga maar aan de slag. Hoeveel kangoes houdt jij over? Lukt het je om één kangoe over te houden en wel bovenaan? Dat is helemaal niet makkelijk. Bij zekere aantallen rijen van het speelbord is het zelfs onmogelijk. Bij welke aantallen? Hoe weet je dat zo zeker? Hoe moet je spelen op borden met een ander

aantal rijen? Veel vragen, waarbij wiskunde je verder kan helpen.

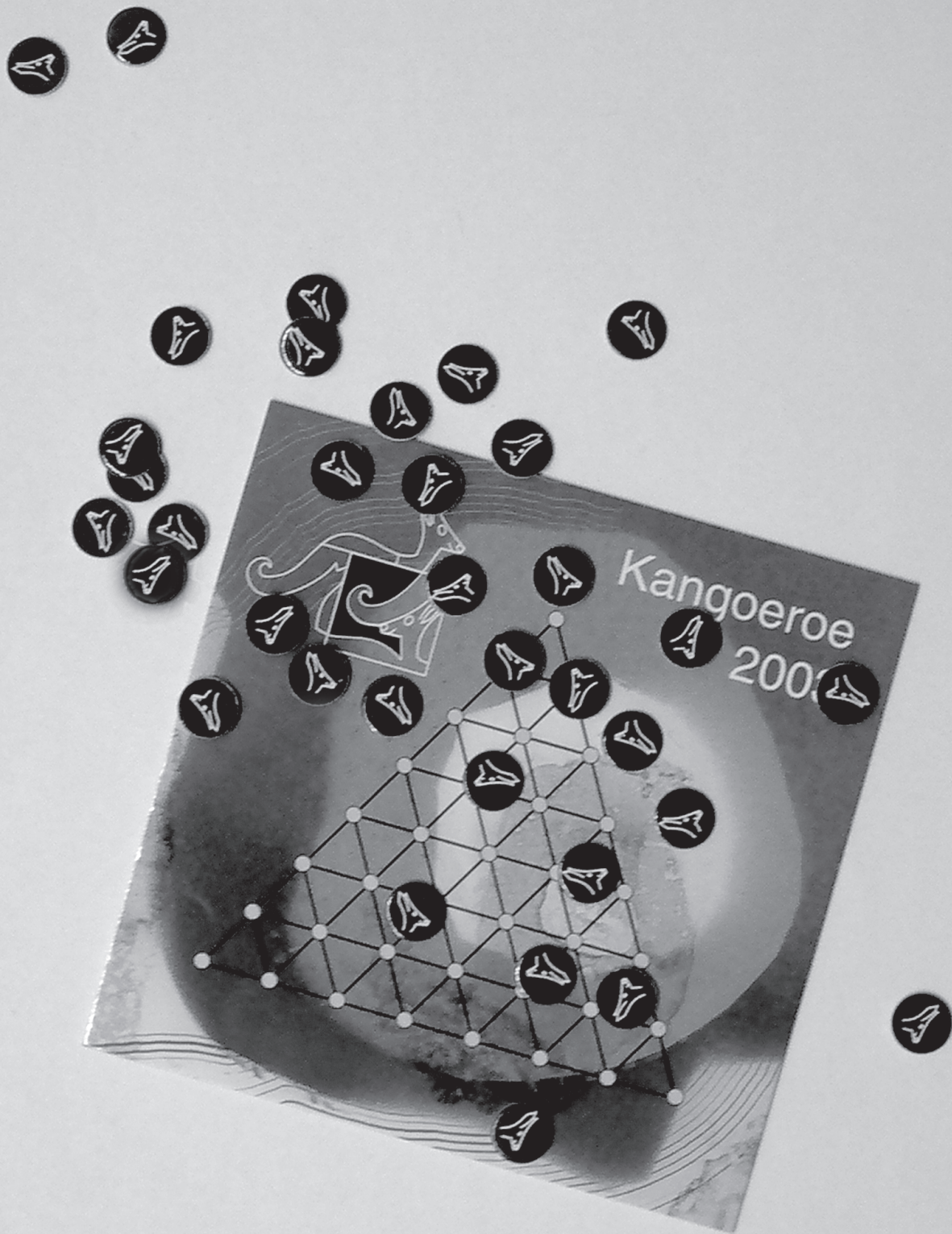
Op www.math.kun.nl/kangoeroe kun je de antwoorden op deze vragen lezen.

Kangoeroe 2004

In 2003 hebben in Nederland en Vlaanderen ruim 51000 leerlingen aan de Kangoeroe Wiskundewedstrijd deelgenomen. Iedere deelnemer kreeg als aandenken het spelletje *Kangoe Solitair*. Heb je niet meege-daan? Speel het spel dan op Internet (www.math.kun.nl/kangoeroe) of maak het spel zelf met bijvoorbeeld stevig papier.

Ook dit schooljaar vindt de Europese Kangoeroe Wiskundewedstrijd uiteraard weer plaats, en wel op *vrijdag 19 maart 2004*. Informeer bij je docent over de aan-melding.

Rechts: het spel *Kangoe Solitair*



Pythagoras Olympiade



door **René Pannekoek** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:

pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden.

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzing vermeld je je klas, de naam van de wiskundecent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 januari 2004.

OPGAVE

102

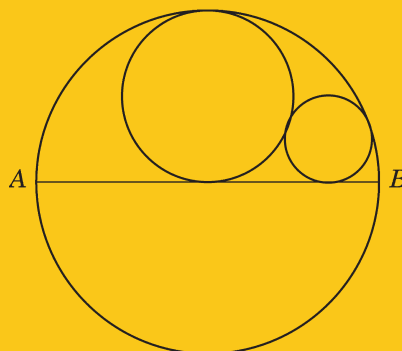
Van een kubus hebben de acht hoekpunten elk de waarde 1 of -1 gekregen. Elk van de zes zijvlakken krijgt de waarde die gelijk is aan het product van zijn vier hoekpunten. Laat A de som van de waarden van de acht hoekpunten en de zes zijvlakken zijn. Welke waarden kan A aannemen?



OPGAVE

103

AB is een diameter van de cirkel K . De cirkel L raakt K en AB in het middelpunt van K . De cirkel M raakt K, L en AB . Als $AB = 1$, vind dan de straal van M .



OPLOSSING

98

In klas 3c van een school heeft elke leerling ten hoogste drie goede vrienden (als A een goede vriend van B is, is B ook een goede vriend van A). De rector vindt dat de klas te rumoerig is en wil deze opsplitsen in twee (niet noodzakelijk gelijke) delen, zodat in de nieuwe situatie elke leerling bij ten hoogste één goede vriend in de klas zit. Bewijs dat dit altijd mogelijk is.

