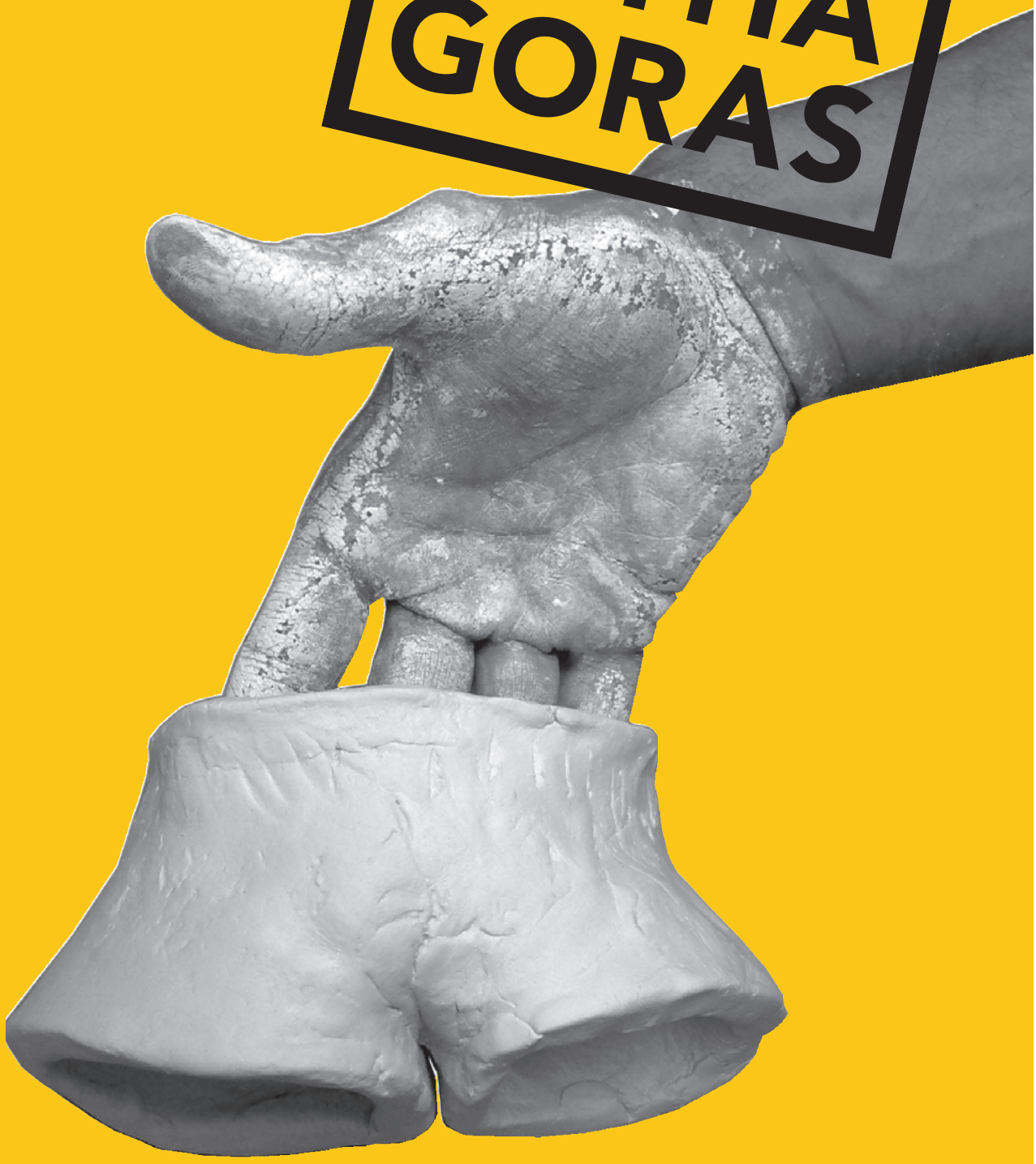
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN SEPTEMBER 2004

PYTHAGORAS

44ste jaargang nummer 1
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster
Timon Idema

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden. Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

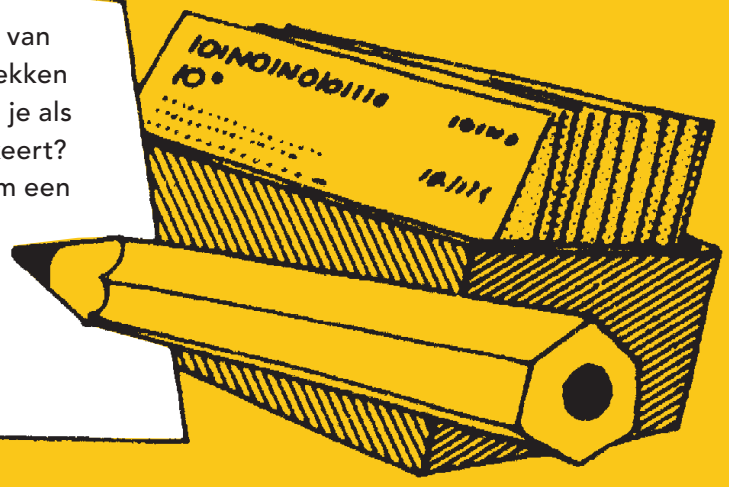
Aan dit nummer werkten mee
prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@its.tudelft.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), drs. J.S. Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag (j.sgroot.member2@freeler.nl), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeen-schap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. J.M. Notenboom, oud-docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (notenboom1729@zonnet.nl), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag
Kreatief met klei.

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

Dit jaar staat ons blad in het thema van de topologie. Kun je je T-shirt uittrekken terwijl je je jas aanhoudt? Wat krijg je als je een fietsband binnenstebuiten keert? En hoeveel kleuren heb je nodig om een landkaart op die fietsband te kleuren? Op deze en vele andere topologische vragen zul je de antwoorden vinden in deze 44ste jaargang van *Pythagoras*.



INHOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 5 **Topologie of de kunst van het slecht tekenen**

6 – 9 **Topologie, rekbaar maar toch precies**

10 – 11 **Topologie met de handen**

12 – 13 **Snelle som**

14 – 15 **Pen en papier**

16 – 17 **Priemgetallenprijsvraag**

18 – 19 **Pythagoras Olympiade**

20 – 21 **Problemen – Oplossingen**

22 – 25 **Sinus en cosinus**

26 – 31 **De stelling van Pick**

32 **Journaal**

33 **Oplossingen Kleine nootjes nr. 6**
Oplossing Topologie met de handen

door **Dick Beekman**
www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

Wolkenkrabber

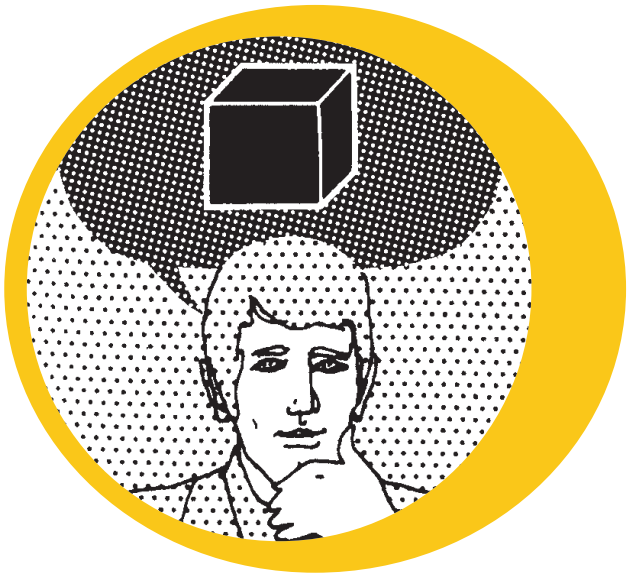
Een New Yorker werkt op de 80ste verdieping van een wolkenkrabber. 's Morgens is zij altijd de eerste in de lift, die zij dan naar de 70ste verdieping stuurt om de laatste tien verdiepingen de trap te nemen. Als het regent gaat zij wel direct naar de 80ste. Hoe komt dat?

Kilometerstand

De kilometerstand van mijn auto bestaat uit vijf gelijke cijfers. Het aantal kilometer dat ik moet rijden om voor het eerst een stand met vijf verschillende cijfers te krijgen, is een priemgetal. Welke stand staat nu op de teller?

Voetganger en automoblist

Een voetganger en een automobilist starten tegelijk. De voetganger loopt met een snelheid van 6 kilometer per uur. Na 13 stappen van de voetganger is de auto aan het einde van de straat. Na nog eens 91 stappen is de voetganger zelf ook aan het einde van de straat. Wat is de snelheid van de auto?

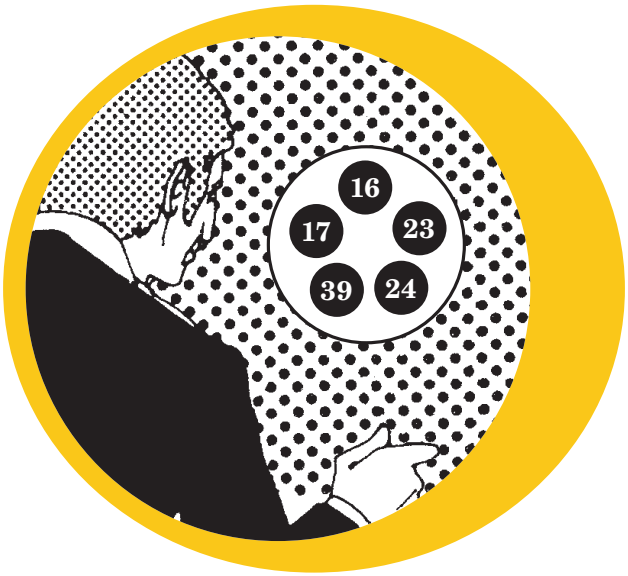


27 kubusjes

Een kubus wordt rondom zwart geverfd en daarna verzaagd in 27 even grote kubusjes. Hoeveel daarvan hebben drie zwarte zijden? En hoeveel twee, één en nul?

Schietschijf

Op een schietschijf bevinden zich de getallen 16, 17, 23, 24 en 39. Wat is het kleinste aantal schoten om een som van 100 te schieten?



Stel je voor dat deze voorwerpen gemaakt zijn van een zeer elastisch materiaal – je mag ze willekeurig vervormen, zolang je maar niets losscheurt of aan elkaar zet –, dan blijken er hier eigenlijk maar drie topologische vormen te zijn: hompen zonder gat, hompen met een gat, en hompen met twee gaten.

nul gaten

één gat

twee gaten

door **J.M. Aarts**

TOPOLOGIE

of de kunst van het slecht tekenen

Sommige mensen zeggen: 'Topologie, oh, dat is de kunst van het slecht tekenen.' Anderen zeggen: 'Topologie, dat is de studie van krommen, oppervlakken en ruimtelijke lichamen.' Om te beginnen, *topologie* is een onderdeel van de meetkunde. In de gewone meetkunde worden hoeken en lijnstukken gemeten met geodriehoek en lineaal. En twee figuren zijn hetzelfde als ze dezelfde afmetingen hebben. Zo zijn twee driehoeken gelijk als de drie zijden twee aan twee gelijk zijn. Maar in de topologie gaat het niet over lengte van krommen of over oppervlakten, noch over grootte van hoeken. Liniaal en geodriehoek heb je bij de studie van de topologie niet nodig. In de topologie heb je te maken met flexibele figuren. Men noemt de topologie ook wel *rubbermeetkunde*. Je moet je voorstellen dat de figuren zijn gemaakt van heel elastisch materiaal. Je mag een figuur, die van dat materiaal gemaakt is, uitrekken, maar niet scheuren of plakken. En toch blijft de topologische vorm van de figuur hetzelfde.

We kunnen dit het beste laten zien aan de hand van wat voorwerpen uit het dagelijks leven. Stel dat de voorwerpen naar believen vervormd mogen worden, zolang je het materiaal maar niet scheurt of plakt. Voorwerpen van dezelfde kleur in de figuur hiernaast hebben dezelfde topologische vorm. Het bepalende verschil is het aantal gaten. Als figuren van dezelfde (elastische) vorm zijn, dan noemen we ze *homeomorf*. Het laatste woord is afgeleid uit het Griekse *homoios* (gelijk) en *morphe* (vorm).

Voorbeelden

Men zegt wel eens: een topoloog ziet het verschil niet tussen een donut en een koffiekop. Dat is natuurlijk onzin, maar als een topoloog met zijn vak bezig is dan wíl hij het verschil niet zien. Donut en koffiekop zijn hompen materiaal (deegwaar of klei, dat doet er niet toe) met één gat erin.

Laten we eens kijken naar de topologische vorm van de letters van het alfabet. We gebruiken hierbij schreefloze hoofdletters van het font *Kabel*:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M,
N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Stel je voor dat de letters van draden zijn gemaakt. De eerste letter, de A, is niets anders dan een 'cirkel' met twee 'pootjes'. Er is nog een letter van deze 'vorm', namelijk de R.

De letter B is uniek; er is geen andere letter van deze vorm. Andere letters met een unieke vorm zijn: P en Q.

De C is de eerste uit een heel legioen: C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, Z.

Tenslotte hebben we nog vier kleine groepjes van letters: D, O; H, K; W, X en E, F, T, Y.

Letters uit verschillende groepjes zijn niet homeomorf. Kijk eens naar de I en de O, topologisch bezien een interval respectievelijk een cirkel. Laten we uit I een punt weg dat géén eindpunt is, dan valt I uiteen in twee stukken. Laten we echter uit O een punt weg, dan houden we één stuk. Daarom kunnen I en O niet dezelfde vorm hebben.

