# PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN JANUARI 2005

# PYTHAGORAS

**44ste jaargang nummer 3**
**ISSN 0033 4766**

**Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.**

**E-mail**
info@pythagoras.nu

**Internet**
www.pythagoras.nu

**Hoofdredacteur**
Marco Swaen

**Eindredacteur**
Alex van den Brandhof

**Redactie**
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom, René Swarttouw, Chris Zaal

**Bladmanager**
Reinie Erné

**Vormgeving**
Sonja en Esther, Amsterdam

**Druk**
Giethoorn Ten Brink, Meppel

**Webmaster**
Timon Idema

**Uitgever**
Koninklijk Wiskundig Genootschap

**Verantwoordelijk uitgever**
Chris Zaal

**Redactiesecretariaat**
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

**Lezersreacties en kopij**
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

**Abonnementen, bestellingen en mutaties**
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

**Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)**
€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

**Aan dit nummer werkten mee**
prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@ewi.tudelft.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), E.C. Buissant des Amorie, voormalig docent wiskunde in Amstelveen (ecbuissantdesamorie@ncrvnet.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), W. Joris, auteur van '100 Strategic Games for Pen and Paper' (walter.joris1@pandora.be), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), W. Posch, docente wiskunde aan het Damstede College te Amsterdam (wposch@wanadoo.nl), J.S. Spaan, docente wiskunde aan het Bonhoeffer College te Castricum (j.s.spaan@zonnet.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), E.A. Timmermans, dissectie-onderzoeker (trinitypuzzle@hotmail.com), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

**Op het omslag**
*Connector*, een pen-en-papier-spel

**Niveau-rondjes**
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

**Sponsors**
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 6 **Pen en papier**

7 – 11 **Van bouwplaat naar oppervlak**

12 – 13 **Topologie met de handen**

14 – 15 **Journaal**

16 – 17 **Pythagoras Olympiade**

18 – 23 **Snijden in de hyperkubus**

24 – 25 **Stambreuken**

26 – 27 **Problemen – Oplossingen**

28 – 32 **Pythagoreïsche dissecties**

33 **Oplossingen Kleine nootjes nr. 2**
**Decimalen van π**

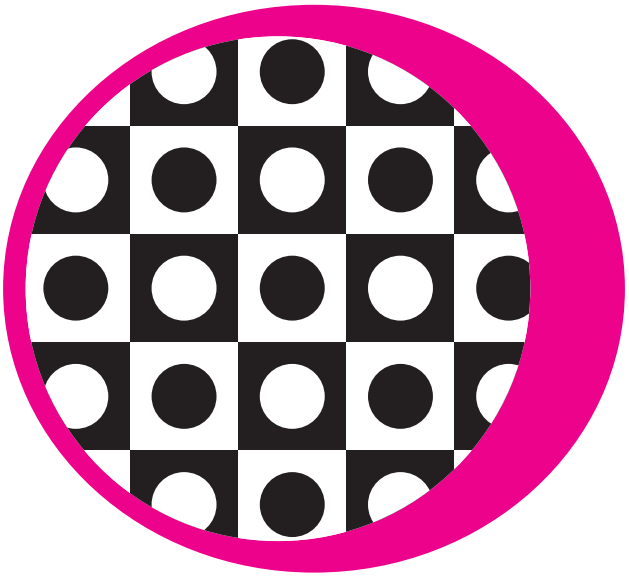
door **Dick Beekman**
www.homepages.hetnet.nl/~dickbeekman

**Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.**

# Kleine nootjes

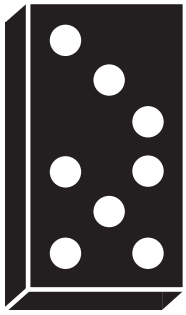
**Paardensprong**
Is het mogelijk om met een wit paard op een leeg schaakbord van de linker bovenhoek (A8) naar de rechter benedenhoek (H1) te komen in tien stappen?