Oplossing. We noemen in de nieuwe situatie het totaal aantal vriendenparen dat bij elkaar in een van twee klassen zit V . Omdat V altijd een geheel getal is, is er een indeling waarbij V minimaal is. Stel dat er met deze indeling nog iemand is die twee of meer vrienden in zijn eigen klas heeft. Als we deze persoon van klas laten wisselen, heeft hij in de andere klas nog hooguit één vriend. In deze nieuwe indeling is de waarde van V dus lager dan in de oude indeling. Maar we hadden deze indeling juist zo gekozen dat dat niet kon. Dus was er niemand met meer dan één vriend in de klas.

Deze opgave werd opgelost door: H. Verdonk te Den Haag en Suyan Zhang van het **Dr. Aletta Jacobs College** te Hoogezand.

De boekenbon gaat naar Suyan Zhang.

OPLOSSING

99

We hebben een rijtje getallen van lengte 2^k , k geheel positief, louter bestaande uit de getallen 1 en -1 . We maken een volgend rijtje door elk getal met het volgende getal te vermenigvuldigen. Het laatste getal vermenigvuldigen we met het eerste. Uit dit nieuwe rijtje maken we op dezelfde manier weer een nieuw rijtje, enzovoorts. Bewijs dat we uiteindelijk altijd op een rijtje met alleen maar enen uitkomen.

Oplossing. Zij $a_{i,t}$ de waarde van het i -de getal in het rijtje na t stappen, waarbij we bij het tellen van de rijnummers na het laatste getal weer bij het eerste getal beginnen, dus $a_{2^k+1,t} = a_{1,t}$

$a_{2^k+2,t} = a_{2,t}$ enzovoorts.

We hebben dan dat $a_{i,t+1} = a_{i,t} \cdot a_{i+1,t}$ voor alle i en t . Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} a_{i,t+2} &= a_{i,t+1} \cdot a_{i+1,t+1} = \\ &= (a_{i,t} \cdot a_{i+1,t}) \cdot (a_{i+1,t} \cdot a_{i+2,t}) = \\ &= a_{i,t} \cdot a_{i+1,t}^2 \cdot a_{i+2,t}. \end{aligned}$$

Omdat het kwadraat van zowel 1 als -1 gelijk is aan 1, is dit gelijk aan $a_{i,t} \cdot a_{i+2,t}$. Evenzo is

$$\begin{aligned} a_{i,t+4} &= a_{i,t+2} \cdot a_{i+2,t+2} = \\ &= a_{i,t} \cdot a_{i+2,t}^2 \cdot a_{i+4,t} = a_{i,t} \cdot a_{i+4,t}. \end{aligned}$$

Als we dit trucje 2^k keer herhalen, krijgen we dat

$$a_{i,t+2^k} = a_{i,t} \cdot a_{i+2^k,t} = a_{i,t}^2 = 1.$$

Na 2^k stappen krijgen we dus een rijtje met alleen maar enen.

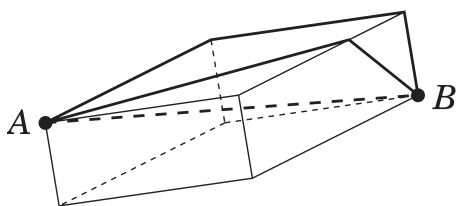
Deze opgave werd opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Kasper Duivenvoorden van het **Hondsrug College** te Emmen, Sven van Hecke van het **EDUGO Campus de Toren** te Oostakker (België), Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede, Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda en Luc Vandenbroeck van het **EDUGO Campus de Toren** te Oostakker (België).

De boekenbon gaat naar Sven van Hecke.

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Van A naar B



A en B zijn twee hoekpunten van een balk. De afstand van A naar B is 29. De afstand van A naar B gemeten langs het oppervlak van de balk is 35. De afstand van A naar B gemeten langs de ribben is 49. Kun je uit deze gegevens de afmetingen van de balk bepalen?

Eerlijk delen

Je hebt vier stapeltjes stenen, 40 stenen in totaal. Je mag nu de volgende zet doen: kies twee stapeltjes die samen een even aantal stenen hebben en herverdeel de stenen in deze twee stapeltjes zó, dat ze evenveel stenen hebben.

Is het mogelijk om vanuit iedere beginverdeling via een aantal zetten uit te komen bij de verdeling waarbij de stapeltjes elk 10 stenen hebben?

Vreemde rij

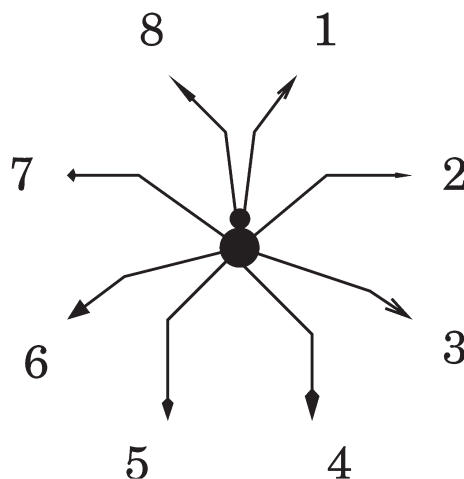
De rij getallen $a_1, a_2, a_3, \dots$ is als volgt gedefinieerd: ten eerste is $a_1 = 7$ en verder geldt dat

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n}$$

voor $n \geq 1$. Welk getal is a_{100} ?

De spin Sebastiaan

De spin Sebastiaan heeft acht poten, met aan elke poot een voet met een schoen. Nu zijn de voeten van Sebastiaan allemaal verschillend en hebben daarom elk een andere maat schoen. Als hij 's ochtends opstaat, staan zijn acht schoenen al klaar, netjes in een cirkel, zodat hij er met één sprong in kan glippen. Nu is de spin niet altijd even helder van geest zo vroeg in de morgen, en staat hij vaak een slag te ver gedraaid bij het aantrekken van zijn schoenen. Dat heeft dan tot gevolg dat iedere schoen een paar pootjes is opgeschoven, wat akelig knelt. Is het mogelijk om zijn acht schoenen zo neer te zetten dat hij in ieder geval altijd één schoen aan de juiste voet heeft zitten?

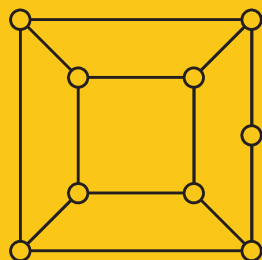


Oplossingen

nr.2

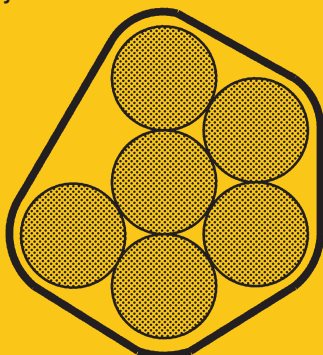
Lijnkleuren

Stel dat het gegeven netwerk zoals gevraagd is gekleurd. Als we nu de middelste horizontale lijn weglaten, houden we twee kopieën van een netwerk met 9 knooppunten over (zie de figuur). Omdat in elk knooppunt van elke kleur ten hoogste één lijn vertrekt, zijn er in dit netwerk van elke kleur maximaal 4 lijnen. In totaal kunnen er van de 13 lijnen dus niet meer dan $4 \times 3 = 12$ gekleurd zijn! De gevraagde kleuring bestaat dus niet.