Opgave 1. Waarom zijn A, B, P, Q, X, I, D, Y, H twee aan twee niet homeomorf?
Opgave 2. Waarom zijn bij het font *Avenir* (het huisstijllettertype van *Pythagoras*) de W en de X *niet* homeomorf?

°Topologie, rekbaar maar toch precies

Figuur 1

Deze twee figuren zijn homeomorf, dat wil zeggen dat ze topologisch niet van elkaar verschillen

Topologie is een tak van de meetkunde, waarin het niet uitmaakt of een lijn recht of krom is, een hoek groot of klein. 'Een soepel soort wiskunde' zul je misschien denken, maar het tegendeel is waar. Het vereist juist veel precisie om die rekbaarheid in wiskundige definities te vatten.

door **J.M. Aarts** en **Marco Swaen**

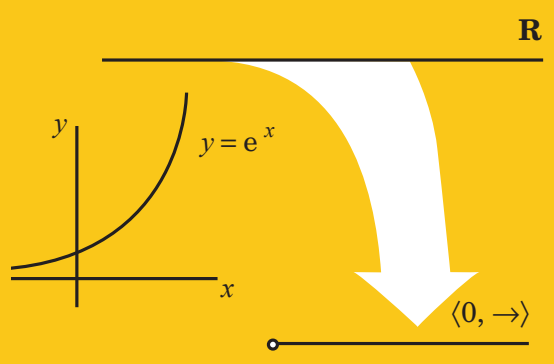
Ruimte

Op een driehoek passen we elastische vervorming toe met als resultaat de kronkel in figuur 1. De driehoek is onherkenbaar veranderd, maar de topoloog ziet toch nog zaken die niet veranderd zijn. Dat zijn zeer algemene zaken, die zo vanzelfsprekend zijn dat je je ze waarschijnlijk niet realiseert. Het zijn eigenschappen die te maken hebben met de figuur als ruimte. Om enkele van die zaken te noemen: de figuur is nog steeds plat (tweedimensionaal), heeft nog steeds een aaneengesloten binnengebied, en daaromheen een aaneengesloten rand. Er blijven in de figuur bepaalde ruimtelijke wetten gelden, zoals dat twee puntwezens die zich over de rand bewegen elkaar niet kunnen passeren. Dat als twee puntwezens elkaar in het inwendige tegenkomen, zij elkaar daar wel kunnen passeren. Dat een letter F die in het inwendige rondzwemt zich niet kan omkeren tot zijn eigen spiegelbeeld. Zou die F vrij door het inwendige van een bol bewegen, dan kon hij dat wel.

De topoloog bekijkt de figuren van binnen uit, als het ware door de ogen van denkbeeldige puntwezentjes die in die ruimte leven, die geen lengten of hoeken kunnen meten en een zeer beperkt gezichtsvermogen hebben. Laten we eens op die manier kijken naar twee ruimten, enerzijds $\mathbf{R}$, de reële rechte oftewel de getallenlijn, en anderzijds $\mathbf{I}$, het

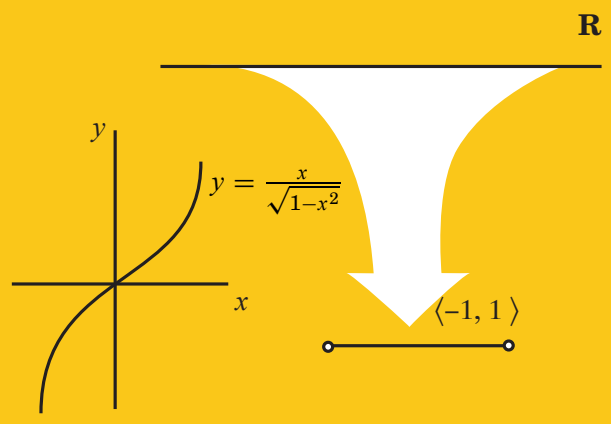
Figuur 2

$y = e^x$ laat zien dat $\mathbf{R}$ en $\langle 0, \rightarrow\rangle$ homeomorf zijn



Figuur 3

$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ laat zien dat $\mathbf{R}$ en $\langle -1, 1\rangle$ homeomorf zijn



gesloten interval $[0, 1]$. Merkt een puntwezentje of hij in $\mathbf{R}$ zit danwel in $\mathbf{I}$? Voor de puntwezentjes is $\mathbf{R}$ er een nogal monotone omgeving. Waar in $\mathbf{R}$ je je ook bevindt, je kunt vooruit en je kunt achteruit. In $\mathbf{I}$ echter zijn er twee punten waar vanuit je nog maar één kant op kunt, bij 0 en bij 1. Dus ja: voor puntwezentjes is er verschil tussen $\mathbf{I}$ en $\mathbf{R}$.

Homeomorf

Centraal in de topologie staat het begrip *homeomorfie*. Twee ruimten X en Y zijn homeomorf als ze topologisch hetzelfde zijn. In termen van de puntwezentjes wil dat zeggen: X en Y zijn homeomorf als puntwezentjes er niet achter kunnen komen of ze nou in X leven dan wel in Y. De twee ruimten $\mathbf{I}$ en $\mathbf{R}$ zijn dus niet homeomorf, want in $\mathbf{I}$ bemerkt het puntwezentje eindpunten. De strenge wiskundige definitie van 'homeomorfie' verwijst uiteraard niet naar puntwezentjes. Die definitie luidt als volgt:

De ruimten X en Y zijn *homeomorf* als er afbeeldingen f van X naar Y en g van Y naar X zijn zó dat
1. de functies f en g elkaars inversen zijn;
2. de functies f en g continu zijn.

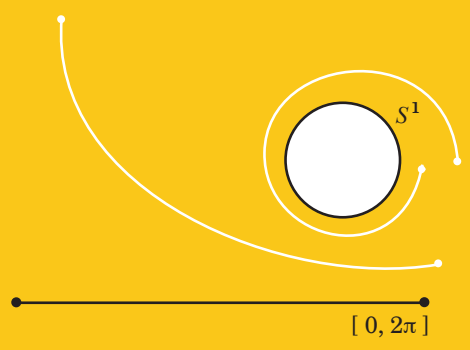
De betekenis van de afbeeldingen f en g moet je als volgt zien: iemand die beweert dat ruimte X precies hetzelfde in elkaar zit als ruimte Y, moet voor elke plek x in X een plek $f(x)$ in Y kunnen aanwijzen waar het er (voor een puntwezentje) net zo uitziet. En andersom. Dat f en g elkaars inversen zijn, garandeert dat de punten van X precies gekoppeld zijn aan de punten van Y. Dat ook de omgeving van x hetzelfde moet zijn als die van $f(x)$ wordt vastgelegd in de eis dat f en g continue afbeeldingen zijn. Zonder nu nader in te gaan op de vraag wat continuïteit inhoudt, melden we alvast dat (bijna) alle functies die je ooit bent tegengekomen, bijvoorbeeld x^2, $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\ln(x)$, e^x continu zijn. Met die wetenschap zullen we nu van een aantal ruimten bewijzen dat ze homeomorf zijn. Daarna zullen we het begrip continuïteit nader onder de loep nemen.

1. Hele lijn en halve lijn. We nemen $\mathbf{R}$, de reële getallenlijn $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$, en $Y = \langle 0, \rightarrow\rangle$, de positieve halfrechte, $f(x) = e^x$ en $g(y) = \ln y$, zie figuur 2.

Zoals je weet, zijn de natuurlijke logaritme en de exponentiële functie elkaars inverse, dus aan voorwaarde 1 is voldaan. We vertelden al dat de functies f en g continu zijn. De reële rechte en de positieve halfrechte zijn dus homeomorf. Dit klopt ook met het intuïtieve beeld. Van buitenaf zien we een duidelijk verschil tussen $\mathbf{R}$ en $\langle 0, \rightarrow\rangle$, maar de puntwezentjes, die geen gevoel voor afstand hebben, merken dat niet.

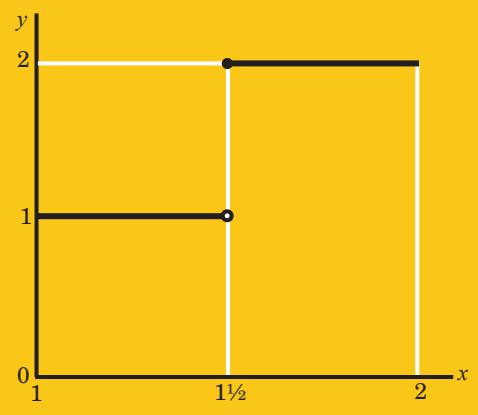
Figuur 4

Afbeelding van het interval $[0,2\pi]$ naar de cirkel; om de cirkel wordt een touwtje gelegd



Figuur 5

De 'afrondfunctie' rondt reële getallen af op gehele getallen



2. Hele lijn en open interval. Ook het interval $\langle -1, 1\rangle$ en de reële rechte $\mathbf{R}$ zijn homeomorf, zie figuur 3. Neem $X = \langle -1, 1\rangle$, $Y = \langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$, en bijvoorbeeld, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$.

3. Cirkel en interval. Een interessante 'ruimte' is de cirkel, bij topologen bekend onder de naam S^1, waarin S staat voor sfeer (bol), en 1 voor eendimensionaal. Zo is S^2 de ruimtelijke bol. We gaan uit van een cirkel (alleen de omtrek) in het platte vlak met straal 1 en middelpunt in de oorsprong. Intuïtief is het duidelijk dat S_1 niet homeomorf is met $\mathbf{I}$, S^1 heeft namelijk geen eindpunten zoals $\mathbf{I}$. Maar laten we eens kijken waar dat tevoorschijn komt als we de definitie volgen.

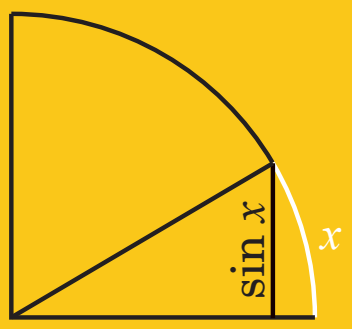
We maken eerst een afbeelding f van het interval $[0,2\pi]$ op S^1, zie figuur 4. Voor f kunnen we nemen $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Voorlopig moet je maar geloven dat f continu is. De tweede stap is nu de inverse van f te vinden. Maar zo'n inverse is er niet. Het is namelijk zo dat zowel $f(0) = (1,0)$ als $f(2\pi) = (1,0)$. Wat zou $g((0, 1))$ dan moeten zijn? 0 of 2π? En het kan niet beide tegelijk zijn. Onze poging (tegen beter weten in) te laten zien dat S^1 en $[0, 2\pi]$ homeomorf zijn, strandt hier. Maar misschien lukt het wel als we een andere f kiezen? Nee, welke je ook neemt, het zal niet lukken. (Aan jou de taak dat te bewijzen.)

°°°Continu

Laten we nu het begrip continuïteit eens uitdiepen. Een onvoorzichtig wiskundige zou kunnen zeggen: een continue afbeelding is een afbeelding die punten die dicht bij elkaar liggen, ook dicht bij elkaar afbeeldt. Uiteraard gaat hij daarmee onderuit, want hoe bepaal je wat 'dicht bij elkaar' is? Je zou het beter zo kunnen zeggen: de functie f is continu in a als op kleine afstand van a de functiewaarden niet te veel meer van $f(a)$ verschillen. En doen ze dat wel, blijf dan nog dichter bij a in de buurt, dan is het verschil daar wel klein genoeg. Ook hier zit nog veel onnauwkeurigheid in, maar langs deze weg komen we wel tot de scherpe wiskundige definitie, die we zullen formuleren in de vorm van een spel. In dat spel ben jij in gevecht gewikkeld met een onzichtbare, maar slimme tegenstander. De tegenstander zegt jou hoe dicht $f(x)$ bij $f(a)$ moet komen te liggen. Jij moet dan aangeven hoe dicht x bij a gekozen moet worden om dat te bereiken. Lukt je dit altijd, welke afstand de tegenstander ook eist, dan heb je aangetoond dat f continu is in a. Lukt je dit voor elke a in het domein van f, dan heb je aangetoond dat f continu is.

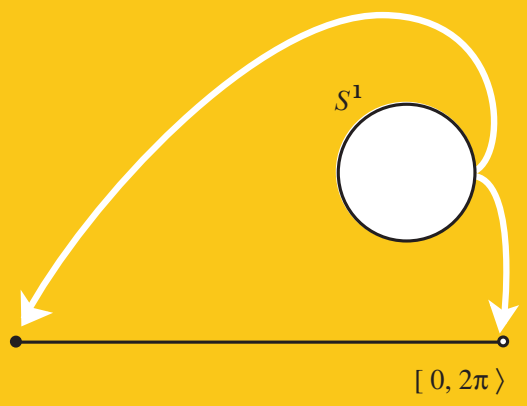
Figuur 6

Je ziet: $|\sin x| \leq |x|$



Figuur 7

Afbeelding van het interval $[0, 2\pi\rangle$ naar de cirkel; merk op dat het interval half-open is en dus wezenlijk verschilt van het interval in figuur 4



Niet continu

Verhelderend is een voorbeeld van een functie die duidelijk niet continu is. Neem op het interval $[1, 2]$ de 'afrondfunctie' $A(x)$ die getallen x afrondt op een geheel getal, zie figuur 5. Deze functie maakt bij $1\frac{1}{2}$ een sprong. Hoe komt die sprong in de definitie aan het licht? Stel, je tegenstander eist dat $A(x)$ minder dan $\frac{1}{10}$ van $A(1\frac{1}{2}) = 2$ mag verschillen. Welke afstand jij dan ook kiest, links van $1\frac{1}{2}$ zijn er altijd waarden die zo dicht bij $1\frac{1}{2}$ zitten, en voor die waarden is $A(x)$ gelijk aan 1, dus meer dan $\frac{1}{10}$ verschillend van 2.

