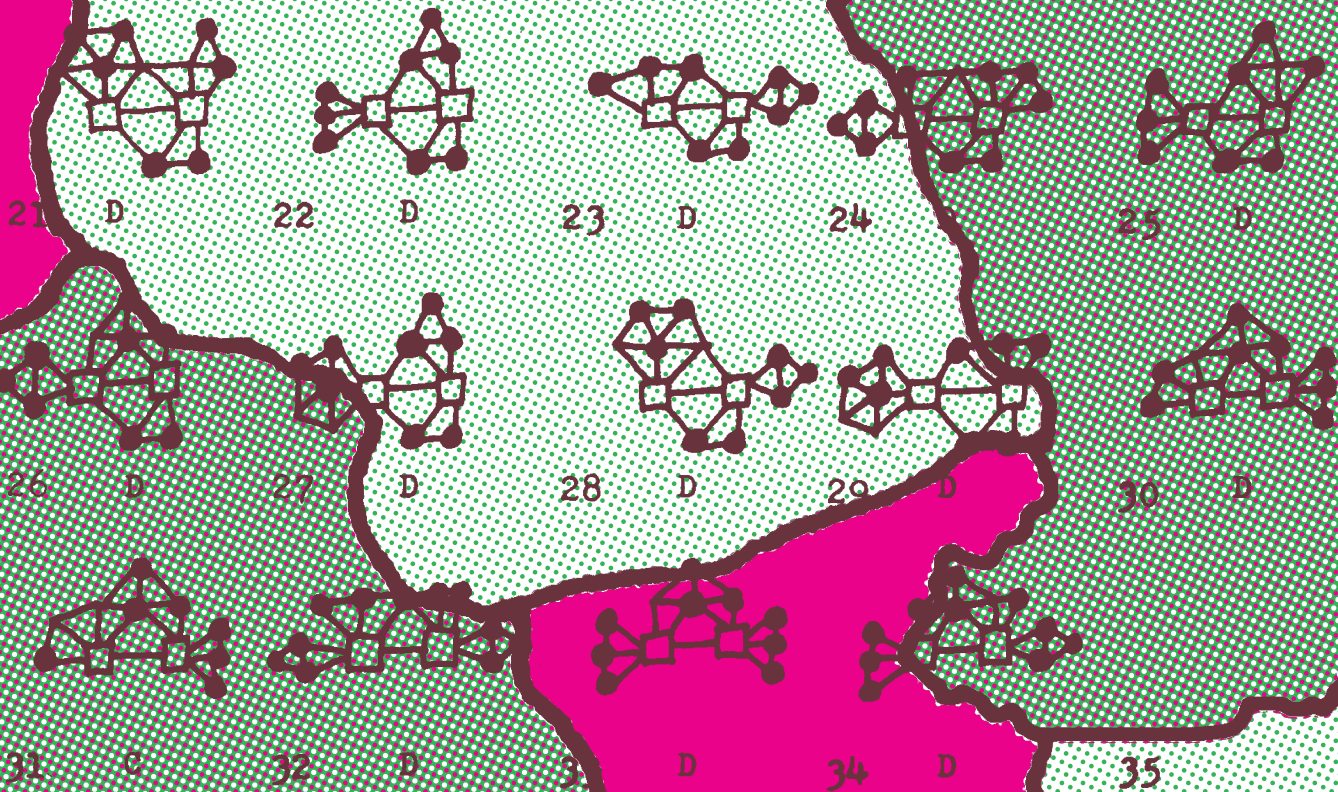


PYTHA GORAS



PYTHAGORAS

43ste jaargang nummer 6
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofredacteur

Marco Swaen

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Reinie Erné

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden. Telefoon 071 5277 121,
fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV
Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus
41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522
855 176

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 19,95, € 22,50 (België), € 25,50 (overig buitenland),
€ 16,95 (leerlingabonnement), € 13,75 (bulkabonne-
ment). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

P. Bakker, beeldend kunstenaar (popke.bakker@tiscali.nl),
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken
(dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof,
docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amster-
dam (alex@pythagoras.nu), dr. E. Coplakova, docente wis-
kunde aan de TU Delft (e.coplakova@twi.tudelft.nl), dr.
M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het
Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. R.
Erné, bladmanager van Pythagoras en Nieuw Archief voor
Wiskunde (erne@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt,
aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu),
dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholen-
gemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu),
dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft
(kp@pythagoras.nu), prof. dr. G.J. Olsder, hoogleraar
wiskundige systeemtheorie aan de TU Delft (gj.olsder@math.tudelft.nl), R. Pannekoek, student wiskunde aan de
RUG (pytholym@pythagoras.nu), drs. H.N. Pot, brood-
heerlose strever naar verbeteringen in de schoolwiskunde
(h.n.pot@hetnet.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde
aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam
(swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent
wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman,
student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), dr. A.F. de Vos, docent econometrie
aan de VU te Amsterdam (avos@feweb.vu.nl), drs. C.G.
Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag

Het vierkleurenprobleem; een gedeelte van de onvermij-
delijke set van Heesch.

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die
de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder
rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis
vereist. Artikelen met 1 rondje ° zijn voor iedereen
vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met
2 rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas
nodig en artikelen met 3 rondjes °°° gaan net iets
verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bij-
dragen van de onderstaande instituten en instellingen:





2 - 3	Kleine nootjes	18 - 19	Pythagoras Olympiade
4 - 10	'Vier kleuren volstaan', zegt de computer	20 - 21	Worteltrekken met de hand
10	Oplossingen nr. 5	22 - 23	Problemen – Oplossingen
11	Journal	24 - 27	Fietsen om te bruinen
12 - 13	Rekenen met sutra's	28 - 29	Euler sneller dan Newton
14 - 17	Het Platonische systeem	30 - 33	Honderd gevangenen

Kleine nootjes zijn
eenvoudige opgaven
die iedereen zonder enige
wiskundige voorkennis kan
oplossen.
De antwoorden vind je in
het volgende nummer
van Pythagoras.

Kleine nootjes

2



Kalender

Welke dag van de week is de
derde dag van de derde maand van
het derde kwartaal van het derde
jaar van de derde eeuw?

Taart verdelen

Als een taart in tweeën
gedeeld moet worden zonder
ruzie, zal de een snijden en de
ander kiezen. Hoe moet je hande-
len als een taart over méér
personen verdeeld moet
worden zonder
onenigheid?



Schipbreuk

Een schipbreukeling spoelt aan op een onbewoond eiland. Na een jaar zwoegen is hij er in geslaagd om van een boomstam een roeiboot te maken. Op een heldere dag laadt hij zijn boot vol met proviand en vaart weg richting bewoonde wereld. Na 10 minuten roeien kijkt hij om en ziet het eiland niet meer! Hoe kan dat?



Erfenis

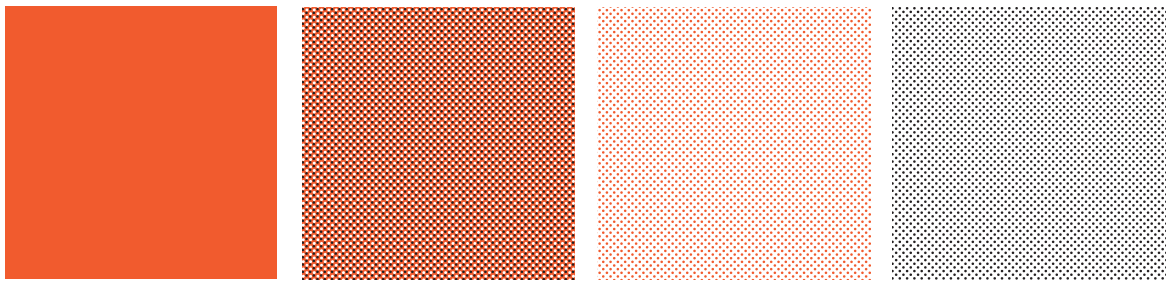
De erfenis van boer Van den Akker bestaat o.a. uit 59 koeien die verdeeld moeten worden over zijn 4 zonen. De oudste zoon krijgt $\frac{1}{3}$ deel, de daarop volgende zoon $\frac{1}{4}$ en de jongste twee elk $\frac{1}{5}$ deel. Hoeveel koeien krijgt elk?

3

Schaken

Sjors schaakt 3 keer tegen zijn ouders; afwisselend pa en ma. Als hij 2 keer achter elkaar wint, krijgt hij meer zakgeld. Hij mag dus kiezen ma-pa-ma of pa-ma-pa. Welke keus moet hij maken als gegeven is dat pa beter schaakt dan ma?





‘Vier kleuren volstaan’, zegt de computer

door Jan Guichelaar en Marco Swaen

Teken een landkaart, kleur de landen zó dat buurlanden nooit dezelfde kleur hebben, en gebruik daarbij zo min mogelijk kleuren. Je zult zien dat je aan vier kleuren genoeg hebt. Maar hoe bewijs je dat? Dat is kortgezegd het *vierkleurenprobleem*, waar inmiddels 150 jaar aan gewerkt is en dat vele bewijzen opgeleverd heeft waar echter altijd iets op aan te merken viel. Het eerste bewijs waar nog geen fout in ontdekt is, stamt uit 1976. Het is zo omvangrijk en ingewikkeld dat het alleen met een computer geleverd en gecontroleerd kan worden.

4

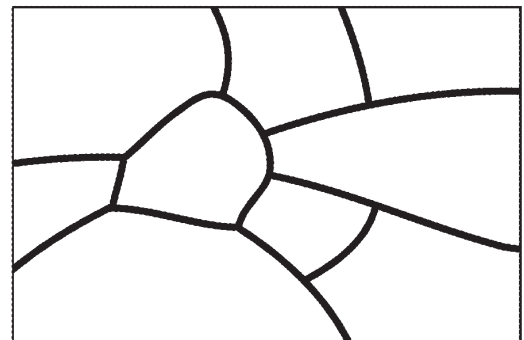
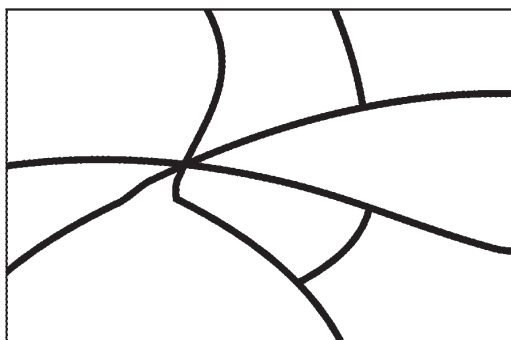
Het vierkleurenprobleem

In 1852 was Francis Guthrie (1831-1899) bezig de landkaart van de Engelse counties te kleuren, toen het hem opviel dat hij aan vier kleuren genoeg had, om elke county een andere kleur te geven dan de aangrenzende counties. Zijn broer Frederick legde het probleem voor aan de Londense wiskundeprofessor Augustus De Morgan (1806-1871), via wie het probleem enige bekendheid kreeg. Zo’n vijftientig jaar later was het Arthur Cayley (1821-1895) van Trinity College in Cambridge die er voor het eerst een publicatie aan wijdde. Hij kon het pro-

bleem niet oplossen, maar toonde wel aan dat het voldoende was landkaarten te beschouwen waarin precies drie landen in elk punt samenkomen (zie volgende paragraaf).

Een jaar later, in 1879, publiceerde de Londense advocaat Alfred Kempe (1849-1922) als eerste een bewijs voor de vierkleurenstelling. In 1880 volgde een tweede bewijs van de hand van P.G. Tait (1831-1901). Het bewijs van Kempe hield elf jaar stand, toen vond Percy Heawood (1861-1955) uit Durham er een fout in. Niet lang daarna sneuvelde ook het bewijs van Tait.

Voor we de geschiedenis van het vier-



Figuur 1 Oplossen van een zeslandenpunt

kleurenprobleem vervolgen, bekijken we Kempes bewijs, dat behalve een fout ook een aantal vruchtbare ideeën bevatte waar latere onderzoekers op verder gingen. Eerst zullen we echter even stil staan bij wat we bedoelen met 'een landkaart', en de zogenaamde telformule afleiden waar Kempes bewijs op gebaseerd is.

Wat is een kaart?

Bij het kleuren van de landkaart doet de precieze vorm van de grenzen er feitelijk niet toe, het gaat er alleen om welk land aan welk land grenst. Ga daarom uit van de punten waar meerdere landen bij elkaar komen en vereenvoudig de grenslijnen verder tot verbindingslintjes. Op die manier krijgen we een *vlakke graaf*, met hoekpunten en ribben. De gebieden die aldus door de ribben van elkaar gescheiden worden, zijn de landen van de kaart. Let op dat ook het buitengebied meegerekend moet worden als land, de kaart stelt immers eigenlijk het oppervlak van een bol voor.

Op de wereldkaart komen landen voor die uit meerdere gebiedsdelen bestaan. Wil je alle gebiedsdelen van zo'n land dezelfde kleur geven, dan kun je niet meer toe met vier kleuren. Bij onze kaarten zijn de landen dus steeds één aaneengesloten gebied van de graaf.

We mogen ervan uit gaan dat op onze kaarten een land nooit helemaal in een ander land ligt (bijvoorbeeld San Marino in Italië). Zulke landen hebben toch maar één buurland, dus kunnen achteraf gemakkelijk ingevoegd worden en gekleurd. Het is ook voldoende, zoals Cayley inzag, alleen te kij-

ken naar landkaarten met uitsluitend *drielandenpunten*. Stel dat je een kaart wilt kleuren met daarin bijvoorbeeld een vierlandepunt. Leg dan eerst over dat punt een klein extra landje waardoor er alleen nog drielandenpunten over zijn. Kleur die kaart met vier kleuren. Laat vervolgens het extra landje weer inkrimpen tot een hoekpunt, en de oorspronkelijke kaart is ook netjes gekleurd met vier kleuren. In figuur 1 zie je hoe het werkt bij een zeslandepunt.