Blikjes pakken

Als de straal van de blikjes 1 is, dan is de lengte van het touwtje in elk van de drie gevallen gelijk aan $12 + 2\pi$. Een betere pakking zie je hier:



De lengte van het touwtje is $8 + 2\sqrt{3} + 2\pi$.

$2x + 1$ probleem

Nee, niet met alle begingetallen kom je bij 1 uit. Als je begint met een getal n dat een veelvoud is van $3 \times 5 \times 7 = 105$ min 1, dan is n niet deelbaar door 3, 5 of 7. Het volgende getal in de rij is daarom $2n + 1$ en dat is ook weer een veelvoud van 105 min 1, enzovoorts.

Mengprobleem

Vloeistof overgieten van vat a naar vat b noteren we met $a \rightarrow b$. Een oplossing is:

$1 \rightarrow 5, \quad 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 1, \quad 5 \rightarrow 4,$
 $2 \rightarrow 5, \quad 3 \rightarrow 5, \quad 4 \rightarrow 2, \quad 4 \rightarrow 3,$
 $5 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow 5,$
 $4 \rightarrow 5, \quad 2 \rightarrow 4, \quad 5 \rightarrow 2, \quad 5 \rightarrow 3.$

Maximaal volume

Laat de balk afmetingen $a \times b \times c$ hebben met $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = 9$ en $b^2 + c^2 = x^2$. Dan is $2a^2 = 18 - x^2$, $2b^2 = x^2$ en $2c^2 = x^2$. Het kwadraat van het volume van de balk is dus $\frac{1}{8}y^2(18 - y)$ waarbij $y = x^2$. Als deze uitdrukking minimaal is, geldt: $36y - 3y^2 = 0$. Dus $y = 12$, $x = 2\sqrt{3}$ en het volume van de balk is $6\sqrt{3}$.

DE DRIESCHIJF



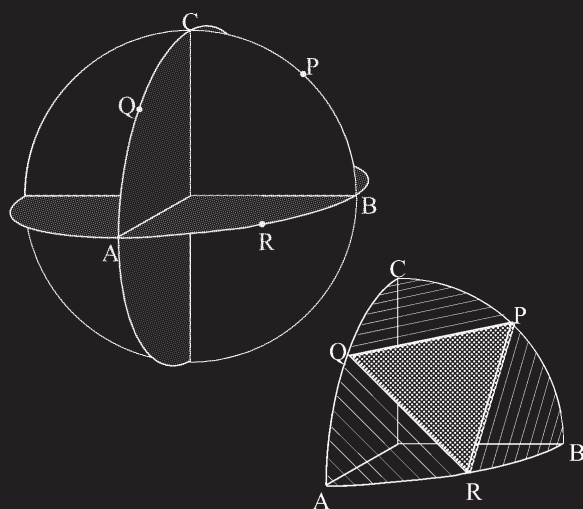
INGEPAKT



In het vorige nummer stelde Leon van den Broek de vraag: hoe ziet de perfect ingepakte drieschijf eruit. In dit artikel lees je het antwoord.

door **Leon van den Broek**

De drieschijf bestaat uit acht onderling gelijke 'kamertjes'. Laten we ons op één zo'n achtste deel concentreren. De hoekpunten noemen we A , B en C en de middens van de drie 'zijden' (kwartcirkels) P , Q en R , zie figuur 1.



Figuur 1 Links de drieschijf, rechts een achtste deel ervan

Leg de drieschijf met driehoek PQR op tafel. Vlak PQR is duidelijk een steunvlak: de drieschijf ligt geheel aan één kant van vlak PQR . Rol de drieschijf vervolgens over de tafel, totdat hij in punt C op tafel komt

te rusten. Tijdens het rollen steunt de drieschijf steeds met twee punten op tafel. Het verbindingslijnstuk van die twee punten is evenwijdig aan PQ . Samen vormen al die verbindingslijnstukken de 'gebogen driehoek' PQC . Zodoende komen we op het idee wat het convexe omhulsel van de drieschijf zal zijn: het wordt begrensd door de vlakke (!) driehoek PQR en drie gelijke 'gebogen driehoeken' PQC , PRB en QRA ; hetzelfde in de andere zeven 'kamertjes'.

Bewijs

Klopt dit nu wel allemaal? Word je niet belazerd? Misschien ben jij wel overtuigd dat we zo het convexe omhulsel gevonden hebben. Of twijfel je nog? Veel mensen hebben behoefte aan een 'hard' bewijs. En dat is helemaal niet zo eenvoudig te geven. Ik geef een redenering die thuishoort in een wiskundestudie. Maar voor leken is hij toch ook goed te volgen, denk ik.

Het lichaam waarvan we nu het oppervlak hebben beschreven, noemen we Z . Ik ga bewijzen dat Z inderdaad het convexe omhulsel van de drieschijf is. Daarbij ga ik uit van het intuïtieve idee van de steunvlakken van de drieschijf (het tafelvlak waarop

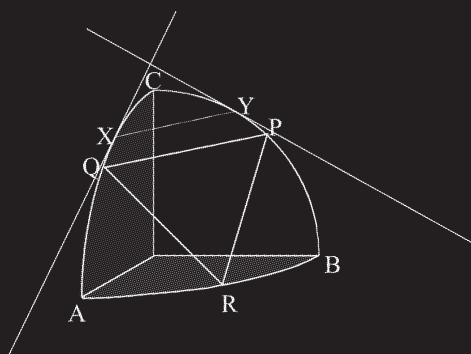
de drieschijf lag).

We moeten twee dingen nagaan.

1. Kleiner dan Z kan het convexe omhulsel van de drieschijf niet zijn. Immers, de 'gebogen driehoeken' zijn opgebouwd uit verbindingslijnstukken van randpunten van de drieschijf en die moeten er in elk geval bijhoren. En met de drie punten P , Q en R van de rand moet de hele verbindingsdriehoek PQR ook tot het convexe omhulsel behoren.

2. Z is convex. Daarvoor moeten we wat meer moeite doen.

Neem een punt X op de boog QC en een punt Y op de boog PC , met X en Y even ver van C , zie figuur 2. De raaklijnen in X en Y aan de bogen snijden elkaar, zodat we kunnen spreken van het raakvlak in de punten X en Y aan de drieschijf. Dat raakvlak verdeelt de ruimte in twee *halfruimtes*. De drieschijf ligt in één van die halfruimtes.