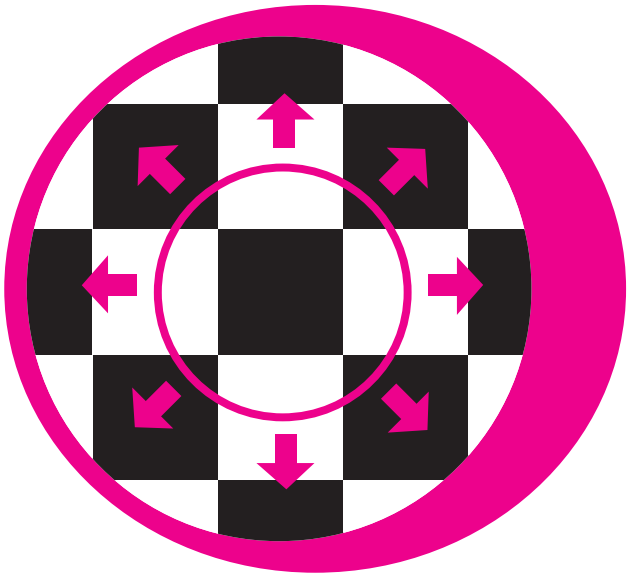
**Dammen**
Hoeveel verschillende standen zijn er mogelijk na de eerste zet bij dammen? (Een zet is voltooid als zowel wit als zwart aan de beurt zijn geweest.)



**Dominostenen**

Is het mogelijk om een schaakbord met 31 dominostenen te bedekken, waarbij de linker bovenhoek (A8) en de rechter benedenhoek (H1) onbedekt blijven? (Een dominosteen bedekt precies twee aangrenzende velden.)



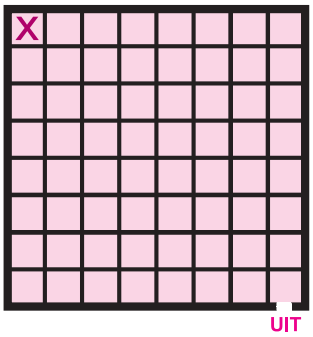


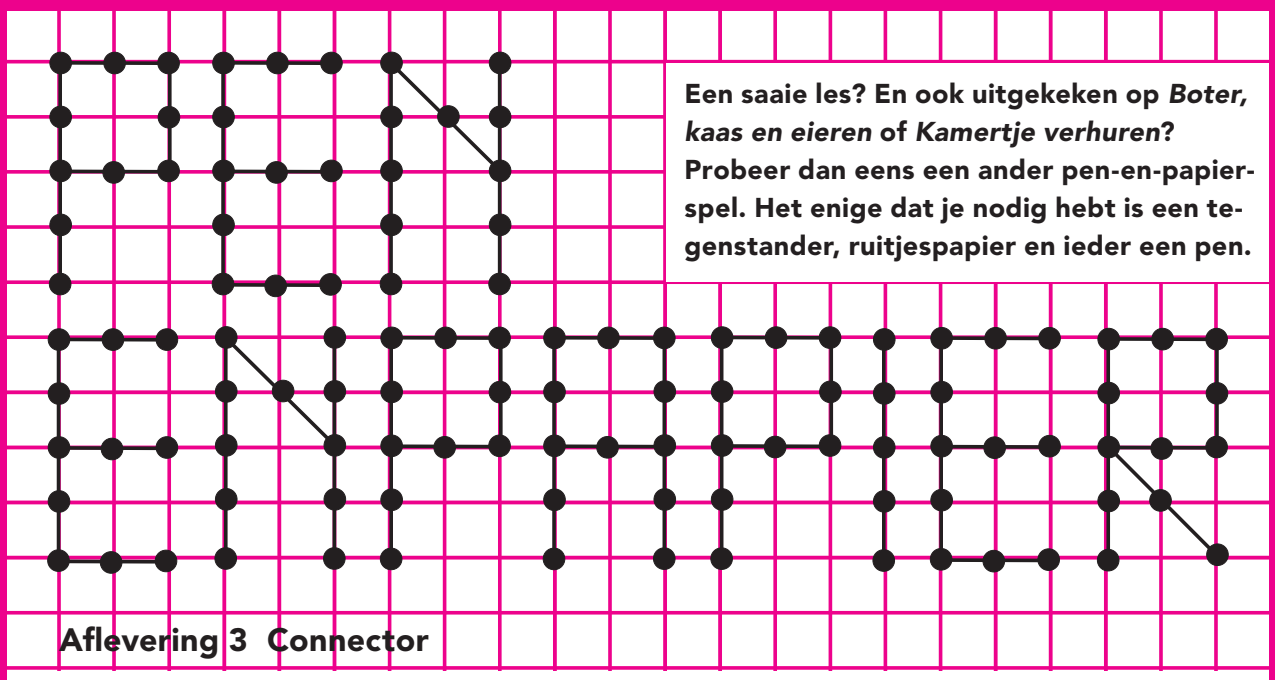
**Grootste cirkel**

Neem een schaakbord. Wat is de straal van de grootste cirkel (uitgedrukt in de zijde van een speelveld) die alleen over zwarte velden loopt?