Sinus en cosinus

Met de definitie kun je bewijzen dat de functies $\sin$ en $\cos$ continu zijn. Het enige dat je moet weten zijn enkele gonio-formules en de ongelijkheid: $|\sin x| \leq |x|$ voor alle x, zie figuur 6. Hieruit volgt direct dat de functie $\sin$ continu is in 0: als je tegenstander je bijvoorbeeld dwingt ervoor te zorgen dat $|\sin x - \sin 0|$ kleiner is dan $0{,}001$, dan zorg je er gewoon voor dat $|x| < 0{,}001$.

Om de continuïteit van de sinusfunctie over heel $[0, 2\pi]$ aan te tonen, ga je als volgt te werk. Op je formuleblad vind je $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{1}{2}(x+a)\sin\frac{1}{2}(x-a)$, waaruit weer volgt $|\sin x - \sin a| \leq |x - a|$. Als nu $|x - a| < 0{,}001$, dan ook $|\sin x - \sin a| < 0{,}001$.

De cosinusfunctie kun je op dezelfde wijze behandelen. De continuïteit van de functie $f(x) = (\cos x, \sin x)$ bewijs je nu als volgt. Neem eens aan dat je onzichtbare tegenstander eist dat $f(x)$ en $f(a)$ dichter bij elkaar moeten liggen dan $0{,}02$. Als je nu maar x dichter dan $0{,}01$ bij a neemt, dan vind je $|\cos x - \cos a| \leq 0{,}01$ en $|\sin x - \sin a| \leq 0{,}01$; het uiteindelijke resultaat is dat $f(x)$ dichter dan $0{,}01 \cdot \sqrt{2}$ bij $f(a)$ ligt, dus zeker dichter bij a dan $0{,}02$.

We bekijken nu de afbeelding h van het interval $[0, 2\pi\rangle$ op de cirkel S^1 met straal 1 en middelpunt O, die gegeven is door $h(x) = (\cos x, \sin x)$, zie figuur 7. De functie h heeft hetzelfde voorschrift als f uit voorbeeld 3, maar het domein van h verschilt in één punt van het domein van f. De continuïteit van h bewijs je op dezelfde manier als de continuïteit van f. De functie h heeft een inverse. Immers, bij ieder punt y van de cirkel is er precies één punt x uit $[0, 2\pi\rangle$ met $h(x) = y$; dan *moet* je de inverse k van h definiëren door $x = k(y)$. Maar de functie k is niet continu in $(1,0)$. Immers, willekeurig dicht bij $(1,0)$ liggen zowel punten boven als onder de as; de punten van boven de as worden door k afgebeeld in de buurt van 0, de punten van onder de as komen terecht in de buurt van 2π. De functie k is niet continu (namelijk niet continu in $(1,0)$) en daarom is h geen homeomorfisme.

door **Marco Swaen**

Topologie met de handen

Aflevering 1 *Kleien*

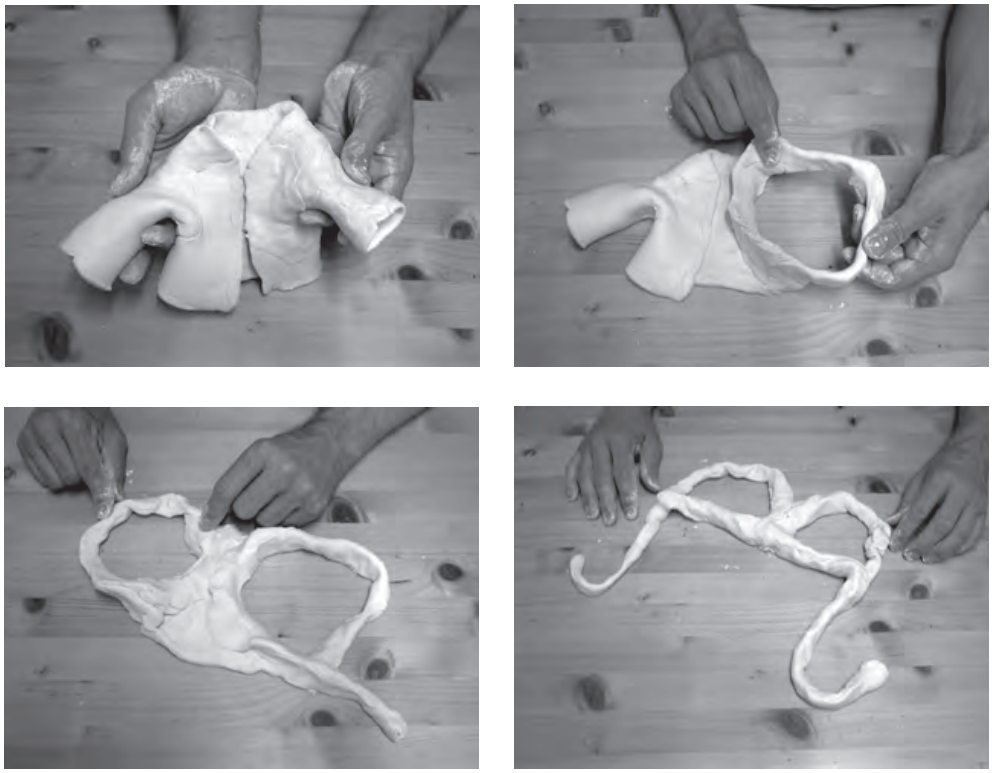
Leer al boetserend de mogelijkheden van topologische vervorming kennen. Je hebt nodig: soepel maar niet slap materiaal, zoals klei, boetseerwas, kneedgum of deeg.

Wat **WEL** mag:

duwen, uitrekken, stuwen, pletten.

Wat **NIET** mag:

losscheuren, aan elkaar plakken.



Voorbeeld: van jas tot bril.

Zelf proberen: zorg dat de ringen los komen. De oplossing staat op bladzijde 33.

Homeomorfie en kneden

Kun je vorm A omkneden tot B, dan zijn A en B blijkbaar homeomorf (zie bladzijde 7). Overigens is het niet zo dat homeomorfe vormen altijd al boetserend in elkaar overgevoerd kunnen worden. Al knedend kun je bijvoorbeeld niet spiegelen of binnenste-buiten keren, terwijl dit wel topologische afbeeldingen zijn.

Soms komt het van pas om snel een goede schatting te kunnen maken van de som van een aantal decimale getallen. Denk bijvoorbeeld aan het berekenen van de totale lengte van de nummers op een cd of aan het snel kunnen schatten van je gemiddelde cijfer voor wiskunde. In dit artikeltje bekijken we hoe groot de fout is van een simpel te hanteren schatter.

Snelle som

door **Jos Groot**

Hoe schat je snel de totale lengte van een cd op grond van de lengte van de nummers? Er is een snelle manier om de lengtes op te tellen die een vrij nauwkeurig antwoord geeft. Een voorbeeld: Je ziet hier een cd-hoesje van *Baueresque*, met veertien nummers die samen precies 45 minuten en 38 seconden duren. De snelle manier om dit te bepalen, is de volgende: tel alle minuten bij elkaar op $(2 + 2 + 3 + 4 + 2 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 = 39)$ en tel bij het resultaat het aantal nummers maal een halve minuut op: $39 + 14 \cdot 0{,}5 = 46$. Deze schatting verschilt slechts 22 seconden van de precieze duur, wat geen slecht resultaat is.

De methode is toepasbaar op rijtjes getallen die bestaan uit een geheel deel (in het voorbeeld: minuten) en een fractie (in het voorbeeld: seconden). Behalve aan tijden kun je denken aan proefwerkcijfers (bijvoorbeeld 7,3) en gewichten (bijvoorbeeld 1,234 kilogram). De methode is vooral handig

als de gehele delen klein zijn, en daardoor makkelijk op te tellen, maar de fracties juist groot en dus moeilijk te sommeren.

Als de fracties uniform verdeeld zijn (in het voorbeeld van de cd betekent dit dat de mogelijkheden $0, 1, 2, \ldots, 59$ even waarschijnlijk zijn), dan werkt de methode. Dat zal vaak niet gelden voor de prijzen op een supermarktbon, door de afronding naar 'mooie' getallen, zoals $0{,}99$. In dit geval zal de schatting er naast zitten.

Onzuivere schatter

We gaan bekijken hoe goed de schattingsmethode precies is.

We nemen aan dat we n getallen hebben ($n = 14$ in het voorbeeld). De gehele delen noemen we g_i, met $i = 1, 2, \ldots, n$. Elke g_i is niet-negatief. De fracties f_i zijn ook niet-negatief, maar ditmaal niet groter dan een zekere m. In het voorbeeld is $m = 59$ (seconden). De 'schattingsregel' zegt nu dat de schatting s van de som het volgende is:

$$s = g_1 + g_2 + \cdots + g_n + 0{,}5 \cdot n$$

De eenheid van s is hierin hetzelfde als van de g_i's (minuten in het voorbeeld).

Wat is de exacte som, gemiddeld genomen? Een fractie tussen de 0 en de m is gemiddeld $m/2$. De waarde $m/2$ is echter niet precies een 'half geheel deel', maar iets kleiner: $59/2 = 29{,}5$ seconden is net geen halve minuut. De precieze gemiddelde som S is dan ook

$$S = g_1 + g_2 + \cdots + g_n + 0{,}5 \cdot n \cdot \frac{m}{m+1}.$$

Het verschil met de schatting s is de term $\frac{m}{m+1}$. De schatting s is dus gemiddeld genomen iets te hoog. In het voorbeeld is $s = 46$ tegen $S = 45\frac{53}{60}$ (45 minuten en 53 seconden). S is dus, hoewel nog steeds te hoog, iets beter dan s.

Omdat s gemiddeld iets te hoog uitkomt, wordt deze schattingsregel een *onzuivere schatter* genoemd. Doordat de afwijking klein is, is de methode toch bruikbaar. Hoe groter m, hoe kleiner de afwijking. De schattingsformule zal dus wat beter werken voor bijvoorbeeld gewichten ($\frac{m}{m+1} = \frac{999}{1000} = 0{,}999$) dan voor tijden ($\frac{59}{60} \approx 0{,}983$).

Wil je een nog betere schatting maken dan S, dan moet je een bovengrens kennen voor de lengte van de nummers. Bij die gegeven grens zul je dan altijd een lager gemiddeld aantal seconden hebben dan 30.

° Standaardafwijking

Je zult willen weten hoe goed de schatter is om te weten of (en wanneer) hij bruikbaar is.

Wat is de gemiddelde afwijking van de schatter? Voor de afwijking van een schatter wordt vaak de *standaardafwijking* (genoteerd met σ) genomen, omdat die makkelijk uit te rekenen is. Het is de *wortel van het gemiddelde kwadratische verschil tussen de schatting en de werkelijke waarde*. Hoe groter de standaardafwijking, hoe slechter de schatting. Zonder afleiding geven we hier de standaardafwijking:

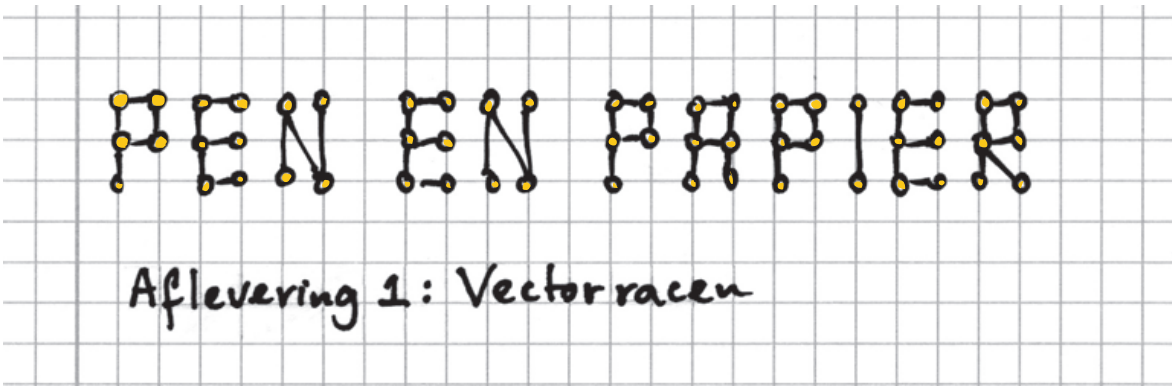
$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{12} + \frac{n(3n-1)}{12(m+1)^2}}.$$

Voor het voorbeeld geldt dat $n = 14$ en $m = 59$, dus $\sigma \approx 1{,}38$ minuten. Als m groter is dan n, dan is de rechterterm onder het wortelteken veel kleiner dan de linker term (ongeveer $0{,}01$ respectievelijk 1 in het voorbeeld). De standaardafwijking kan dan worden benaderd met

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{n}{12}}.$$

De standaardafwijking wordt groter als n groter wordt, waardoor de schattingsmethode minder nuttig is voor grote n. Maar dat geldt alleen als de *absolute fout* belangrijk is. Dat verandert als de *relatieve fout* belangrijk is. De relatieve fout is de standaardafwijking gedeeld door (in het voorbeeld) de geschatte totale tijd van de cd, en die is recht evenredig met n. De relatieve fout is daarom omgekeerd evenredig met $\sqrt{n}$, en wordt dus kleiner als n groter wordt. Als die fout het belangrijkst is, dan is de schatting juist goed voor grotere waarden van n.

door **Chris Zaal**



Talloze mensen zijn hun schooltijd doorgekomen door op de ruitjes van het wiskundeschrift spelletjes te spelen: *Boter, kaas en eieren, Vier op een rij, Kamertje verhuren. Vectorracen* is ook zo'n spel: een soort Formule 1 op papier. We leggen uit hoe dit werkt.