Figuur 2 Een raakvlak verdeelt de ruimte in twee halfruimtes

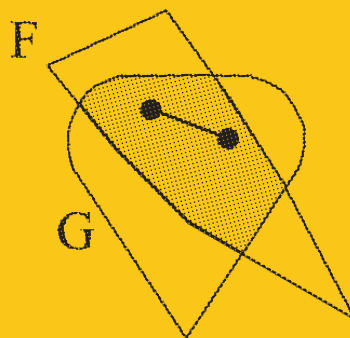
Dit doen we voor alle punten op de bogen QC en PC die even ver van C afliggen, tevens voor alle punten op de bogen QA en RA die even ver van A afliggen en ook voor alle punten op de bogen PB en RB die even ver van B afliggen. Tenslotte is er nog het raakvlak PQR aan de drieschijf. Z is de *doorsnede* (dat is het gemeenschappelijke stuk) van alle halfruimtes die we op deze manier hebben gemaakt. Halfruimtes zijn convex en de doorsnede van twee (en ook van willekeurig veel) convexe verzamelingen is convex (zie het kader). Dus is Z convex.

Nabeschuwing

Ik heb geprobeerd de drieschijf in een ballon in te pakken. Maar dat viel tegen. Het materiaal van de ballon is te stug. Ik heb ook geprobeerd het convexe omhulsel met zeepvliezen zichtbaar te maken. Met drie kwartcirkels van ijzerdraad – onder rechte hoeken – heb ik de rand van één achtste drieschijf gemaakt en in een zeepoplossing gedoopt. Door de oppervlaktespanning neemt het zeepvlies een zo klein mogelijke oppervlakte in: in het midden een driehoek en daaromheen drie gebogen driehoeken. Maar dat was niet goed te zien. Wat je wiskundig beredeneerd hebt, is in de praktijk maar moeilijk waar te nemen.

Er is een heleboel interessante wiskunde en natuurkunde te beleven aan inpakproblemen. Wat is 'strak inpakken' eigenlijk? Is dat altijd hetzelfde als 'alle verbindingslijnstukken toevoegen'? En komt dat op hetzelfde neer als 'zorgen voor minimale oppervlakte'? Helemaal geen kinderachtige vragen!

De doorsnede van convexe figuren is convex



Als twee figuren F en G convex zijn, is de *doorsnede* van F en G dat ook. Want, als twee punten P en Q in de doorsnede zitten, zitten ze in F en dus zit ook de hele verbindingslijn PQ in F . Ze zitten ook in G , dus zit PQ helemaal in G . Dus PQ zit helemaal in allebei, met andere woorden: in de doorsnede. In de figuur is dit geïllustreerd.

WMAP-onderzoek: het heelal wordt begrensd door een twaalfvlak

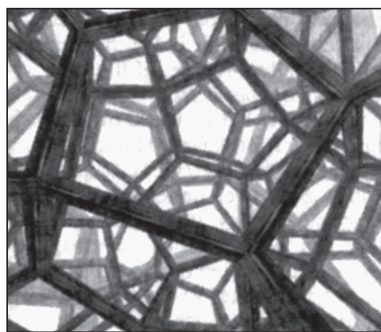
Heeft het heelal de vorm van een dodecaëder? Volgens Franse en Amerikaanse kosmologen is dit inderdaad het geval en wordt de kosmos begrensd door een regelmatig twaalfvlak. Alleen die vorm zou stroken met metingen van de WMAP-satelliet (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), die sinds vorig jaar de kosmische achtergrondstraling in kaart brengt.

Het 'standaardmodel' van de kosmologie, de studie van de kosmos als geheel, voorspelt een oneindig en vlak heelal (het laatste betekent dat de ruimtetijd op grote schaal niet gekromd is). Een vlak heelal sluit niet uit dat het toch begrensd is, maar dat vereist wel een bijzondere vorm of topologie. Die vorm, en het al dan niet vlak zijn van de ruimtetijd, is tegenwoordig te achterhalen met experimentele gegevens. Vooral de kosmische achtergrondstraling is bepalend. Met die straling, welke dateert van zo'n 300.000 jaar na de

Oerknal, is het hele heelal doordrenkt. Kleine fluctuaties in de temperatuur van die straling, door WMAP gemeten, staan in verband met dichtheidsfluctuaties in het prille heelal. Op grote schaal, als gekeken wordt onder hoeken van 60 graden of meer, neemt de intensiteit van die rimpelingen sterk af, waar het standaardmodel een vlak 'plateau' voorspelt. De onderzoekers zoeken de verklaring voor dit ontbreken van deze 'lage tonen' in de vorm van het heelal. Ze houden het op een gekromde kosmos die begrensd wordt door een dodecaëder. Ieder vlak is gekoppeld aan het tegenovergelegen vlak: wie het heelal

aan de ene kant verlaat, treedt op hetzelfde moment aan de andere kant weer binnen. In zo'n begrensd heelal, dat naar schatting 30 miljard lichtjaar groot is, gelden vanzelf beperkingen aan de lengteschalen die erin kunnen optreden, wat de WMAP-metingen bij grote hoeken verklaart.

Bronnen: *Nature*, 9 okt. 2003, *NRC Handelsblad*, 11 okt. 2003



illustratie *Nature*

24

Toevalsgenerator beter als nul niet meedoet



Bij biologische en natuurkundige simulaties wordt vaak gebruik gemaakt van toevalsgetallen: lange reeksen waarin getallen elkaar op onvoorspelbare wijze afwisselen. De simulaties zijn echter alleen betrouwbaar als een 'zuivere dobbelsteen' wordt gebruikt. Bij het genereren van toevalsgetallen worden computers gebruikt. Onderzoekers van de universiteit in Maagdenburg hebben nu ontdekt dat de veel

gebruikte toevalsrecepten de neiging hebben om in een reeks getallen meer nullen te produceren dan je zou mogen verwachten. Hoe dat te voorkomen is, weten ze niet, maar hun observatie levert wel een eenvoudige oplossing voor het probleem van de afwijkende toevalsgetallen: laat de nul gewoon weg. De reeks die overblijft, is dan wél echt toevallig.

Bron: *NRC Handelsblad*, 11 oktober 2003

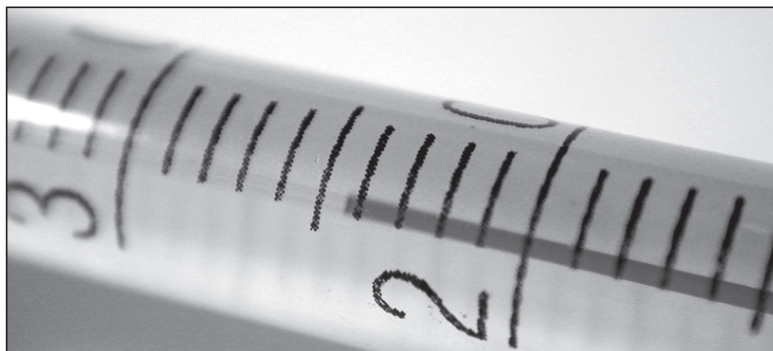
Wiskunde- wedstrijden

De *Nederlandse Wiskunde Olympiade* (NWO) is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor bovenbouwleerlingen van de middelbare school. De NWO is niet alleen bedoeld voor de 'bollebozen', maar voor elke leerling die zich voelt uitgedaagd door een probleem waarin ongebruikelijke, leuke en niet-erg-schoolse wiskunde aan de orde komt. De Nederlandse Wiskunde Olympiade draait al vanaf 1962 en is daarmee de oudste Nederlandse schoololympiade. De NWO bestaat uit twee rondes. De besten uit de tweede ronde gaan na een training door naar de Internationale Wiskunde Olympiade.

