PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN NOVEMBER 2004

PYTHAGORAS

44ste jaargang nummer 2
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster
Timon Idema

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@its.tudelft.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), W. Joris, auteur van '100 Strategic Games for Pen and Paper' (walter.joris1@pandora.be), H. van Lienen, co-auteur van diverse boeken over computertoepassingen en rekenen (h.v.lienen@chello.nl), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (notenboom1729@zonnet.nl), D. Odegard, docent wiskunde aan het Alberdinkh Thijm College te Hilversum (d.odegard@klg.nl), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), P. Stikker, docent bedrijfswiskunde bij Inholland Diemen (stikpet@uwnet.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag
Topologisch omkleden.

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

INHOUD

door **Dick Beekman**
www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

Canonieke vorm
De *canonieke* vorm van het woord PAARD is AADPR (alfabetisch gerangschikt). Woorden als ADEM, BEGIN en CHLOOR veranderen niet. Vind een achtletterwoord dat in canonieke vorm hetzelfde is. Maak ook een zin die bestaat uit alleen zulke woorden.

Palindroom
Een *palindroom* is een woord of een zin die, van achter naar voor gelezen, hetzelfde is. Voorbeelden zijn LEPEL en KEIZER, IS SIRE ZIEK. Maak een palindroomzin met het woord POEZIE er in.

Anagram
Als we EDAM en MADE, alsmede HOLTEN en THOLEN als 'zustergemeenten' definiëren omdat de namen elkaars *anagram* zijn, vind dan een stel met de meeste letters.

Getal-associatie
Als '3 K K die zaten op een H' staat voor '3 kleine kleutertjes die zaten op een hek', wat wordt dan '1492 C O A'? En wat wordt '13 S bij G S'?

Gemeenschappelijk
Wat hebben WOUTER, PETER, PIET en RUPPERT gemeen met TRUI en RIET, wat KEES, TOON, BETTIE en RUUD niet hebben?

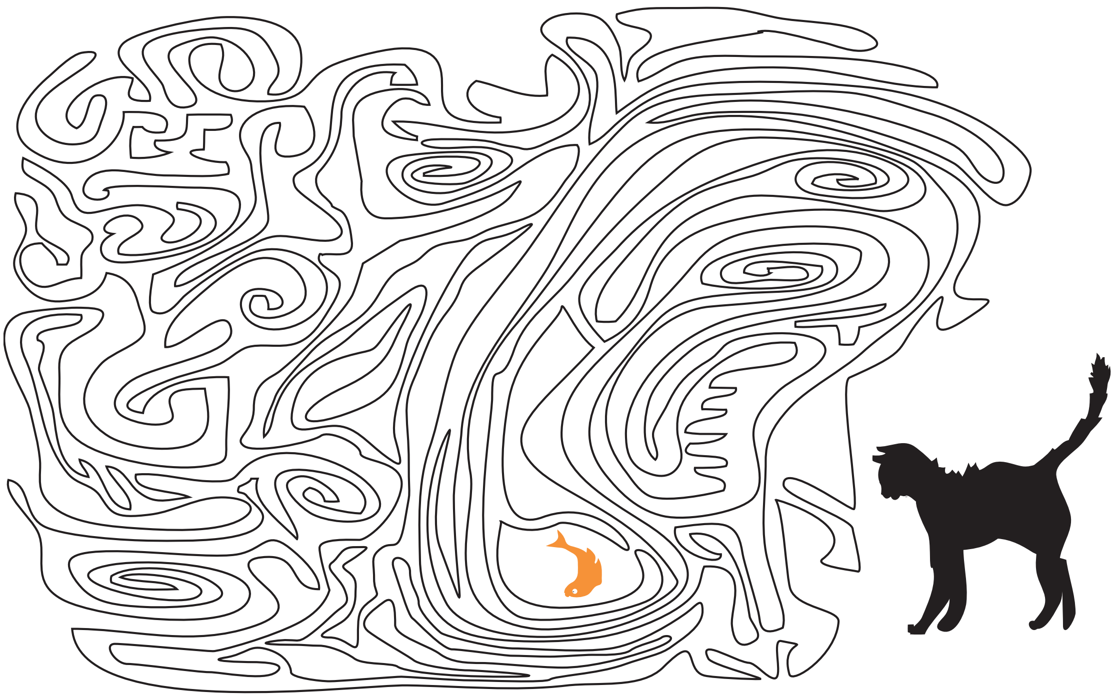
De stelling van Jordan

door **J.M. Aarts**

Soms is een wiskundige stelling zo vanzelfsprekend dat niemand de moeite neemt hem te formuleren, laat staan te bewijzen. Dat gold lang voor het feit dat een gesloten kromme (zoals een cirkel, vierkant of ster) het vlak verdeelt in een binnen- en een buitengebied, en dat je niet van het ene in het andere gebied kunt komen zonder die kromme te snijden. De Fransman Camille Jordan (1838-1922) was een van de eerste wiskundigen die zich met dit soort 'problemen' bezighielden. Er bleek nog heel wat ingewikkelde wiskunde achter te zitten.

De vis in de doolhof van figuur 1 probeert zich voor de kat verscholen te houden. Kan de kat de vis pakken?

Jordan, die als een van de eersten het principe van het binnen- en buitengebied voor een algemene klasse van krommen opmerkte, bewees: iedere enkelvoudig gesloten kromme verdeelt het vlak in precies twee gebieden, waarvan die kromme dan de gemeenschappelijke grens is. Bij 'enkelvoudig gesloten kromme' kun je denken aan elke (kronkel)lijn op papier die gesloten is en zichzelf niet doorsnijdt. Een strakke definitie maakt gebruik van een begrip uit ons artikel in het vorige nummer van *Pythagoras*: een enkelvoudig gesloten kromme is een verzameling in het vlak die homeomorf is met de cirkel. Tegenwoordig noemen we zo'n kromme voor het gemak een *Jordan-kromme*.



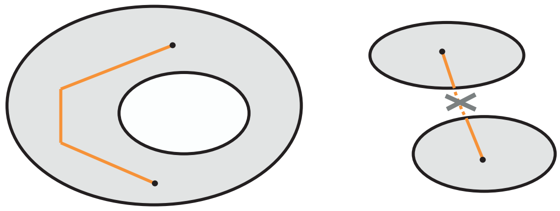
Figuur 1 De doolhof stelt een zak voor. Zit de vis in de zak, dan is hij veilig. Zit hij er buiten, dan zal de kat hem ruiken, zoeken en verorberen. Is de vis veilig?

Lijnentrek en veelhoek

In dit artikel zullen we een idee geven van hoe je de stelling van Jordan kunt bewijzen. Omdat een Jordan-kromme erg ingewikkeld in elkaar kan zitten en het bewijs van de stelling van Jordan zelfs voor insiders knap lastig is, zullen we alleen relatief eenvoudige krommen bekijken, namelijk krommen die opgebouwd zijn uit stukjes rechte lijn. We omschrijven eerst nauwkeuriger wat voor soort krommen we daarmee bedoelen. Een *lijnstuk* is een stuk van een rechte lijn dat begrensd wordt door twee punten; die punten noemen we de *eindpunten* van het lijnstuk. Als je een aantal lijnstukken in het vlak achter elkaar legt, dan krijg je een *lijnentrek*; het eindpunt van ieder lijnstuk (behalve misschien het laatste) valt samen met het beginpunt van het volgende lijnstuk. Als ook nog het eindpunt van het laatste lijnstuk samenvalt met het beginpunt van het eerste lijnstuk, dan heb je een *polygoon* of *veelhoek*.

De twee gebieden waarin het vlak verdeeld zal worden, moeten aaneengesloten zijn, anders zouden we nog meer gebieden hebben. Dat aaneengesloten-zijn wordt vastgelegd in de volgende definitie: we zeggen dat een verzameling *samenhangend* is, als je bij ieder tweetal verschillende punten van die verzameling een lijnentrek kunt maken die het ene punt als beginpunt heeft en het andere punt als eindpunt. In figuur 2 is het verschil tussen samenhangend en niet-samenhangend weergegeven.

Nu volgt de eenvoudige versie van de stelling van Jordan, zie figuur 3.



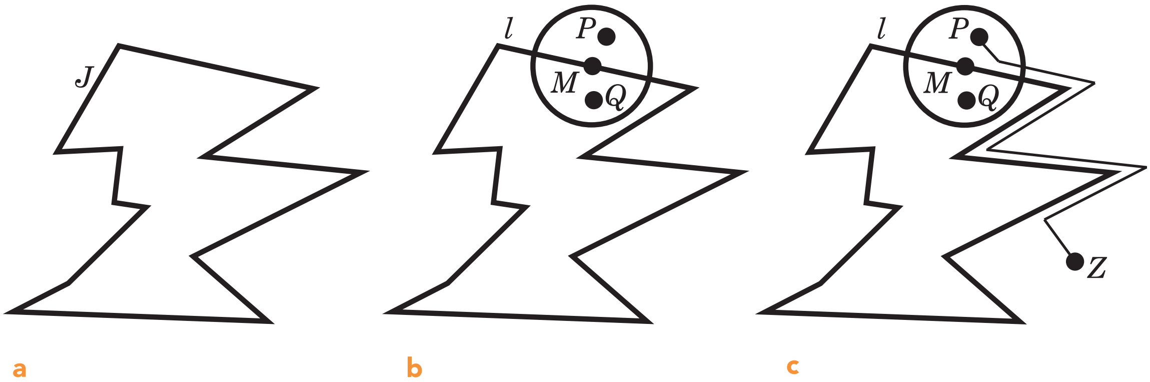
Figuur 2 Een samenhangende en een niet-samenhangende verzameling

Stelling. *Een veelhoek J verdeelt het vlak in twee gebieden $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$. Die gebieden $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ zijn samenhangend. Iedere lijnentrek die een punt van $\mathbf{U}$ met een punt van $\mathbf{V}$ verbindt, moet J in ten minste één punt treffen en J is de gemeenschappelijke grens van $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$.*

° Het bewijs

Bekijk figuur 3a: een enkelvoudig gesloten kromme J. Om Jordans stelling (voor ons speciale geval dat J uit rechte lijnstukken bestaat) te bewijzen, kiezen we eerst een lijnstuk van J uit, en noemen dat l. Het punt M is het midden van l. Om het punt M trekken we een cirkeltje dat alleen l snijdt, maar geen van de andere lijnstukken van de veelhoek. Het cirkelschijfje dat je zo krijgt, wordt door l in tweeën gedeeld. We kiezen een punt P in het ene deel en een punt Q in het andere deel. Zie figuur 3b.

Als je nu een willekeurig punt Z uit het vlak kiest dat niet op J ligt, dan kun je eerst via een lijnstuk tot dicht bij J komen zonder dat je J snijdt. Vervolgens ga je met een lijnentrek dicht langs J, maar zonder aan J te komen, tot je bij het cirkelschijfje komt.



Figuur 3 De stappen van het bewijs van de stelling van Jordan

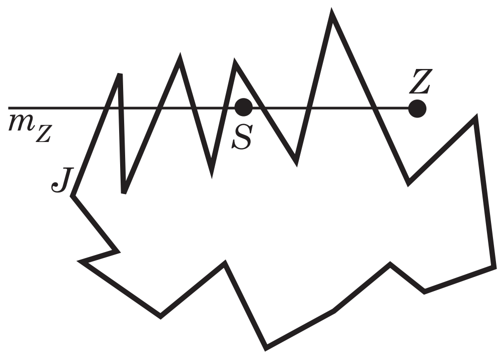
Omdat J een veelhoek is en omdat je dicht langs J loopt, kom je altijd een keer bij het cirkelschijfje uit. Als kroon op het werk voeg je nog één lijnstukje toe aan je lijnentrek om in P of in Q te komen. Zie figuur 3c.

We beschrijven nu wat de twee gebieden $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ zullen zijn. Neem een punt X dat niet op J ligt. Kun je X door een lijnentrek met P verbinden zonder ooit op J te komen, stop X dan in $\mathbf{U}$. Kun je X door een lijnentrek verbinden met Q zonder op J te komen, stop X dan in $\mathbf{V}$. Zoals we net hebben gezien, kun je ieder punt dat niet op J ligt met P of Q verbinden zonder dat je de veelhoek J snijdt. Dat betekent dat $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ en J samen het hele vlak opvullen. Ook zie je zo dat zowel $\mathbf{U}$ als $\mathbf{V}$ samenhangend is: om twee punten uit $\mathbf{U}$ te verbinden met een lijnentrek, ga je eerst van het ene punt naar P en dan van P naar het andere punt. Verder is J de gemeenschappelijke grens van $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$, want ieder klein cirkeltje om een punt van J bevat punten zowel van $\mathbf{U}$ als van $\mathbf{V}$.