Vectorracen lijkt op gewoon autoracen. Je moet je voorstellen dat je op een Formule 1 circuit in een raceauto zit. Je hebt een gaspedaal en rempedaal. Op de rechte stukken kun je versnellen, in de bochten moet je afremmen.

Vectorracen speel je op ruitjespapier. Elke speler bestuurt een auto, voorgesteld door een stip op de kruispunten van de ruitjes. Er is een regel (de snelheidsregel) die zegt hoe je kunt versnellen en afremmen. Degene die het eerst over de finishlijn komt, heeft gewonnen. Maar als je te hard gaat, vlieg je uit de bocht!

Start

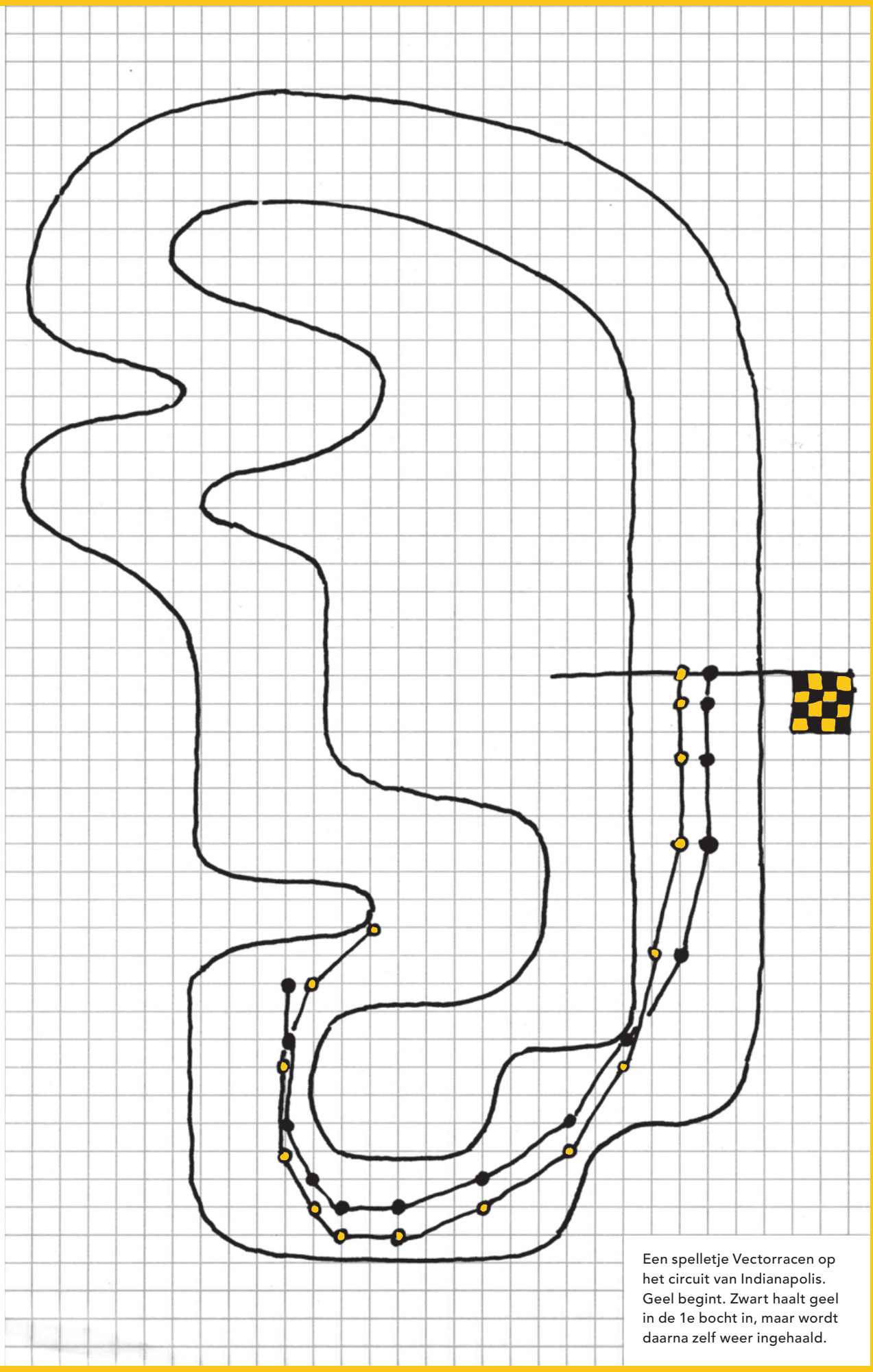
Het spel speel je met twee of meer spelers. Bij het begin van een spelletje tekent één van de deelnemers op een leeg vel ruitjespapier een racecircuit. Ergens in het circuit is de startlijn, die tevens finishlijn is. Deze start- en finishlijn loopt langs de lijnen van het ruitjespapier.

Daarna plaatsen de deelnemers hun auto's op de finishlijn, door een stip te zetten op een van de kruispunten van het ruitjespapier. Het is handig als verschillende spelers verschillende kleuren gebruiken.

Gas!

Zodra alle auto's aan de start staan van een nieuw getekend racecircuit, begint de wedstrijd.

- Om en om doen de spelers een zet.
- Een zet bestaat uit het verplaatsen van je raceauto van een kruispunt naar een nieuw kruispunt op het ruitjespapier.
- Tussen begin- en eindpunt van een zet wordt een recht lijnstuk getrokken. Dat lijnstuk moet in zijn geheel in het circuit liggen.
- Het lijnstuk van begin- naar eindpunt is wiskundig gezien een vector. Deze vector stelt de snelheid voor tussen twee zetten.
- *Snelheidsregel.* De mogelijkheden voor de volgende zet hangen af van de vorige zet. Als je in de vorige zet 3 naar links en 5 omhoog bent gegaan, mag je in de volgende zet ook 3 naar links en 5 omhoog (dan blijft je snelheid gelijk), maar je mag ook 1 meer of 1 minder naar links, en 1 meer omhoog of 1 minder omhoog. Ervan uitgaande dat je in de vorige zet 3 naar links en 5 omhoog bent gegaan, mag je voor de volgende zet kiezen uit 2, 3 of 4 naar links en 4, 5 of 6 omhoog. Per zet kun je je snelheid dus alleen met kleine stapjes veranderen.
- Bij de start is je snelheid nul. In de eerste zet kun je dus hooguit 1 hokje naar links of rechts, en hooguit 1 hokje omhoog of omlaag.
- Je kunt je auto niet neerzetten op een plek, waar al een andere auto staat.
- Als je door de snelheidsregel uit de bocht vliegt, heb je verloren.
- Degene die het eerst over de finish is, heeft gewonnen.



Een spelletje Vectorracen op het circuit van Indianapolis. Geel begint. Zwart haalt geel in de 1e bocht in, maar wordt daarna zelf weer ingehaald.

Priemgetallenprijsvraag

door **Matthijs Coster** en **René Swarttouw**

***Pythagoras* start de 44ste jaargang met een *priemgetallenprijsvraag*. Wie vindt met de vijf kleinste priemgetallen en met +, –, x en : de getallen 1 tot en met 200?**

Priemgetallen zijn getallen groter dan 1 die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. Er zijn oneindig veel priemgetallen. Het grootste priemgetal dat op dit moment bekend is, is $2^{24.036.583} - 1$. Jaarlijks worden er nog nieuwe, grotere, priemgetallen gevonden.

Over het vinden van de eerste tweehonderd natuurlijke getallen met behulp van de vijf kleinste priemen, gaat de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*.

Opdracht

1. Maak met de vijf priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11 (allemaal steeds precies één keer gebruiken) en de bewerkingen +, –, x en : elk getal van 1 tot en met 100. Je mag zoveel haakjes gebruiken als je wilt. Het zou je moeten lukken, wij hebben ze in elk geval allemaal gevonden.
2. Maak met de vijf priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11 (allemaal steeds precies één keer gebruiken) en de bewerkingen +, –, x en : zoveel mogelijk getallen tussen 101 en 200. Je mag zoveel haakjes gebruiken als je wilt. De redactie heeft ze (nog) niet allemaal kunnen vinden, misschien vind jij ze wel.

Prijzen

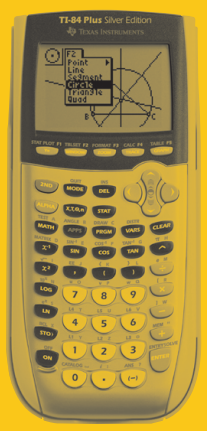
Texas Instruments maakt het ons mogelijk onder andere de volgende prijzen uit te loven: een grafische rekenmachine *TI-84 Plus* en een *TI-84 Plus Silver Edition*. De prijzen gaan naar de inzenders die de meeste of moeilijkst te vinden oplossingen insturen. Klasseninzendingen zijn ook toegestaan.

Inzenden

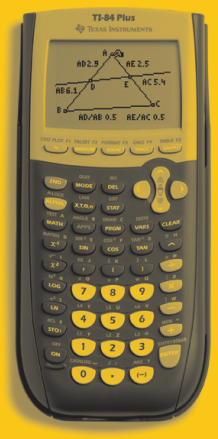
Je oplossingen kun je mailen of posten naar:
René Swarttouw, Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1083a
1081 HV Amsterdam
e-mail: rene@pythagoras.nu

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 december 2004.

3



7



11

11

5

$$1 = 2 - (((7 + 11) : 3) - 5)$$

$$2 = ((7 + 11) : 3 - 5) \times 2$$

$$3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2

°Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman** en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 oktober 2004.

OPGAVE 110

Op een n x n schaakbord zijn de vakjes in willekeurige volgorde genummerd van 1 tot en met n^2. Bewijs dat er altijd twee aangrenzende vakjes (horizontaal, verticaal of diagonaal) zijn waarvan de nummers meer dan n van elkaar verschillen.

OPGAVE 111

Bert en Ernie, verzot op spelletjes, spelen de volgende variant op *Vier op een rij*: Bert mag eerst bepalen hoe groot het bord wordt (dus hoeveel kolommen er zijn en hoe hoog deze worden). Vervolgens mag hij in elke beurt twee keer een schijf laten vallen en Ernie telkens één keer. Bert moet proberen ergens duizend schijven op een rij (horizontaal, verticaal of diagonaal) te krijgen, Ernie moet dit zien te voorkomen. Kan Bert dit spel winnen?

OPLOSSING

106

Zij n een geheel getal en p een priemgetal zó, dat $np + 1$ een kwadraat is. Bewijs dat $n + 1$ de som is van p kwadraten.

Oplossing. Gegeven is dat $np + 1$ een kwadraat is, dus zeg $np + 1 = m^2$ met m positief en geheel, oftewel $np = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$. Omdat p een priemgetal is, is p een deler van $m + 1$ of van $m - 1$.

1. Stel p deelt $m + 1$. Dan geldt $m + 1 = kp$ met k geheel en $np = kp(kp - 2)$ en $n + 1 = k(kp - 2) + 1 = (p - 1) \cdot k^2 + (k - 1)^2$, een som van p kwadraten.

2. Stel p deelt $m - 1$. Dan geldt $m - 1 = kp$ met k geheel en $np = kp(kp + 2)$ en $n + 1 = k(kp + 2) + 1 = (p - 1) \cdot k^2 + (k + 1)^2$, wederom een som van p kwadraten.

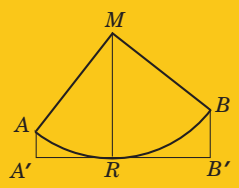
Opmerking: als $n = 0$, krijg je de oplossing $1 = (p - 1) \cdot 0^2 + 1^2$, en als $n = p - 2$, krijg je $n + 1 = p - 1 = (p - 1) \cdot 1^2 + 0^2$; voor alle andere waarden van n krijg je wel louter positieve kwadraten.

Deze opgave werd goed opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda**, Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg, Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Clara Mertens.

OPLOSSING

107

Gegeven is een kwartcirkel met middelpunt M en hoekpunten A en B. Aan deze kwartcirkel wordt in een punt R een raaklijn getrokken. De projecties van A en B op deze raaklijn noemen we A' respectievelijk B'. Als gegeven is dat $AA' = 1$ en $BB' = 2$, hoe groot is dan de straal van de cirkel?



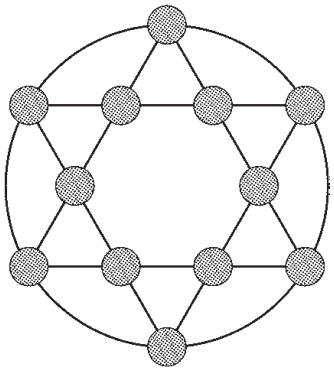
Oplossing. Laat vanuit A en B loodlijnen neer op MR en noem de voetpunten C respectievelijk D. Omdat $\angle ACM = \angle MDB = 90^\circ$, $\angle MAC = 90^\circ - \angle AMC = \angle BMD$ en $MA = MB = r$ (de straal van de cirkel), zijn de driehoeken MAC en BMD congruent. Hieruit volgt dat $AC = MD = r - 2$ en dus zien we in driehoek MAC dat $(r - 1)^2 + (r - 2)^2 = r^2$. Als we dit uitwerken, krijgen we $r = 5$.