De telformule

Neem een vlakke graaf, tel het aantal gebieden (inclusief het buitengebied), het aantal hoekpunten en het aantal ribben (respectievelijk z , h en r), dan zie je dat geldt:

$$h + z = r + 2.$$

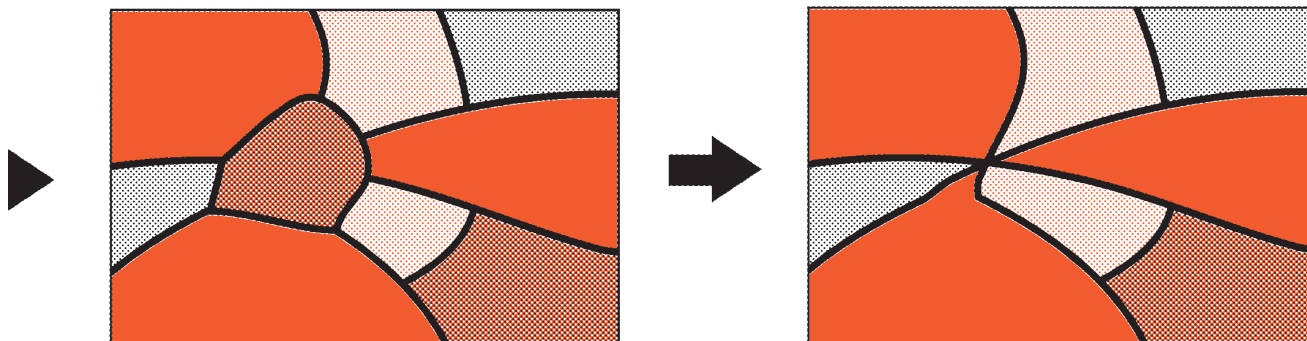
Deze betrekking staat bekend als de *veelvlakkenformule van Euler*, een bewijs ervan vind je bijvoorbeeld in het decembernummer van onze vorige jaargang.

Zeg dat de kaart bestaat uit c_2 tweehoecken (land omsloten door twee ribben), c_3 driehoeken, enzovoorts, tot en met c_k k -hoeken. Dan geldt voor het aantal gebieden:

$$z = c_2 + c_3 + \dots + c_k.$$

Het aantal ribben kun je tellen vanuit de gebieden, elke n -hoek levert n ribben, die allemaal wel weer gedeeld worden met een buurland. Vandaar:

$$2r = 2c_2 + 3c_3 + \dots + kc_k.$$



Omdat we ervan uit mogen gaan dat de kaart alleen drielandenpunten kent, geldt ook:

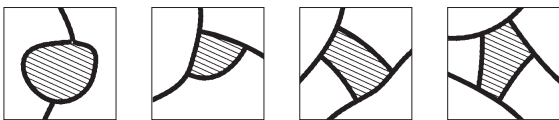
$$2r = 3h.$$

Combineer deze drie verbanden met de formule van Euler, dan krijg je de zogenaamde *telformule*:

$$4c_2 + 3c_3 + 2c_4 + c_5 - c_7 - 2c_8 - \dots - (k-6)c_k = 12.$$

Onvermijdelijke set

Uit de telformule volgt dat ten minste één van de getallen c_2 , c_3 , c_4 of c_5 groter is dan 0. Dit betekent dat elke kaart ten minste één tweehoek, één driehoek, één vierhoek of één vijfhoek moet bevatten. Het setje {tweehoek, driehoek, vierhoek, vijfhoek} wordt daarom een *onvermijdelijke set*



Figuur 2 De onvermijdelijke set {tweehoek, driehoek, vierhoek, vijfhoek}

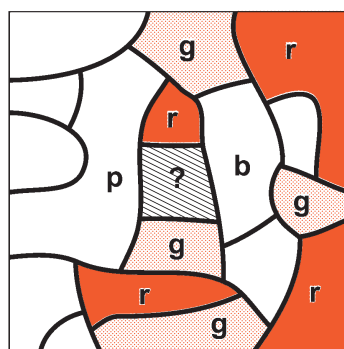
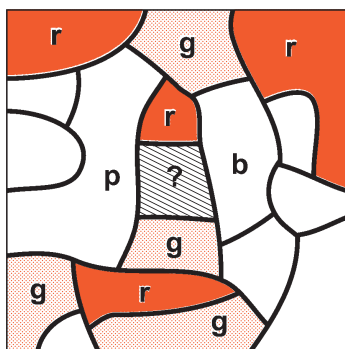
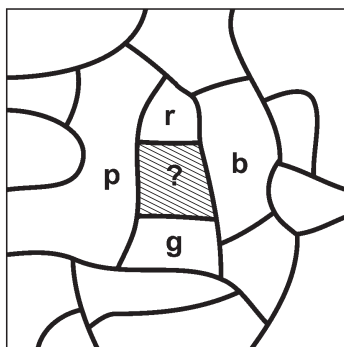
genoemd, zie figuur 2.

Het begrip onvermijdelijke set (straks komen we een andere onvermijdelijke set tegen) speelt in de oplossing van het vierkleurenprobleem een belangrijke rol. In de simpelste onvermijdelijke set gaat het om landen met een bepaald aantal burens. In ingewikkeldere sets kan het ook gaan om groepjes landen, bijvoorbeeld 'een vijfhoek met een aangrenzende zeshoek'. Het algemene woord voor zo'n element in de kaart – een land of een bepaalde combinatie van landen – is 'configuratie'.

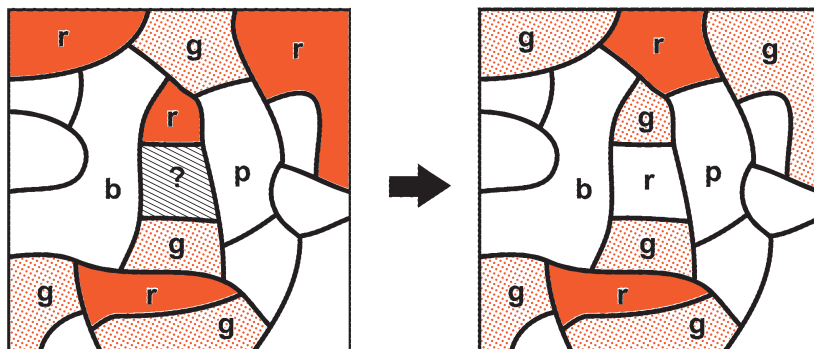
De methode van het reduceren

Uiteraard kun je het vierkleurenprobleem niet oplossen door elke mogelijke kaart in te kleuren, er zijn immers oneindig veel kaarten. Op een handige manier kan het probleem echter zo aangepakt worden dat je maar eindig veel gevallen hoeft te bekijken.

Ga uit van het ongerijmde: stel dat er kaarten bestaan waarvoor vier kleuren *niet* voldoende zijn, oftewel stel dat er tegenvoorbeelden zijn. Dan moet er ook een



Figuur 3 Het 'bewijs' van Kempe: twee mogelijkheden los/vast



Figuur 4 Reductie van vierhoek 'los'

tegenvoorbeeld (of meerdere) zijn met een minimum aantal landen, oftewel een *kleinste tegenvoorbeeld*.

Het bijzondere van een kleinste tegenvoorbeeld is dat als je er een land uit weghaalt, de overgebleven kaart wel vierkleurbaar moet zijn, anders zou je een nog kleiner tegenvoorbeeld te pakken hebben.

De aanpak is dan als volgt. Neem zo'n (denkbeeldig) kleinste tegenvoorbeeld. Laat er een bepaald land uit weg, dan is de overgebleven kaart wel vierkleurbaar. Knutsel dan wat met die overgebleven kaart zodat je het ene extra land ook een van de vier kleuren kunt geven. Dan blijkt de kaart dus toch vierkleurbaar te zijn, en hebben we een tegenspraak.

De vraag is welk land je uit het denkbeeldige kleinste tegenvoorbeeld moet weglaten, je mag namelijk niets speciaals over die kaart aannemen. Dat is precies waar we de onvermijdelijke set voor nodig hebben. Hoe het kleinste tegenvoorbeeld er ook uit ziet, ergens moet hij namelijk een van de configuraties uit de onvermijdelijke set bevatten. Loop dus de configuraties van de set één voor één langs en laat steeds zien hoe in dat geval de vierkleuring van de kaart zonder die configuratie uitgebreid kan worden tot een vierkleuring van de kaart met die configuratie er weer in. Lukt dit, dan zeggen we dat die specifieke configuratie *gereduceerd* kan worden. Als alle configuraties uit de onvermijdelijke set gereduceerd kunnen worden, kan er dus geen tegenvoorbeeld bestaan, en zijn dus alle kaarten vierkleurbaar.

Het 'bewijs' van Kempe

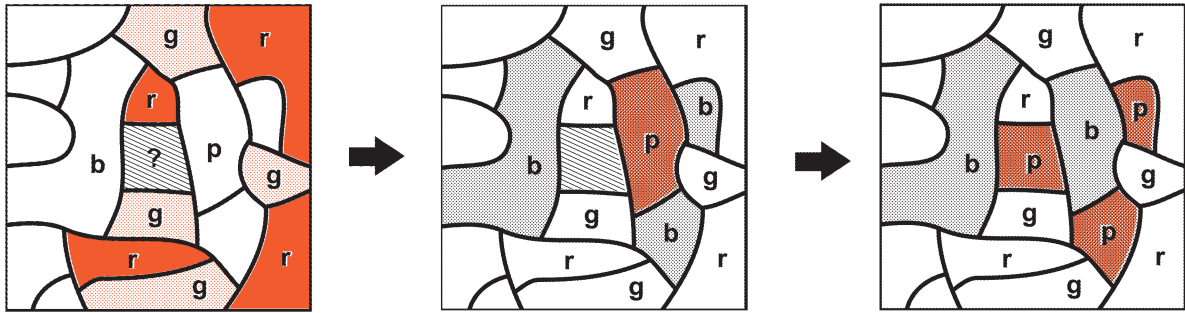
Kempe was de eerste die zijn bewijs opzette vanuit het reduceren van de configuraties van een onvermijdelijke set. De termen 'reduceren' en 'onvermijdelijke set' zijn overigens niet van hem, maar zijn pas later in zwang geraakt.

Neem een kleinste tegenvoorbeeld (vijf kleuren nodig) en beschouw de twee-, drie-, vier- of vijfhoek die er onvermijdelijk ergens in moet zitten.

Bevat de kaart een tweehoek of een driehoek, dan is het simpel: laten verdwijnen, de overblijvende kaart kleuren met vier kleuren (dat kan met een land minder), laten verschijnen en er is altijd een vierde kleur om de twee- of driehoek te kleuren. De configuraties tweehoek en driehoek zijn dus reduceerbaar.

Voor de vierhoek lukt dit niet meer, want de vierhoek kan omgeven zijn door vier landen met ieder een eigen kleur, zeg met rood (r), blauw (b), groen (g) en paars (p), zie figuur 3 (boven). Neem nu alle rode en groene landen die aan het rode land boven en aan het groene land onder aan de vierhoek vastzitten. Er zijn nu twee mogelijkheden. Of deze twee takken zijn niet met elkaar verbonden, zie figuur 3 (links), of zij zijn wel met elkaar verbonden, zie figuur 3 (rechts).

Zo niet, dan kan elk groene land boven, rood gekleurd worden en elk rode groen. De vierhoek heeft dan drie kleuren om zich heen (groen, blauw, groen, paars) en kan dus rood gekleurd worden, zie figuur 4. Zo ja, dan is er dus een 'weg', een Kempe-



Figuur 5 Reductie van vierhoek 'vast'

keten, linksom of rechtsom, waarlangs het rode land boven verbonden is (via rood, groen, rood, groen, enzovoorts) met het groene land onder. Een verwisseling van kleuren heeft dan geen zin, omdat het laatste land door de vier kleuren begrensd blijft. Maar dan is het wel zo, dat er geen verbonden weg (blauw, paars, blauw, paars, enzovoorts) van het blauwe land rechts met het paarse land links kan zijn. We kunnen dus rechts een kleurverwisseling toepassen op blauw-paars. Het laatste land is dan omgeven door drie kleuren (rood, groen en paars) en kan dus blauw gekleurd worden, zie figuur 5.

Tenslotte nam Kempe de vijfhoek en bracht met twee kleurveranderingen en twee ketens tegelijkertijd het aantal aangrenzende kleuren terug tot drie, waarmee hij het vierkleurenprobleem dacht opgelost te hebben.

In 1890 toonde Percy Heawood aan dat in het geval met vijf aangrenzende landen er niet altijd twee kleurwisselingen tegelijkertijd uitgevoerd kunnen worden. Toch is de Kempe-ketenmethode van grote waarde gebleven bij al het latere onderzoek. Heawood trouwens gebruikte Kempes methode om aan te tonen dat elke kaart in elk geval wel gekleurd kan worden met vijf kleuren. (Zijn bewijs kun je vinden in het artikel 'Veelvlakken kleuren' in *Pythagoras* van februari 2003.)

Ontladen

In de eerste helft van de twintigste eeuw gingen de onderzoeken verder op het spoor van een onvermijdelijke set van redu-

ceerbare configuraties. De Duitser Heinrich Heesch (1906-1995) speelde in dit onderzoek een centrale rol. Van hem stamt de techniek van het 'ontladen' waarmee nieuwe onvermijdelijke sets opgespoord kunnen worden, zoals de onvermijdelijke set {tweehoek, driehoek, vierhoek, twee vijfhoeken aan elkaar, een vijf- en zeshoek aan elkaar}, zie figuur 6.

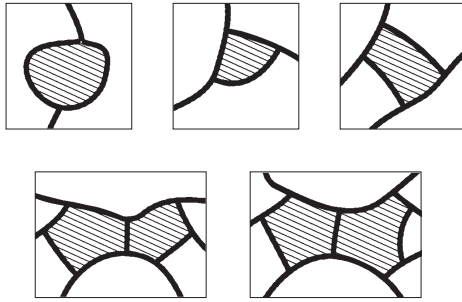
We laten zien hoe je met *ontladen* kunt bewijzen dat elke kaart inderdaad ten minste één van deze configuraties moet bevatten.

Ken aan elk land de 'lading' $6 - k$ (k is het aantal grenzen) toe. Vijfhoeken hebben dus lading 1, zeshoeken lading 0, zevenhoeken -1 , achthoeken -2 , enzovoorts.

Stel nu (tegen beter weten in) dat geen van de configuraties uit figuur 6 in de kaart voorkomt. Bereken de totale lading van de hele kaart. Omdat er geen twee-, drie- of vierhoeken in voorkomen, geldt: $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. De totale lading van de kaart is dan:

$1 \times c_5 + (-1) \times c_7 + (-2) \times c_8 + (-3) \times c_9 + \dots$
Volgens de tel formule levert dit: $c_5 - c_7 - 2c_8 - 3c_9 - \dots = 12$; de totale lading is dus 12.