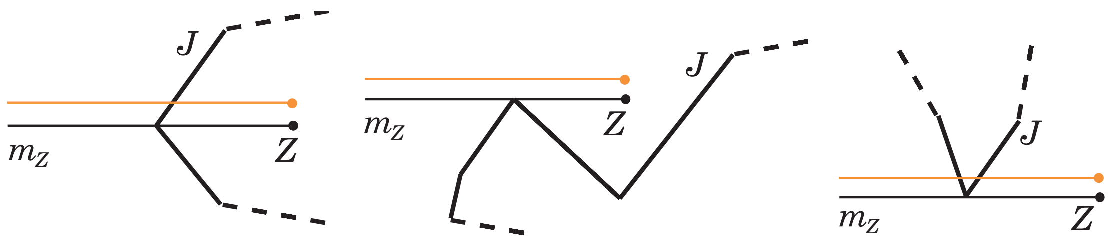
Wat moeten we verder nog bewijzen? Alleen nog dit: er is geen lijnentrek van een punt uit $\mathbf{U}$ naar een punt uit $\mathbf{V}$ die J niet snijdt. Maar dat is nog niet zo eenvoudig.

De index van een punt

We gaan voor ieder punt Z, niet op J, een *index* definiëren. We kiezen eerst een assenstelsel en wel zó dat geen enkele verbindingslijn van twee hoekpunten van J evenwijdig is met de x-as. Dat kan omdat J maar eindig veel hoekpunten heeft; er zijn dus maar eindig veel richtingen verboden voor de x-as. Als nu Z een punt is dat niet op J ligt, trek dan een halflijn (of straal) m_Z evenwijdig met de x-as en met Z als rechter eindpunt. Neem eerst even aan dat er op de halflijn m_Z geen hoekpunt van J ligt. Zie figuur 4. Dan geldt dat $\text{index}(Z) = 0$ als het aantal snijpunten van m_Z met J even is, en $\text{index}(Z) = 1$ als het aantal snijpunten oneven is. Als er een hoekpunt van J op m_Z ligt, dan verplaatsen we de halflijn m_Z evenwijdig een heel klein beetje naar boven of naar beneden (dat maakt niet uit); er ligt nu geen



Figuur 4 De definitie van index: $\text{index}(Z) = 0$ en $\text{index}(S) = 1$.



Figuur 5 Drie situaties waarbij m_Z door een hoekpunt van J gaat. Verschuif m_Z iets naar boven of naar beneden om de index van Z te berekenen.

hoekpunt van J meer op de verplaatste halflijn en de index wordt berekend als boven. In figuur 5 zijn drie situaties getekend. Merk nu op dat het in deze situaties geen verschil maakt voor de berekening van de index of je de lijn m_Z iets naar boven of iets naar beneden verschuift. Meer in het algemeen maakt het voor de berekening van de index geen verschil of je m_Z naar boven of naar beneden schuift, zolang het punt Z de kromme J maar niet passeert. Daaruit volgt: als R en S het begin- en eindpunt zijn van een lijnstuk dat J niet snijdt, dan is $\mathrm{index}(R) = \mathrm{index}(S)$. Maar het laatste resultaat kunnen we uitbreiden tot lijnentrekken: als de punten R en S het begin- en eindpunt zijn van een lijnentrek die geheel buiten J verloopt, dan geldt dat $\mathrm{index}(R) = \mathrm{index}(S)$. Daarom is $\mathrm{index}(Z) = \mathrm{index}(P)$ voor iedere Z in $\mathbf{U}$ en $\mathrm{index}(W) = \mathrm{index}(Q)$ voor iedere W in $\mathbf{V}$.

Uit de definitie van index (zie figuur 4) volgt bijna direct dat $\mathrm{index}(P) \neq \mathrm{index}(Q)$. Uit het voorgaande volgt nu dat er geen lijnentrek is met beginpunt in $\mathbf{U}$ en eindpunt in $\mathbf{V}$ die geheel buiten J verloopt; zo'n lijnentrek van een punt in $\mathbf{U}$ naar een punt in $\mathbf{V}$ moet J dus snijden. In het bijzonder is $\mathbf{U} \cup \mathbf{V}$ (de *vereniging* van $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$: het hele vlak, minus J) niet samenhangend. Hiermee is het bewijs van de stelling voltooid.

Er zitten toch nog veel subtiele kanten aan en je begrijpt nu misschien wel dat het bewijs voor de *echte* stelling van Jordan niet gemakkelijk is.

En de vis?

Bekijk nog eens de doolhof-puzzel in figuur 1. Kan de kat de vis ooit pakken? De zak is een Jordan-kromme, dus scheidt twee gebieden: binnen en buiten. De kat zit buiten, zijn index is 0. Om de index van de vis te bepalen, trek je een halflijn vanuit de vis, en tel het aantal keren dat de halflijn de zak snijdt. Dat aantal is even, dus de vis heeft óók index 0. De vis is dus niet veilig: de kat zal hem pakken.

Figuur 6 Het aantal keer dat een halflijn vanuit de vis naar de kat de zak snijdt, is even. Dat betekent dat de vis *niet* in de zak zit, en dus gepakt kan worden door de kat.

door **Dave Odegard**

STAPEL

Het getal 140 is te schrijven als $14 + 15 + \cdots + 21$ en 141 is te schrijven als $70 + 71$. Als een getal geschreven kan worden als de som van twee of meer positieve, gehele, elkaar opvolgende getallen, noem ik het *stapelbaar*. De getallen 140 en 141 zijn dus stapelbaar. In dit artikel bekijken we welke getallen stapelbaar zijn en welke niet.

Zijn alle getallen stapelbaar? Zoek dit zelf uit aan de hand van de volgende vragen:

1. Zijn alle oneven getallen stapelbaar?
2. Zijn alle priemgetallen stapelbaar?
3. Welke even getallen zijn niet stapelbaar?
4. Je zou de stapel ook met een negatief getal kunnen beginnen; waarom is dat niet zo interessant?

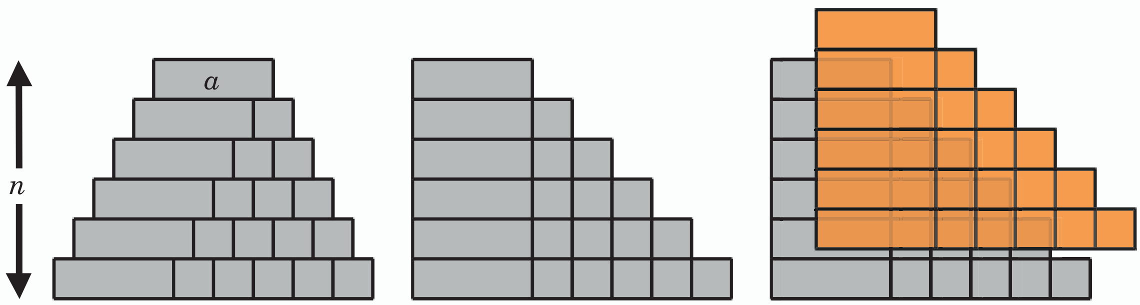
Een handige formule

Het getal 128 is niet stapelbaar. Proefondervindelijk stel je dat vast door alle stapels (ver) onder de 128 uit te proberen, en na te gaan dat geen enkele 128 oplevert. Maar je kunt dat ook vaststellen door eens goed na te denken over hoe de som van een stapel er uitziet.

Neem een stapel van n getallen beginnend met a, dus:

$$a, a + 1, \ldots, a + (n - 1).$$

De som van een stapel



Neem een stapel van n getallen, beginnend met a.

Herschik de stapel; je ziet dat de som van de n getallen gelijk is aan $a + (a + 1) + \cdots + (a + (n - 1))$.

Verdubbel de stapel; zo krijg je $2n$ getallen met som $2 \times (a + (a + 1) + \cdots + (a + (n - 1)))$.

Dan geldt voor de som S van die stapel:

$$S = \tfrac{1}{2}n(n + 2a - 1).$$

Waar deze formule vandaan komt, wordt hieronder uitgelegd.

Ieder stapelbaar getal moet dus in deze vorm te schrijven zijn. En niet alle getallen zijn zo te schrijven. Ga na: als n even is, dan is $n + 2a - 1$ oneven. Daarentegen: als n oneven is, dan is $n + 2a - 1$ juist even. Dus één van de twee getallen n en $n + 2a - 1$ is oneven. Deel degene die even is door 2, dan blijkt dat S het product is van twee getallen waarvan er ten minste één oneven is. Oftewel: ieder stapelbaar getal moet een oneven deler hebben. En 128 heeft dat niet.

Opdrachten

Heb je dit door, beproef dan je krachten op de volgende vragen. Je oplossingen kun je vergelijkingen met de onze op pagina 10.

Sommige getallen, zoals 6, zijn te stapelen met 1 als eerste getal ($6 = 1 + 2 + 3$). Een stapel met 1 als eerste getal noem ik een basisstapel.

5. Geef een beschrijving van de getallen die een basisstapel hebben.

Een basisstapel kunnen wij noemen naar het laatste getal ($1 + 2 + \cdots + n = S_n$).

6. Wat is opvallend aan sommen zoals $S_2 + S_3$ en $S_3 + S_4$?

Een positief geheel getal is altijd te schrijven op één manier als product van priemgetallen, bijvoorbeeld $5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

7. Hoeveel factoren heeft het getal 5400?

Het getal 3 heeft slechts één stapel ($3 = 1 + 2$), maar het getal 15 heeft er meer ($15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$).

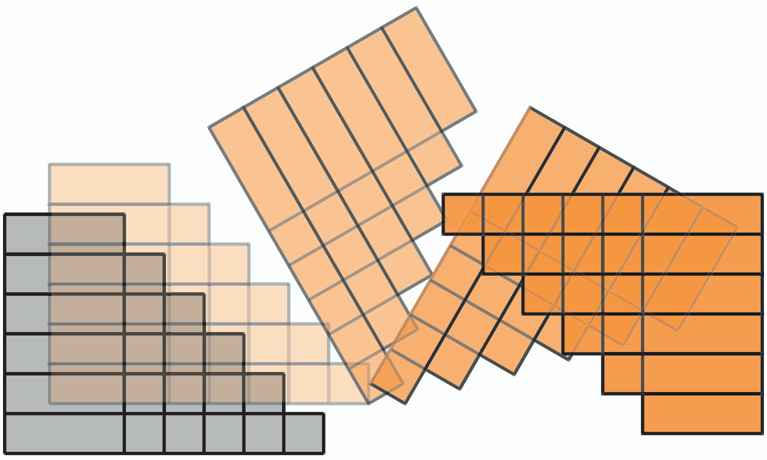
8. Welke getallen hebben slechts één stapel?

Sommige getallen, zoals 14, hebben een *even* stapel ($14 = 2 + 3 + 4 + 5$, een stapel die uit een even aantal getallen bestaat).

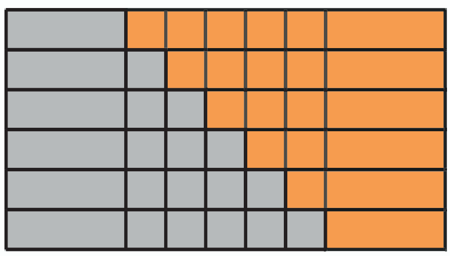
9. Hoe kun je aan een getal zien dat het een even stapel heeft?
10. Hoeveel stapels heeft het getal 2004?

Nog drie vragen om helemaal stapelgek van te worden:

11. Kun je een getal vinden met precies 2004 stapels?
12. Kun je 2004 schrijven als som van minder dan tien basisstapels?
13. Welk getal kleiner dan 2004 heeft het grootste aantal stapels?



Kantel de tweede stapel zó, dat de twee stapels in elkaar passen.



Schuif de twee stapels in elkaar; het resultaat is een rechthoek met oppervlakte $n \times (2a + n - 1)$.

Conclusie: $a + (a + 1) + \cdots + (a + n - 1) = \frac{1}{2}n(n + 2a - 1)$

ANTWOORDEN

1. Elk oneven getal is van de vorm $2n - 1$, en $2n - 1 = (n - 1) + n$. Dus alle oneven getallen (behalve 1) zijn stapelbaar.

2. Alle priemgetallen (behalve 2) zijn oneven, dus stapelbaar volgens antwoord 1. Het priemgetal 2 is niet stapelbaar.

3. Door te zoeken blijkt dat 2, 4, 8, 16,... niet stapelbaar zijn. Dit zijn de machten van 2, waar 1 ook bij hoort.

4. Als stapel $-n, \ldots, 0, \ldots, m$ een positieve som heeft, dan is $n < m$, dus levert hetzelfde op als de stapel $n + 1, n + 2, \ldots, m$. Verder wordt dan elk getal stapelbaar, want $n = -(n - 1) + \cdots + 0 + \cdots + (n - 1) + n$.