Deze opgave werd goed opgelost door: Karel van Bockstal van het **EDUGO de Toren** te Oostakker (België), Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Neline Floor van het **Van Lodensteincollege** te Amersfoort, Anne de Haan van het **Gymnasium Felisenum** te Velsen-Zuid, Ariyan Javanpeykar van het **Alfrinkcollege** te Zoetermeer, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda**, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffer College** te Castricum, Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), Judith Mulder van **Christelijk Lyceum Delft**, Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg, Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede, Francine Valk van het **Corderiuscollege** te Amersfoort, Sid Visser van het **Utrechts Stedelijk Gymnasium**, Suyan Zhang van het **Dr. Aletta Jacobscollege** te Hoogezand en H. Verdonk te Den Haag.
De boekenbon gaat naar Wilke van der Schee.

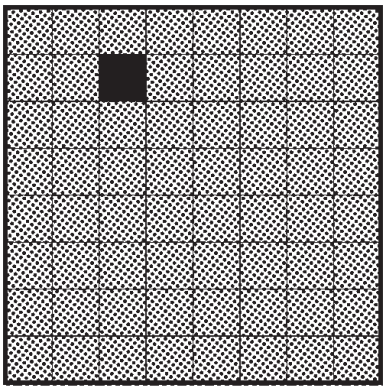
°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Magische som
Verdeel de getallen 1 tot en met 12 zó over de twaalf kruispunten, dat de getallen op elke lijn dezelfde som hebben als de getallen op de cirkel.

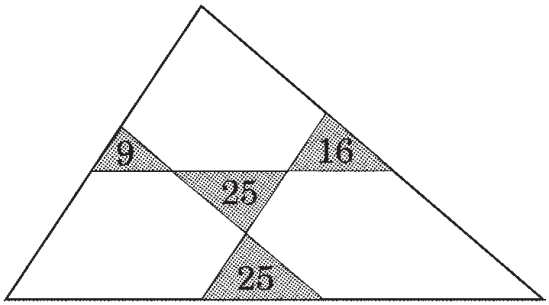


Legpuzzel
Een vierkant is verdeeld in 8 x 8 eenheidsvierkantjes, waarvan er één zwart gekleurd is. Kun je dit vierkant zó in drie stukken knippen, dat je daarmee een 8 x 8 vierkant kunt leggen met het zwarte vierkantje op iedere gewenste positie?



Breek de code
Ik heb een geheime code bestaande uit een rijtje van zeven bits (nullen en enen) in gedachten. Je mag een rijtje van zeven bits aan mij voorleggen en dan antwoord ik 'warm' als je vier of meer bits juist hebt geraden en 'koud' als je drie of minder bits juist hebt. Ook als je de code juist raad, antwoord ik slechts met 'warm'. Kun je een manier vinden om achter de code te komen?

Driehoek
Een driehoek is door drie lijnen, elk evenwijdig met een zijde, verdeeld in zeven gebieden. Van vier gebieden is de oppervlakte gegeven. Wat is de oppervlakte van de driehoek?



Symmetrische vergelijking
Als $x + y = 1$ en $x^2 + y^2 = 3$,
wat is dan de waarde van $x^3 + y^3$?

°Oplossingen
nr. 6

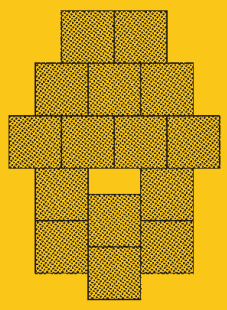
Glazen draaien
Geef de volgende reeks commando's: **4D4Z4D414D4Z4D4**.

Hierbij staat **1** voor 'draai één glas om', **4** voor 'draai alle glazen om', **D** voor 'draai twee glazen op een diagonaal om', **Z** voor 'draai twee glazen aan een zijde om'.

Als een oneven aantal glazen op z'n kop staat, dan is dit aantal na **4D4Z4D41** even geworden. Het is daarom voldoende te bewijzen dat als een even aantal glazen op z'n kop staat, de strategie **4D4Z4D4** werkt.

Net zo is het voldoende te bewijzen dat wanneer een even aantal glazen op z'n kop staat, maar niet alleen twee aan een zijde, de strategie **4D4** werkt.

Vier kleuren
Een mogelijke kaart is deze:



In de kring
Noem het aantal mensen in de kring n. Als $l > k$, dan zit persoon l kloksgewijs $k + (k + 1) + \cdots + (l - 1) = \frac{(k+l-1)(l-k)}{2}$ plaatsen na persoon k. Er is dus een oplossing met n mensen, precies dan als deze getallen $\frac{(k+l-1)(l-k)}{2}$ met $1 \leq k \leq l \leq n$ niet deelbaar zijn door n.

Als n een macht van 2 is, dan is $(k + l - 1)(l - k)$ niet deelbaar door $2n$, want óf $k + l - 1$ óf $l - k$ is even, en beide getallen zijn kleiner dan $2n$. In dit geval is er dus een oplossing.

Zo niet, schrijf dan $n = a2^i$, met $a \geq 3$ oneven, en neem

$$l = \frac{2^{i+1} + 1 + a}{2}, k = \frac{2^{i+1} + 1 - a}{2}$$

als $a \leq 2^{i+1}$, of neem

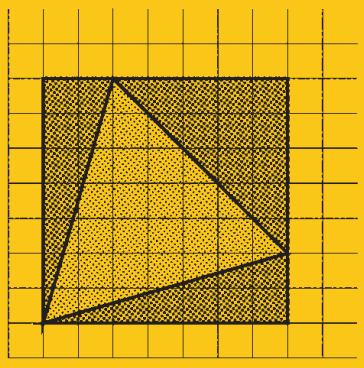
$$l = \frac{2^{i+1} + 1 + a}{2}, k = \frac{a + 1 - 2^{i+1}}{2}$$

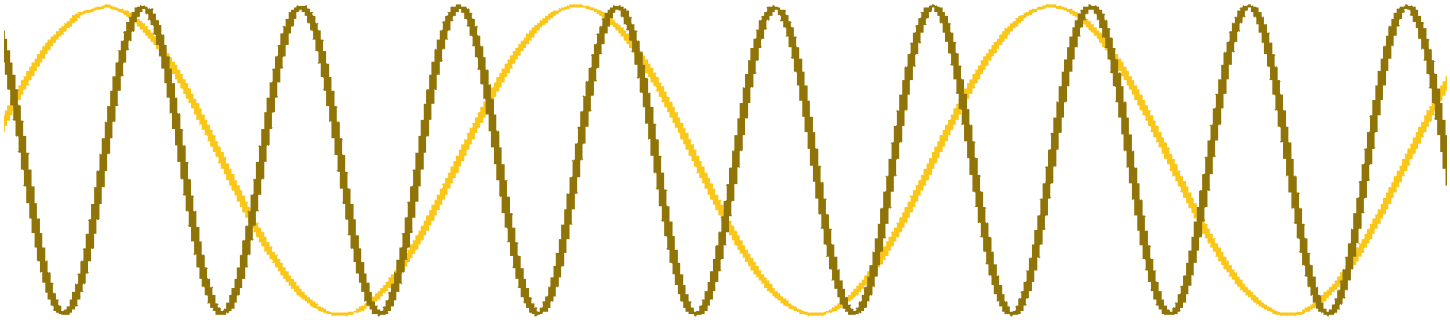
als $a > 2^{i+1}$. Dan geldt: $2n = (k + l - 1)(l - k)$ en is er dus geen oplossing voor n mensen. Het antwoord is dus: 64.

Gelijkzijdige driehoek
Stel, er bestaat een gelijkzijdige roosterdriehoek, zoals in de figuur. Met behulp van drie rechthoekige roosterdriehoeken kunnen we de gelijkzijdige driehoek aanvullen tot een roosterrechthoek. Nu zijn de oppervlaktes van deze rechthoekige driehoeken en van de rechthoek rationale getallen (gehele veelvouden van $\frac{1}{2}$), en dus heeft de gelijkzijdige driehoek ook een rationale oppervlakte.

Anderzijds heeft de gelijkzijdige driehoek oppervlakte $l^2(\frac{\sqrt{3}}{4})$, waarbij l^2, het kwadraat van de lengte van de zijden, een geheel getal is. Maar $\sqrt{3}$ is geen rationaal getal!

We hebben dus een tegenspraak en er kan geen gelijkzijdige roosterdriehoek bestaan.

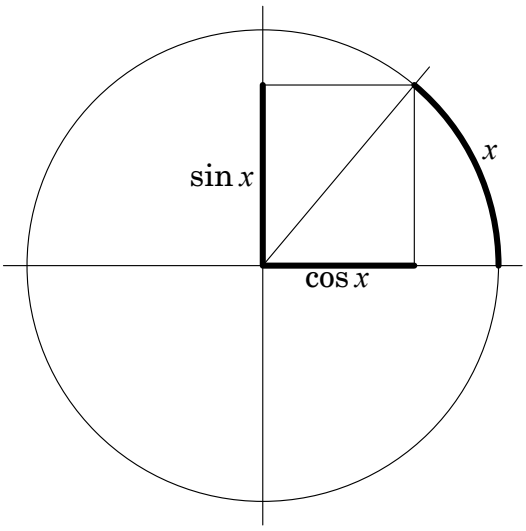




door **Klaas Pieter Hart**

°° Sinus en cosinus

Stel dat je een rekenmachientje aan het maken bent dat ook een sinus- en een cosinustoets moet hebben. Wat moet er gebeuren als je die toetsen indrukt? De meetkundige definities van $\sin x$ en $\cos x$ helpen in dit geval niet erg. Het lijkt mij in elk geval heel lastig te programmeren: pas de lengte x op de eenheidscirkel af vanaf $(1, 0)$, projecteer het eindpunt op de x-as om $\cos x$ te krijgen en op de y-as om $\sin x$ te krijgen. In dit artikel bekijken we hoe een rekenmachine de sinus en cosinus van een ingevoerd getal nauwkeurig kan benaderen.



Figuur 1 De meetkundige definitie van $\sin x$ en $\cos x$

Integreren en differentiëren

Met een beetje kennis van de differentiaal- en integraalrekening kun je goede benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ maken; het voordeel van die benaderingen is dat je ze met behulp van alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kunt uitrekenen. We leiden de formules alleen voor positieve x af; voor negatieve x gebruiken we natuurlijk dat $\sin(-x) = -\sin x$ en $\cos(-x) = \cos x$.

Wat we van onze functies gebruiken is niet veel: we moeten weten wat hun afgeleiden zijn: $(\sin x)' = \cos x$ en $(\cos x)' = -\sin x$. Deze formules zetten we om in formules voor integralen:

$$\int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t = \sin x$$

en

$$\int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t = 1 - \cos x;$$

de laatste kunnen we ook schrijven als

$$\cos x = 1 - \int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t.$$

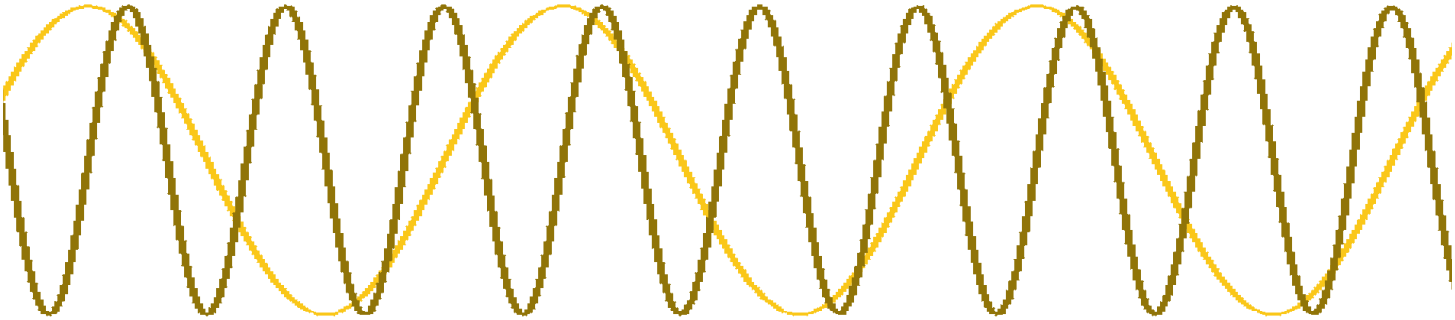
Verder gebruiken we nog dat $\cos x < 1$ (behalve als $x = 2k\pi$ met k geheel natuurlijk). Met behulp van $\cos x < 1$ vinden we namelijk

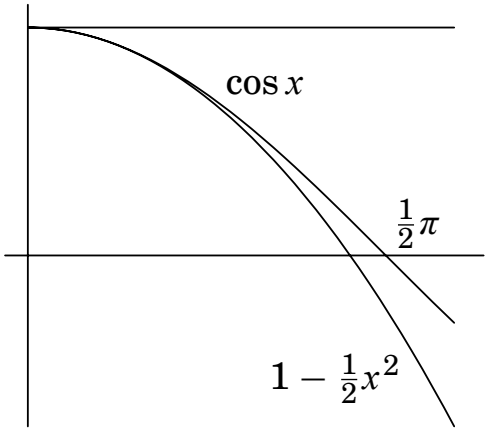
$$\sin x = \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t < \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = x,$$

dit geldt voor alle $x > 0$.
Maar dan volgt op dezelfde manier

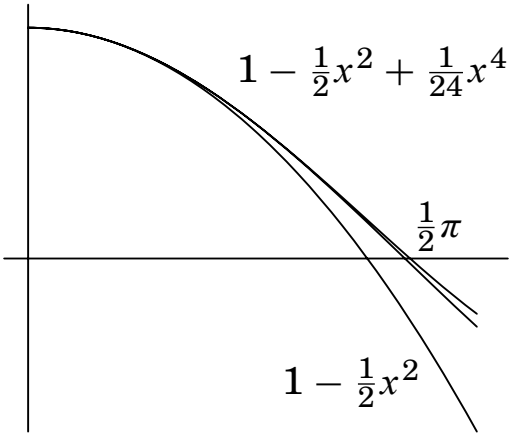
$$\cos x = 1 - \int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t > 1 - \int_0^x t \, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

weer voor alle $x > 0$.