De eerste ronde, die op de scholen wordt gehouden, vindt dit schooljaar plaats *vrijdag 16 januari 2004*.

De *Internationale Wiskunde Kangoeroe* is een wedstrijd die plaatsvindt op scholen in zeventwintig landen tegelijk. Naast Nederland zijn dat onder meer Spanje, Polen en Rusland. De deelnemende landen spreken samen de opgaven af. Voor verschillende leerjaren zijn verschillende wedstrijden, dus iedereen kan meedoen! De Kangoerowedstrijd 2004 vindt plaats op *vrijdag 19 maart 2004*. Lees ook over de puzzel 'Kangoe Solitair' op pagina 16.

Wil je meedoen aan (één van) de wiskundewedstrijden? Informeer dan bij je docent of kijk voor meer informatie op <http://olympiads.win.tue.nl/nwo> en op <http://www.math.kun.nl/kangoeroe>.



De Grote Griepmeting

Griep, officieel influenza geheten, is een zeer besmettelijke ziekte. Van 1 november 2003 tot 1 april 2004 vindt de Grote Griepmeting plaats. Schrijf je in via <http://www.degrotegriepmeting.nl> en laat van tijd tot tijd even weten hoe je gezondheid ervoor staat. Vele duizenden ande-

ren in Nederland en Vlaanderen doen deze winter hetzelfde. Op die manier volgen we de golf van griep en verkoudheid op de voet. Klik bij de genoemde website op de link 'De wetenschap over griep' als je meer wilt weten over wiskundige modellen van een griep-epidemie.

Driehoekvormige spuitkoppen

Volgens twee wiskundigen van de Harvard Universiteit produceert een kraan met een driehoekige opening de kleinst mogelijke druppels. Het volume van afgegeven druppels is op die manier tot 21% kleiner te krijgen dan uit een cirkelvormige opening. Dit is een conclusie na wiskundige analyses van de vergelijkingen die bepalen wanneer een vloeistofdruppel loslaat van een opening in een reservoir. Het reuslaaat van de onderzoekers kan leiden tot een beter ontwerp van spuitkoppen in bijvoorbeeld inkjet-printers. Kleinere spuitopeningen produceren kleinere druppels. Maar omdat kleinere druppels snel een veel hogere oppervlaktespanning hebben, is daar een

grens aan. Het kost daardoor meer energie om nog vloeistof door een kleinere opening te persen. Uiteindelijk zijn de benodigde drukken in het systeem de beperkende factor. Kleiner dan tien miljardste millimeter kunnen inktdruppels niet worden gemaakt. Behalve als de spuitkop ingedeukt-driehoekige gaatjes heeft, ontdekten de wiskundigen tot hun verrassing: 'Je gaat er bijna vanzelf vanuit dat een cirkel het optimum is.'

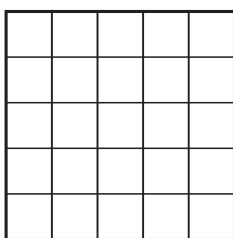
Bron: *De Volkskrant*, 22 november 2003



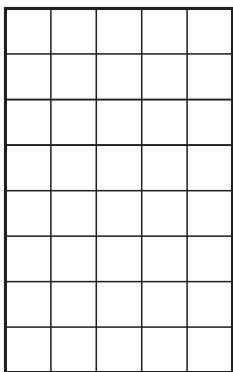
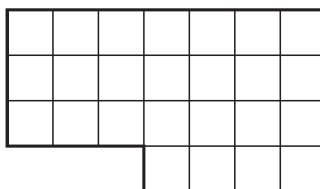
PASSEN METEN

door **Marco Swaen**

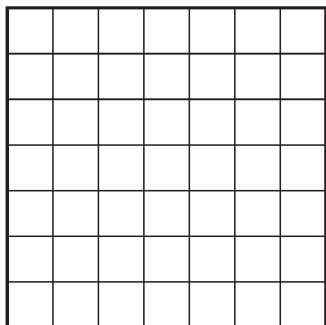
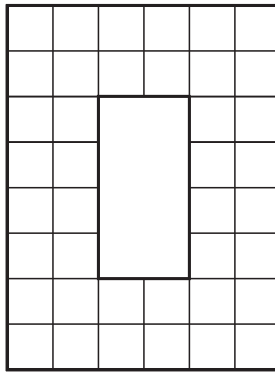
Hieronder staan drie puzzels waarbij je moet passen en meten: de bedoeling is telkens dat je de figuur links splitst in zo weinig mogelijk stukken waarmee je dan de figuur rechts kunt maken. Splitsen mag alleen langs de lijntjes van het hokjespatroon. Bij de pijlen staat het aantal stukken dat volgens ons minimaal nodig is. Oplossingen staan in het volgende nummer van Pythagoras.



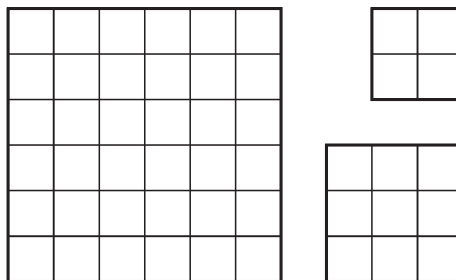
in 3 stukken



in 2 stukken



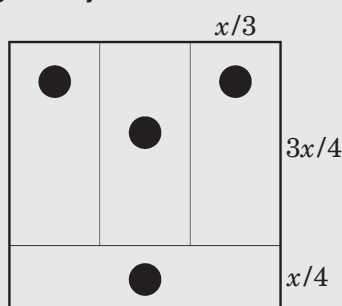
in 5 stukken



De post

Taart verdelen

Pieter Scherphof uit klas 6 van het Praedinius College te Groningen heeft een andere en veel eenvoudigere manier gevonden om de taart met aardbeien uit de Kleine nootjes van het juninummer te verdelen. Zijn oplossing geven we hieronder weer. Merk op dat als de zijde van de taart lengte x heeft, dat het onderste rechthoekige stuk x bij $\frac{1}{4}x$ is en de overige stukken $\frac{3}{4}x$ bij $\frac{1}{3}x$, zodat alle stukken echt even groot zijn.