5. Getallen met een basisstapel zijn getallen van de vorm $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

6. $S_{n-1} + S_n = n^2$ en is dus altijd een kwadraat.

7. Elke factor van 5400 is een product van de priemfactoren. Bij priemfactor 2 kunnen wij voor de exponent kiezen uit 0, 1, 2, of 3, etc. Dus 5400 heeft $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ factoren.

8. Dan moet S maar op één manier geschreven kunnen worden als $\frac{1}{2}n(2a + n - 1)$. Van de twee getallen n en $2a + n - 1$ is de ene even en de andere oneven, dus alle factoren 2 moeten of in de ene of in de andere terechtkomen. Heeft S nu maar één oneven priemfactor, dan komt die automatisch op de andere plaats te staan. Bovendien is n altijd kleiner dan $2a + n - 1$, dus ligt nu vast wat n is en wat $n + 2a - 1$. Heeft S daarentegen meerdere oneven priemfactoren, dan kun je die op meerdere manieren over n en $2a + n - 1$ verdelen, hetgeen meerdere stapels oplevert. Hieruit volgt dat als S gelijk is aan een macht van twee keer één oneven priemgetal, hij slechts één stapel heeft. Deze getallen lijken het meest op de onstapelbare machten van 2.

9. Schrijf het getal in de vorm $S = 2^m \cdot f$ met f oneven. Dan heeft S een even stapel als $2 \cdot 2^m < f$.

10. De mogelijke waarden van n zijn 3, 8 en 24, dus 2004 heeft drie stapels.

11. Voorbeeld: Maak eerst een oneven getal dat 2004 oneven delers (ongelijk aan 1) heeft, zoals $3^{400} \cdot 5^4$. Kies daarna een macht m van 2 zó, dat $2^m > 3^{400} \cdot 5^4$, dus

$$m > \frac{400 \cdot \log 3 + 4 \cdot \log 5}{\log 2} \approx 643{,}3.$$

Het getal $2^{644} \cdot 3^{300} \cdot 5^4$ is gelijk aan $2S$, en dus geldt $S = 2^{643} \cdot 3^{400} \cdot 5^4$: een getal dat geen even stapel heeft. Als we per se een even stapel willen hebben, kunnen we kiezen voor $2^{642} \cdot 3^{400} \cdot 5^4$.

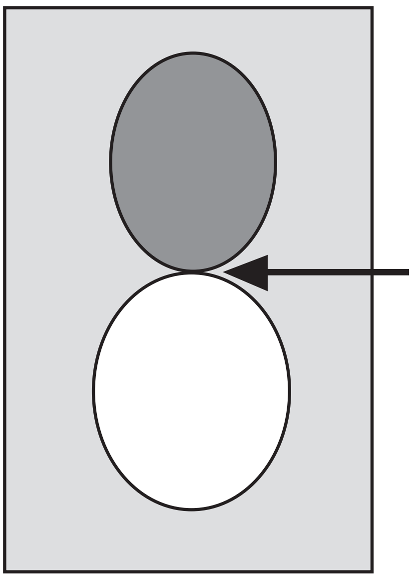
12. Voorbeeld: Schrijf 2004 als de som van kwadraten allemaal groter dan 2^2: $2004 = 44^2 + 6^2 + 4^2 + 4^2$. Volgens het antwoord op vraag 5 is 2004 nu te schrijven als $S_{43} + S_{44} + S_5 + S_6 + 2 \cdot (S_3 + S_4)$.

13. Het getal 1575 heeft in totaal zeventien stapels.

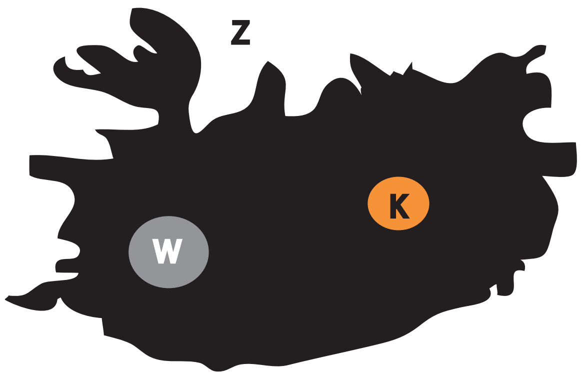
door **J.M. Aarts**

Hieronder zie je een kromme in de vorm van een 8. Deze 8 verdeelt het vlak in drie gebieden: twee 'binnengebieden' en een 'buitengebied'. Als grens van de drie gebieden bevat de 8 maar één zogenaamd *drielandenpunt*: een punt dat aan alle drie de gebieden ligt. Er zijn ook andere manieren om het vlak in drie aaneengesloten gebieden te verdelen. Probeer maar eens uit, je zult al gauw tot de overtuiging komen dat het niet mogelijk is meer dan twee drielandenpunten te maken. In 1910 kwam de Nederlander L.E.J. Brouwer met een opmerkelijk resultaat over verdelingen van het vlak in drie gebieden.

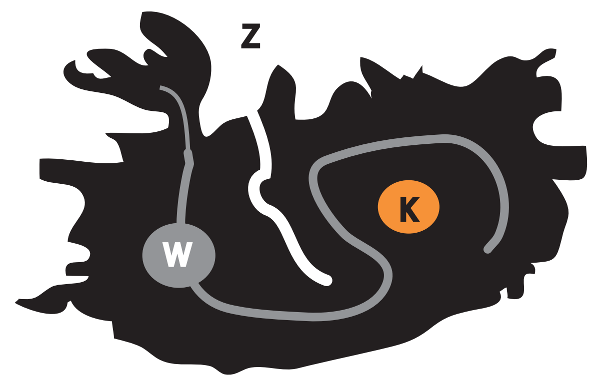
De meren van Wada



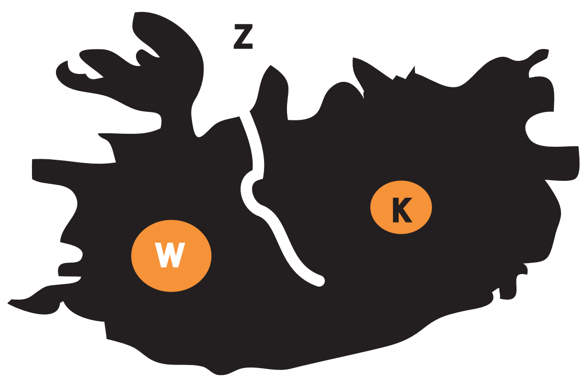
De verbazing was groot, toen in 1910 de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer liet zien dat er manieren zijn om het vlak in drieën te splitsen met een grens die alleen maar uit drielandenpunten bestaat. Brouwer deed dat in een artikel over fundamentele topologische eigenschappen van het vlak: *Zur Analysis Situs*, in het tijdschrift *Mathematische Annalen*, Band 68, p. 422-434. *Analysis Situs* betekent letterlijk *analyse van de ligging* en het is de oude benaming voor topologie. Wij bespreken hier een voorbeeld dat afkomstig is van de Japanner Hideo Wada en dat vermeld wordt in een artikel van K. Yoneyama in het tijdschrift *Tôhoku Mathematical Journal* 12, 1917, p. 60.
Het voorbeeld staat bekend onder de naam *De meren van Wada.*



Figuur 1



Figuur 3



Figuur 2

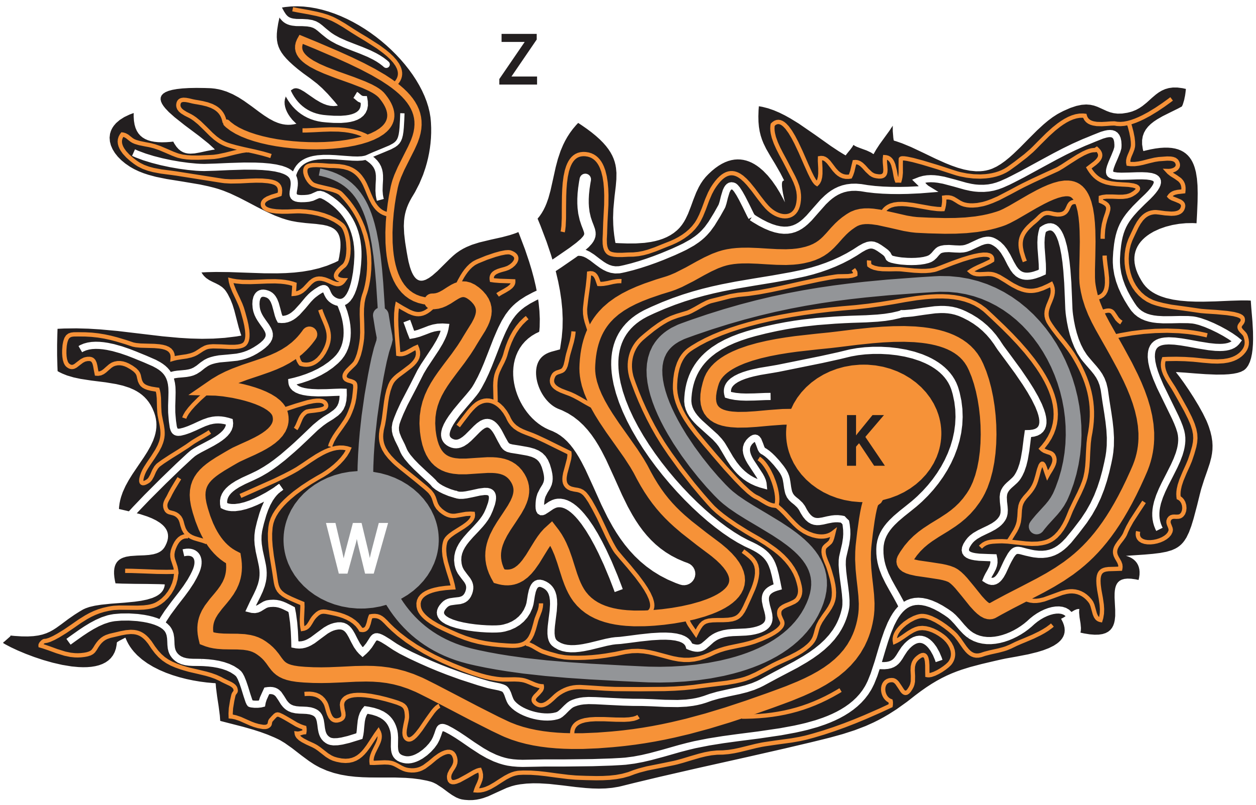
Figuur 4

Er was eens...
De beschrijving van het voorbeeld heeft alles van een sprookje. Op een eiland in zee (**Z**), hier ver vandaan, waren één warmwaterbron en één koudwaterbron (vergelijk Homerus, Ilias XXII, vers 148-152). Die bronnen waren zó groot, dat men het had over het warme meer (**W**) en het koude meer (**K**), zie figuur 1.

Op een dag zeiden de eilandbewoners tegen elkaar: 'Het zou toch wel makkelijk zijn als we allemaal wat dichter bij de zee zouden wonen.' Dus werd er besloten om vanuit zee een prachtig kanaal te graven, omzoomd door zandstranden, dat ieder punt van het eiland tot op minder dan vier kilometer benaderde, maar dat de topologische samenhang van het eiland niet zou verstoren, dat wil zeggen: je moest van ieder punt van het eiland naar ieder ander punt kunnen gaan zonder het kanaal over te steken. Dit project, zie figuur 2, werd in één jaar voltooid.

Toen zei men: 'Het zou toch wel makkelijk zijn als dat warme water ook wat minder ver weg was.' En dus werd er vanuit het warme meer een kanaal gegraven dat ieder punt van het eiland tot op minder dan twee kilometer benaderde, maar dat de samenhang van het eiland niet verstoorde. Deze klus, zie figuur 3, werd in een half jaar geklaard.

'Maar nu moet het koude water ook dichter bij huis,' hoorde men. Dus werd er vanuit het koude meer een kanaal gegraven dat ieder punt van het eiland tot op minder dan één kilometer benaderde, maar dat de samenhang van het eiland niet verstoorde. Dit werk, zie figuur 4, werd binnen een kwartaal (drie maanden) uitgevoerd. Bij al dat graafwerk werd er nauwlettend op toegezien dat de kanalen nergens met elkaar in verbinding kwamen. Dat kan ook niet, want dan heb je in no time overal lauw zout water en dat was nou niet de bedoeling.



Figuur 5

Daarna werd besloten om de kanalen uit zee, het warme meer en het koude meer te verlengen en was ieder punt van het eiland dichter dan 500 meter bij zeewater, dichter dan 250 meter bij het warme water en dichter dan 125 meter bij het koude water.
In figuur 5 zie je het project voor zeewater en warm water voltooid. De cyclussen van zout, warm en koud volgden elkaar steeds sneller op. Iedere uitbreiding van de drie kanalen, zout, warm en koud, werd voltooid in de helft van de tijd van de vorige uitbreiding en bij iedere uitbreiding werden de afstanden van elk punt tot zout, warm of koud water gehalveerd.