Verdeel nu (ontladen) de lading 1 van elke vijfhoek netjes (5 keer $1/5$) over zijn 5 burens. Merk op dat rond elke vijfhoek alleen zevenhoeken of hoger zitten (onze aanname) met ladingen -1 , -2 enzovoorts. De lading van elke vijfhoek wordt dus 0, die van elke zeshoek blijft 0. Een zevenhoek kan ten hoogste 3 vijfhoekige burens hebben, en wordt dus ten hoogste $-1 + 3 \times 1/5 = -2/5$. Zo blijft ook de lading van landen met meer dan 7 burens negatief. De totale lading van de landkaart is dan dus negatief. Maar de totale lading is 12 en positief. We



Figuur 6 Onvermijdelijke set {tweehoek, driehoek, vierhoek, twee vijfhoeken aan elkaar, een vijf- en zeshoek aan elkaar}

stuiten op een tegenspraak, en concluderen dat er geen kaart kan bestaan waarin niet ten minste één van de vijf configuraties voorkomt.

De hulp van de computer

Steeds als Heesch een nieuwe onvermijdelijke set gevonden had, probeerde hij alle configuraties ervan te reduceren. Lukte dat bij een bepaalde configuratie niet, dan paste hij de ontladingsmethode zo aan dat er een grotere onvermijdelijke set ontstond waaruit de boosdoener verdwenen was en vervangen door een aantal verfijndere configuraties.

Begin jaren zeventig had Heesch een onvermijdelijke set van inmiddels 8904 configuraties, die naar zijn stellige overtuiging alle reduceerbaar moesten zijn. Bij het reduceren maakte hij gebruik van een computer, het zoeken van herkleuringen bleek namelijk aardig te automatiseren. Heesch kreeg echter niet het benodigde geld bijeen om alle computerberekeningen daadwerkelijk uit te voeren, en tot op de dag van vandaag is niet bekend of alle 8904 configuraties van zijn onvermijdelijke set reduceerbaar zijn.

Eindelijk succes

In de daaropvolgende jaren was er een wedstrijd gaande tussen diverse groepen wiskundigen die in het spoor van Heesch probeerden het vierkleurenprobleem te kraken. Het was het team van Wolfgang Haken en Kenneth Appel dat als eerste een bewijs rond had. Hun onvermijdelijke set bestond uit 1936 configuraties. In het bewijs dat

deze 1936 configuraties inderdaad onvermijdelijk waren, hanteerden zij een ontladingsalgoritme waarin 487 verschillende gevallen werden onderscheiden. Om de onvermijdelijke set te vinden, hadden zij de computer intensief gebruikt. Toen zij de set eenmaal hadden echter, waren zij in staat met de hand te bewijzen dat de set inderdaad onvermijdelijk was. Het tweede gedeelte van het bewijs, de reductie van de 1936 configuraties, was zo omvangrijk dat het niet met de hand uitvoerbaar of zelfs maar controleerbaar was. Al met al bestond hun bewijs materieel uit zo'n 50 bladzijden samenvatting, 100 bladzijden details, 700 bladzijden achtergrondwerk en 10.000 diagrammen. De computer had 1200 uur gerekend met een uitdraai van meer dan een meter hoog.

Is dit een bewijs?

Het vierkleurenprobleem leek opgelost, maar wie precies wilde weten hoe, moest vertrouwen op een computer. Het bewijs van Haken en Appel lokte dan ook een discussie uit over wat nu eigenlijk een wiskundig bewijs is.

Sommigen keurden dit computerbewijs principieel af, omdat het volgens hen strijdig was met de uitgangspunten van de wiskunde. Zij voeren aan dat wiskundige kennis wezenlijk verschilt van kennis bij andere wetenschappen. Een natuurkundige bijvoorbeeld doet een aantal experimenten en trekt daar dan algemene conclusies uit. Een volgend experiment zou tot andere conclusies kunnen leiden. Een wiskundige daarentegen trekt alleen conclusies als hij absolute zekerheid heeft, en doet dat op basis van onomstotelijk bewijs.

Het bewijs dat Haken en Appel presenterden, was door niemand helemaal te begrijpen of zelfs maar te lezen, ook door henzelf niet. Het enige dat wij kunnen doen, is zelf ook een programma schrijven, dat draaien en kijken of onze computer dan ook zegt dat al die 1936 configuraties reduceerbaar zijn. Zo'n bewijsmethode heeft meer weg van een natuurkundig experiment.

Ter verdediging van het computerbewijs voerden anderen aan dat veel klassieke bewijzen ook voor de meeste mensen niet te volgen zijn, en dat zulke bewijzen vaak jaren lang voor waar gehouden worden, tot iemand er toevallig een fout in ontdekt. De kans dat de computer een foutje over het hoofd ziet bij het controleren van het bewijs is trouwens veel kleiner dan dat een mens dat zou doen.

Recente ontwikkelingen

Inmiddels zijn er twee foutjes in het bewijs van Appel en Haken gevonden, maar die bleken corrigeerbaar. Sinds 1994 is er een tweede bewijs, afkomstig van Neil Robertson, Paul Seymour, Daniel Sanders en Robin Thomas, die eigenlijk het bewijs van Haken en Appel slechts wilden verifiëren, maar daarbij vastliepen. Toen besloten ze dan maar een eigen bewijs te proberen. Hun onvermijdelijke set bevat 633 configu-

raties en hun ontladingsalgoritme telt maar 32 regels. Bovendien is al hun programma-tuur beschikbaar op Internet, zodat iedereen in principe de berekeningen zelf kan herhalen.

De hoop blijft natuurlijk gevestigd op een echt wiskundig bewijs, dat voor mensen te volgen is en met de hand te controleren. Regelmatig worden zulke bewijzen gepresenteerd, maar houden meestal niet lang stand. Sinds 2000 is er een zuiver algebraïsch bewijs van Ashay Dhawadker, zie bronnen. Deskundigen op het gebied van het vierkleurenprobleem hebben zich over dit bewijs nog niet uitgesproken. Misschien wachten zij af tot de computer het voor hun controleren kan.

Bronnen

Four Colours Suffice, Robin Wilson, Penguin Books, ISBN 0-141-00908-X

An update on the Four-Color Theorem, Robin Thomas, Notices of the AMS, vol. 45, no. 7

<http://www.geocities.com/dharwadker>

Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Sokken

In het slechtste geval heb je na 18 trekkingen alle zwarte en alle blauwe sokken te pakken. Bij 20 trekkingen ben je verzekerd van twee grijze sokken.

Tandwiel

Omdat 127 een priemgetal is, zal voor elk kleiner tandwiel gelden dat het 127 omwentelingen gemaakt heeft als de pijlen voor het eerst weer tegenover elkaar komen te staan.

Hardloopwedstrijd

Ja, de volgorde zou in die maand kunnen zijn: Aad-Ben-Cor (10 dagen), Ben-Cor-Aad (10 dagen) en Cor-Aad-Ben (10 dagen).

Perzik in fles

Doe de fles in een vroeg stadium over de vrucht. Zo groeit de perzik in de fles.

Dozen vullen

Aad en Ben vullen samen drie dozen in een uur, Ben en Cor twee dozen en Aad en Cor anderhalve doos per uur. Hieruit volgt dat Aad $\frac{5}{4}$ doos per uur vult. Dat is één en $\frac{1}{4}$ doos in $\frac{4}{5}$ uur, ofwel 48 minuten.

Journal

pythagoras

juni 2004

nummer 6

Eindelijk zekerheid over Kepler

'In 1998 beweerde de Amerikaan Thomas Hales het uit 1611 daterende vermoeden van Johannes Kepler te hebben bewezen.' Zo luidde de eerste zin in een stukje uit het Journal van september 2003. Hales' bewijs berust echter voor een groot deel op rekenwerk met een computer, en in september berichtten we dat zijn bewijsvoering nog onvoldoende was gecontroleerd. Het prestigieuze Amerikaanse tijdschrift *Annals of Mathematics* heeft het bewijs inmiddels geaccepteerd voor publicatie. Het formeel-wiskundige deel (honderden pagina's lang) wordt in dit blad gepresenteerd, de computerdelen van het bewijs verschijnen in *Discrete and Computational Geometry*.



Eindelijk is het zeker: dit is een optimale stapel.

Nederlandse Wiskunde Olympiade

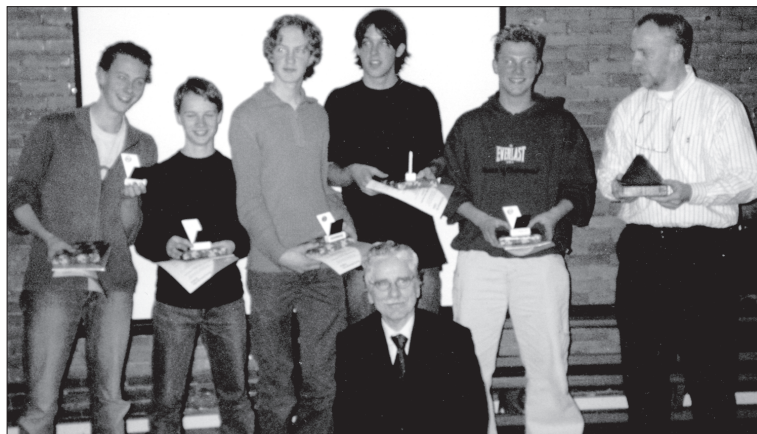
Op 18 maart 2004 vond de prijsuitreiking van de scholenprijs van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Nadat het Stedelijk Gymnasium Breda deze prijs twee achtereenvolgende jaren had gewonnen, ging de scholenprijs dit jaar naar het Christelijk Gymnasium Utrecht. De vijf beste leerlingen van deze school hadden een totaal-score van 103 punten. Een prachtige prestatie, want in totaal waren er niet meer dan 110 punten te behalen. De leerlingen die samen deze prestatie hebben geleverd, zijn Arno Luc Ackermann en Steven van Driel (beiden hadden de hoogst haalbare score van 22 punten), Ewout Schotanus en Joris

Tieleman (beiden 20 punten) en Remco Menting (19 punten).

Nadat prof. Jan van de Craats de rol van quizmaster speelde bij De Grote Wiskunde Quiz – met vragen als 'bereken uit het hoofd 1996×2004 ' en bonusvragen als 'hoe zie je dat zo gauw?' (denk aan merkwaardige producten) – werd de wisseltrofee overhandigd en kregen de vijf leerlingen een oorkonde en enkele fraaie boeken.

Op de foto zie je de vijf leerlingen, de wedstrijdleider van de school Sietze Kaldewey (uiterst rechts) en Jan van de Craats (zittend).

Volgend jaar rekt de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade weer op veel deelnemers. De eerste ronde vindt ook in 2005 weer plaats in januari. Kijk voor actuele informatie op de website van de NWO.



door Marco Swaen

Vedische wiskunde is gebaseerd op sutra's, korte spreken die een rekenpatroon aangeven. Rekenen met sutra's is rekenen op een creatievere manier. In deze slotaflevering bekijken we hoe je veeltermen kunt ontbinden in factoren.

Rekenen met sutra's

AFLEVERING 6 Ontbinden in factoren



Als je gevraagd wordt een kwadratische veelterm, zoals $x^2 + 8x + 15$, te ontbinden in factoren, zul je waarschijnlijk gebruik maken van de *som-product-methode*: zoek twee getallen a en b met $a + b = 8$ en $a \times b = 15$, want dan is de ontbinding $(x + a)(x + b)$.

Volgens de subsutra 'Anurupyena' (verhoudingsgewijs) kun je ook anders te werk gaan: zoek twee getallen a en b die samen 8 zijn zó, dat de verhouding $1 : a$ gelijk is aan de verhouding $b : 15$.

Die twee getallen zijn 3 en 5, want $1 : 3 = 5 : 15$. Met deze verhouding $1 : 3$ maak je de ene factor: $(x + 3)$.

De andere factor krijg je dan volgens de subsutra 'Adyamadyenantyamantyena' (de eerste door de eerste, de laatste door de laatste). Oftewel: 'deel x^2 door x , dat levert x , en deel 15 door 3, dat levert 5. De tweede factor is dan $(x + 5)$.

'Rijkelijk ingewikkeld,' zul je misschien den-

ken, maar dat is vooral een kwestie van wennen; in wezen gebeurt er hetzelfde, immers $1 : a = b : ab$.

Het voordeel van de 'Vedische' methode is dat hij ook werkt als de kwadratische term een andere coëfficiënt dan 1 heeft.

Een kwadratische term met coëfficiënt 2

De coëfficiënt van x^2 in $2x^2 + 7x + 5$ is gelijk aan 2, dus de som-product-methode kunnen we niet toepassen. Ga weer te werk volgens 'verhoudingsgewijs'.

Splits 7 in getallen a en b met $2 : a = b : 5$. Het is duidelijk dat 2 en 5 voldoen, dus we hebben $2 : 2 = 5 : 5$.

De verhouding is $2 : 2 = 1 : 1$, dus de ene factor is $(x + 1)$.

De andere krijg je met 'de eerste door de eerste, de laatste door de laatste': $2x^2 / x = 2x$, $5/1 = 5$, dus de andere factor is $(2x + 5)$.

De werkwijze ziet er in schema zo uit:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & \boxed{2x^2/x} & \boxed{5/1} \\ & & & \downarrow & \downarrow \\ 2x^2 + 7x + 5 & = & (x+1)(2x+5) \\ \downarrow & & \uparrow & \uparrow \\ 2 : 2 = 5 : 5 & \longrightarrow & 1 : 1 \end{array} \end{array}$$

Negatieve getallen

De gezochte getallen a en b kunnen ook negatief uitvallen. Als voorbeeld ontbinden we $6x^2 + 5x - 6$. Je zoekt, volgens 'verhoudingsgewijs', twee getallen a en b met $a + b = 5$ en $6 : a = b : -6$. Oplossingen zijn $a = -4$ en $b = 9$. De verhouding $6 : -4 = 3 : -2$ levert de ene factor: $(3x - 2)$.

De andere vind je met 'de eerste door de eerste, de laatste door de laatste'; je krijgt $(2x + 3)$. Hieronder zie je het schema.

Overigens had je ook $a = 9$ en $b = -4$ kunnen nemen, in dat geval vind je de twee factoren in de omgekeerde volgorde.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & & \boxed{6x^2/3x} & \boxed{-6/-2} \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 6x^2 + 5x - 6 & = & (3x - 2)(2x + 3) \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow \\
 6 : & = & : -6 & \longrightarrow & 3 : -2
 \end{array}
 \end{array}$$

Hogere machten

De Anurupyena-methode kun je ook gebruiken om derdemachts veeltermen te factoriseren.