Figuur 2 $1-\frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1$



Figuur 4 $1-\frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$

Als we weer terug gaan naar $\sin x$ vinden we

$$\sin x > \int_0^x 1-\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t = x-\frac{1}{6}x^3.$$

Dit stoppen we weer in de integraal voor $\cos x$:

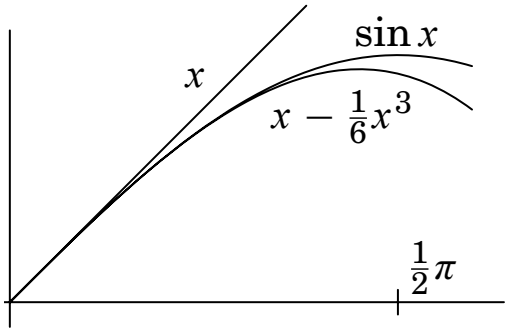
$$\cos x < 1-\int_0^x t-\frac{1}{6}t^3\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$

Voor we nog verder gaan, bekijken we even wat we gevonden hebben. Blijkbaar geldt, voor $x > 0$, dat

$$x-\frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$$

en

$$1-\frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4. \quad (*)$$

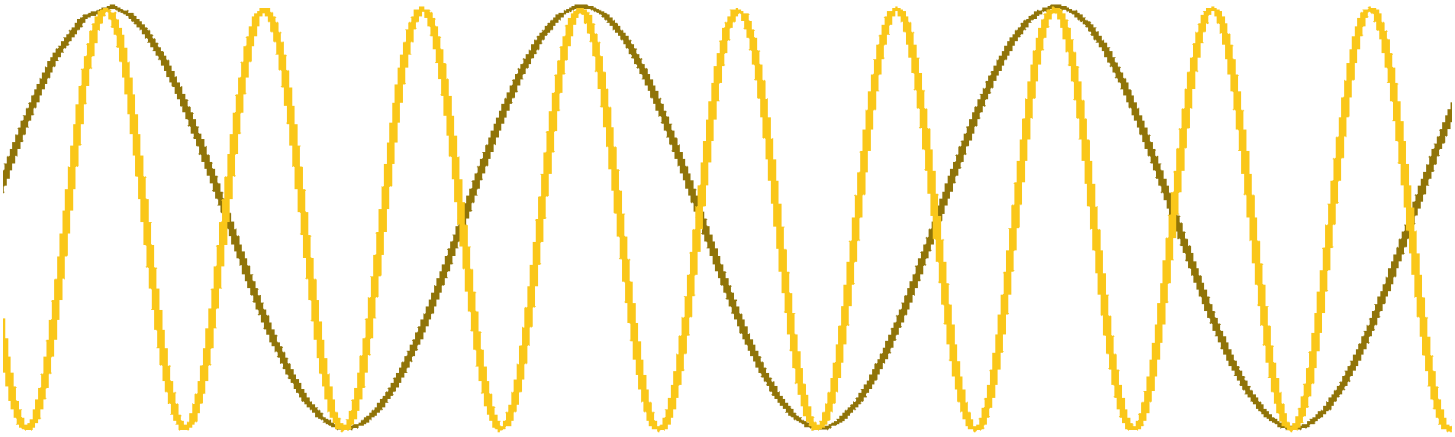


Figuur 3 $x-\frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$

Om de sinus en cosinus van een ingevoerd getal te bepalen, gebruikt een rekenmachine benaderingsformules. Voor een antwoord op zeg acht decimalen nauwkeurig zijn deze formules precies genoeg:

$$\sin x \approx x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5-\tfrac{1}{7!}x^7+\tfrac{1}{9!}x^9-\tfrac{1}{11!}x^{11}$$

$$\cos x \approx 1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4-\tfrac{1}{6!}x^6+\tfrac{1}{8!}x^8-\tfrac{1}{10!}x^{10}$$



Dit geeft voor niet al te grote x al redelijk scherpe benaderingen, bijvoorbeeld $\sin 0{,}2 \approx 0{,}2$ met een afwijking van minder dan $0{,}008/6 = 0{,}00133...$

Voor $\cos 0{,}2$ krijgen we de benadering $0{,}98$ met een afwijking van minder dan $0{,}00066...$

Opgave 1. Op welk interval vind je het nog acceptabel om $\sin x$ met x te benaderen? En voor welke x ben je tevreden met $1 - \frac{1}{2}x^2$ als benadering van $\cos x$?

Verder integreren

We kunnen ons proces voortzetten en om en om steeds betere benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ maken; als we de laatste ongelijkheden voor $\cos x$ integreren, vinden we

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Als we dit weer voor $\cos x$ doen, kunnen we de linkerkant van (*) verbeteren tot

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 < \cos x.$$

Opgave 2. Voor welke x zou je nu de benaderingen $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ en $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ gebruiken?

Als we doorgaan met integreren, vinden we rijen benaderingen voor $\sin x$ en $\cos x$; ga zelf zorgvuldig na dat de volgende formules ontstaan:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

met afwijking kleiner dan $\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ en

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

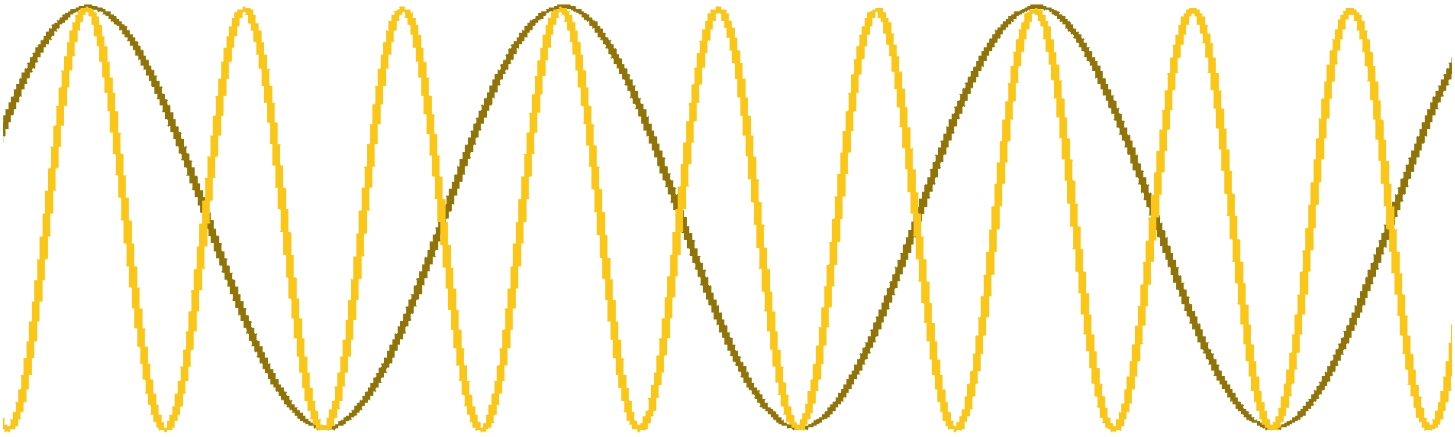
met afwijking kleiner dan $\frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}$.

Wanneer stoppen we?

Neem eens aan dat we $\sin x$ en $\cos x$ tot op acht decimalen achter de komma willen benaderen. Welke n moeten we daarbij kiezen? Als je gebruikt dat $\sin x$ en $\cos x$ periodiek zijn en als je bedenkt dat, bijvoorbeeld $\sin(\pi - x) = \sin x$ en $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$, dan is het duidelijk dat we ons kunnen beperken tot het interval $[0, \frac{1}{4}\pi]$. Omdat $\pi < 4$, is elke x in dat interval kleiner dan 1. Dat betekent dat voor elke x de afwijkingen zeker kleiner zijn (in absolute waarde) dan $\frac{1}{(2n+1)!}$ respectievelijk $\frac{1}{(2n+2)!}$. Als we n zó groot kiezen dat die twee kleiner zijn dat 10^{-8} dan zitten we voor elke x in $[0, \frac{1}{4}\pi]$ goed.

Een beetje proberen met een rekenmachientje laat zien dat $12! > 4 \times 10^8$. Dat betekent dat we voor $\sin x$ moeten zorgen dat $2n + 1 \geq 12$, ofwel $n \geq 6$ en voor $\cos x$ moeten we $2n + 2 \geq 12$ hebben, dus $n \geq 5$. Dit betekent dat we de volgende formule onder de sin-toets moeten programmeren:

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}.$$



En onder de $\cos$-toets stoppen we dan een programmaatje dat

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 - \tfrac{1}{10!}x^{10}$$

uitrekent.

De tangens

Nu we toch bezig zijn, kunnen we gelijk een knop voor $\tan x$ proberen te maken. We kunnen natuurlijk onder die knop gewoon het quotiënt van $\sin x$ en $\cos x$ programmeren, maar we kunnen ook proberen een eenvoudige som van machten van x te maken. De reden hiervoor is dat we zo het aantal rekenstappen kunnen beperken; in plaats van twee keer een som van zes machten van x uit te rekenen (en op elkaar te delen) kunnen we misschien met één zo'n berekening toe. Hiertoe delen we de benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ (voor ons rekenmachientje in aanbouw) op elkaar.

Met enig doorzettingsvermogen levert een staartdeling de volgende benadering voor $\tan x$:

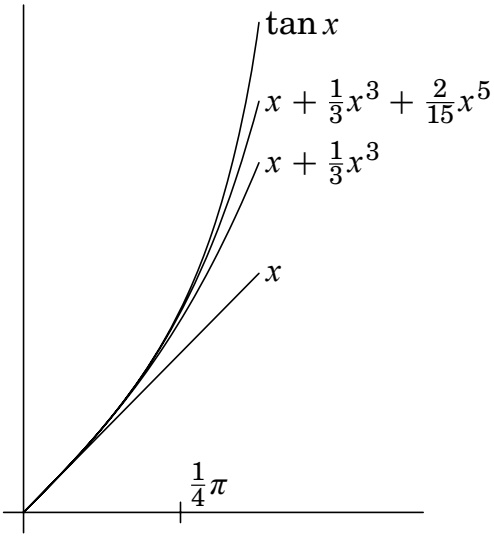
$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11}.$$

Het verschil tussen $\tan x$ en deze benadering laat zich niet zo makkelijk afschatten als bij $\sin x$ en $\cos x$. Dat ligt aan een paar dingen, waaronder $\tan x$ zelf: op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ is de benadering netjes begrensd, maar de tangens heeft bij $\frac{1}{2}\pi$ een verticale asymptoot. Maar ook op het interval $[0, \frac{1}{4}\pi]$ is de laatste benadering niet zo goed als die van de sinus en cosinus; dat komt doordat we benaderingen op elkaar gedeeld hebben en ook nog eens een rest bij die deling weggelaten hebben. Al met al krijgen we met bovenstaande formule maar drie betrouwbare cijfers achter de komma.

Met een slimmigheidje kun je dat dramatisch verbeteren; gebruik hiervoor de verdubbelingsformule voor de tangens:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Dit gebruik je als volgt: begin met $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$, benader $\tan \frac{1}{2}x$, noem de benadering t, en gebruik dan $2t/(1-t^2)$ als benadering van $\tan x$ zelf. Dat levert gelijk zeven betrouwbare cijfers achter de komma op.

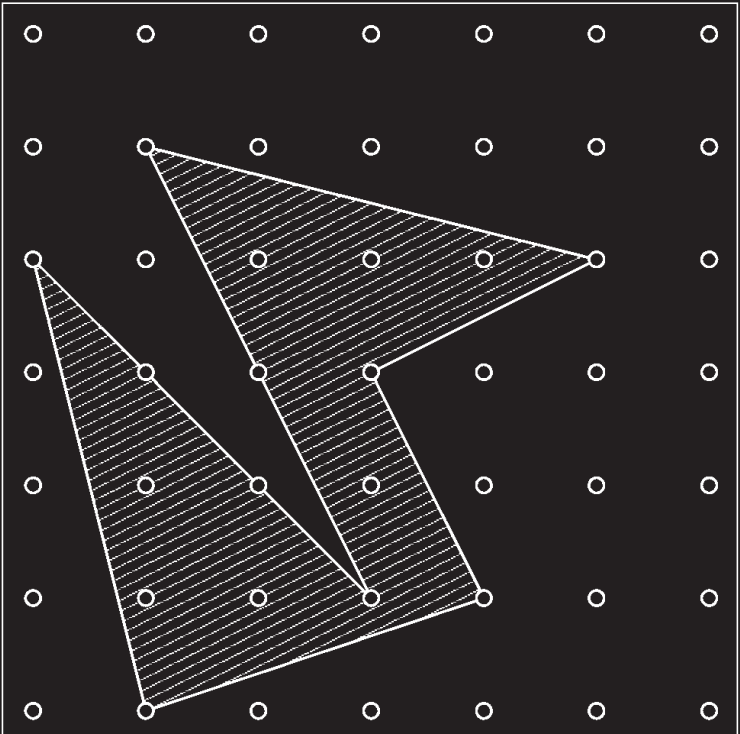


Figuur 5 $x < x + \frac{1}{3}x^3 < x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 < \tan x$

Sommige wiskundige stellingen zijn zo fantastisch simpel en elegant, dat je je afvraagt: 'Waarom ben *ik* daar niet op gekomen!' Dit stukje gaat over precies zo'n stelling: eenvoudiger dan de stelling van Pythagoras, maar onbekend zelfs bij veel professionele wiskundigen. De stelling wordt vernoemd naar haar 'ontdekker': de Oostenrijkse wiskundige Georg Alexander Pick, geboren in 1859 in Wenen en omgekomen in 1942 in het concentratiekamp Theresienstadt, waarheen hij op 82-jarige leeftijd om zijn joodse afkomst gedeporteerd werd.