En hoe verder?
Hoe moest dit aflopen? Blijft er nog wel iets van het eiland over? En toen, toen kwam de topologie om de hoek kijken. Het eiland is een gesloten en begrensde deelverzameling van het vlak; in de topologie weet men dat zo'n verzameling *compact* is. En het is die eigenschap die de topologen gebruiken om te laten zien dat er een heleboel punten niet worden weggegraven. De punten die overblijven, vormen de gemeenschappelijke grens van het zoute, het warme en het koude water. Deze punten zijn dus de 'drielandenpunten'.

Nu zou je kunnen denken: alles goed en wel, een knotsgek voorbeeld, maar wel vergezocht. Maar in het moderne onderzoek van differentiaalvergelijkingen met behulp van computerexperimenten kom je ook voorbeelden tegen van drie gebieden in het vlak met één gemeenschappelijke grens. Zulke voorbeelden worden vermeld in het artikel *Basins of Attraction* van H.E. Nusse en J.A. Yorke, in *Science* 271, 1996, p. 1376-1380.

door **Marco Swaen**

Topologie met de handen

Aflevering 2 *Loskomen*

Met ruim zittende T-shirts en wat touw komt elk gezelschap los.

1 Bij Marisca en Elise zijn de polsen met touw verbonden. Bovendien zitten zij ook met die touwen in elkaar. Haal Marisca en Elise uit elkaar.

2 Marisca mag haar handen niet los van elkaar halen. Keer haar T-shirt binnenstebuiten.

3 Kim en Hasna houden elkaars handen vast. Kim draagt het zwarte T-shirt. Doe Hasna het zwarte T-shirt aan.

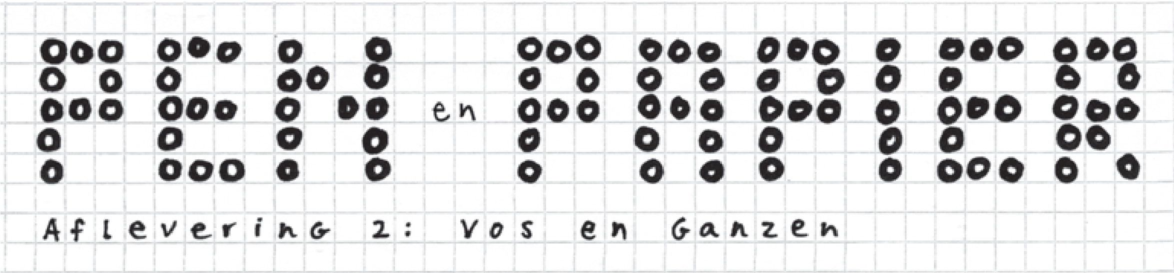
4 Marisca en Roxanne houden elkaars handen kruislings vast. Doe Marisca het T-shirt van Roxanne aan.

5 Roxanne draagt een wit T-shirt, Marisca een zwart. Zij houden elkaars handen vast. Kun je hun T-shirts verwisselen, zonder dat zij de handen loslaten?

Oplossingen vind je op pagina 33.

Bron: *Solve this*, James Tanton 2001. Mathematical Association of America.

door **Walter Joris**



Een saaie les? En ook uitgekeken op *Boter, kaas en eieren* of *Kamertje verhuren*? Probeer dan eens een ander pen-en-papier-spel. Het enige dat je nodig hebt is een tegenstander, ruitjespapier en ieder een pen.

Het spel in deze tweede aflevering van *Pen en papier* is een verre afgeleide van het oeroude *Vos en ganzen*. We gebruiken een bord van 10 x 10 op ruitjespapier. De vos begint en schrijft het cijfer 1 in een vakje. Van daaruit mag hij naar alle aangrenzende vakjes springen, ook diagonaal. Daar zet hij 2, enzovoort.

De ganzen zetten op hun beurt telkens een *cirkeltje* in een willekeurig vakje. Op die vakjes mag de vos niet meer gaan staan. De ganzen proberen de vos in te sluiten, zodat hij niet meer kan bewegen. Maar let op: de vos mag wel over een gans heen springen, mits het vakje erachter nog vrij is. Hij mag dat ook diagonaal. Daarbij wint hij een extra punt. Vos 21 die over een gans springt, wordt dus 23. De vos mag zo mogelijk ook een keten van sprongen over ganzen afleggen, waarbij hij onderweg wel steeds zijn nummers moet zetten. De vos mag niet springen over zijn eigen vorige nummers.

Een belangrijke regel is dat overspringen *verplicht* is, zodra het kan. Dit kan dus als valstrik worden gebruikt. De vos wint als hij het cijfer 30 bereikt.

Voorbeelden

1a. De vos zet 1, de gans zet rechts boven een cirkeltje. Daarop schuift de vos naar 2.

1b. De gans zet rechts boven nog een cirkeltje. De vos is nu verplicht eerst over de eerste gans te springen. Hij wordt dan niet 3, maar 4. Vervolgens moet hij over de tweede gans springen, aangezien overspringen, ook in serie, altijd verplicht is. De vos bereikt nu 6. Dit lijkt dom van de ganzen, maar de vos is nu wel in een hoek gedrongen. Als de ganzen er in slagen de rest van het veld af te sluiten, kunnen zij misschien winnen. De vos kan slechts naar vier omringende vakjes schuiven. Telkens zal hij daarna verplicht zijn over de nabije gans te springen als het vakje erachter vrij blijft.

1c. De ganzen zetten midden boven een cirkeltje om die vluchtweg al wat af te sluiten, en de vos schuift naar 7. Als hij over de gans springt, is hij weer vrij. Te verwachten is dat de ganzen echter juist dit vakje zullen bezetten! Zo zit de vos nu al in de problemen, want over zijn eigen, vorige nummers mag hij niet springen.

2. Voorbeeld van een spelverloop, waarbij de zetten van de ganzen genummerd zijn in oranje, zodat je het spel van begin tot eind kunt volgen. Merk dus op dat als de vos het cijfer 3 heeft, hij daarna springt over gans 2, en dus naar 5 bevordert. De vos haalt hier maar 28, en verliest.

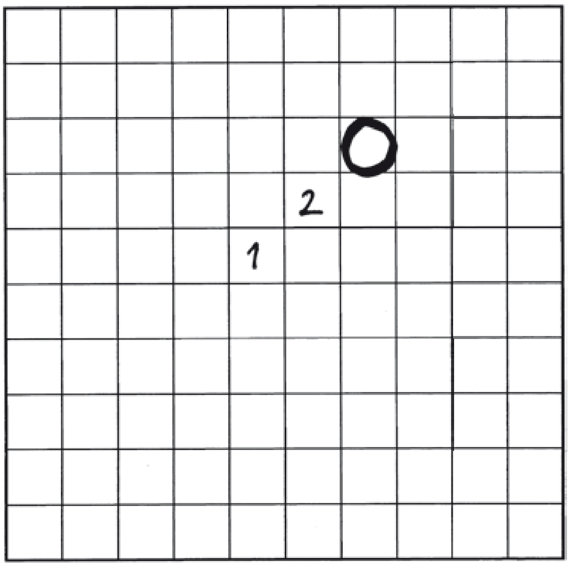
3. Een 'normaal' spelbeeld: de zetten van de ganzen zijn niet genummerd. De vos haalt hier 30, en wint.

Tot slot

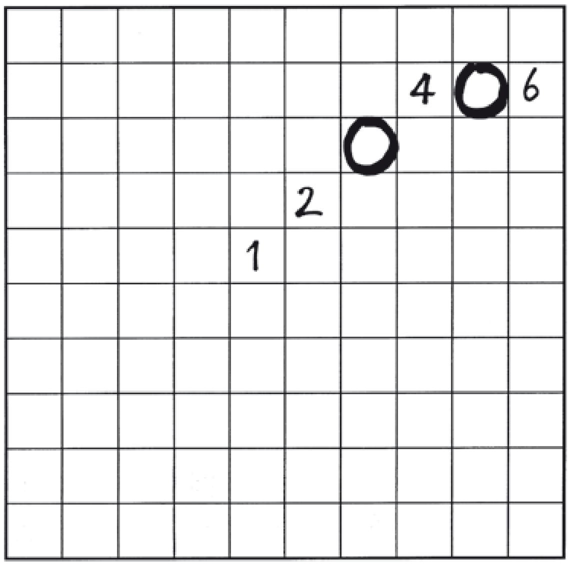
Net als bij het bordspel *Vos en ganzen*, en zijn tientallen variaties en benamingen in evenzovele culturen, winnen de ganzen theoretisch altijd. Maar men moet wel een goede tactiek uitdenken. Overigens is het de gewoonte bij dergelijke spelen om om beurten de vos te zijn.

Walter Joris verzamelt pen-en-papier-spellen en schreef er een prachtig boek over: *100 Strategic Games for Pen and Paper*, Walter Joris, Carlton, Londen. ISBN: 1–84222–727–0. Het boek is behalve in het Engels, ook in het Spaans, Grieks en Pools verkrijgbaar. Speciaal voor *Pythagoras* legt Walter Joris dit jaar elk nummer een spel uit.

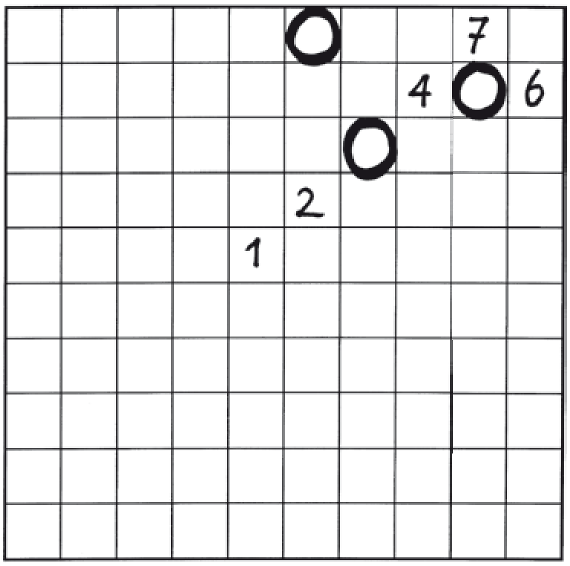
1a


2
1

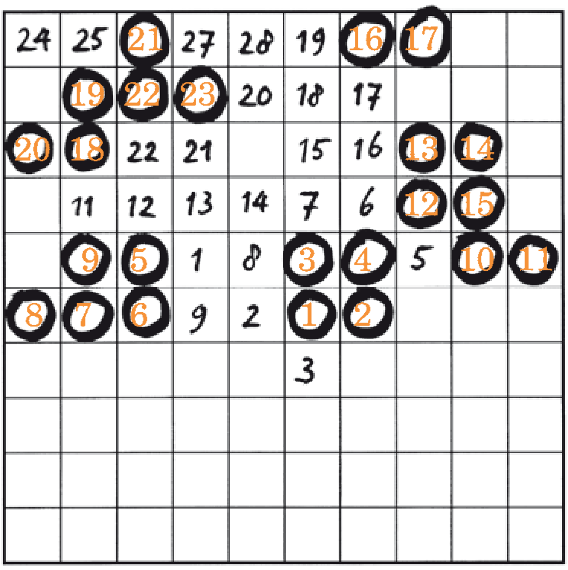
1b


4 6
2
1

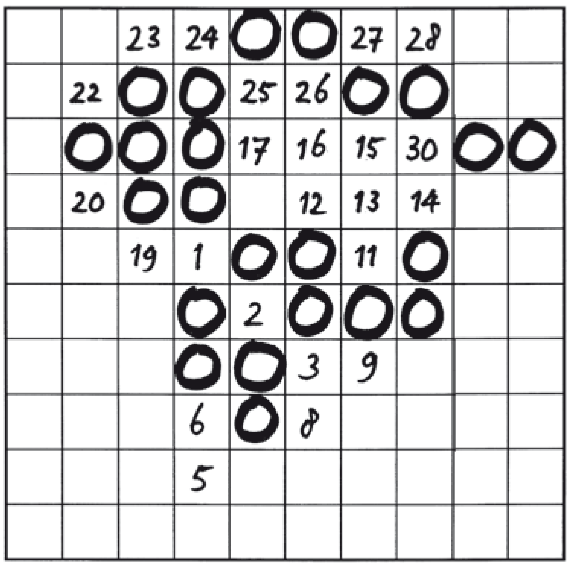
1c


7
4 6
2
1

2


24 25 21 27 28 19 16 17
19 22 23 20 18 17
20 18 22 21 15 16 13 14
11 12 13 14 7 6 12 15
9 5 1 8 3 4 5 10 11
8 7 6 9 2 1 2
3

3


23 24 27 28
22 25 26
17 16 15 30
20 12 13 14
19 1 11
2
3 9
6 8
5

°Pythagoras Olympiade

door Thijs Notenboom, Allard Veldman en René Pannekoek

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras.*

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

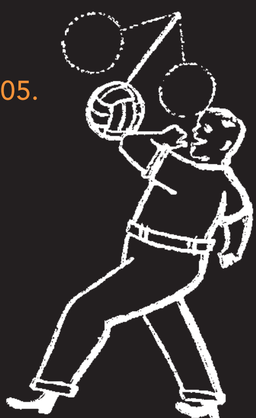
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam,* ook je *adres, school* en *klas.* Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 1 januari 2005.