Als voorbeeld nemen we $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Splits nu 6 in a en b en splits 11 in c en d zó, dat $1 : a = b : c = d : 6$. Je ziet al snel een oplossing: $1 : 1 = 5 : 5 = 6 : 6$.

De verhouding is dus $1 : 1$, dus een van de factoren is $(x + 1)$.

Sommige lezers zullen nu een staartdeling willen maken om de factor $(x + 1)$ uit $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ te halen. Maar het kan veel simpeler. De ontbinding ziet er in elk geval zo uit:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

Het is duidelijk dat a wel 1 moet zijn en dat c alleen 6 kan zijn, dus – weer met de sutra 'de eerste door de eerste, de laatste door de laatste':

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + bx^2 + 6).$$

De waarde van b kunnen we nu gemakkelijk vinden door aan beide kanten $x = 1$ in te vullen: $1 + 6 + 11 + 6 = (1 + 1)(1 + b + 6)$. Dan zie je dat $b = 5$.

Vervolgens ontbind je $x^2 + 5x + 6$ verder met 'verhoudingsgewijs' (zoals bij de eerste twee voorbeelden) tot $(x + 2)(x + 3)$.

$$\text{Conclusie: } x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Kijk op de website van *Pythagoras* voor oefenopgaven.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & & \boxed{x^3/x} & \boxed{6/1} \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 x^3 + 6x^2 + 11x + 6 & = & (x + 1)(x^2 + 5x + 6) \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow \\
 1 : 1 = 5 : 5 = 6 : 6 & \longrightarrow & 1 : 1 & & \\
 (1 + 6 + 11 + 6) & = & 1 + 1) (1 + 5 + 6)
 \end{array}
 \end{array}$$

Het Platonische systeem

Volgens de overlevering stelde Plato als eerste vast dat er vijf regelmatige veelvlakken zijn: de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icoesaëder. Sindsdien staan de vijf bekend als de *Platonische lichamen*. Kenmerkend aan een Platonisch lichaam is dat de zijvlakken regelmatig zijn en onderling congruent, en dat de hoekpunten alle op dezelfde manier zijn opgebouwd. Vandaar dat het bij de Platonische lichamen draait om twee getallen: het aantal hoeken van een zijvlak (n), en het aantal ribben dat in elk hoekpunt samenkomt (v). Voor de kubus geldt $n = 4$ (want een kubus is opgebouwd uit vierhoeken) en $v = 3$ (want in elk hoekpunt komen drie ribben samen). De kubus geven we verder aan als $\{4, 3\}$.

Tabel

Maak een tabel met horizontaal de waarden van v en verticaal de waarden van n , dan laten de vijf Platonische lichamen zich daar netjes in onder brengen. Dat is het uitgangspunt bij het schema op bladzijde 16 en 17. Bekijk je dat schema, dan zie je dat veel meer vakjes ingevuld zijn dan de vijf van de Platonische lichamen, het blijkt namelijk mogelijk ook voor andere n en v bouwwerken te verzinnen van n -hoeken met steeds v ribben per hoekpunt.

Tweevlakken en tweehoeken

Een hele kolom van zulke 'nieuwe Platonische lichamen' zie je bij $v = 2$. In die kolom staan de zogenaamde 'tweevlakken', bestaande uit twee veelhoeken die met hun ribben aan elkaar zijn gezet. In elk hoekpunt komen dan twee zijvlakken en dus twee ribben samen. Om beter aan te geven dat het ons hier om een ruimtelijke vorm gaat, hebben we de zijvlakken opgebouwd getekend.

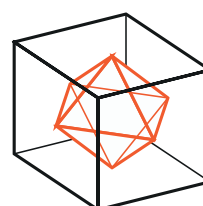
Zo kun je ook een hele rij toevoegen bij $n = 2$. Tenminste, als je bereid bent te werken met zogenaamde tweehoeken: vlakke figuren met slechts twee hoekpunten die toch een binnengebied hebben, zie figuur 1. Met zulke tweevlakken aan elkaar krijg je de ruimtelijke bouwsels die we opgebouwd hebben getekend in de rij $n = 2$.



Figuur 1 Een tweehoek

De as van dualiteit

Dualiseren is een bekende manier om van het ene Platonische lichaam het andere te maken. Ga bijvoorbeeld uit van een kubus. Zet in het midden van elk zijvlak een nieuw hoekpunt, en verbind die hoekpunten met elkaar die horen bij aangrenzende zijvlakken, dan krijg je weer een Platonisch lichaam: in dit geval de octaëder, zie figuur 2. Doe je hetzelfde met een octaëder, dan krijg je de kubus. De kubus en de octaëder heten derhalve elkaars dualen. Evenzo zijn de icoesaëder en dodecaëder elkaars dualen en is de tetraëder zijn eigen dual. Dualiteit is in de tabel goed te herkennen, dualen liggen steeds gespiegeld van elkaar ten opzichte van de hoofddiagonaal $n = v$. Dit gaat ook op voor de structuren die in de andere vakjes van de tabel staan.



Figuur 2 Dualisering van de kubus

Vlakvullingen

Hoe meer zijvlakken er in een hoekpunt bij elkaar komen, hoe boller en voller het betreffende bouwwerk wordt. Volgen we even de rij $n = 4$ en laten we v oplopen, dan komen we diverse regelmatige bouwwerken tegen die met vierkanten gerealiseerd kunnen worden. Bij $\{4, 2\}$ hebben we het vierhoekige tweevlak, die in wezen geen inhoud heeft. Dan bij $\{4, 3\}$ de kubus, die de ruimte mooi verdeelt in een kleine binnenruimte en een onbegrensde buitenruimte. Bij $\{4, 4\}$ sluit het bouwwerk zich al niet meer, de vierkanten vormen een plat vlak dat de ruimte in twee 'gelijke' onbegrensde helften verdeelt.

Oneindige veelvlakken

De vlakvulling $\{4, 4\}$ is geenszins het laatste regelmatige bouwwerk dat met vierkanten mogelijk is. Zet in elk hoekpunt vijf vierkanten aan elkaar (dus $\{4, 5\}$), dan kun je een soort mat maken die in twee richtingen zich onbegrensd voortzet, een zogenaamd oneindig veelvlak.

Met zes ontstaat nog iets fascinerenders, een driedimensionaal traliwerk. Ook deze structuur verdeelt de ruimte in twee delen die onderling weer congruent zijn. Maar deze twee delen doorkruisen en omstrengelen elkaar.

De mogelijkheden met vierkanten zijn nog niet uitgeput, het blijkt bijvoorbeeld dat $\{4, 6\}$ nog op twee andere manieren gerealiseerd kan worden. We laten het graag aan jou over die twee zelf te vinden.

Staven en nog meer mogelijkheden

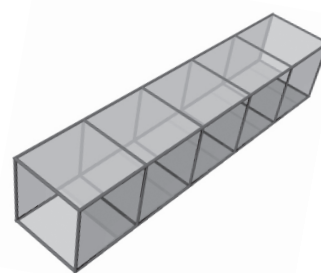
Ook $\{4, 4\}$ blijkt op meerdere manieren gerealiseerd te kunnen worden. In plaats van een vlakvulling kun je met de vierkanten ook een lange staaf maken, een soort oneindig prisma. Bij $\{3, 6\}$ is nog zo'n staaf mogelijk, een oneindig antiprisma. Wij hebben deze twee structuren niet in het schema gezet, ze staan afgebeeld in figuur 3.

Als je de tabel bekijkt, kom je nog een aantal interessante oneindige veelvlakken tegen, zoals de ruimtelijke structuur van vijfhoeken waar lang naar gezocht is, en die voor het eerst in 1967 door iemand beschre-

ven werd. Buiten ons schema zijn een aantal vakjes waar een of meer structuren bij gevonden zijn, zoals $\{3, 7\}$, $\{3, 8\}$, $\{3, 9\}$ en $\{3, 12\}$.



Figuur 3a Een oneindig prisma



Figuur 3b Een oneindig antiprisma

Vele vragen

Zeker zo intrigerend als de ingevulde vakjes zijn de gaten die in de tabel overblijven. Kunnen die principieel niet ingevuld worden, of is het een kwestie van beter zoeken? De tabel roept ook andere vragen op, zoals: Waar is de duaal van $\{4, 5\}$? Kunnen we de tabel zo uitbreiden dat er bijvoorbeeld Archimedische veelvlakken in passen? Wat zouden we kunnen zetten in de kolom $v = 1$ en de rij $n = 1$? Hoe zit het met de formule van Euler in de tabel, en met zoiets als het geslacht van de betreffende oppervlakken? Kortom, genoeg stof op elk niveau om aan de slag te gaan. Stuur ons je bevindingen!

Meer informatie

Meer informatie is te vinden op www.superliminal.com/geometry/infinite/infinite.htm. De schrijver heeft voor belangstellenden een uitgebreidere versie van zijn artikel beschikbaar.

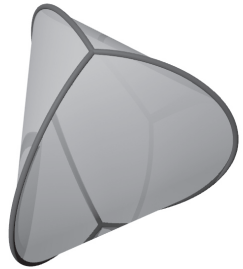
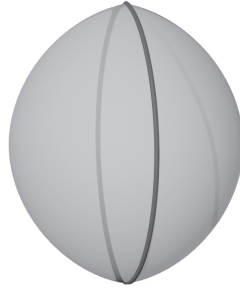
Met dank aan: Rinus Roelofs, die de computerbewerking van de illustraties maakte, en Marco Swaen, die de bewerking van het artikel voor *Pythagoras* maakte.

Het Platonische
systeem

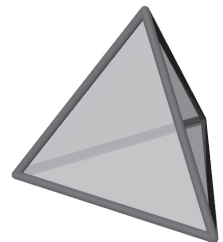
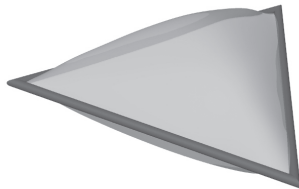
$$v = 2$$

$$v = 3$$

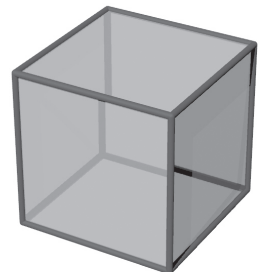
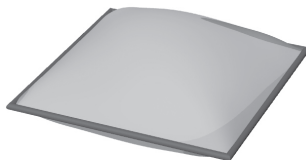
$$n = 2$$



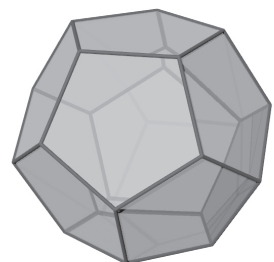
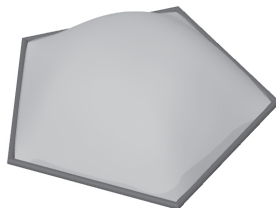
$$n = 3$$



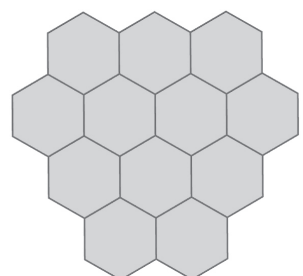
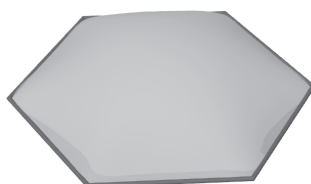
$$n = 4$$



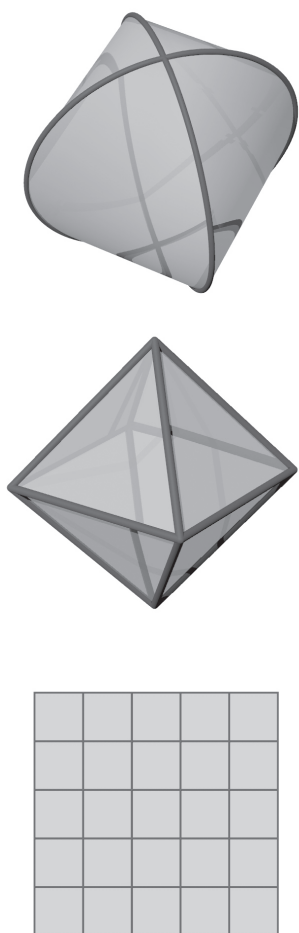
$$n = 5$$



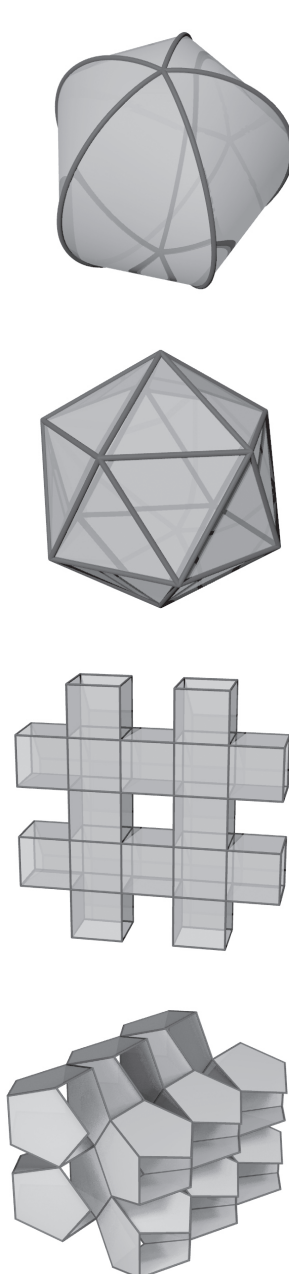
$$n = 6$$



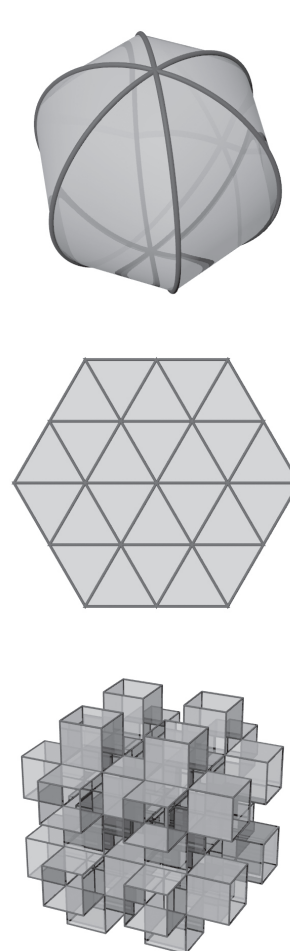
$$v = 4$$



$$v = 5$$



$$v = 6$$



°Pythagoras Olympiade

door **René Pannekoek** en **Allard Veldman**

In elk nummer van Pythagoras tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Ook worden er prijzen aan het eind van het seizoen weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. Verder kun je je met je hele klas op de opgaven storten. De klas die aan het eind van het seizoen bovenaan staat, wint drie prachtige boeken voor de schoolbibliotheek. De stand van de laddercompetities wordt bijgehouden op de homepage van Pythagoras.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:

pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:

**Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden**

**Postbus 9512
2300 RA Leiden.**

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld bij een individuele inzending je naam, adres, school en klas. Bij een klasseninzing vermeld je je klas, de naam van de wiskundecent en van de school en het adres van de school. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juli 2004.