De stelling van Pick

door **Dion Gijswijt**



Figuur 1 Een roosterveelhoek. Bereken de oppervlakte van deze roosterveelhoek. Als je denkt dat dit een lange en misschien wel ingewikkelde rekenpartij wordt, dan heb je het mis! Volgens de stelling van Pick is het slechts een kwestie van tellen.

Dit stukje gaat over *roosterveelhoeken*. Dat zijn veelhoeken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn, zoals de roosterzevenhoek in figuur 1. Probeer nu eens, voordat je verder leest, de oppervlakte van deze figuur te bepalen. Zelf zou ik het probleem misschien zo hebben aangepakt: splits de figuur op in driehoekjes en bepaal vervolgens de oppervlakte van elk van die driehoekjes. Als we van een driehoek de coördinaten van de hoekpunten kennen, dan kunnen we immers zijn oppervlakte uitrekenen.

Er is echter een andere, wonderbaarlijk simpele methode om achter de oppervlakte te komen. We hebben geen rekenmachine of pen en papier nodig, we hoeven slechts te tellen! De methode is als volgt. Tel het aantal roosterpunten op de rand van de figuur, dat zijn er 10. Tel ook het aantal roosterpunten in het inwendige van de figuur, dat zijn er 7. De oppervlakte van de figuur is dan $7 + \frac{10}{2} - 1 = 11$. De stelling van Pick zegt dat deze truc altijd werkt:

Stelling. Als een roosterveelhoek r roosterpunten op de rand heeft en i in het inwendige, dan is de oppervlakte gelijk aan $i + r/2 - 1$.

°Een bewijs

De stelling van Pick *gebruiken* is één, maar deze *bewijzen* is een heel ander verhaal. De kunst is het bewijs zo op te zetten dat het niet alleen voor eenvoudige roosterfiguren, zoals rechthoeken en driehoeken geldt, maar *alle* denkbare veelhoeken dekt, hoe complex ook. Het is handig om het getal dat in de stelling van Pick voorkomt een naam te geven. Voor een roosterveelhoek V met i roosterpunten in het inwendige en r roosterpunten op de rand, definiëren we het *Pickgetal* $\mathrm{Pick}\,(V)$ van de veelhoek als het getal $i + \frac{r}{2} - 1$. We staan dus voor de opdracht om te bewijzen dat voor iedere roosterveelhoek V geldt:

$$\mathrm{opp}(V) = \mathrm{Pick}(V).$$

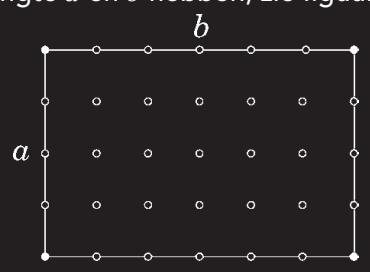
Een belangrijk ingrediënt in het bewijs is dat zelfs de meest complexe roosterveelhoek kan worden opgebouwd door roosterdriehoekjes aan elkaar te leggen. De strategie is nu om de volgende twee beweringen te bewijzen:

(1) Voor iedere roosterdriehoek geldt $\mathrm{opp}(V) = \mathrm{Pick}(V)$.
(2) Als een roosterveelhoek A is opgebouwd uit twee kleinere roosterveelhoeken B en C, dan geldt: $\mathrm{Pick}(A) = \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C)$.

Neem nu in gedachten een willekeurige roosterveelhoek. We kunnen deze opbouwen door een aantal roosterdriehoekjes aan elkaar te leggen. De oppervlakte van de roosterveelhoek is de som van de oppervlaktes van de roosterdriehoekjes. Volgens (1) is dit gelijk aan de som van de Pickgetallen van de driehoekjes, en volgens (2) is dit weer gelijk aan het Pickgetal van de hele roosterveelhoek. Daarmee is de stelling van Pick bewezen.

Rechthoeken

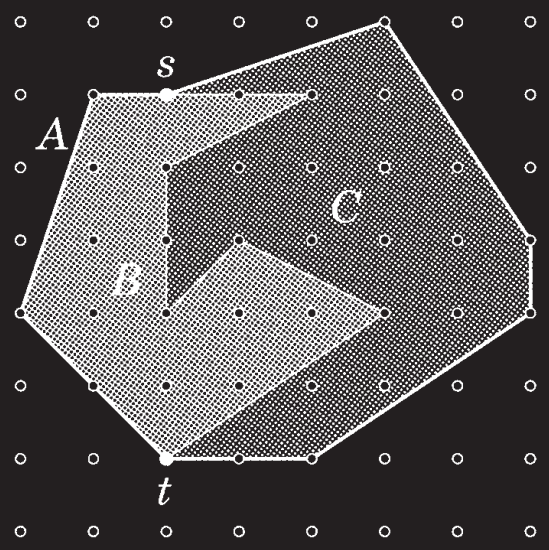
Om aan te tonen dat de stelling van Pick waar is voor roosterdriehoeken, is het handig om eerst te kijken naar een nog eenvoudiger type roosterveelhoeken: rechthoeken waarvan de zijden parallel lopen aan de coördinaatassen. Beschouw maar eens zo'n roosterrechthoek R waarvan de zijden lengte a en b hebben, zie figuur 2.



Figuur 2 Picks stelling geldt voor rechthoeken

Het aantal roosterpunten in het inwendige is gelijk aan $i = (a-1)(b-1)$ en het aantal roosterpunten op de rand is gelijk aan $r = 4 + 2(a-1) + 2(b-1)$. Dus

$$\begin{aligned}\mathrm{Pick}(R) &= i + r/2 - 1\\ &= (ab - a - b + 1) +\\ &\quad + (2 + a - 1 + b - 1) - 1\\ &= ab\\ &= \mathrm{opp}(R).\end{aligned}$$



Figuur 3 Samengestelde roosterveelhoeken

De stelling van Pick geldt dus voor dit soort rechthoeken. Om nu te bewijzen dat de stelling van Pick ook geldt voor roosterdriehoeken, blijkt het handiger te zijn om eerst deel (2) van het bewijs te leveren: het Pickgetal van het geheel is de som van de Pickgetallen van de delen.

Pickgetallen tellen op

Stel je voor dat je een roosterveelhoek hebt die is opgesplitst in een aantal kleinere roosterveelhoeken. Een belangrijke eigenschap van oppervlakte is dan, dat de oppervlakte van het geheel gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de delen. We willen laten zien dat ook het Pickgetal deze someigenschap bezit. Daarbij is het voldoende om te laten zien dat als een roosterveelhoek A opgesplitst is in twee kleinere roosterveelhoeken B en C, geldt:

$$\mathrm{Pick}(A) = \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C).$$

Geef het aantal inwendige roosterpunten van A, B en C aan met i_A, i_B en i_C. Geef het aantal randpunten van A, B en C aan met r_A, r_B en r_C, en noem het aantal randpunten dat B en C gemeenschappelijk hebben k. Er zijn twee bijzondere punten, die in figuur 3 aangegeven zijn met de letters s en t: het zijn de twee roosterpunten die in de rand van zowel A als B als C zitten.

De roosterpunten in de rand van A zijn precies de roosterpunten die óf in de rand van B óf in de rand van C zitten, plus de twee punten s en t. Dus we vinden:

$$r_A = (r_B - k) + (r_C - k) + 2.$$

De inwendige punten van A zijn precies de inwendige punten van B en C plus de gemeenschappelijke randpunten van B en C, behalve s en t. Zo vinden we:

$$i_A = i_B + i_C + (k - 2).$$

Door deze twee gelijkheden te combineren, vinden we het gewenste resultaat:

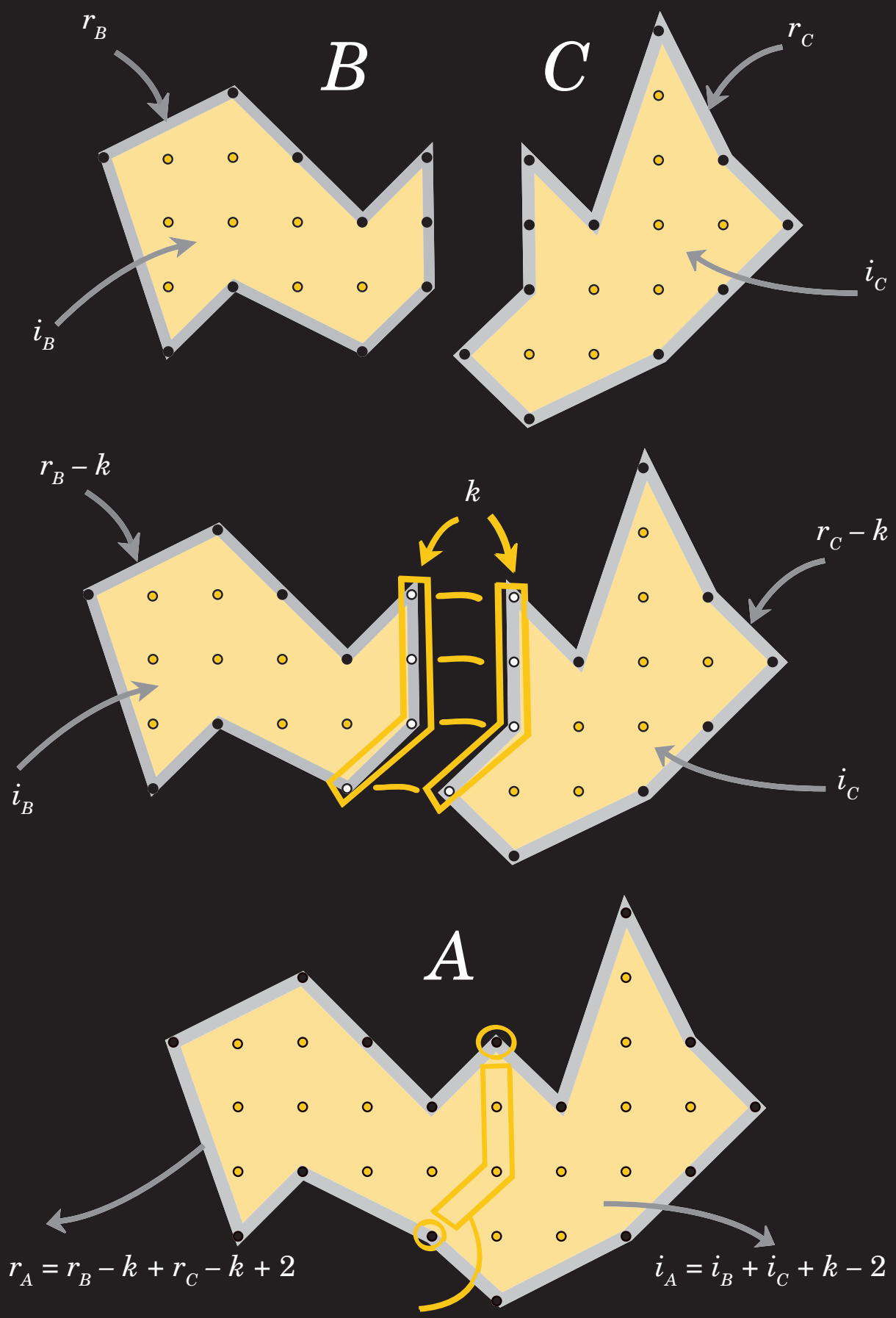
$$\begin{aligned}\mathrm{Pick}(A) &= i_A + \frac{r_A}{2} - 1 \\ &= i_B + i_C + (k-2) \\ &\quad + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{2} - k \\ &= i_B + \frac{r_B}{2} - 1 + \\ &\quad i_C + \frac{r_C}{2} - 1\end{aligned}$$

Het Pickgetal heeft dus, net als de oppervlakte, de someigenschap. In figuur 4 is deze eigenschap geïllustreerd.

Driehoeken

Door slim gebruik te maken van de someigenschap van het Pickgetal en het feit dat de stelling van Pick geldt voor rechthoeken, kunnen we de stelling van Pick ook voor andere veelhoeken bewijzen. We zullen eerst aantonen dat de stelling van Pick waar is voor roosterdriehoeken.

Als de roosterdriehoek een rechthoekige driehoek is waarvan de zijden evenwijdig met de coördinaatassen zijn, dan vormen twee van deze driehoeken samen een rechthoek. Omdat de twee driehoeken hetzelfde Pickgetal hebben, is volgens de someigenschap, het Pickgetal van de rechthoek precies tweemaal het Pickgetal van de driehoek. Maar het Pickgetal van de rechthoek, zo hebben we al bewezen, is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek en dus ook gelijk aan tweemaal de oppervlakte van de



Figuur 4 Een roosterveelhoek A die opgebouwd is uit twee veelhoeken B en C voldoet aan de formule van Pick, als die afzonderlijke delen B en C eraan voldoen. Analyseer wat er gebeurt bij de samenstelling; dan zie je dat het Pickgetal van A de som is van de Pickgetallen van B en C. Voor B en C zijn de Pickgetallen gelijk aan hun oppervlakte. Dus is het Pickgetal van C gelijk aan de oppervlakte van C.

driehoek. Dus het Pickgetal van de driehoek is gelijk aan de oppervlakte van de driehoek.

Een willekeurige driehoek kunnen we met een aantal rechthoekige driehoeken completeren tot een rechthoek. Er zijn een aantal verschillende gevallen, waarvan de twee belangrijkste in figuur 5 zijn aangegeven. Door weer gebruik te maken van de someigenschap van het Pickgetal en het gegeven dat de stelling van Pick waar is voor rechthoekige driehoeken en rechthoeken, is het niet zo moeilijk in te zien dat de stelling van Pick opgaat voor alle roosterdriehoeken.