OPGAVE 112

Bewijs dat er precies één natuurlijk getal n is zó, dat $2^8 + 2^{11} + 2^n$ een kwadraat is.

OPGAVE 113

In de ontbindingen in priemfactoren van $r + 1$ natuurlijke getallen (r geheel, positief) komen samen slechts r verschillende priemgetallen voor. Bewijs dat er een deelverzameling van deze getallen bestaat waarvan het product een kwadraat is.



OPLOSSING 108

Elk van de diagonalen AC en BD van de convexe koordenvierhoek $ABCD$ is een bissectrice van de hoek aan één uiteinde en een trisectrice van de hoek aan het andere uiteinde. Bepaal de grootte van de hoeken van vierhoek $ABCD$.

Oplossing. Laten we aannemen dat de bissecties bij de hoeken C en D plaatsvinden en de trisecties bij A en B. Noem $\alpha = \angle CAB$ en $\beta = \angle DBA$. Dan is vanwege de bissectie en de eigenschappen van een koordenvierhoek $\angle ADB = \angle CDB = \angle CAB = \alpha$ en $\angle ACB = \angle ACD = \angle ABD = \beta$. Er zijn dan drie mogelijkheden.

1. $\angle CAD = 2\alpha$ en $\angle DBC = 2\beta$. Omdat overstaande hoeken in een koordenvierhoek samen 180° zijn, zien we uit $3\alpha + 2\beta = 180°$ en $2\alpha + 3\beta = 180°$ dat $\alpha = \beta = 36°$.
De hoeken van de koordenvierhoek zijn dus 108°, 108°, 72° en 72°.

2. $\angle CAD = 2\alpha$ en $\angle DBC = \frac{1}{2}\beta$. Nu hebben we $3\alpha + 2\beta = 2\alpha + \frac{3}{2}\beta = 180°$ en dat kan niet met positieve α en β.

3. $\angle CAD = \frac{1}{2}\alpha$ en $\angle DBC = \frac{1}{2}\beta$. Nu zien we dat $\frac{3}{2}\alpha + 2\beta = 2\alpha + \frac{3}{2}\beta = 180°$, waaruit volgt dat $\alpha = \beta = \frac{360}{7}^\circ$. De hoeken van de koordenvierhoek zijn dan $\frac{540}{7}^\circ$, $\frac{540}{7}^\circ$, $\frac{720}{7}^\circ$ en $\frac{720}{7}^\circ$.

De twee oplossingen hebben te maken met regelmatige veelhoeken: de vierhoek van geval 1 bestaat uit vier hoekpunten van een regelmatige vijfhoek, terwijl de vierhoek van geval 3 uit de hoekpunten A, B, D en F van een regelmatige zevenhoek $ABCDEFG$ bestaat.

Deze opgave werd opgelost door: Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot, Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda**, Kasper Duivenvoorden van het **Hondsrug College** te Emmen, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Wouter Berkelmans van het **Barlaeus Gymnasium** te Amsterdam, Karel van Bockstal van het **EDUGO de Toren** te Oostakker, Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede en Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg.
De boekenbon gaat naar Karel van Bockstal.

OPLOSSING 109

Als je van een schaakbord van 7 x 7 één vakje weghaalt, is het soms mogelijk om de overgebleven vakjes met 16 stukjes van 3 x 1 te bedekken, maar dit is afhankelijk van wélk vakje je weghaalt.
Vind zo veel mogelijk vakjes waarvoor dit *niet* mogelijk is.

Oplossing. We voorzien elk vakje van het schaakbord van een 0, 1 of 2, volgens het patroon in onderstaand plaatje.

0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0

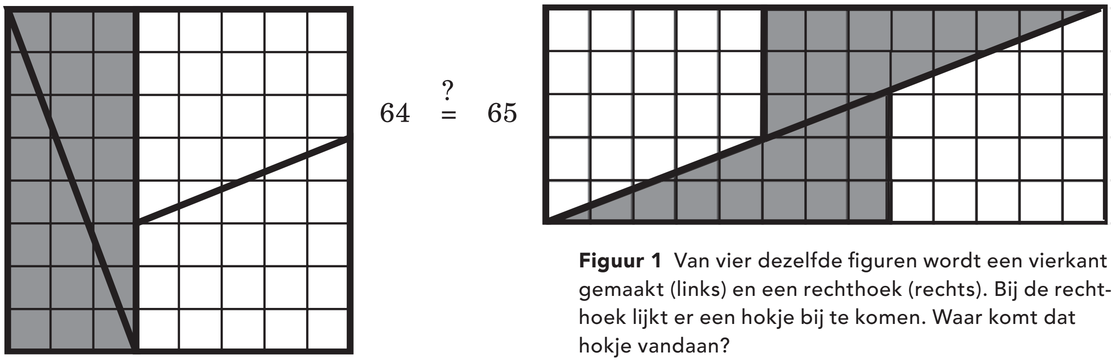
Elk stukje van 3 x 1 bedekt dan een 0, een 1 en een 2. In een volledige bedekking moeten er dus van alle drie de getallen evenveel voorkomen. Omdat in de huidige situatie er een 0 te veel is, moet een van de vakjes met een 0 weggehaald worden. Verwijdering van een van de andere vakjes leidt tot een onoplosbare situatie. Als we nu deze nummering een kwartslag draaien, dan vallen weer een aantal vakjes af. De enige vakjes die overblijven, zijn degene die in beide nummeringen een 0 bevatten, te weten de vier hoekvakjes, de middelste vakjes van elke zijde, en het midden van het vierkant. Voor elk van deze negen vakjes valt gemakkelijk in te zien dat je deze kunt verwijderen en de rest met stukjes van 3 x 1 kunt bedekken.

Deze opgave werd opgelost door: Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium Breda**, Aad van de Wetering te Driebruggen, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Karel van Bockstal van het **EDUGO de Toren** te Oostakker, Wilke van der Schee van de **CSG Het Streek** te Ede en Victor Pessers van het **Sint-Odulphus Lyceum** te Tilburg. De boekenbon gaat naar Johan Konter.

door **Peter Stikker**

Een vierkant met een oppervlakte van 64 cm² wordt omgebouwd tot een rechthoek met een oppervlakte van 65 cm². Hoe kan dat? Op deze (bekende) paradox heeft Peter Stikker varianten bedacht die verband hebben met de beroemde rij van Fibonacci.

Een hokje erbij

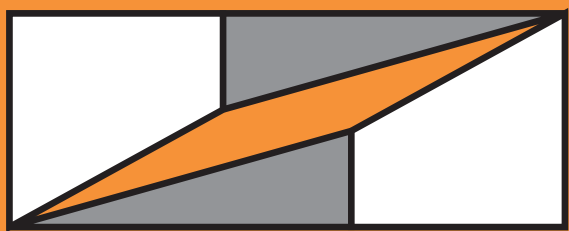


Figuur 1 Van vier dezelfde figuren wordt een vierkant gemaakt (links) en een rechthoek (rechts). Bij de rechthoek lijkt er een hokje bij te komen. Waar komt dat hokje vandaan?

Zo'n acht jaar geleden kwam mijn oom aanzetten met een klein puzzeltje. Hij wist dat ik wiskunde studeerde en legde het probleem aan mij voor. Het bleek een al eeuwenoude puzzel te zijn: in de zeventiende eeuw hield men zich er reeds mee bezig! De vraag is: hoe kun je met dezelfde stukken twee figuren leggen waarvan de oppervlakte duidelijk niet gelijk is? In figuur 1 zie je een vierkant met een oppervlakte van 64 cm² en een rechthoek met een oppervlakte van 65 cm², maar beide figuren bestaan uit dezelfde stukken!

Na enkele gedachtenkronkels zul je waarschijnlijk wel zien waar het extra hokje vandaan komt. Kijk je namelijk goed, dan blijkt de rechthoek in figuur 1 geen zuivere vierkantjes te bevatten. Als je de rechthoek netjes op roosterpapier tekent, dan zul je zien dat de vier stukken de rechthoek net niet helemaal bedekken. In figuur 2 is dit overdreven getekend; zo zie je dat er in feite een langgerekt parallellogram onbedekt blijft, zie daar het zogenaamde 'extra hokje'.

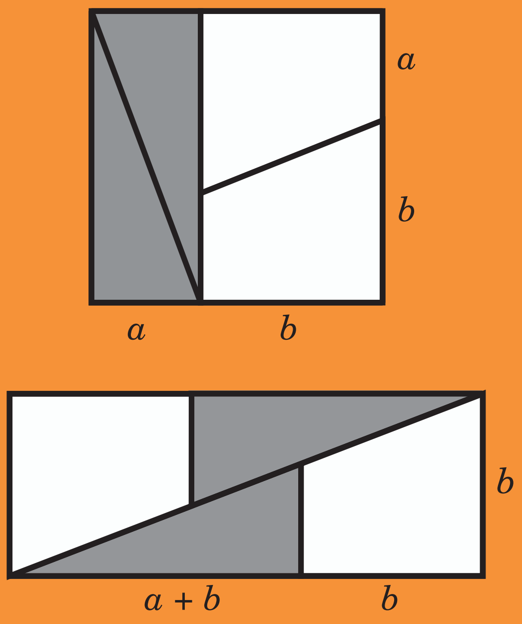
Wie de zaak helemaal voorgerekend wil zien, moet maar kijken op mijn site http://stikpet.uwnet.nl/PHStikker/StiWerk.htm. Ook in een eerder nummer van *Pythagoras* is het probleem aan de orde gekomen: in de serie *drogredeneringen* van André de Boer kwam de puzzel aan bod in het februarinummer 1999.



Figuur 2 De oplossing: in werkelijkheid blijft in de rechthoek een parallellogram onbedekt.

Andere afmetingen

Toen ik het antwoord op de vraag had gevonden, was daarmee de zaak voor mij nog niet afgedaan. Ik vroeg mij af of er nog ándere afmetingen zijn (anders dan 5 en 3) waarbij het oppervlakteverschil óók precies 1 is.
Laten we eens uitgaan van een puzzel met lengtes a en b, zie figuur 3.



Figuur 3 Een puzzel met lengtes a en b

De oppervlakte van het vierkant is dan

$$(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2.$$

De oppervlakte van de rechthoek is

$$(a + b + b) \times b = ab + 2b^2.$$

Willen we dat er van het vierkant naar de rechthoek één hokje bijkomt, dan moet dus gelden:

$$ab + 2b^2 - (a + b)^2 = 1,$$

ofwel

$$b^2 - a^2 - ab = 1.$$

Ik liet de computer naar gehele oplossingen zoeken, en kreeg een lange lijst van 'één-teveel-paren', waarvan dit de eerste zes zijn:

$$(1, 2), (3, 5), (8, 13), (21, 34),$$
$$(55, 89), (144, 233).$$

Een verschil van –1 zou ook mogelijk kunnen zijn, dan verdwijnt er juist een hokje. Dan moeten a en b voldoen aan $b^2 - a^2 - ab = -1$. De eerste zes 'één-tekort-paren' zijn:

$$(1, 1), (2, 3), (5, 8), (13, 21), (34, 55), (89, 144).$$

Kortom: er zijn vele andere mogelijkheden!

Een beroemde rij getallen

In de reeks van oplossingen herkennen we een beroemde rij getallen; zet de paren met een hokje teveel maar achter elkaar en laat de haakjes weg, dan krijg je

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Dit is precies de rij van Fibonacci! In de paren met 'een hokje tekort' zit de rij evenzo goed. Ken je de rij van Fibonacci niet, lees dan het kader op pagina 23.

Dat we de rij van Fibonacci herkennen, is natuurlijk geen toeval. Laten we de twee formules erbij nemen:

$$b^2 - a^2 - ab = 1$$

voor 'één teveel' en

$$b^2 - a^2 - ab = -1$$

voor 'één tekort'.