OPGAVE

108

Elk van de diagonalen AC en BD van de convexe koordenvierhoek $ABCD$ is een bissectrice van de hoek aan één uiteinde en een trissectrice van de hoek aan het andere uiteinde. Bepaal de grootte van de hoeken van vierhoek $ABCD$.

(Een vierhoek heet convex als alle hoeken kleiner zijn dan 180° . Een bissectrice deelt een hoek in twee gelijke hoeken. Twee trisectrices delen een hoek in drie gelijke hoeken.)

OPGAVE

109

Als je van een schaakbord van 7×7 één vakje weghaalt, is het soms mogelijk om de overgebleven vakjes met 16 stukjes van 3×1 te bedekken, maar dit is afhankelijk van wélk vakje je weghaalt.

Vind zo veel mogelijk vakjes waarvoor dit niet mogelijk is.



OPLOSSING

104

Bert en Ernie spelen het volgende spelletje: ze leggen 2004 lucifers op een tafel, en halen om de beurt lucifers weg. Hierbij mogen ze minimaal één lucifer en maximaal de helft van wat op tafel ligt weghalen. Degene die de laatste lucifer overlaat, verliest. Als Ernie begint, wie heeft er dan een winnende strategie en hoe moet hij dan spelen?

Oplossing. De speler met de winnende strategie moet in zijn laatste beurt twee lucifers overlaten, zodat de ander er één over moet laten. De enige manier om er zeker van te zijn dat hij dit kan doen, is door in de voorlaatste beurt vijf lucifers over te houden (de andere speler pakt dan één of twee lucifers, waarna de winnende speler er twee resp. één pakt). Zo kun je telkens een beurt terugredeneren, waarbij we zien dat als je in een bepaalde beurt n lucifers wilt overhouden, je er in de beurt daarvoor $2n + 1$ over moet laten. We komen zo op de getallen 2, 5, 11, ..., 1535 en zien dat Ernie de winnende strategie heeft door in de eerste beurt 1535 lucifers over te laten en daarna precies de getallen uit de rij te volgen. (Als je meer van formules houdt: kun je een simpele functie f vinden waarvoor $f(n)$ voor alle n gelijk is aan het n -de getal uit de rij?)

Deze opgave werd opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Karel van Bockstal van het **EDUGO Campus de Toren** te Oostakker (België), P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Kasper Duivenvoorden van het **Hondsrug College** te Emmen, Johan Flikweert van het **Bonaventura College** te Leiden, Jafeth Geurts van het **Baarnsch Lyceum** te Baarn, Judith Mulder van het **Christelijk Lyceum Delft** te Delft, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg en Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede. De boekenbon gaat naar Karel van Bockstal.

OPLOSSING

105

A , B en C zijn drie rijtjes nullen en enen van dezelfde lengte n . Definieer voor twee rijtjes x en y de afstand $d(x,y)$ als het aantal plaatsen waar x en y niet hetzelfde getal hebben (bijvoorbeeld $d(10011, 11010) = 2$). Als nu $d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = t$, bewijs dan dat

a. t even is;

b. er een rijtje D van lengte n is met $d(A,D) = d(B,D) = d(C,D) = \frac{1}{2}t$.

Oplossing. a. Omdat het er alleen om gaat welke getallen in de rijtjes verschillen en niet welke getallen er precies staan, veranderen de afstanden niet als we van alle drie de rijtjes tegelijk bijvoorbeeld het eerste getal veranderen. Als we nu rijtje C nemen en deze truc toepassen op alle plaatsen waar in dit rijtje een 1 staat, verandert C in een rijtje met alleen maar nullen. Omdat alle afstanden nog steeds gelijk aan t zijn, hebben A en B na de transformatie allebei t enen. Laat k het aantal plaatsen zijn waar A een 1 heeft en B een 0. Omdat A en B evenveel enen hebben, is het aantal plaatsen waar A een 0 heeft en B een 1 ook gelijk aan k . Het totale aantal plaatsen waar A en B verschillen is dus $2k = t$; t moet dan wel even zijn.

b. Uit het vorige zien we dat het aantal plaatsen waar A en B allebei een 1 hebben, ook gelijk is aan $k = \frac{1}{2}t$. We kunnen voor D dus het rijtje nemen dat op deze plaatsen ook een 1 heeft en op de overige plaatsen een 0.

Deze opgave werd opgelost door: Karel van Bockstal van het **EDUGO Campus de Toren** te Oostakker (België), P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Kasper Duivenvoorden van het **Hondsrug College** te Emmen, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg en Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede. De boekenbon gaat naar Victor Pessers.

Worteltrekken met de hand

In deze tijd van rekenmachines en computers raken oude rekentechnieken in onbruik. De staartdeling kent bijna iedereen nog wel, maar wat niet veel mensen weten, is dat je op vrijwel dezelfde manier ook kunt worteltrekken. Het is even wennen, maar dan is het net zo makkelijk als staartdelen.

We nemen als voorbeeld het getal 1369; met behulp van een rekenmachientje vinden we dat $\sqrt{1369}$ gelijk is aan 37. Zonder rekenmachine is dat wat moeilijker. Om te zien hoe we $\sqrt{1369}$ met de hand hadden kunnen vinden, bekijken we hoe het kwadraat van een getal van twee cijfers er uit ziet.

Neem eens aan dat we een natuurlijk getal n tussen 10 en 100 hebben, met cijfers a en b . Dan is $n = 10a + b$ en er geldt

$$\begin{aligned} n^2 &= (10a + b)^2 \\ &= (10a)^2 + 2 \cdot 10ab + b^2 \\ &= (10a)^2 + (2 \cdot 10a + b)b \\ &= 100a^2 + (2 \cdot a \cdot 10 + b)b. \end{aligned}$$

We bekijken nu hoe je hiermee $\sqrt{1369}$ kunt berekenen. We gaan er even van uit dat de wortel een geheel getal is, verderop zullen we zien wat te doen als dat niet het geval is. Bedenk dat die wortel een getal van twee

cijfers a en b zal zijn. Verdeel het getal 1369 in groepen van twee cijfers van rechts (natuurlijk kan de groep links slechts één cijfer bevatten):

$$13 \mid 69$$

Het grootste kwadraat kleiner dan 13 is 3^2 , dus we weten dan dat $a = 3$. Daarmee hebben we dus:

$$1369 = 100 \cdot 3^2 + (2 \cdot 3 \cdot 10 + b)b,$$

oftewel

$$1369 = 900 + (60 + b)b.$$

We trekken 900 van 1369 af; er blijft 469 over. Nu moeten we het cijfer b zo kiezen dat $469 = (60 + b)b$; het is niet moeilijk in te zien dat $b = 7$ moet zijn. Dus $\sqrt{1369} = 37$.

We kunnen dit op de volgende manier kort opschrijven:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1369} = 37 \\ \hline 13 \mid 69 \\ - 9 \\ \hline 469 \\ - 469 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^2 = 9 \\ (60 + 7)7 = 469 \end{array} \quad \begin{array}{l} \backslash 3. \\ \backslash 37 \end{array}$$

Grotere getallen

Het algoritme werkt ook voor getallen met meer cijfers. Als voorbeeld berekenen we $\sqrt{174724}$.

We verdelen het getal weer in groepjes van twee cijfers en zoeken het grootste kwadraat onder 17. Dat is 4^2 , dus $a = 4$.

Dan volgt de tweede stap: $1747 - 1600 = 147$; we zoeken nu de grootste b zodanig

dat $(2 \cdot 4 \cdot 10 + b)b \leq 47$. Dat levert $b = 1$.

De derde stap gaat dan net als de tweede, maar nu met $a = 41$, waarbij $(2 \cdot 41 \cdot 10 + b)b$ zo dicht mogelijk onder 6624 moet komen. Als $b = 8$, komen we nu ook precies uit; we kunnen concluderen dat $\sqrt{174724} = 418$.

De berekening kort opgeschreven is als volgt:

$$\begin{array}{r} \sqrt{174724} = 418 \\ \hline 17 \overline{) 4724} \\ - 16 \\ \hline 147 \\ - 81 \\ \hline 6624 \\ - 6624 \\ \hline 0 \end{array}$$

$4^2 = 16$ $\backslash 4..$
 $(80+1) \cdot 1 = 81$ $\backslash 41.$
 $(820+8) \cdot 8 = 6624$ $\backslash 418$

Irrationale uitkomsten

De meeste getallen zijn echter geen kwadraten van natuurlijke getallen. Maar ook dan kunnen we het algoritme toepassen; als de laatste rest positief is, kunnen we doorgaan door achter de komma telkens twee nullen te schrijven. Laten we dat illustreren aan de hand van een voorbeeld; we berekenen $\sqrt{521}$.

Met de berekening hieronder vinden we dat $\sqrt{521}$ een getal tussen 22,8 en 22,9 is.

Als we een betere benadering nodig hebben, kunnen we weer achter de laatste rest twee nullen schrijven en verder gaan met het algoritme.

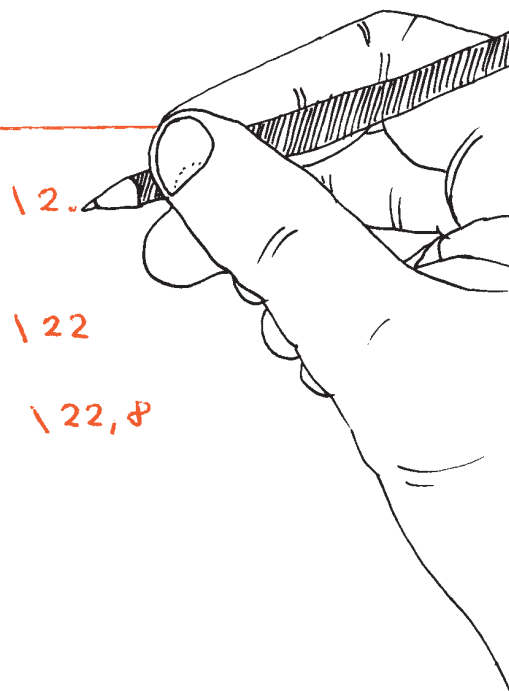
Opgave 1. Bepaal nog twee cijfers van $\sqrt{521}$.

Opgave 2. Bepaal de eerste vijf cijfers van $\sqrt{3}$ (zonder rekenmachientje natuurlijk).

21

$$\begin{array}{r} \sqrt{521} = 22,8... \\ \hline 5 \overline{) 21} \\ - 4 \\ \hline 121 \\ - 84 \\ \hline 3700 \\ - 3584 \\ \hline 116 \end{array}$$

$2^2 = 4$ $\backslash 2.$
 $(40+2) \cdot 2 = 84$ $\backslash 22$
 $(440+8) \cdot 8 = 3584$ $\backslash 22,8$



Problemen

door **Dion Gijswijt**

Glazen draaien

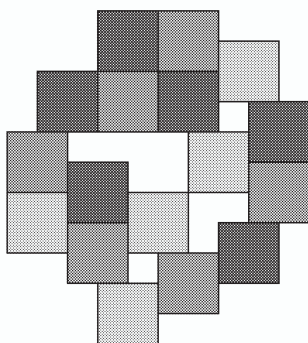
Op de vier hoekpunten van een vierkante tafel staat elk een glas, op z'n kop of recht op. Welke glazen rechtop staan, weet je niet, want je bent geblinddoekt. Je doel is om alle glazen rechtop te krijgen. Daartoe mag je de huiself Dobby de volgende vier opdrachten geven:

- draai één glas om;
- draai twee glazen op een diagonaal om;
- draai twee glazen aan een zijde om;
- draai alle glazen om.

Dobby voert de opdrachten correct uit, maar kiest zelf welke glazen hij precies omdraait. Als na een opdracht alle glazen rechtop staan, moet Dobby dat toegeven en stopt het spel. Geef een strategie om met zekerheid het spel te kunnen winnen.

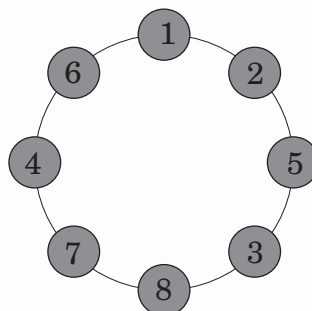
Vier kleuren

Hier zie je een 'landkaart' waarbij alle landen vierkanten zijn (in de landkaart mogen gaten zitten, die niet vierkant hoeven zijn). We willen de landen elk een kleur geven, zó dat geen twee landen met gelijke kleur aan elkaar grenzen (ze mogen wel in een hoekpunt aan elkaar raken). Voor deze kaart zijn drie kleuren voldoende. Bestaat er een landkaart waarvan alle landen vierkanten zijn, maar die niet met drie kleuren kan worden gekleurd? (Zie ook het artikel op pagina 4.)



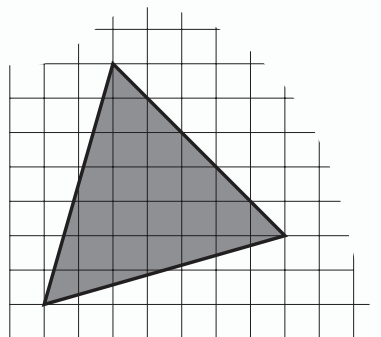
In de kring

Een aantal mensen genummerd 1, 2, 3, ... zit in een kring, maar niet op volgorde. Als we met de klok mee langs de kring gaan, dan komt persoon $k + 1$ precies k plaatsen na persoon k (voor iedere k). In de figuur zie je een voorbeeld met acht mensen. Als het aantal mensen in de kring tussen de vijftig en de honderd ligt, hoeveel mensen zitten er dan in de kring?