**Gevangenis**

Jan zit in de cel linksboven van een gevangenis met een schaakbordpatroon (8 x 8 cellen). Alle muren tussen de cellen hebben deuren zodat de gevangenen door het hele blok kunnen lopen. De enige uitgang is rechtsonder. Jan komt morgenvroeg vrij, op voorwaarde dat hij alle achterblijvers de hand schudt. Hij mag elke cel slechts eenmaal betreden. Welke route gaat hij lopen?





**Een saaie les? En ook uitgekeken op *Boter, kaas en eieren* of *Kamertje verhuren*? Probeer dan eens een ander pen-en-papierspel. Het enige dat je nodig hebt is een tegenstander, ruitjespapier en ieder een pen.**

## Aflevering 3 Connector

door **Walter Joris**

*Connector* is een spel dat niet door de auteur is uitgevonden, maar al langer bestaat. In elk geval geniet het enige bekendheid in België en Frankrijk onder verschillende namen, waarvan *Morpion Solitaire* er één is. Inmiddels heeft het spel ook de aandacht getrokken van wiskundige onderzoekers.



### Spelregels

Eerst tekenen we een 'solitairkruis' op ruitjespapier. Dat is simpel als we onthouden dat iedere zijde vier punten telt. We tekenen echter alleen de punten op de omtrek, zie figuur 1.

Om beurten zetten de spelers nu een punt erbij *in* het kruis, maar wel op zo'n manier dat er daarmee dan vijf punten op een rij komen te liggen. Die vijf moet hij dan doorstrepen. Je mag ook diagonaal spelen. Lijnen mogen ook buiten het kruis lopen, maar punten mag je daar niet zetten. Lijnen mogen reeds gebruikte punten kruisen, maar nooit mag een lijn samenvallen met een gedeelte van een andere lijn. Wie geen lijn meer kan zetten, verliest.

Een beurt kan er ook uit bestaan dat je alleen maar vijf reeds bestaande punten verbindt. Dit vermindert wel het aantal mogelijkheden!

De figuren 2 en 3 tonen een voorbeeld van een eindspel.

### Complexe variant

Het spel wordt veel complexer indien het toegelaten wordt ook punten *buiten* het kruis te zetten. In figuur 4 zie je hiervan een voorbeeld. In deze situatie is het spel overigens nog niet afgelopen!

### Records

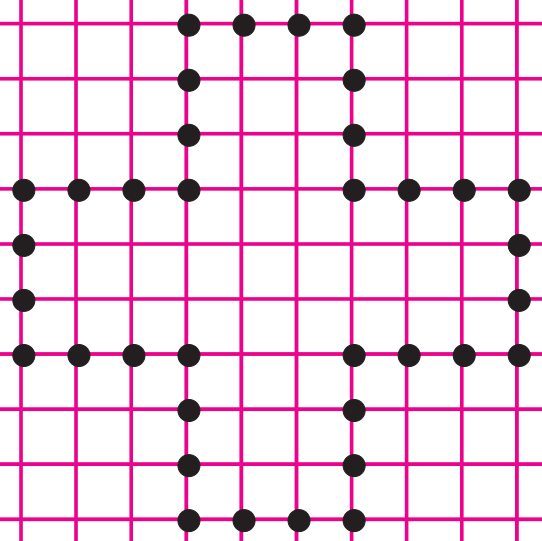
De complexe variant wekt nogal wat interesse bij wiskundigen en puzzelaars. Een team van het Massachusetts Institute of Technology (MIT) schreef een artikel over dit spel (een link naar dit artikel vind je op onze website). Eerder verscheen al een artikel in het Franse tijdschrift *Jeux et Statégie*.