Bekijken we de oplossingen, dan kom je misschien op het volgende idee: als zeg F_n en F_{n+1} een paar (a, b) is met een hokje teveel, dan vormen F_{n+1} en F_{n+2} een paar met een hokje tekort.

We weten dat $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, dus we kunnen ook dit zeggen: als (a, b) een teveel-paar is, dan is $(b, a + b)$ een tekort-paar.

Dat dit echt zo is, kunnen we nagaan in de formules: als (a, b) een teveel-paar is, dan hebben we $b^2 - a^2 - ab = 1$.

We vullen $(b, a + b)$ in in het linkerlid van de tekort-formule, en zien dat er inderdaad –1 uitkomt:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 - b^2 - b(a+b) = \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - ba - b^2 = \\
&= a^2 + ab - b^2 = \\
&= -(b^2 - a^2 - ab) = -1.
\end{aligned}
$$

Op dezelfde manier kun je nagaan dat als (a, b) een tekort-paar is, (b, $a + b$) een teveel-paar is.

Dus heb je eenmaal een paar (a, b) gevonden met een hokje teveel, dan geeft het paar (b, $a + b$) één hokje tekort, en ($a + b$, b + ($a + b$)) één teveel. Je kunt dus net als in de rij van Fibonacci verder.

Begin je nu met (1, 1) voor 'een hokje tekort', dan krijg je inderdaad de hele reeks paren Fibonaccigetallen.

°°Formules voor Fibonaccigetallen

Eerst ging ik trouwens anders te werk. De formule

$$b^2 - a^2 - ab = \pm 1$$

schreef ik als

$$b^2 - ab - (a^2 \pm 1) = 0$$

en beschouwde ik als een kwadratische vergelijking voor een gezochte b. Met de abc-formule vinden we dan de oplossingen:

$$
\begin{aligned}
b &= \tfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2 \pm 1)}}{2} = \\
&= \tfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2 \pm 4}}{2} = \\
&= \tfrac{a \pm \sqrt{5a^2 \pm 4}}{2}.
\end{aligned}
$$

Omdat ik al gezien had dat de Fibonaccigetallen oplossingen waren, substitueerde ik $a = F_{n-1}$ en $b = F_n$ en kreeg:

$$F_n = \frac{F_{n-1} \pm \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^{\,2} \pm 4}}{2}.$$

Omdat de wortel altijd groter zal zijn dan F_{n-1}, zullen we altijd 'plus' doen, dus:

$$F_n = \frac{F_{n-1} + \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^{\,2} \pm 4}}{2}.$$

Volg je het ontstaan van de formule nauwkeurig vanuit het tekort-paar (F_1, F_2), dan blijkt:
voor oneven waarden van n geldt:

$$F_n = \frac{F_{n-1} + \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^{\,2} + 4}}{2}$$

en voor even waarden van n geldt:

$$F_n = \frac{F_{n-1} + \sqrt{5 \cdot F_{n-1}^{\,2} - 4}}{2}.$$

Hiermee had ik een formule voor de rij van Fibonacci die je het volgende getal geeft uit alléén de directe voorganger, in plaats van uit de *twee* voorgangers. Die formule bleek overigens wel al bekend te zijn. Er bestaat zelfs een formule die de getallen direct geeft, helemaal *zonder* voorgangers, de zogenaamde formule van Binet:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Ik kon het niet nalaten deze formule in te vullen in de tekort- en teveel-formules om te zien of ze inderdaad voldoen. Op de site vind je de hele rekenpartij.

Tot slot

Uiteindelijk bood één extra hokje me heel wat uren wiskundeplezier. En er zijn nog vele vragen onaangeroerd gebleven, zoals de vraag of elk paar (a, b) waarmee je een hokje kunt laten verdwijnen, per se uit twee opeenvolgende Fibonaccigetallen moet bestaan. Ik wil de lezer het plezier niet onthouden daar zelf een antwoord op te vinden.

° De getallen van Fibonacci

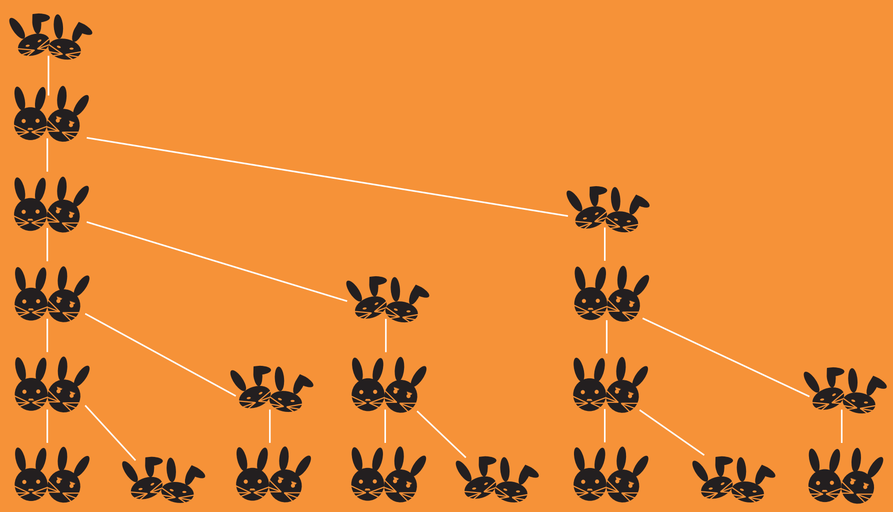
Een van de beroemdste rijen getallen is de *rij van Fibonacci*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

De rij is voor het eerst beschreven in het rekenboek *Liber Abaci* uit 1202, van de hand van Leonardo Pisano, die beter bekend staat onder zijn bijnaam Fibonacci. In het boek komt de volgende opgave voor (vrij vertaald):

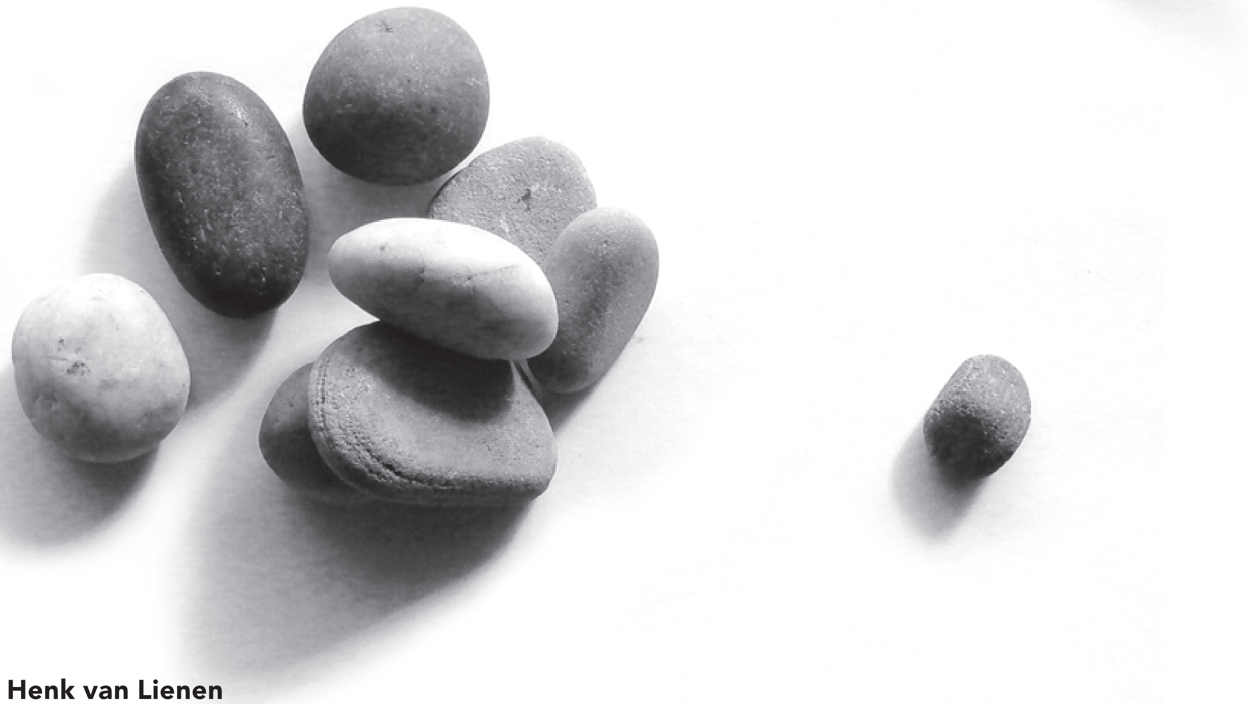
Een man plaatst één paar konijnen in een afgesloten ruimte. Hoeveel konijnenparen zullen er na een jaar in het hok zitten, aangenomen dat elke maand elk paar een nieuw paar krijgt dat vanaf de tweede maand vruchtbaar is?

Het antwoord kan eenvoudig gevonden worden door het uitschrijven van de aantallen per maand. Een onrijp konijn is de volgende maand een rijp konijn; een rijp konijn is er de volgende maand ook weer met een onrijpe nakomeling erbij. Hieronder zie je (van boven naar beneden) de aantallen konijnenparen voor de eerste zes maanden.



Noem het aantal konijnenparen in de n-de maand F_n. De aantallen konijnenparen kunnen gevonden worden door de aantallen van de voorgaande twee maanden bij elkaar op te tellen. Ofwel: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ en voor $n > 2$ geldt $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
De *verhouding* van opeenvolgende Fibonaccigetallen levert ook een interessante rij op: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$
Deze rij nadert naar het zogenaamde guldensnede-getal $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \approx 0{,}618$.
Over de rij van Fibonacci schreef K.P. Hart een stukje in het oktobernummer 2000 van *Pythagoras*.

KUNSTMATIG *intelligent*



door **Henk van Lienen**

Dat machines intelligent voor de dag kunnen komen, bleek wel toen het schaakprogramma *Deep Blue* in 1997 won van de toen regerend wereldkampioen Kasparov. Er zijn mensen die vinden dat een machine, of het programma dat de machine aanstuurt, niet 'intelligent' kan zijn. Om intelligent te zijn, moet je dingen kunnen begrijpen, en dat is iets wat een machine nooit zou kunnen. Maar 'begrijpen' of niet, steeds vaker nemen machines werk van ons over dat ooit menselijk intellect vereiste. Om maar wat te noemen: in de supermarkt de prijzen lezen, het totaalbedrag bepalen, het wisselgeld berekenen, ongewenste bezoekers herkennen op de beelden van bewakingscamera en bijvoorbeeld het aanbod afstemmen op het koopgedrag van de klanten.

Leren

Een belangrijk aspect van intelligentie is het vermogen te leren van ervaringen. Ervaringsleren zit bijvoorbeeld ingebouwd in spraakherkenningsprogramma's die zichzelf aanpassen aan het specifieke spraakprofiel van de gebruiker. De gebruiker leest eerst een standaardtekst voor en corrigeert de interpretatie die het programma geeft. Daarvan leert het programma de stem van de gebruiker beter te herkennen.

Ervaringsleren berust niet per se op ingewikkeld programmeerwerk. Een eenvoudige manier van ervaringsleren is vervat in het spreekwoord: 'een ezel stoot zich in het gemeen niet tweemaal aan dezelfde steen' en is vaak zonder veel moeite in een programma in te bouwen.

Gatta

Wil je eens zien hoe intelligent zo'n zelflerend programma kan overkomen, download dan het programmaatje *Gatta* van onze website www.pythagoras.nu. Bij *Gatta* speel je een simpel soort NIM-spel, waarbij van een stapel stenen om beurten door jou en je digitale tegenstander één, twee of drie stenen worden weggenomen. Degene die gedwongen is de laatste steen weg te nemen, heeft verloren.

Open het spel na het van de site te hebben gehaald. Je ziet dan het venster zoals in figuur 1. De 17 stelt de stapel van 17 stenen voor. Jij bent als eerste aan de beurt, en mag kiezen of je één, twee of drie stenen wegneemt. In antwoord daarop neemt je tegenstander (het programma) dan ook een aantal stenen weg.

In het begin zul je met gemak van het programma winnen. Maar naarmate je meer spellen speelt, wordt het lastiger. Het lijkt of het programma je tactiek doorziet. Speel je het spel lang genoeg, dan win je helemaal niet meer; het programma is dan te slim geworden. Als het zover is, wordt het tijd verder te lezen hoe het programma leert van zijn fouten.

Figuur 1 Het venster van het spelletje *Gatta*

Hoe werkt *Gatta*?

Het programma maakt voor de tegenzet gebruik van een lijst van acties. Zo'n actie is een getallenpaar, zoals bijvoorbeeld $\langle 15, 2\rangle$ en codeert zoveel als 'tref ik 15 stenen, dan pak ik er 2 weg'.