De torens van Hanoi

In Pythagoras van juni stond bij de oplossingen van de rubriek 'Problemen – Oplossingen' dat er bij de redactie geen algoritme bekend was om bij de 'Torens van Hanoi' in zo weinig mogelijk zetten van een positie naar een andere positie over te gaan. Bram Kuijvenhoven heeft vervolgens geprobeerd zo'n algoritme te ontwikkelen en daar is hij zeer goed in geslaagd! Zijn algoritme, inclusief uitleg, is te vinden op de homepage van Pythagoras: www.pythagoras.nu.

Honderd gevangenen

In dezelfde rubriek van hetzelfde nummer stond de logische puzzel 'Honderd gevan-

genen'. Dit probleem bleek een keiharde noot die ook de redactie niet zomaar kon kraken. We waren daarom blij verrast dat we een perfecte oplossing ontvingen van YPSE (Young Problem Solvers Eindhoven), een groep eerste- en tweedejaars wiskunde- en informatica-studenten die onder leiding van Tom Verhoeff problemen oplossen. Het moeilijkst aan deze logische puzzel vonden ze dat je niet weet of op dag 1 de schakelaar AAN of UIT staat. Dit losten ze heel mooi op door de van tevoren aangewezen Teller niet tot 99 maar tot 2×99 te laten tellen en elk van de andere gevangenen tweemaal het licht AAN te laten doen. Ook vonden ze dat als iedere dag elke gevangene dezelfde kans heeft om naar de isoleercel te moeten, het naar verwachting maar liefst 56 jaar zal duren voordat ze vrij zijn!

Inhoud piramide

In het aprilnummer liet Dave Odegard zien hoe je met elementaire middelen de inhoudsformule voor een piramide kunt verklaren. Julian Lyczak uit 3vwo van het Groene Hart Lyceum te Alphen aan de Rijn merkte op dat we met integraalrekening natuurlijk tot hetzelfde resultaat kunnen komen. Noem daartoe G de oppervlakte van het grondvlak en H de hoogte van de piramide. Dan heb je op een willekeurige afstand h van de top een vlak parallel aan het grondvlak met dezelfde vorm en met oppervlakte g . Uit verhoudingen volgt dat $g = (h/H)^2 G$.

De inhoud van de piramide is daarom

$$\int_0^H \left(\frac{h}{H} \right)^2 G dh = \frac{G}{H^2} \times \frac{h^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} GH.$$



door Klaas Pieter Hart

° Hoe groot is $n!$ ongeveer?

De getallen $n!$ worden heel snel heel groot. In dit artikel proberen we een schatting van de groeisnelheid van $n!$ te maken.

De getallen $n!$ (spreek uit: n -faculteit) komen op vele plaatsen in de wiskunde voor. Bijvoorbeeld in de kansrekening en de combinatoriek bij het tellen van rangschikkingen: je kunt n dingen op $n!$ manieren op een rijtje zetten. Ook in de analyse zie je ze vaak in formules. Als je de functie x^n differentieert, krijg je nx^{n-1} , als je nog een keer differentieert, komt er $n(n-1)x^{n-2}$; in het algemeen, als je k keer differentieert, krijg je $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$. Dat laatste kun je met de faculteitnotatie als volgt opschrijven: $\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

Voor wie het (bijna) vergeten was: $n!$ is gedefinieerd als

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n,$$

dus $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, enzovoorts. Deze rij stijgt heel snel; $10! = 3\,628\,800$ is al meer dan het aantal seconden in duizend uur. De meeste rekenmachientjes geven het op bij 70; de TI-83 bijvoorbeeld geeft `ERR:OVERFLOW` als je $70!$ uit laat rekenen. De verklaring hiervoor is dat $69! \approx 1.711225 \times 10^{98}$ en $70! \approx 1.197857 \times 10^{100}$ – de displays hebben meestal maar twee posities voor de macht van 10.

Afschatten

De uitdrukking voor $n!$ is niet eenvoudig en is ook niet echt mooier te maken. Daarom willen we onder- en bovenschattingen van

$n!$ hebben waar iets makkelijker mee te rekenen valt. Om dit te doen, gebruiken we diverse ongelijkheden. De eerste is

$$\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b); \quad (*)$$

deze geldt voor alle positieve getallen a en b (behalve als $a = b$, dan geldt natuurlijk $=$). Ga zelf na dat $(*)$ geldt door links en rechts te kwadrateren.

Gebruik $(*)$ achtereenvolgens voor $a = 1$, $b = n$, dan $a = 2$, $b = n-1$, enzovoorts, tot en met $a = n$, $b = 1$.

Telkens geldt $a + b = n + 1$ en omdat $n! = \sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \cdots \times \sqrt{n \times 1}$ volgt dan

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (1)$$

of, in een andere veelgebruikte vorm: $\sqrt[n]{n!} < \frac{1}{2}(n+1)$.

We kunnen ook een onderschatting maken door elk van de producten $k(n-k+1)$ met n te vergelijken.

Er geldt namelijk

$$k(n-k+1) - n = (k-1)(n-k)$$

en dat is altijd 0 of meer, want $1 \leq k \leq n$.

Dus

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= 1 \times n \times 2 \times (n-1) \times \cdots \times n \times 1 \\ &\geq n^n \end{aligned} \quad (2)$$

en dus $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$, ofwel $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $n!$ zo snel groeit dat zelfs zijn n -de machts wortel naar oneindig gaat.

Subtielere afschattingen

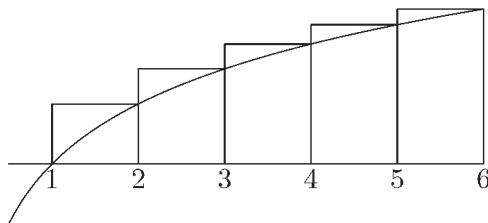
We kunnen (1) en (2) aanzienlijk verbeteren door met integralen te werken. Hiertoe



nemen we de natuurlijke logaritme van $n!$:

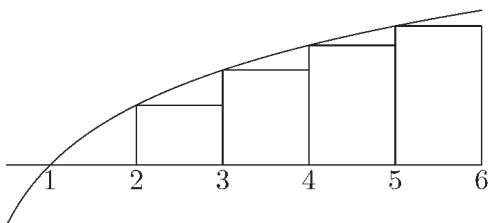
$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

Deze som kunnen we vergelijken met een integraal van $\ln x$. In figuur 1 is te zien dat $\ln 6! > \int_1^6 \ln x \, dx$.



Figuur 1

In figuur 2 is te zien dat $\ln 5! < \int_1^6 \ln x \, dx$.