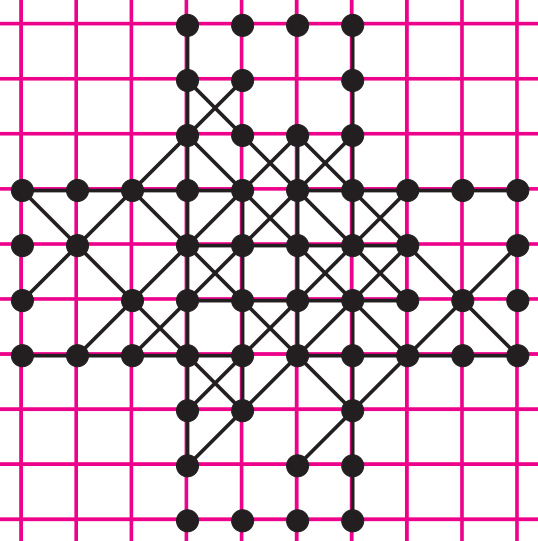
Bij recordpogingen is het handig om de punten te vervangen door getallen. Dan kun je de score bijhouden, en het verloop goed volgen.

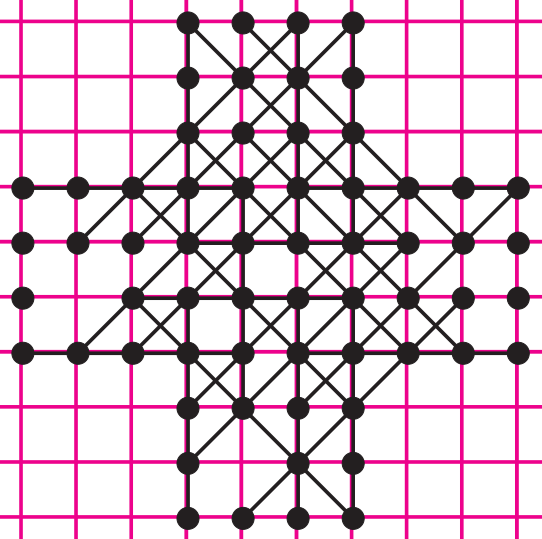
Het huidige record is 170 kruisjes. Er zijn vreemd genoeg drie verschillende records van elk 170, gevonden door Charles-Henri Bruneau, Denis Excoffier en J.B. Bonté in 1982. Ondanks alle computers en het onderzoek van het MIT is dit meer dan twintig jaar oude record tot op heden ongebroken! De versie van J.B. Bonté zie je in figuur 5 op pagina 6. Op de achterkant van het omslag is dit record groot afgebeeld, waarbij in de punten getallen staan, zodat je het spelverloop goed kunt volgen.

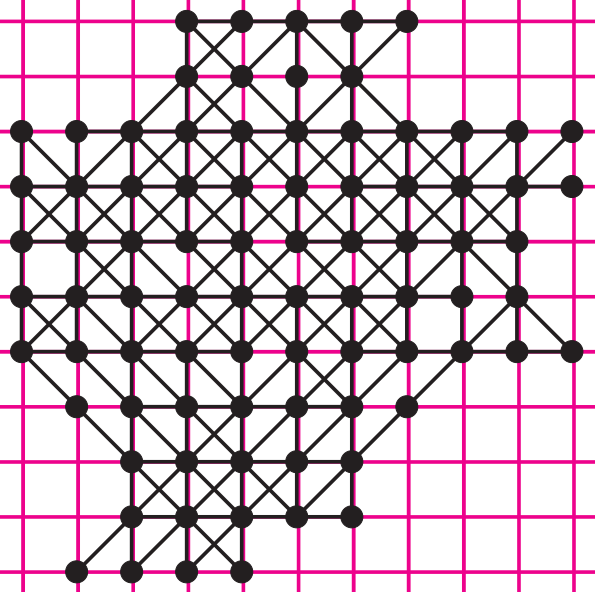
**Figuur 1** Een ‘solitairkruis: het uitgangspunt van *Connector*

**Figuur 2** Een voorbeeld van een eindspel









**Figuur 3** Een voorbeeld van een eindspel

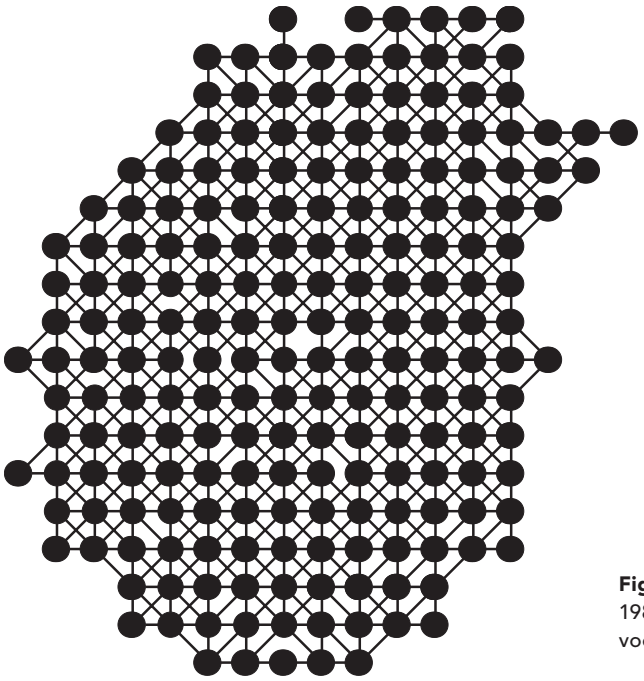
**Figuur 4** Hier mogen punten ook *buiten* het kruis worden gezet