Gelijkzijdige driehoek

Bestaat er een gelijkzijdige driehoek in het vlak, waarvan de coördinaten van de hoekpunten gehele getallen zijn?

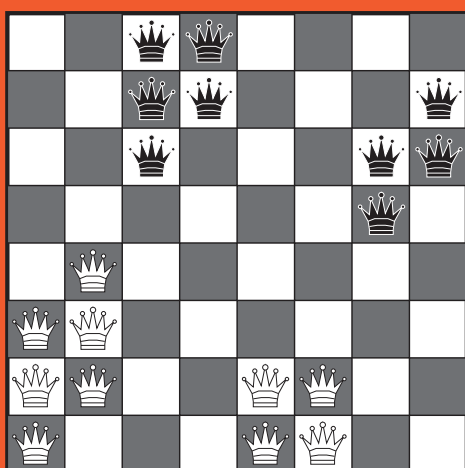


Oplossingen

nr.5

Dames

Het is zelfs mogelijk om negen zwarte en tien witte dames op het schaakbord te plaatsen:



Drie wiskundigen

Noem de drie getallen a , b en c . Elk van de drie getallen is óf de som óf het verschil van de andere twee. Alejan zal bij eerste ondervraging alleen 'ja' zeggen als $b = c$, want dan weet hij dat zijn getal niet $b - c = 0$ is (a is positief), maar gelijk is aan $b + c$. Alejans 'nee' betekent dus precies dat $b \neq c$, oftewel $a : b : c \neq 2 : 1 : 1$. Dat Bep 'nee' antwoordt, betekent precies dat $a : b : c$ niet gelijk is aan $1 : 2 : 1$ en $2 : 3 : 1$. Want zou $a = 2c$, dan zou ze weten dat $b = a + c$, omdat $b \neq a - c = c$ (anders had Alejan 'ja' gezegd). Dat Cas 'nee' antwoordt, betekent precies dat we de verhoudingen $1 : 1 : 2$, $1 : 2 : 3$ en $2 : 3 : 5$ kunnen uitsluiten.

Dat Alejan bij tweede ondervraging 'ja' antwoordt, betekent precies dat $a : b : c$ een van de verhoudingen $3 : 2 : 1$, $4 : 3 : 1$, $3 : 1 : 2$, $5 : 2 : 3$, $8 : 3 : 5$ is. Omdat $a = 50$ en b en c gehele getallen zijn, is de enige mogelijkheid $5 : 2 : 3$. Dus $b = 20$ en $c = 30$.

Spirograaf

Noem de straal van het cirkelvormige gat r . Het middelpunt van de schijf beschrijft een baan langs de cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van het gat, en met straal $r - 1$. Als de schijf over afstand x langs de rand van het gat rolt, roteert de schijf over een hoek $x - \frac{x}{r}$ en het middelpunt beweegt over een afstand $x \frac{r-1}{r}$. Dus als de schijf over afstand $\frac{2\pi r}{r-1}$ heeft gerold, is de schijf precies één slag gedraaid en heeft het middelpunt een afstand van 2π afgelegd.

Speciale getallen

Merk op dat 0 niet speciaal is. We bewijzen eerst dat 1 speciaal is. Stel eens dat 1 niet speciaal zou zijn. Als a en $a + 1$ speciaal zijn, dan zijn $2a + 1 = a + (a + 1)$ en $2a + 2 = (a + 1) + (a + 1)$ speciaal, zodat $3a + 2 = (2a + 1) + (a + 1)$ niet speciaal is. Dus omdat $3a + 2 = (2a + 2) + a$, moet $a + 2$ ook speciaal zijn. Omdat 2003 en 2004 speciaal zijn, moeten 2005, 2006, 2007,... dus ook speciaal zijn. Maar dat kan niet, want $4006 = 2002 + 2004$ is niet speciaal, een tegenspraak. Dus 1 is speciaal, waaruit volgt dat de speciale getallen precies de getallen zijn die niet deelbaar zijn door 3.

°° Fietsen om te bruinen

24

We gaan fietsen; vertrekken vroeg van huis en moeten 's avonds weer thuis zijn. Daarbij willen we zoveel mogelijk in de richting van de zon fietsen om in het gezicht zo bruin mogelijk te worden. Dit probleem gaan we wiskundig formuleren en de oplossing zal worden gegeven.

Probleemstelling

Toen ik één van de afgelopen zomers in de Alblasserwaard aan het fietsen was, kwam ineens het volgende probleem in m'n hoofd opzetten. Stel, je gaat op een zonnige dag fietsen en wilt daarbij de route zó kiezen dat je zo bruin mogelijk wordt.

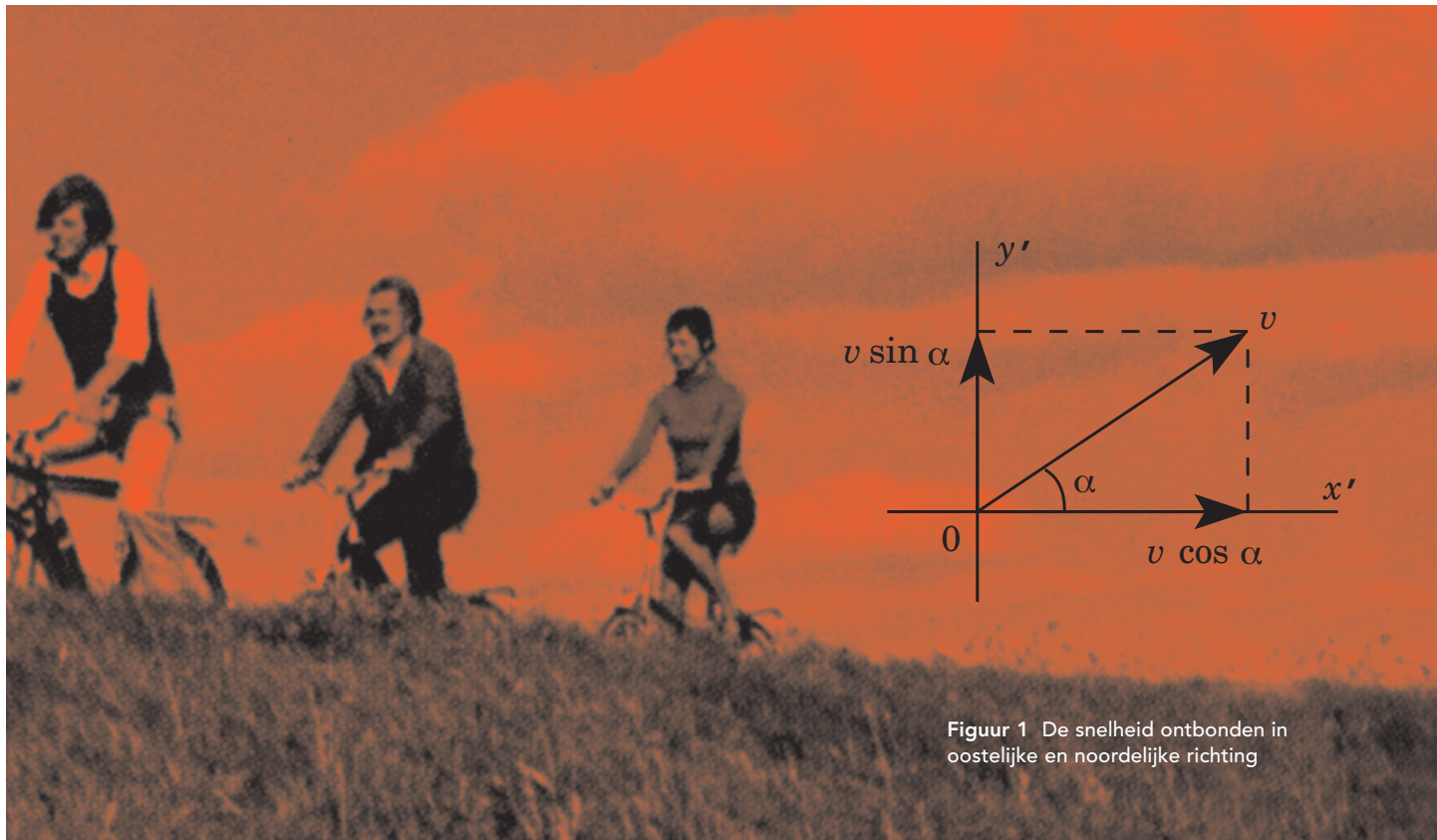
De meeste zon zul je natuurlijk vangen als je in een (draai)stoel in de tuin gaat zitten en je gezicht naar de zon gericht houdt – zo krijgt je voorkant de maximale hoeveelheid zon – of rondjes gaat rijden op een grote parkeerplaats en zo jezelf rondom mooi bijkleurt. Maar we willen gewoon een stuk fietsen en tegelijkertijd ons gezicht wat meer kleur geven. Om hier wiskundig wat van te kunnen zeggen, zullen we de situatie aanzienlijk moeten vereenvoudigen. Om geen last van wegen te hebben, doen we alsof we op een grote vlakte gaan rijden. In dat geval kun je het best vanaf zonsopgang tot zonsopgang recht op de zon af fietsen, met

als resultaat dat je een eind ten zuiden van huis uitkomt.

Maar dat is niet in overeenstemming met de vraag waar het ons uiteindelijk om gaat, die is namelijk: hoe moet je op een (grote) vlakte gaan fietsen om zoveel mogelijk zon op je gezicht te krijgen en bij zonsondergang weer op je startpunt terug te komen. We gaan er verder van uit dat de snelheid constant is en dat we onderweg niet stoppen.

De wiskundige formulering

We gaan dus fietsen in het gewone platte vlak, met coördinaten x en y . De x -as wijst in oostelijke richting, de y -as in noordelijke richting en ons huis bevindt zich in de oorsprong van dit assenstelsel. We vatten fietsen en fietser tezamen op als een punt (x, y) dat zich in het vlak beweegt. Op tijdstip t bevindt de fietser (en fiets) zich in punt $(x(t), y(t))$. De rijrichting ten tijde t geven we aan met de hoek $\alpha(t)$; $\alpha(t)$ wordt gemeten in radialen vanaf de positieve x -as ($\alpha = 0$ komt overeen met de oostelijke richting) en dan tegen de wijzers van de klok in. Rijden in noordelijke richting bijvoorbeeld betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ radialen. Omdat we met constante snelheid – noem die snelheid v – gaan fietsen, hangen de afgeleiden van x en y alleen van de fietsrichting af:



Figuur 1 De snelheid ontbonden in oostelijke en noordelijke richting

$$x'(t) = v \cos(\alpha(t)), \quad (1)$$

$$y'(t) = v \sin(\alpha(t)), \quad (2)$$

immers, zowel $x'(t)$ als $v \cos(\alpha(t))$ is de west-oostcomponent van de constante rijnsnelheid v , en zowel $y'(t)$ als $v \sin(\alpha(t))$ de zuid-noordcomponent. Dit is nog eens weergegeven in figuur 1. De tijd wordt normaliter in eenheden van uren, minuten en seconden gemeten, maar om de beweging van de zon eenvoudig te kunnen weergeven, zetten we de klok op nul bij zonsopgang en laten we zonsondergang plaatsvinden op tijdstip π . Op die manier wordt de stand van de zon gegeven door

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

We stellen hier dat de zon precies in het oosten opkomt en precies in het westen ondergaat. Vergelijking (3) stelt de beweging van de zon in het (x, y) -vlak voor.

We hebben de tijd nu geschaald ($t = 0$ bij zonsopgang, $t = \pi$ bij zonsondergang); we schalen de afstand ook nog door de rijnsnelheid v op 1 te stellen. Dit betekent dat de fietsafstand gedurende de dag afgelegd precies π 'afstandseenheden' is. Merk op dat beide schalingen alleen dienen om het

probleem eenvoudig te kunnen opschrijven en geen beperkingen inhouden.

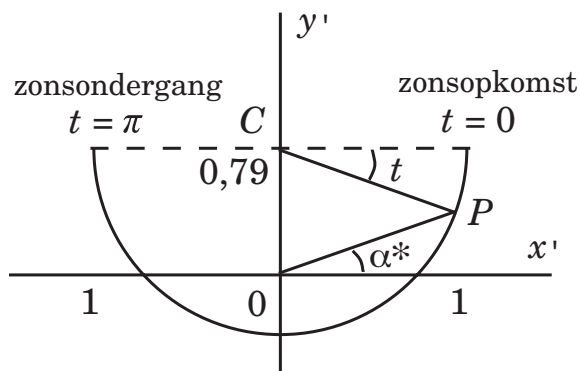
De hoek tussen rijrichting en de die van de zon is $\alpha(t) + t$. De 'hoeveelheid zon' die op tijdstip t wordt opgenomen in het gezicht is evenredig met

$$m(t) \cos(\alpha(t) + t), \quad (4)$$

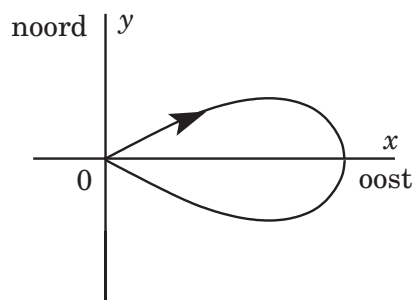
waarbij $m(t)$ de intensiteit voorstelt ('s middags meestal sterker dan 's ochtends; je zou $m = 0$ kunnen nemen als er een wolk is). We zullen hier de intensiteit constant (en gelijk aan 1) veronderstellen. Als je nog wat moeite hebt met de interpretatie van 'hoeveelheid zon opgenomen in het gezicht', denk dan aan een zonnepaneel voorop de fiets gemonteerd (en loodrecht op de rijrichting). De hoeveelheid energie die op tijdstip t op dit zonnepaneel binnenkomt is (4). De totale hoeveelheid zon die de hele dag wordt opgenomen, is dan deze energie gesommeerd over de hele dag, hetgeen geschreven kan worden als de integraal

$$\int_0^\pi \cos(\alpha(t) + t) dt. \quad (5)$$

Het is deze integraal die aangeeft hoeveel bruiner we die dag zijn geworden.