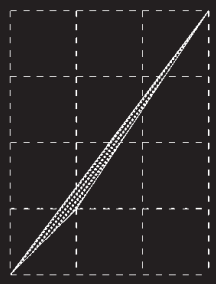
Opgave 1. Werk de twee gevallen in figuur 4 uit.

Opgave 2. Welke andere gevallen kunnen zich voordoen?

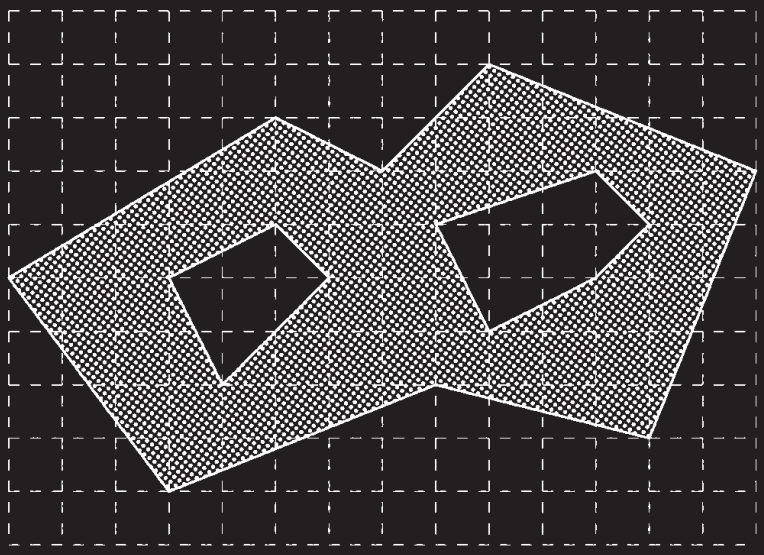
Figuur 5 (rechts) De stelling van Pick voor algemene roosterdriehoeken kan worden teruggebracht tot die voor rechthoeksdriehoeken.

Een paar puzzeltjes

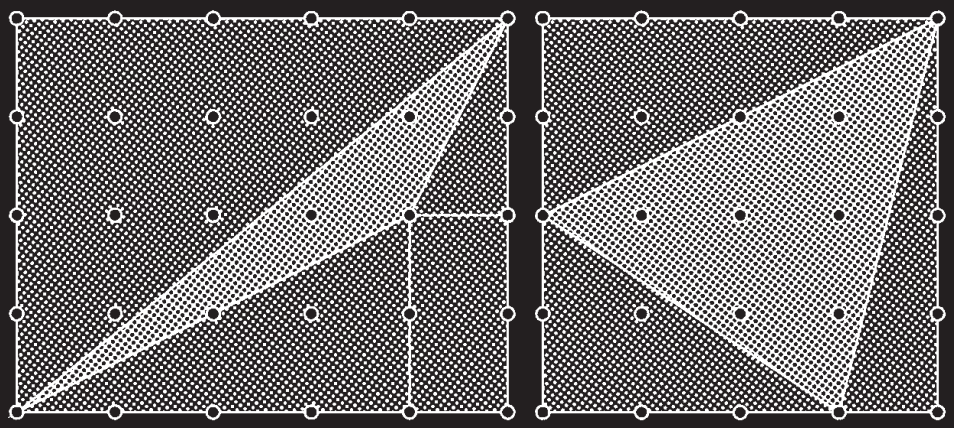
De stelling van Pick kun je niet alleen gebruiken om oppervlaktes van veelhoeken uit te rekenen. Met een beetje creativiteit kun je de stelling op veel manieren toepassen en resultaten bewijzen die op zichzelf al interessant zijn. Elk van de volgende puzzels kun je oplossen met behulp van de stelling van Pick.



1. Laat zien dat een roosterdriehoek die geen roosterpunten in het inwendige of op de rand heeft (behalve de drie hoekpunten) oppervlakte $\frac{1}{2}$ heeft.

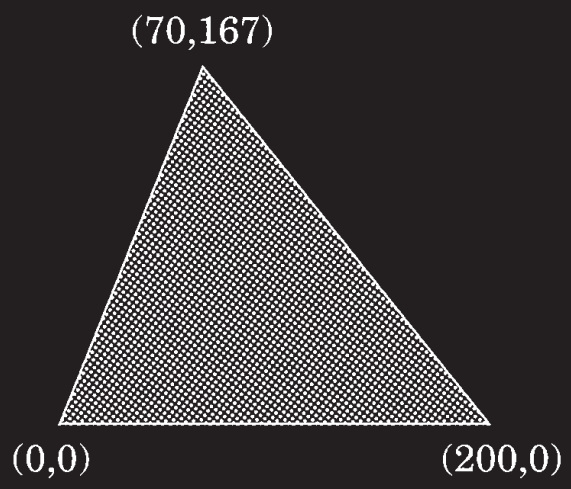


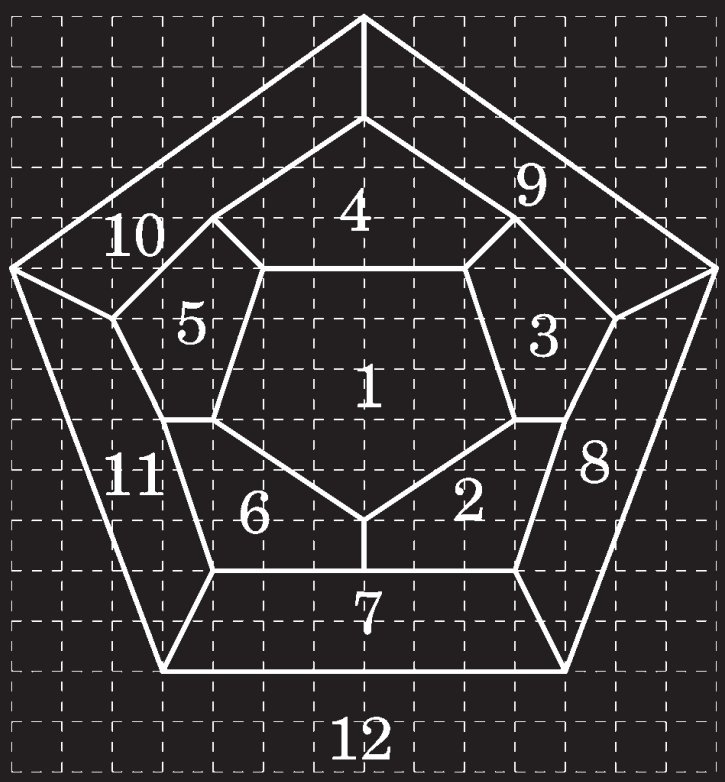
2. In de figuur zie je een roosterveelhoek met twee 'gaten'. Hoe zou de stelling van Pick moeten luiden voor roosterveelhoeken met g gaten?



3. De roosterveelhoek uit figuur 1 (zie pagina 26) wordt geschaald met een factor 10. Hoeveel roosterpunten liggen er in het inwendige van de geschaalde figuur?

4. Gegeven zijn de drie punten $A(0,0)$, $B(200,0)$ en $C(70,167)$. Bepaal het aantal roosterpunten in het inwendige van driehoek ABC.





5. De formule van Euler zegt dat voor elk veelvlak met H hoekpunten, R ribben en Z zijvlakken geldt: $H - R + Z = 2$. Kun je deze formule bewijzen?
Hint: Je kunt het veelvlak voorstellen als landkaart met Z landen, R grenzen en H meerlandenpunten (zie *Pythagoras* december 2002), zoals de dodecaëder in nevenstaande figuur.

Pythagoras

September 2004 **Journaal** Nummer 1

door **Alex van den Brandhof**

Activiteiten

In deze eerste aflevering van de 44ste jaargang van *Pythagoras* geven we de data van belangrijke wiskunde-evenementen in het komende schooljaar. Noteer ze vast in je agenda!

•Elk jaar wordt op de Radboud Universiteit Nijmegen een **wiskundetoernooi** gehouden voor middelbare scholieren. De wedstrijd bestaat uit twee delen: een individuele ronde en een estafette. Het eerstvolgende toernooi is op *vrijdag 24 september 2004*.

•Op de *vrijdagmiddagen 1, 8, 29 oktober* en *5 november 2004* organiseert de VU (Amsterdam) een **masterclass** 'Grafen in de praktijk' voor een beperkt aantal leerlingen uit de vijfde en zesde klas van het vwo. De masterclass is onder andere zeer geschikt voor het maken van je profielwerkstuk.

•In de **WetenWeek 2004**, van *woensdag 20 tot en met woensdag 27 oktober*, loopt het thema 'Gebruik je hersens' als een rode draad door het gehele programma. De WetenWeek is een jaarlijks evenement onder auspiciën van Stichting Weten.

•De **Wiskunde A-lympiade** is een wedstrijd voor leerlingen met wiskunde A, die in teamverband een probleem aanpakken. De wedstrijd bestaat uit een voorronde op de scholen en een finaleweekend op de Veluwe. De voorronde vindt plaats op *vrijdag 26 november 2004*.

•Eveneens op *vrijdag 26 november 2004* is de **Wiskunde B-dag**: een wedstrijd voor leerlingen met wiskunde B, waarin vaardigheden als kritisch beschouwen van modellen, mathematiseren, logisch redeneren en argumenteren centraal staan.

•De **Nederlandse Wiskunde Olympiade** (NWO) is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de bovenbouw. De NWO is niet alleen bedoeld voor de 'bollebozen', maar voor elke leerling die zich voelt uitgedaagd door een probleem waarin niet-erg-schoolse-wiskunde aan de orde komt. De eerste ronde is op *vrijdag 14 januari 2005*.

•De **Europese Wiskunde Kangoeroe** is een wedstrijd die op *vrijdag 18 maart 2005* plaatsvindt op scholen in 28 landen tegelijk. Iedereen kan meedoen: van basisschoolleerling in groep 7 tot en met middelbare scholier in klas 5. Uiteraard zijn er opgaven in verschillende categorieën.

Priemnieuws

Elk jaar komen er nieuwe feiten aan het licht als het om priemgetallen gaat.

In het kader van GIMPS wordt de lijst van Mersenne-priemgetallen steeds groter. Afgelopen zomer werd het 41ste Mersenne priemgetal gevonden: $2^{24036583} - 1$. Het getal telt ruim 7,2 miljoen cijfers. Er is een prijs van 100.000 dollar voor degene die het eerste Mersenne priemgetal vindt dat uit ten minste 10 miljoen cijfers bestaat.

Van de zomer was er ook ander nieuws over priemgetallen, dat gaat over rekenkundige rijen. Het rijtje 5, 11, 17, 23, 29 bestaat uit vijf priemgetallen. Het volgende getal (35) is dat duidelijk niet. Een wat langere rekenkundige rij is 199, 409, 619, ..., 2089. Deze bestaat uit tien priemgetallen. Uiteraard worden er ook veel priemgetallen 'gemist' door deze rij (zoals 211, 223 en 227). Sinds 1993 is er een rekenkundige rij bekend van 22 priemgetallen: 11410337850553, 16019436544753, ... , 108201410428753, en sinds juli 2004 is er ook een voorbeeld van 23 priemen in een rij. Er bestaat al lang het vermoeden dat dit soort rijen willekeurig lang kunnen zijn. Dat lijkt nu ook bewezen te zijn door Ben Green en Terence Tao. Hun artikel is gepubliceerd als e-print, maar (nog) niet verschenen in een toonaangevend wiskundig tijdschrift.

Onjuiste beweringen over priemgetallen worden ook gedaan. De publicatie van Richard Arenstorf, die pretendeerde het eeuwenoude vermoeden over het bestaan van oneindig veel priemtweelingen te bewijzen, is teruggetrokken, nadat er een ernstige fout in was ontdekt.

Wil je zelf met priemgetallen aan de slag? In onze prijsvraag (zie pagina 16) spelen de vijf kleinste priemgetallen een essentiële rol.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

Kalender
3 september 203

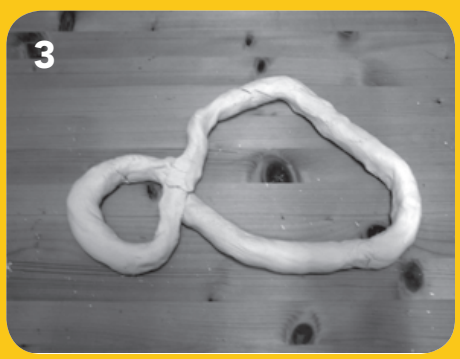
Taart verdelen
Persoon A snijdt een stuk af waarvan hij vindt dat het $\frac{1}{n}$ deel is (met n het aantal personen). Nu heeft persoon B het recht om er iets af te halen als hij vindt dat het stuk te groot is. Daarna C, etcetera. Degene die het laatst in het stuk van A snijdt, moet het nemen.

Schipbreuk
Roeien doe je met je rug naar de vaarrichting. Als de schipbreukeling *niet* omkijkt, ziet hij het eiland.

Erfenis
Leen één koe, zodat het totaal op 60 komt. De zonen krijgen dan respectievelijk 20, 15, 12 en 12 koeien, hetgeen opgeteld op 59 komt. Na deze exercitie wordt de geleende koe teruggegeven.

Schaken
Als Sjors uit een serie van drie, twee partijen op rij moet winnen, dan moet hij in elk geval de middelste partij winnen. Hij kiest dus voor pa-ma-pa.

Oplossing Topologie met de handen (Ringenbeugel, pag. 11)



44ste JAARGANG NUMMER 1