Figuur 2

In het algemeen krijgen we

$$\ln(n-1)! < \int_1^n \ln x \, dx < \ln n!.$$

Nu moeten we de integraal nog uitrekenen. Daarvoor moeten we een primitieve van $\ln x$ maken. Met een beetje proberen kun je uitvlooien dat $x \ln x - x$ een primitieve is (differentieer het om dat te controleren). De integraal wordt dus

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= (n \ln n - n) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= n \ln n - (n - 1) \\ &= n(\ln n - 1) + 1. \end{aligned}$$

Dit kunnen we omwerken tot $n \ln \frac{n}{e} + 1$, ofwel $\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n e\right)$. Conclusie:

$$(n-1)! < \left(\frac{n}{e}\right)^n e < n!. \quad (3)$$

Hiermee vinden we

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n en \quad (4)$$

(vermenigvuldig de linker ongelijkheid in (3) met n). Hiermee krijgen we zeer nauwkeurige grenzen voor $\sqrt[n]{n!}$:

$$\frac{n}{e} \sqrt[n]{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n}{e} \sqrt[n]{en}. \quad (5)$$

In het vorige nummer van Pythagoras hebben we gezien dat $\sqrt[n]{n}$ naar 1 daalt (en $\sqrt[n]{e}$ dus ook); daarmee zien we dat $\sqrt[n]{n!}$ ongeveer net zo snel groeit als $\frac{n}{e}$.

De formule van Stirling

Hoe zit het nu met $n!$ zelf? Formule (4) zegt dat $n!$ wel iets met $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ te maken heeft, maar dat er nog wel wat ruimte over is, tussen e en en wel te verstaan. Met (veel) meer werk dan hierboven is daar een heleboel over te zeggen: als we $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ met $\sqrt{2\pi n}$ vermenigvuldigen, zitten we heel erg goed. Er geldt namelijk

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad (6)$$

hiermee bedoelen we dat het quotiënt van de twee uitdrukkingen naar 1 convergeert. Formule (6) staat bekend als de *formule van Stirling* en hij verklaart ook een beetje waarom het getal π zo vaak in de kansrekening opduikt.

Meer over Stirlings formule kun je lezen op <http://mathworld.wolfram.com/StirlingsApproximation.html>.

door **Dave Odegard**

Gelijk uitpakken

Sinterklaas en kerst zouden lang niet zo leuk zijn als er geen wiskunde bij te pas was gekomen. Hier is een kleine selectie van problemen waar de goede Sint mee geworsteld heeft. Sla nog niet meteen om, want op pagina 32 staan de oplossingen.

Legpuzzel

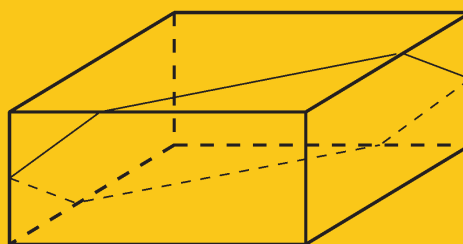
In een familie willen de twee opgroeiende kinderen allebei een legpuzzel krijgen voor Sinterklaas. Er is echter slechts geld voor één puzzel. Ze maken een afspraak over de verdeling van de stukken. Jan krijgt alle kantstukken en Maria de rest. Dat is heel makkelijk, maar het moet ook eerlijk zijn. Hoeveel rijen en kolommen moet een rechthoekige legpuzzel hebben, zodat Jan en Maria hetzelfde aantal stukken krijgen?

Lootjes trekken

Willem Cornelisz Bril houdt van pakjesavond en alle gedoe eromheen. Toen hij alleen woonde lukte het lootjes trekken voor geen meter. Hij besloot daarom om snel te trouwen. Toen lukte het wel, maar de uitkomst was zelfs voor een buitenstaander te voorspellen. Er zat niks anders op dan kinderen krijgen. Met één kind was de uitkomst voor een buitenstaander niet te raden, maar voor de drie leden van het gezin wel. Het was even doorzetten, maar nu met vijf kinderen zit de spanning er heel goed in. Wat is de kans dat lootjes trekken in één keer lukt in een gezin van zeven mensen?

Inpakken

In de *Volkskrant* van 12 april 2003 schrijft Theo Jansen over twee speciale manieren om een touwtje om een doos te binden. Een van die manieren zie je in de onderstaande figuur. Een Sinterklaaspakje wordt op die manier ingepakt. Als de lengtes van de zijden van dit pakje a cm, b cm en c cm zijn, hoe lang is dan het touwtje? Ervaring leert dat deze methode niet werkt bij zeer langwerpige pakjes. Hoe kun je van de afmetingen van een pakje berekenen of het op deze wijze vast te binden is of niet?



Afmetingen van een pakje

Piet heeft een hoofd voor cijfers en doet er graag iets mee. Hij heeft de volgende statistieken over zijn Sinterklaaspakje verzameld. De som van de lengte, breedte, en hoogte is 69 cm. De totale oppervlakte is 2880 cm^2 en de inhoud is 9072 cm^3 . Wat waren de afmetingen van dit pakje?

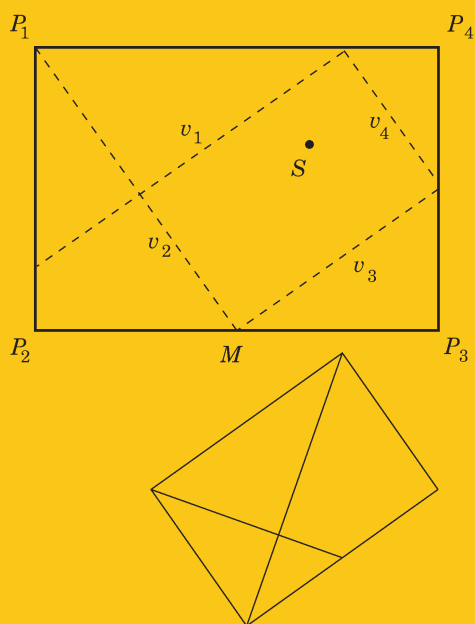


Kerstkaarten

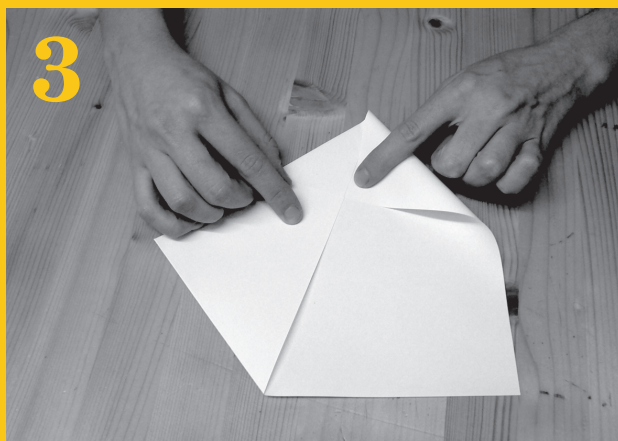
Een kerstkaart sturen in een envelop gebruikt veel papier. Zou je niet beter van de brief gelijk de envelop maken? Koop stevig, gekleurd A4 papier (de lengtes van de zijden van A-formaat hebben altijd de verhouding $\sqrt{2} : 1$). De hoekpunten van het blad noemen we P_1, P_2, P_3 en P_4 . Punt M is het midden van $P_2 P_3$.