Figuur 2 Het richtingsdiagram



Figuur 3 De uiteindelijke fietsroute

Het probleem is nu de functie $\alpha(t)$ zó te kiezen dat (5) zo groot mogelijk wordt, terwijl voldaan wordt aan de eis dat we 's avond (op tijdstip π) weer thuis zijn: dus moet ook nog gelden $x(0) = x(\pi) = y(0) = y(\pi) = 0$. We kunnen dit ook formuleren als: maximaliseer (5) terwijl voldaan wordt aan

$$x(\pi) = \int_0^\pi \cos(\alpha(t)) dt = 0 \quad (6a)$$

en

$$y(\pi) = \int_0^\pi \sin(\alpha(t)) dt = 0 \quad (6b)$$

Als we eenmaal de juiste α hebben, krijgen we x en y als primitieven van respectievelijk $\cos(\alpha(t))$ en $\sin(\alpha(t))$.

De achterliggende theorie

Problemen van de vorm 'een functie kiezen zodat een integraal zo groot (of zo klein) mogelijk wordt, terwijl voldaan moet worden aan bepaalde nevenvoorwaarden' (in de vorige paragraaf zijn de nevenvoorwaarden gegeven door de eisen (6a) en (6b)) komen veel voor. Bijvoorbeeld in de ruimtevaart (met zo weinig mogelijk energie een kunstmaan in een baan om de aarde brengen) en in de economie (wanneer moet je de inkopen doen, welke prijzen moet je berekenen voor de verkoop van je producten, opdat aan het einde van het jaar de winst zo groot mogelijk is). Dit vakgebied (de 'optimale besturingstheorie') wordt bij de wiskunde aan de technische universiteiten onderwezen.

Voor dit soort problemen bestaan theo-

rieën die helpen bij het oplossen en die de beste functie karakteriseren. Eén van die theorieën is de *variatierekening*, die is uitgevonden in de achttiende eeuw door onder meer Johann Bernoulli, Leonhard Euler en Joseph Lagrange. Met behulp van die variatierekening kun je uitrekenen dat de beste functie $\alpha^*(t)$ gekarakteriseerd wordt door

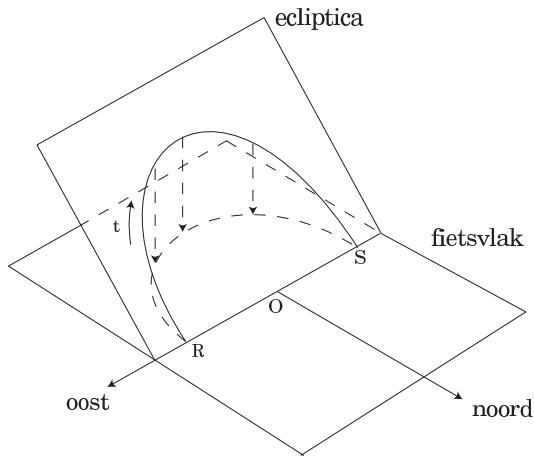
$$\cos(\alpha^*(t)) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + (\lambda - \sin(t))^2}},$$

$$\sin(\alpha^*(t)) = \frac{\lambda - \sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t) + (\lambda - \sin(t))^2}},$$

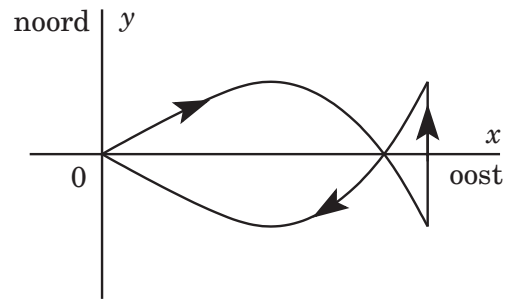
waarbij λ de waarde 0,7891 heeft.

De oplossing

We gaan de oplossing beschrijven met behulp van twee figuren, figuur 2 en figuur 3. Figuur 2 geeft het zogenaamde richtingsdiagram. Gedurende de dag fietst de fietser in de richting OP . Het punt O is de oorsprong en beweegt niet, het punt P beweegt via R (op tijdstip $t = 0$) met constante hoeksnelheid via een halfcirkel (met middelpunt C en straal 1) naar punt S (op tijdstip $t = \pi$). De lengte van de vector OP varieert in de loop van de dag, maar is niet belangrijk voor onze probleemstelling. Alleen de hoek α , nu geschreven als α^* , omdat het de optimale rijrichting betreft, is belangrijk. Als de fietser inderdaad zijn rijrichting volgens deze α^* kiest, is de route die hij aflegt zoals die in figuur 3 is gegeven. De coördinaten van het punt C zijn $(0, \lambda)$, met $\lambda = 0,7891$, en de fietser ver-



Figuur 4 Beweging van de zon in de ecliptica en in het fietsvlak



Figuur 5 Optimale route als negatieve bruining niet mogelijk is

trekt 's ochtends in bijna noordoostelijke richting (preciezer: $\alpha^*(0) = 0,6681$ radialen).

Beschouwingen over het model

Bovenstaand verhaal laat zien hoe een wiskundige aan het werk gaat: eerst probeert hij een zo eenvoudig mogelijke versie van het probleem op te lossen. We gaan nu kijken wat er gebeurt als enkele weggelaten moeilijkheden in het model aangebracht worden.

Zonne-intensiteit. In de vorige sectie was aangenomen dat de zonne-intensiteit (m) constant is. We maken de lengte van de straal van onze halfcirkel evenredig met de intensiteit en construeren de fietsroute als tevoren. Hierbij moet de nieuwe figuur (daarmee wordt de vervormde halfcirkel bedoeld), zó over het vlak worden geschoven, totdat die een positie heeft waarbij het eindpunt van de corresponderende fietstocht weer overeenkomt met thuis. Zo krijgen we weer de optimale baan.

De snelheid van de zon. In de oorspronkelijke probleemstelling hadden we eenvoudigheidshalve aangenomen dat de zon zich met een constante hoeksnelheid in het fietsvlak beweegt, zie (3). De zon beweegt zich echter met constante hoeksnelheid door het ecliptica (het schuine vlak in figuur 4) en voor de projectie van de zon in het fietsvlak moet een correctie worden uitgevoerd. Vergelijking (3) is alleen volledig correct als de ecliptica samenvalt met het fietsvlak, en dat is alleen zo aan de noordpool.

Door punt P in figuur 3 met de echte, geprojecteerde, snelheid langs de halfcirkel (of de aanpassing ervan met de zonne-intensiteit) te laten bewegen, is de benadering ongedaan gemaakt en wordt de exacte oplossing verkregen. Wel moet, net als boven, met de halfcirkel (of een aanpassing ervan) weer geschoven worden totdat de resulterende fietstocht in het fietsvlak leidt tot een thuiskomst bij zonsondergang.

Zon in de rug. Er is nog iets verraderlijks. Bij de optimale oplossing blijkt dat de zon steeds van voren schijnt, in formule, $\cos(\alpha^*(t) + t) \geq 0$ gedurende de hele dag. Voor de probleemstelling zou je ook moeten toelaten dat de zon van achteren schijnt. In dat geval is (5) niet correct omdat we bij de zon in de rug aan het 'ontbruinen' of 'witten' zouden zijn. Stel dat we (5) zodanig aanpassen dat de integrand nul is als de zon van achteren schijnt, wat zal dan de beste oplossing zijn? Het beste pad is gegeven in figuur 5. Tot onze verrassing wordt er omstreeks lunchtijd met de zon in de rug gefietst, maar dit wordt blijkbaar meer dan gecompenseerd doordat in de ochtend en namiddag rechter in de zon wordt opgefietst dan bij de oplossing in figuur 3. Hierbij is wel aangenomen dat de zonne-intensiteit constant is gedurende de dag. Bij de oplossing van figuur 5 word je ongeveer 6% bruiner dan bij die van figuur 3.

Literatuur

G.J. Olsder, *Bicycle routing for maximum suntan*, SIAM Review, Volume 45, no. 2, 2003, pp. 345-358.



° Euler sneller dan Newton



Elk irrationaal getal (zoals $\sqrt{2}$, π , e) ligt ingebed tussen rationale getallen. Bepaalde *oneindige rationale rijen* kunnen zo'n irrationaal getal aanduiden doordat de termen ervan verder en verder in de rij steeds dichter opeen liggen. Hier vergelijken we twee van zulke rijen die zich allebei verdichten rond e . Een voorschrift voor de ene rij, het bekende $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots$, werd al in 1665 vermeld door de Engelsman *Newton*, waarna in 1737 de Zwitser *Euler* een voorschrift gaf voor een veel minder bekende alternatieve rij. Bij het berekenen van de *decimalen* van e lijkt Euler het met 3 – 1 van Newton te winnen.

Newton ₁	=	$\frac{1}{1}$	Euler ₁	=	$\frac{1}{1}$
Newton _{n+1}	=	$\frac{\text{teller}_n \cdot n + 1}{\text{noemer}_n \cdot n}$	Euler ₂	=	$\frac{3}{1}$
Newton ₂	=	$\frac{1 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1}$	Euler _{n+1}	=	$\frac{\text{teller}_{n-1} + \text{teller}_n \cdot (4n - 2)}{\text{noemer}_{n-1} + \text{noemer}_n \cdot (4n - 2)}$
Newton ₃	=	$\frac{2 \cdot 2 + 1}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2}$	Euler ₃	=	$\frac{1 + 3 \cdot 6}{1 + 1 \cdot 6} = \frac{19}{7}$
Newton ₄	=	$\frac{5 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 3}$	Euler ₄	=	$\frac{3 + 19 \cdot 10}{1 + 7 \cdot 10} = \frac{193}{71}$
Newton ₅	=	$\frac{16 \cdot 4 + 1}{6 \cdot 4} = \frac{65}{24}$	Euler ₅	=	$\frac{19 + 193 \cdot 14}{7 + 71 \cdot 14} = \frac{2721}{1001}$
Newton ₆	=	$\frac{65 \cdot 5 + 1}{24 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 163}{2 \cdot 60}$	Euler ₆	=	$\frac{193 + 2721 \cdot 18}{71 + 1001 \cdot 18} = \frac{49171}{18089}$
Newton ₇	=	etc. = $\frac{1957}{720}$	Euler ₇	=	etc. = $\frac{1084483}{398959}$
Newton ₈	=	$\frac{20 \cdot 685}{20 \cdot 252}$	Euler ₈	=	$\frac{28245729}{10391023}$
Newton ₉	=	$\frac{109601}{40320}$	Euler ₉	=	$\frac{848456353}{312129649}$
Newton ₁₀	=	$\frac{10 \cdot 98641}{10 \cdot 36288}$	Euler ₁₀	=	$\frac{28875761731}{10622799089}$
Newton ₁₁	=	$\frac{9864101}{3628800}$	Euler ₁₁	=	$\frac{1098127402131}{403978495831}$

Figuur 1 Twee rationale rijen, beide convergerend naar dezelfde irrationale limiet e

Figuur 1 toont elf termen van de Newtonrij (ook *faculteitenrij*) en de Eulerrij (*beste-breukenrij*) met constructie-voorschriften. De hier toegepaste recursie-formule voor de Newtonrij gebruikt (vanaf de tweede term) steeds één voorafgaande vorm, die voor de Eulerrij (vanaf de derde term) steeds twee.

DRIE tegen EEN !!!

De kommagvormen in figuur 2 geven decimale (onder)benaderingen van de termen, in 25 cijfers nauwkeurig. De gekleurde decimaal is steeds de eerste die afwijkt van e. Bij Euler blijkt elke volgende term DRIE correcte decimalen méér te geven, tegen bij Newton maar (zowat) EEN.

Tenminste, voor het hier zichtbare begin van die rijen, verderop zou het best nog anders kunnen lopen.

Beste rationale benaderingen

Elke term in de Eulerrij (op de eerste na) is een 'beste benadering' van de limiet. Dat betekent dat alleen met hogere teller én noemer dichterbij te komen is. Zo niet bij Newton: de term $\frac{65}{24}$ is slechter dan $\frac{49}{18}$.

De Newtonrij benadert de e-grens vanaf de onderkant, terwijl de Euler-termen afwisselend te klein en te groot zijn.

Zelf staartdelen

De decimale benaderingen in figuur 2 hebben méér cijfers dan je krijgt met de deelttoets van een rekendoosje. Ze komen uit een programmaatje (voor de TI-83) dat het staartdelingsrecept precies nadoet:

- voer deeltal en deler in;
- laat nagaan hoe vaak die deler (noemer) van het deeltal (teller) af kan;
- laat dat aantal op het scherm zetten, en las een pauze in om het zelf te noteren;
- laat het overschot van het deeltal (nu kleiner dan de deler) tien keer zo groot maken, en stuur die opgeblazen deeltalrest terug naar de aftrektest.

Elke cyclus levert – zonder enige afronding – een volgende decimaal. Tot de honderdste of als je wilt tot de duizendste! In code:

PROGRAM: LONGDIVision

Input	Teller	Input	Noemer	0 → Decimaal
Lbl 1	If T < N	Goto 2	T - N → T	D + 1 → D Goto 1
Lbl 2	Disp D	Pause	10 × T → T	0 → D Goto 1

Newton	Euler
1,000000000000000000000000000000	1 1,000000000000000000000000000000
2,000000000000000000000000000000	2 3,000000000000000000000000000000
2,500000000000000000000000000000	3 2,7142857142857142857142857142857
2,666666666666666666666666666666	4 2,7183098591549295774647887
2,708333333333333333333333333333	5 2,7182817182817182817182817182817
2,716666666666666666666666666666	6 2,7182818287356957266847255
2,718055555555555555555555555555	7 2,7182818284585634112778506
2,7182539682539682539682539682539	8 2,7182818284590458514046210
2,7182787698412698412698412698412	9 2,7182818284590452347575606
2,7182815255731922398589065	10 2,7182818284590452353607532
2,7182818011463844797178130	11 2,7182818284590452353602871
2,7182818261984928651595318	12
2,7182818282861685639463417	13 (krachtiger rekentuig vereist)
2,7182818284467590023145578	14
2,7182818284582297479122875	15

Figuur 2 Decimale ondergrenzen voor de termen van beide rijen

De eerste honderd decimalen van e:

2, 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995
95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274

Trouwe lezers van *Pythagoras* hebben vorig jaar al kennis gemaakt met de honderd gevangenen in onze rubriek *Problemen – Oplossingen*, zie het juni-nummer van jaargang 42. Het vraagstuk houdt de gemoederen aardig bezig, er blijken namelijk vele interessante oplossingen te zijn. Maar wie vindt de beste?