Bij opstarten bevat de lijst nog alle toegestane acties waarbij er nog ten minste één steen overblijft: dus van $\langle 16, 1\rangle$, $\langle 16, 2\rangle$, $\langle 16, 3\rangle$, $\langle 15, 1\rangle$, $\langle 15, 2\rangle$, $\langle 15, 3\rangle$ tot en met $\langle 4, 1\rangle$, $\langle 4, 2\rangle$, $\langle 4, 3\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 3,2\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$.

Merk op dat in deze lijst de acties $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 2, 2\rangle$ en $\langle 3, 3\rangle$ ontbreken, dat zijn immers zetten waarbij de laatste steen wordt gepakt en waarbij er dus verloren wordt.

Is het programma aan de beurt, dan raadpleegt het de lijst. Laat jij bijvoorbeeld 13 stenen over, dan selecteert het programma alle acties die met 13 beginnen en kiest daar willekeurig één uit. Als het programma geen passende actie kan vinden, dan geeft het op, en heb jij dus gewonnen.

Iedere keer dat jij wint, reageert het programma daarop door de laatste actie, waarvan het gebruik gemaakt heeft, uit de lijst te schrappen. Die actie zal hij dan niet meer kiezen. Hoe vaker jij wint, dus het programma verliest, hoe meer acties er geschrapt worden en hoe minder fouten het programma maakt.

Start je het programma overigens opnieuw op, dan begint het programma weer met een complete lijst van acties, en is dus al het geleerde kwijt.

Winstrategie

Jij zult er na verloop van tijd achter komen dat om te winnen je 13, 9, 5 of 1 ste(e)n(en) voor je tegenstander moet overlaten. Aan dat rijtje gaat 17 vooraf, en degene die begint met 17 stenen kan altijd gedwongen worden ook de laatste steen te pakken. Je kunt bij *Gatta* het aantal beginstenen ook veranderen, waardoor er andere beginsituaties ontstaan.

Natuurlijk is het programma zo te maken dat het van meet af aan wint. Het leuke van *Gatta* is echter dat het programma echt leert van gemaakte fouten, hetgeen uiteindelijk intelligenter overkomt dan het star volgen van een door mensen bedachte en ingeprogrammeerde winstrategie.

Het programma en de gegevens zijn van de hand van Raghunath Dhungel die het programma en de toelichting maakte voor de Delphi Programming Quickies Contest.

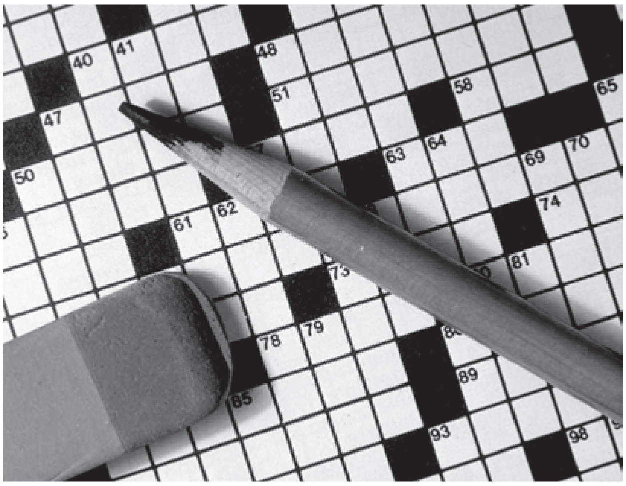
Pythagoras

November 2004 **Journaal** Nummer 2

door **Alex van den Brandhof** en **Marco Swaen**

Getalenteerd algoritme kraakt kruiswoordpuzzels

Het is een handig hulpmiddel voor puzzelverslaafden en een (kleine) sprong voorwaarts in de kunstmatige intelligentie: een computerprogramma dat kruiswoordraadsels kan oplossen in *elke* taal. Onderzoekers van de universiteit van Siena (Italië) hebben zo'n programma ontwikkeld. *Web Crow* – zo heet het programma – zoekt via zoekmachines op Internet naar passende antwoorden. In 1999 werd het eerste programma dat kruiswoordpuzzels kan oplossen, gelanceerd. *Web Crow* is echter het eerste programma dat puzzels kan oplossen in *elke* taal.



Bron: *Nature*, 4 oktober 2004

Wiskunde in de strijd tegen terreur

Ook in de strijd tegen het terrorisme maken wiskundigen zich nuttig. De wiskundige Jonathan Farley van het Massachusetts Institute of Technology stelt dat de abstractie van wiskunde kan helpen bij het vinden van de meest efficiënte manier om terroristische netwerken uit te schakelen.

Het opsporen van potentiële terroristen gebeurt op basis van de enorme hoeveelheid informatie die er in de technologisch ontwikkelde samenleving is over uiteenlopende zaken als telefoonverkeer, bestedingspatronen, belastingaangiften en kerkbezoek. Zo ontwikkelde Jafar Adibi, gerenommeerd informaticus aan de University of Southern California, een programma waarmee potentiële terroristen opgespoord kunnen worden uit dergelijke gegevensbestanden. Het programma is er met name op gericht persoonlijke contacten tussen individuen op te sporen, bijvoorbeeld via familiebanden, gemeenschappelijk lidmaatschap van een sportvereniging of omdat hun kinderen naar dezelfde school gaan.

Het programma werd getest door van een groep bekende terroristen slechts een deel als terrorist in te voeren, met de opdracht de anderen te traceren. Het programma wist 80% van de overige terroristen te ontmaskeren. Afgezien van het feit dat toch 20% nog gemist werd, wees het programma ook veel mensen als terrorist aan, die niet tot de oorspronkelijke groep van bekende terroristen behoorden.

Dit is overigens wel een verbetering ten opzichte van de huidige praktijk. Van de 600 verdachten die in Groot-Brittannië werden gearresteerd, bleken er uiteindelijk maar 15 veroordeeld te kunnen worden. Onder de 5000 mensen (volgens sommige tellingen) die in de V.S. in het kader van de *Patriot Act* werden gedetineerd, is het percentage dat strafbaar bleek ook heel klein.

Bron: *The Washington Times*, 9 oktober 2004

Goochelen met getallen groot succes

Tot en met 26 september was in Museum Boerhaave de tentoonstelling *Goochelen met getallen* te zien. Het was de bestbezochte zomertentoonstelling die er ooit is geweest in het Leidse museum. Het totaal aantal bezoekers dat de tentoonstelling heeft bezocht, is 21.824. De bezoekers bestonden uit groepen uit het voortgezet onderwijs en uit individuele bezoekers (liefhebbers van de wiskunde). Van de bonnen voor gratis toegang die onder alle deelnemers van de Kangoeroe Wiskundewedstrijd 2004 waren verspreid, zijn er 1705 ingeleverd; deze actie was dus een groot succes.

Priemgetallenprijsvraag

Doe mee met de prijsvraag van *Pythagoras*! De opdracht luidt: Maak met de vijf priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11 (allemaal steeds precies een keer gebruiken) en de bewerkingen +, –, x en : zo veel mogelijk getallen van 1 tot en met 200. Je mag zoveel haakjes gebruiken als je wilt. Het getal 1 kan bijvoorbeeld als volgt worden gemaakt: 1 = 2 – (((7 + 11) : 3) – 5). Stuur je oplossingen vóór 15 december 2004 naar de afdeling 'Lezersreacties en kopij' van *Pythagoras* (zie het colofon). In ons vorige nummer kun je meer informatie over de prijsvraag lezen.

Verbeteringen

In het artikel *Topologie of de kunst van het slecht tekenen* uit het vorige nummer werd gezegd dat de A en de R topologisch gelijk zijn. Bij veel lettertypen is dat inderdaad zo, maar juist in het gebruikte font (Kabel) niet. Hetzelfde geldt voor de H en de K. Vergelijk bijvoorbeeld eens de twee K's hieronder.

Vergelijk deze twee **K**'s. De linker is niet homeomorf met de **H**, de rechter is dat wel.

Bij de berekening van σ in het artikel *Snelle som* is ook een foutje geslopen. Er geldt dat $\sigma \approx \sqrt{1{,}17 + 0{,}01} = 1{,}09$, in plaats van $\sigma \approx \sqrt{1 + 0{,}01} = 1{,}38$ wat werd gesuggereerd.

Wiskundekalender

De stichting *Vierkant voor Wiskunde* brengt voor het jaar 2005 weer een kalender uit. De kalender bevat wiskundige puzzels*; elke week in de kalender heeft een thema, waarover elke dag van die week een vraag wordt gesteld. Genoeg stof dus voor een jaar lang puzzelen. De antwoorden worden na afloop van de week op de website van *Vierkant* gezet. Je kunt de kalender bestellen door 10 euro over te maken op rekening 43.86.34.926 ten name van stichting *Vierkant voor Wiskunde* in Leiden, o.v.v. 'Kalender 2005' en je naam en adres.

*De puzzels komen uit de kalender van 1998, waarvan toen maar een kleine oplage is gedrukt.

'Eratosthenes-experiment'

Al in de derde eeuw voor Christus bepaalde de Griek Eratosthenes de omtrek van de aarde door het meten van de zonshoogte. Op 22 september werd wereldwijd eenzelfde soort meting gedaan. Het experiment is goed gelukt: de meting van het team verschilt nog geen twee procent van de werkelijke omtrek van de aarde. Dergelijke activititeiten worden georganiseerd om studenten te laten zien hoe wiskunde gebruikt kan worden in een vak als aardrijkskunde.

Bronnen: *Borneo Bulletin*, 6 oktober 2004, http://youth.net/eratosthenes

Problemen

door **Dion Gijswijt**

2004 2005

De rij getallen a_1, a_2, a_3, ... is als volgt gedefinieerd: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ en $a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ voor $n \geq 1$.
De rij begint dus als volgt: $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \ldots$
Bereken $a_{2004} \cdot a_{2005}$.

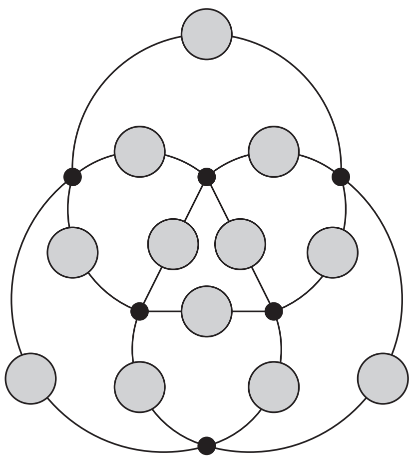
Munten wisselen

In een land wordt gebruik gemaakt van slechts twee soorten munten, munten van a cent en munten van b cent. Hoe moeten a en b gekozen worden, zodat alle bedragen van 1 cent tot en met n cent kunnen worden betaald door ten hoogste vijf munten uit te wisselen, en waarbij n zo groot mogelijk is?

Fokko van de Bult

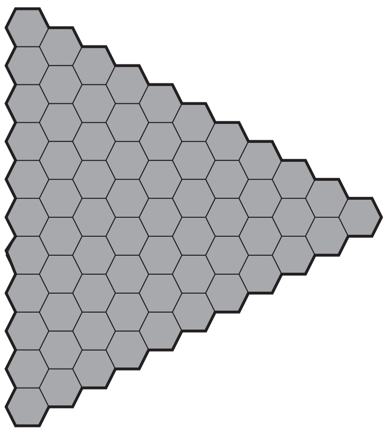
Octaëder

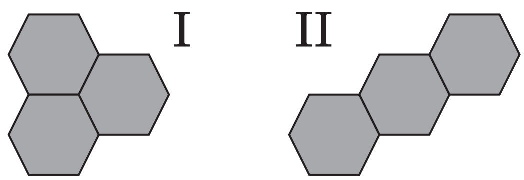
Kun je de getallen 1 tot en met 12 zó over de twaalf grijze cirkels verdelen, dat voor elk zwart punt de vier buurcirkels dezelfde som hebben?



Triominos

In de figuur zie je een grote driehoek opgebouwd uit regelmatige zeshoekjes. Kun je deze driehoek betegelen met kopieën van stukje I? En met kopieën van stukje II?





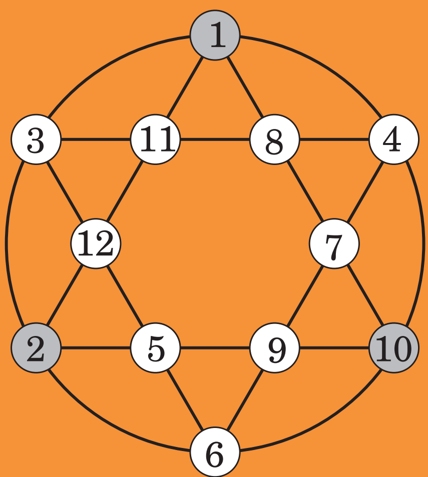
Vijf metalen bollen

Vijf metalen bollen, drie met straal 6 en twee met straal r, zijn zó in de ruimte geplaatst dat elk tweetal bollen elkaar raakt. Wat is de waarde van r?