Vouw P_1 naar M , zie foto 1. Vouw P_2 naar binnen, zodat de eerste vouwlijn op zichzelf komt, zie foto 2. Vouw P_3 om naar waar P_2 nu ligt, zie foto 3. Vouw P_4 naar datzelfde punt. Een leuke sticker houdt alles bij elkaar, zie foto 4.

Hier zie je de vouwlijnen (v_1 t/m v_4) nog eens schematisch, evenals het uiteindelijke pakketje. Punt S geeft de plaats van de sticker aan.



Vorig jaar heb ik al mijn kerst- en nieuwjaarsgroeten in zulke enveloppen verstuurd. Mijn vraag is nu: hadden deze poststukjes ook een A-formaat?





De antwoorden van *Gelijk uitpakken*

Legpuzzel

Noem het aantal rijen r en het aantal kolommen k . De vergelijking wordt $(r-2)(k-2) = 2r + 2k - 4$. Dit is te herschrijven als $(r-4)(k-4) = 8$. Het zoeken naar factoren van 8 levert de twee oplossingen: 6 bij 8 en 5 bij 12.

Lootjes trekken

Een geslaagd trekken van loten is te beschrijven als een aantal cyclussen van groepen mensen die elkaar hebben gekozen. Bijvoorbeeld (abc) betekent dat a kiest b , b kiest c en c kiest a . Je mag je eigen naam niet kiezen en dus moet er geen cyclus van 1 letter voorkomen. De mogelijke cyclussen zijn:

1. één cyclus van 7;
2. één cyclus van 5 en één cyclus van 2;
3. één cyclus van 4 en één cyclus van 3;
4. één cyclus van 3 en twee cyclussen van 2.

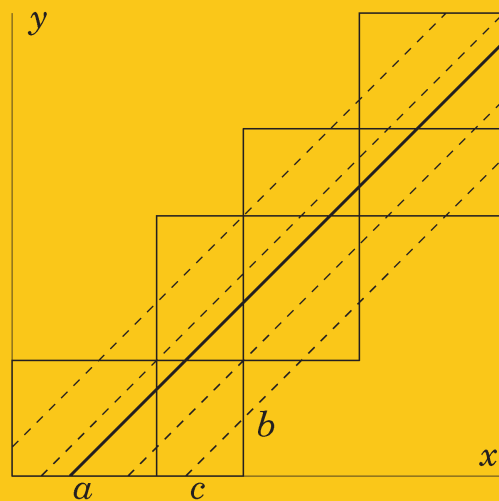
De kans om in één keer loten te trekken in een familie van 7 personen is

$$\frac{\binom{7}{7} \cdot 6! + \binom{7}{5} \cdot 4! + \binom{7}{3} \cdot 2! \cdot 3! + \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2!}{7!} = \frac{43}{105}.$$

Inpakken

Het touwtje is $\sqrt{2} \cdot (a + b + c)$ cm lang. In de tekening is het netwerk van de doos geplaatst in een xy -assenstelsel. Het touwtje wordt voorgesteld door de vetgedrukte lijn. De vergelijking van deze lijn is van de vorm $y = x + k$ met k een constante. Deze lijn moet boven 3 hoekpunten, en onder 3 andere hoekpunten gaan. Dit levert 6 onge-

lijkheden voor k , a , b en c op. Hieruit volgt dat geen van de drie zijden van het pakje langer mag zijn dan de som van de twee andere zijden.



Afmetingen van een pakje

De vergelijking is $x^3 - 69x^2 + 1440x - 9072 = 0$, waar de oplossingen voor x de zijden van het pakje zijn. De afmetingen van het pakje zijn 21 bij 36 bij 12 cm.

Kerstkaarten

Noem de korte zijde van het A4-blad x (ongeveer 210 mm). Het poststukje heeft afmetingen $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ bij $\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, hetwelk neerkomt op, afgerond, 129 mm bij 182 mm.

De afmetingen voldoen wél aan de verhouding van een A-formaat ($\sqrt{2} : 1$), maar in de officiële lijst van A0 tot en met A10 komt 129 mm bij 182 mm niet voor.

OPLOSSINGEN NR 2

Oplossingen Kleine nootjes

Vier driehoeken

In het platte vlak lukt het niet, maar driedimensionaal wel: je kunt een tetraëder (regelmatig viervlak) maken.

Rechtop en ondersteboven

Nummer de posities van de lucifers 1 t/m 6. Neem nr 4 en nr 5 en laat die links vooraan aansluiten. Doe daarna hetzelfde met nr 5 en nr 6, gevolgd door nr 4 en nr 5.

Veger en blikje

Schuif de horizontale lucifer over zijn halve lengte naar rechts. De lucifer linksboven komt daardoor los te liggen. Verplaats deze naar rechtsonder, waarna een nieuw blikje is ontstaan dat 180 graden gedraaid is.

Vergelijking

Er zijn diverse mogelijkheden, zoals $2/\sqrt{1} = 2$ of $1/\sqrt{1} \neq 2$.

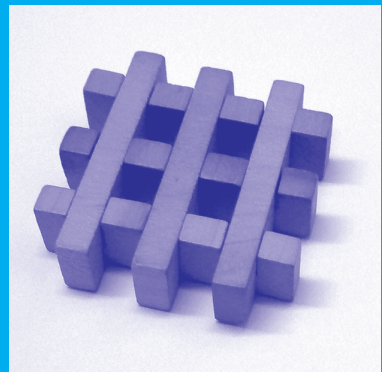
Vijf kruisjes

Nummer v.l.n.r. 1 t/m 10. Nr 4 over nr 3 en nr 2 geeft een kruis met nr 1. Nr 6 over nr 7 en nr 8 geeft een kruis met nr 9. Pak hierna nr 8 en leg die op nr 3. Voltooi met nr 10 over het kruis naar links op nr 7 en nr 2 over het kruis naar rechts op nr 5.

33

Drie oplossingen Kampuzzel

De drie rijtjes van drie letters stellen steeds drie puzzelstukjes voor, met de inkepingen omhoog. De letter 'd' staat voor 'diep' en de 'o' voor 'ondiep'. De drie puzzelstukjes die er dwars op passen (met de inkepingen omlaag), kun je er zelf bij bedenken.



ooo
odo
doo

ooo
doo
odo

dod
ooo
doo

Als Omar niet
gaat, dan ga ik
ook niet hoor...

$N \Leftrightarrow$

$O \Leftrightarrow$

$O \wedge M$

Ik ga mee, tenzij
Mabel en Natasja
allebei meegaan.

$O \Leftrightarrow$

$M \wedge N$

M

Oh... dus
Natasja gaat
toch mee?

$M \Leftrightarrow$

$O \Rightarrow$