30

°° Honderd gevangenen

Het probleem

Honderd gevangenen zitten elk in een eigen cel. Er is een cipier en één extra cel, met daarin een lamp met een schakelaar. Elke dag vanaf dag 1 (elke gevangene kent dag 1) neemt de cipier willekeurig een gevangene mee naar de cel met de lamp. Deze gevangene mag de lamp uitdoen of aanlaten als de lamp brandt, en aandoen of uitlaten als de lamp uit is. Daarna gaat de gevangene terug naar zijn eigen cel, zonder dat de andere gevangenen daar iets van merken. De volgende dag neemt de cipier

weer willekeurig een gevangene mee naar de cel met de lamp (dat kan dus dezelfde gevangene zijn). En zo verder.

Als één van de gevangenen op een bepaalde dag met zekerheid kan zeggen 'we zijn nu allemaal ten minste één keer in de cel met de lamp geweest', dan worden zij allen vrijgelaten.

De 100 gevangenen mogen vooraf één keer kort bij elkaar komen om hun strategie te bespreken. Welke strategie kiezen zij?

Als je de oplossing eerst zelf wilt vinden, lees dan niet verder.

Strategie

De gevangenen kunnen afspreken de volgende strategie te volgen. De gevangene die op dag 1 in de cel komt, is de *leider* en doet de lamp aan (of laat hem aan). De overige 99 doen de lamp alleen uit wanneer zij voor de eerste keer de lamp AAN aantreffen. Ze doen niets als de lamp uitstaat en ook niets als de lamp aanstaat en ze hem al een keer uitgedaan hebben. De leider kan weer aan de beurt komen terwijl de lamp nog steeds aanstaat. Dan doet hij niets. Maar als de leider de cel inkomt en de lamp is uit, dan weet hij dat één van de overige 99 gevangenen er voor het eerst is geweest en de lamp heeft uitgedaan. De leider doet de lamp weer aan en wacht opnieuw tot hij weer aan de beurt is en de lamp uit is. Dan is er een tweede gevangene geweest die de lamp heeft uitgedaan (niet de eerste, want die mag de lamp niet nog een keer uitdoen). De leider doet hem weer aan, enzovoorts. Als de leider voor de 99ste keer in de cel komt met de lamp uit, kan hij roepen 'we zijn nu allemaal ten minste één keer in de cel met de lamp geweest'.

Extra vragen

Er zijn onmiddellijk enkele vragen die rijzen. Hoe lang gaat het bij deze strategie gemiddeld duren voor de leider iedereen op vrije voeten kan stellen? Is er misschien een strategie denkbaar die sneller tot resultaat leidt? En zelfs: is er een snelste strategie?

Iemand die enige ervaring heeft met kansrekening, weet dat er voor het antwoord van de eerste vraag een verwachtingswaarde moet worden uitgerekend.

De verwachte duur

De leider weet zeker dat ook alle andere gevangenen in de cel zijn geweest, als zij allemaal de lamp een keer hebben uitgedaan. Daarvoor is nodig dat hij steeds nadat iemand de lamp heeft uitgedaan, de lamp weer aan kan doen.

We gaan stap voor stap bepalen hoeveel tijd er naar verwachting nodig is, voor de leider iedereen vrij kan krijgen.

Zeg dat er n gevangenen in totaal zijn (uiteindelijk: $n = 100$), waarvan er j de lamp nog uit moeten doen.

Eerst stellen we ons de vraag: na hoeveel dagen komt er iemand uit die groep van j 'verse' gevangenen in de extra cel? Noem deze verwachtingswaarde even E . Per dag zijn er twee mogelijkheden:

1. de gevangene die de cel inkomt, is 'vers'; de kans daarop is j/n en in dat geval heeft het dus 1 dag geduurd;
2. de gevangene die de cel inkomt is niet 'vers'; de kans hierop is $(n-j)/n$ en na deze dag duurt het opnieuw gemiddeld E dagen. Voor de verwachtingswaarde E geldt dus:

$$E = \frac{j}{n} \cdot 1 + \frac{n-j}{n} \cdot (1 + E).$$

Hieruit bereken je gemakkelijk dat

$$E = \frac{n}{j}.$$

Met dezelfde redenering kun je inzien dat het steeds gemiddeld n dagen duurt voor de leider weer in de extra cel komt.

Recurrente betrekking

Ga weer uit van de situatie dat er nog j gevangenen zijn die de lamp nog nooit hebben uitgedaan. Noem $E(j)$ het verwachte aantal dagen tot het einde van het spel; ofwel, tot de leider zeker weet dat iedereen een keer in de extra cel is geweest.

We berekenen $E(j)$ via een slinkse omweg, namelijk door te bepalen wat $E(j) - E(j-1)$ is.

Stel, op een dag is de lamp in de extra cel aan, en er zijn nog j gevangenen die de lamp moeten uitdoen. Dan duurt het eerst n/j dagen voordat een van hen de lamp kan uitdoen, en dan nog eens n dagen voor de leider de lamp weer heeft kunnen aandoen. Vanaf dat moment zitten we in dezelfde situatie, nu echter niet met j , maar met $j-1$ gevangenen.

Dit levert ons de volgende *recurrente betrekking*:

$$E(j) = E(j-1) + n + n/j.$$

Een formule voor $E(j)$

De recurrente betrekking kunnen we stapsgewijs uitwerken:

$$\begin{aligned} E(j) &= E(j-1) + n + \frac{n}{j} \\ E(j) &= E(j-2) + n + \frac{n}{j-1} + n + \frac{n}{j} \\ E(j) &= E(j-3) + n + \frac{n}{j-2} + n + \frac{n}{j-1} + n + \frac{n}{j} \end{aligned}$$

Doorgaan tot $E(0)$ in het rechterlid levert:

$$E(j) = E(0) + jn + n \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $E(0) = 0$, immers, het duurt geen dag voor 0 gevangenen allen in de cel geweest zijn. Dus we hebben de formule:

$$E(j) = jn + n \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. (*)$$

32

De sommatie die hierin staat, schrijven we kortweg als $s(j)$, dus:

$$s(j) = \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}$$

en heet de *harmonische reeks*. Met Excel of met je GR kun je er gemakkelijk een tabel voor maken. In onderstaande tabel zie je enkele waarden van $s(j)$ en ook van $E(j)$, die we voor onze verdere berekeningen nodig hebben.

$s(j)$	$E(j) = jn + n \cdot s(j)$
$s(95) = 5,136346$	$E(95) = 10013,6346$
$s(96) = 5,146763$	$E(96) = 10114,6763$
$s(97) = 5,157072$	$E(97) = 10215,7072$
$s(98) = 5,167277$	$E(98) = 10316,7277$
$s(99) = 5,177378$	$E(99) = 10417,7378$
$s(100) = 5,187378$	$E(100) = 10518,7378$

Duur bij eerste strategie

De strategie die we totnogtoe hebben besproken, noemen we de 'de eerste is de leider'-strategie. De totale verwachte spelduur bij deze strategie noemen we E_1 .

Omdat op dag 1 direct de leider vastligt en er dan nog maar $n - 1$ gevangenen het licht uit hoeven doen, geldt:

$$E_1 = 1 + E(n-1).$$

Met (*) levert dat

$$E_1 = 1 + (n-1)n + n \cdot s(n-1), \quad n = 2, 3, \dots$$

De belangrijkste term in deze uitdrukking is n^2 . Dus bij 100 gevangenen is het verwachte aantal dagen niet veel groter dan 10.000. Voor 100 gevangenen geldt dan $E_1 = 1 + 9900 + 100 \cdot 5,177378 \approx 10418,74$ dagen.

Een betere strategie

De honderd gevangenen zouden echter een betere strategie kunnen volgen. Dan moet degene die op dag 2 de extra cel inkomt, de leider worden.

Er zijn dan twee mogelijkheden, óf op dag 1 en dag 2 gaat *dezelfde* persoon de cel in, óf op dag 2 gaat een *ander* dan op dag 1 de cel in.

De kans dat op dag 2 dezelfde aan de beurt is en leider wordt, is $1/n$. In dat geval zijn er nog $n - 1$ over die nog aan de beurt moeten komen. De kans dat op dag 2 een ander aan de beurt komt en leider wordt, is $(n - 1)/n$, in dit geval zijn er nog $n - 2$ over die nog niet in de cel geweest zijn.

Let op dat in beide gevallen de leider weet hoeveel gevangenen hij nog moet tellen.

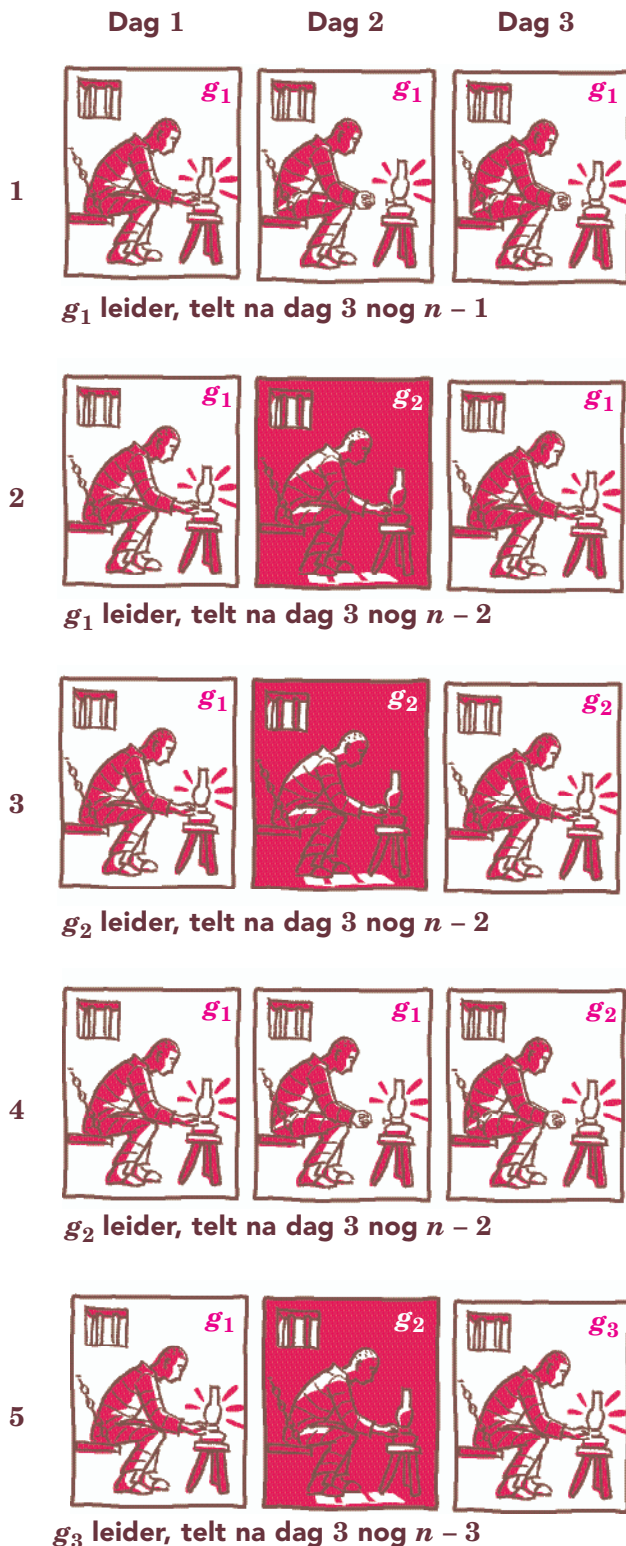
Noem E_2 de verwachte spelduur bij deze 'de tweede is de leider'-strategie, dan geldt:

$$E_2 = 2 + \frac{1}{n}E(n-1) + \frac{n-1}{n}E(n-2).$$

Voor 100 gevangenen wordt dit:

$$\begin{aligned} E_2 &= 2 + \frac{1}{100}E(99) + \frac{99}{100}E(98) = \\ &= 2 + \frac{1}{100}(9900 + 100 \cdot 5,177378 + \\ &\quad + 99(9800 + 100 \cdot 5,167277)) \approx \end{aligned}$$

10319,74 dagen. Dus zo'n 100 dagen minder, ofwel 1% minder.



Figuur 1 Vijf mogelijkheden voor de eerste drie gevangenen die aan de beurt komen

Nog beter

Het kan echter nog beter. De gevangenen moeten dan afspreken dat degene die op de derde dag naar de cel wordt geleid, de leider is. Voor de eerste twee dagen moe-

ten ze dan nog een extra afspraak maken, die dagen weten ze immers nog niet of ze wel of niet de leider zullen worden. De eerste doet de lamp sowieso aan. Komt hijzelf de tweede dag weer in de cel, dan laat hij de lamp aan. Komt een ander de tweede dag in de cel, dan doet die de lamp uit. Zo weet degene die de derde dag komt en de leider zal zijn (en dus de lamp aandoet of aanlaat) hoeveel gevangenen er in totaal in de cel geweest zijn. De niet-leiders die op de dagen 1 en 2 geweest zijn, doen natuurlijk niets meer.

Voor de eerste drie gevangenen (g_1 , g_2 en g_3) die aan de beurt komen, bestaan er vijf mogelijke situaties; deze situaties zijn getekend in figuur 1. De kans dat zo'n situatie zich voordoet, is (van boven naar beneden):

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}.$$

Let op: bij de vierde situatie vindt g_2 de lamp aan en in situatie vijf vindt g_3 de lamp uit.

Noem E_3 de verwachte spelduur bij deze strategie, dan geldt uitgaande van 100 gevangenen:

$$E_3 = 3 + \frac{1}{10000} E(99) + 3 \cdot \frac{99}{10000} E(98) + 99 \cdot \frac{98}{10000} E(97) \approx$$

10221,73 dagen. Dit is weer ongeveer 1% minder.

De vierde dag

Het ligt voor de hand om de strategie nog verder te verbeteren door degene die op dag 4 de cel inkomt tot leider te maken. Maar dat gaat fout. Degene die op dag 4 voor de eerste keer de cel inkomt, moet weten hoe vaak hij de lamp zal moeten aandoen. Hij moet dus weten hoeveel verschillende gevangenen er al in de cel zijn geweest op de eerste drie dagen. Dat kunnen er 3, 2 of 1 geweest zijn. Maar in de cel staat alleen een lamp die aan of uit kan zijn, dat zijn maar twee mogelijke tekens om drie verschillende boodschappen door te geven. Dat is dus te weinig. Maar misschien kun je zelf nog een betere oplossing vinden.