Oplossingen nr. 1

Magische som

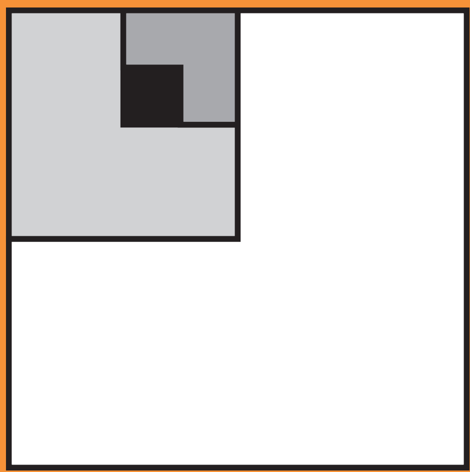
Omdat $1 + 2 + \cdots + 12 = 6 \times 13$, en elk kruispunt in precies twee van de zes lijnen ligt, moet de som van de getallen op iedere lijn gelijk zijn aan $\frac{2\times 6\times 13}{6} = 26$.
Op de cirkel moet de som van de drie grijze getallen gelijk zijn aan die van de drie witte punten, en dus gelijk zijn aan 13. Daarna kun je door proberen eenvoudig een oplossing vinden.



Breek de code

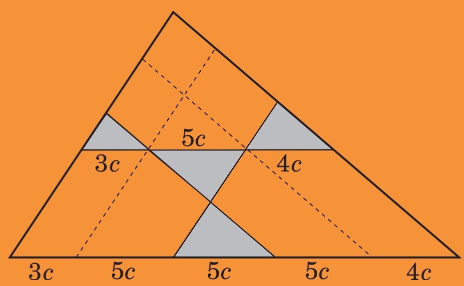
Vraag eerst '0000000'. Neem even aan dat het antwoord 'koud' is. Je weet dan ook dat '1111111' 'warm' is. Vraag nu achtereenvolgens '0000001', '0000011', '0000111', etcetera, tot je voor het eerst 'warm' als antwoord krijgt. Noem dit laatste woord W. Je weet nu dat van W precies 4 bits goed zijn, en ook dat de eerste 1 van W juist is. Om van een andere bit uit W uit te vinden of die correct is, verander je alleen die bit. Is het antwoord 'koud', dan was die bit al correct, en anders was deze bit van W onjuist. Zo vind je de code in ten hoogste $8 + 6 = 14$ vragen.

Legpuzzel



Driehoek

De vier kleine driehoeken zijn gelijkvormig met de grote driehoek. Er is dus een getal c zó, dat elk van de vijf driehoeken een zijde heeft van c maal de wortel van de oppervlakte. De oppervlakte van de grote driehoek is daarom $(3 + 5 + 5 + 5 + 4)^2 = 484$.



Symmetrische vergelijking

Omdat $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$, weten we dat $xy = \frac{1-3}{2} = -1$. Verder geldt dat $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
Dus $x^3 + y^3 = 4$.

door **Klaas Pieter Hart**

We spannen een touw om de aarde, maken het een beetje langer en proberen het weer strak te trekken. Hoe hoog komt het dan te hangen?

Een touwtje om de aarde

Vrijwel iedereen kent het volgende probleem wel. We spannen een (niet rekbaar) touw om de aarde, zeg over de polen langs de nulmeridiaan (en de 180-meridiaan natuurlijk). Aan de noordpool knippen we het touw open en voegen een stuk van één meter lang in. Als we het touw overal even hoog optillen, hoe hoog komt het dan boven de aarde te hangen?

Het antwoord, ongeveer 16 centimeter, verbaast de meeste mensen, tot je het netjes voorrekent. Oorspronkelijk is het touw $2\pi R$ lang, waarin R de straal van de aarde (in meters) is. Waar we naar vragen is de straal van de cirkel waarvan de omtrek één meter langer is, met andere woorden: bepaal R' zó dat $2\pi\, R' = 2\pi\, R + 1$. Dat is heel makkelijk: $R' = R + \frac{1}{2\pi} \approx R + 0{,}159$.

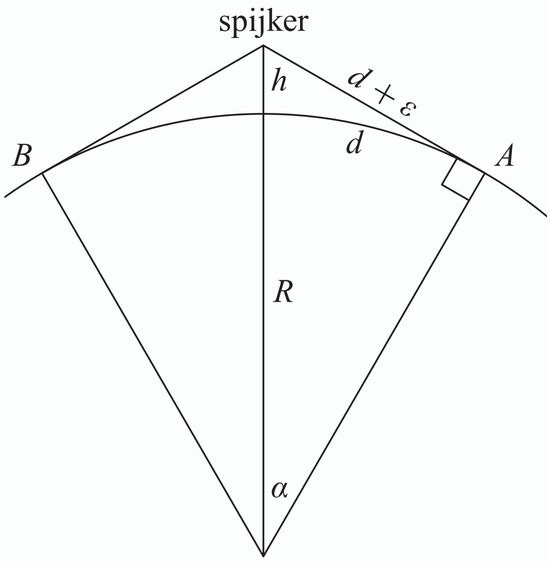
De berekening laat zien dat de waarde van R er niet toe doet: als de omtrek van een willekeurige cirkel één meter langer wordt gemaakt, wordt de straal bijna 16 cm langer.

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het overal gelijkelijk op. Kan er een muis onderdoor?

Aan een spijker

We bekijken nu een ander probleem. Stel dat we het touw alléén aan de noordpool optillen en strak trekken – alsof we de aarde met behulp van het touw aan een spijker ophangen – hoe hoog komt het hoogste punt dan?

Het volgende plaatje geeft een situatieschets.



Hierin is R de straal van de aarde, ε de helft van het ingelaste stukje (een halve meter dus) en h de gevraagde hoogte. De boog d verbindt de punten waar het touw los komt van het aardoppervlak. De hoek bij A is recht, omdat de lijn van A naar de spijker een raaklijn aan de cirkel is, dankzij het straktrekken.

Pas de stelling van Pythagoras toe:

$$(R+h)^2 = R^2 + (d+\varepsilon)^2$$

en dus $\quad h + R = \pm\sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2}$, ofwel

$$h = -R \pm \sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2}.$$

Omdat h positief is, moeten we

$$h = \sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2} - R$$

hebben. Hierin kunnen we R buiten de haakjes halen, zodat we

$$h = R\left(\sqrt{1 + \left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \qquad (1)$$

krijgen. Hierin is d nog onbekend. Nu geldt $d = \alpha R$ of $\frac{d}{R} = \alpha$ (we werken in radialen) en het blijkt wat makkelijker te zijn een vergelijking voor α op te stellen.

Uit de schets kunnen we aflezen dat

$$\tan\alpha = \frac{d+\varepsilon}{R}$$

en dus

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\varepsilon}{R},$$

ofwel

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2)$$

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het bij de noordpool op. Kan er een ijsbeer onderdoor?

We krijgen α dus als oplossing van de vergelijking (2).

Nu wordt het tijd de getallen in te gaan vullen. De omtrek van de aarde is, per definitie, 40.000 km, zodat R = 40.000.000/(2π) m, verder $\varepsilon = \frac{1}{2}$ m. We moeten dus

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\pi}{40.000.000}$$

oplossen. Je kunt dit zó door de *solver* van je grafische rekenmachine laten doen (**X=1** als beginvoorwaarde gebruiken): $\alpha \approx 0{,}006176 = 6{,}176 \times 10^{-3}$ en daarmee $d \approx 247{,}040$ km. Hoewel het interessant is te zien hoe ver van de noordpool het touw recht wordt, hebben we d niet echt nodig voor de berekening; in (1) vervangen we $\frac{d}{R}$ door α:

$$h = R\left(\sqrt{1+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2}-1\right).$$

Mijn rekenmachientje geeft, na alles invullen: $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 1. Doe de berekening nogmaals, maar nu met slechts één centimeter extra. Aangenomen dat het touw licht genoeg is, kun je het dan zonder hulpmiddelen strak krijgen?

Een snelle benadering

De hoek α die hierboven gevonden is, is behoorlijk klein. In dat geval kan $\tan\alpha$ goed benaderd worden met $\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$ (zie het stukje over $\cos x$ en $\sin x$ in de vorige *Pythagoras*), zodat (2) verandert in een bijnagelijkheid:

$$\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R}.$$

De breuk $\frac{d+\varepsilon}{R}$ is ook heel klein en voor heel kleine x geldt $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$; daarmee kunnen we (1) omwerken tot

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2 \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3\right)^2.$$

Als we het kwadraat uitwerken, komt er

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^4+\frac{1}{9}\alpha^6\right).$$

Als we de getallen weer invullen, krijgen we $R\alpha^2 = 242{,}8$, $R\alpha^4 = 0{,}009$ en $R\alpha^6 = 3{,}5 \times 10^{-7}$. Dit betekent dat we de vierde en zesde machten wel weg kunnen laten en de volgende benadering van h gebruiken:

$$h \approx \frac{1}{2}R\alpha^2.$$

Als we verder nog bedenken dat $\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{R}}$, dan komen we tot de volgende uitdrukking voor h:

$$h \approx \frac{1}{2}\sqrt[3]{9R\varepsilon^2}.$$

Als we dan ook nog de waarde van R invoeren, houden we uiteindelijk de volgende benadering over:

$$h \approx 50\sqrt[3]{\frac{360\varepsilon^2}{2\pi}}. \qquad (3)$$

Dit geeft niet echt een ander antwoord dan de berekening in het begin: als we $\varepsilon = 0{,}5$ invullen, komen we via (3) ook uit op $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 2. Vul $\varepsilon = 0{,}005$ in. Hoe groot is het verschil ten opzichte van het antwoord op opgave 1?

Opgave 3. Onderzoek hoe goed de benadering $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ is. Vergelijk bijvoorbeeld $(1+\frac{1}{2}x)^2$ met $1 + x$; voor welke x is het verschil klein genoeg om weg te laten? Was in ons voorbeeld de benadering gerechtvaardigd?

Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

Wolkenkrabber
Het is een klein vrouwtje dat nog net bij het knopje '70ste verdieping' kan komen. Met een paraplu kan zij het knopje '80' bereiken.

Kilometerstand
Alleen 55555 voldoet.

Voetganger en automobilist
In totaal loopt de voetganger acht keer 13 stappen. De auto rijdt dus acht keer zo snel als de voetganger loopt. De snelheid van de auto is dus 48 km/uur.

27 kubusjes
Drie zwarte zijden: 8 kubusjes, twee zwarte zijden: 12 kubusjes, één zwarte zijde: 6 kubusjes, nul zwarte zijden: 1 kubusje.

Schietschijf
Er moet twee keer op de 16 en vier keer op de 17 worden geschoten. Het aantal schoten is dan dus zes.

Oplossingen Topologie met de handen (pag. 14)

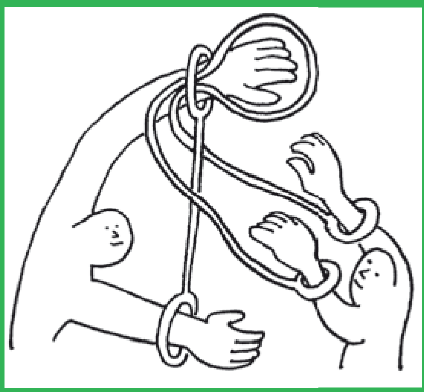
1 Haal een lus van het ene touw bij de pols van de ander over diens hand heen (zie tekening 1).

2 Haal het T-shirt naar de armen, keer het dan door een van de mouwen binnenstebuiten.

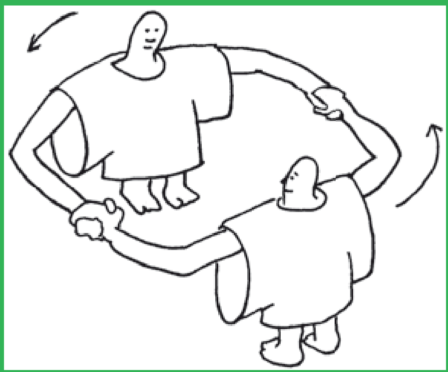
3 Haal het T-shirt over de armen naar de ander, het zit nu wel binnenste buiten. Als het echt ruim is, kun je weer doen wat je bij 2 deed en keer je het binnenstebuiten.

4 Haal het T-shirt over de armen naar de ander, het zit nu wel achterstevoren.

5 In de praktijk niet, maar als de T-shirts zo rekbaar zijn, dat de personen helemaal door een mouw kunnen, dan hoeven de T-shirts alleen maar doorgeschoven te worden (zie tekening 2).



1



2

44ste JAARGANG NUMMER 2