**Hoe verder?**
Een wiskundige stelt zich natuurlijk de vraag hoe lang dit spel kan doorgaan. Sommige amateurs denken dat er 600 tot zelfs 20.000 kruisjes mogelijk zijn. Waarschijnlijk is er echter een limiet. Dat werd reeds verondersteld in het eerder genoemde *Jeux et Stratégie*. Zo weet men dat door elk kruisje acht mogelijke verschillende lijnen kunnen lopen. Dat is ook de waarde van elk van de kruisjes van de basisfiguur. Met deze 36 'maagdelijke' kruisjes heb je al 288 mogelijke plaatsen. Het probleem is nu te weten of het aantal mogelijkheden vermeerdert in de loop van het spel. Ieder nieuw kruisje brengt zijn eigen mogelijkheden in, dus theoretisch 8. Maar iedere nieuwe lijn die vijf kruisjes verbindt, beperkt ook de mogelijkheden. De kruisjes van de uiteinden verliezen elk een potentiële mogelijkheid, omdat er al een lijn in aankomt. En de drie middelste kruisjes verliezen elk twee potenties. Samen acht! Dus de balans is simpel: de acht potentiële mogelijkheden aangebracht door een nieuw punt zijn onmiddellijk opgebruikt door het trekken van de verbindingslijn. De balans is in evenwicht, en het aantal mogelijkheden groeit niet, maar het vermindert ook niet.

In de praktijk stopt het spel dus wanneer alle punten die nog potentieel hebben zich aan de buitenrand bevinden. Zo bloedt het spel dood. Toch is de vraag open of men de uitbreiding kan besturen met vruchtbare zones die zich aaneensluiten. En ook hoe ver de lijnen maximaal kunnen uitdijen. Interessant is bijvoorbeeld dat een variant met een kruis van zijde twee eeuwig door blijft gaan.

Als variatie kun je naast het wijzigen van de afmetingen, ook de originele 36 punten bevrijden van hun vorm. Je mag ze dan plaatsen waar je wilt. De vraag of dit meer mogelijkheden biedt, schijnt bevestigd door de praktijk. Experimenten tonen aan dat de score dan meestal hoger ligt. Een record van 186 is zo bereikt.

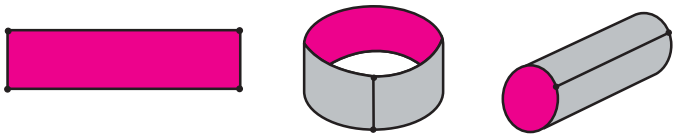
**Bron:** *100 Strategic Games for Pen and Paper*, Walter Joris, uitgegeven door Carlton, Londen. ISBN: 1-84222-727-0.
**Internet.** Indien je *Morpion solitaire* intikt in *Google*, krijg je wel 160 sites! Op verschillende daarvan kun je het spel downloaden. De meeste sites zijn wel Franstalig. Het spel heet soms ook *Malta Cross* of *Croix de Malte*. Let wel op: het Franse spel *Morpion* is gewoon 4 of 5 op een rij.
Zie zeker ook: http://euler.free.fr/morpion.htm. Deze site is in het Engels, en bevat een aantal links. Andere sites die de moeite waard zijn, kun je vinden op www.pythagoras.nu.



**Figuur 5** Het record van J.B. Bonté uit 1982. Zie de achterkant van het omslag voor een vergrote weergave.

door **J.M. Aarts**

**Knippen en plakken is niet alleen een favoriete bezigheid van leerlingen op de basisschool, maar ook van topologen. Op een theoretisch niveau namelijk gebruiken zij bouwplaten om inzicht te krijgen in de structuur van oppervlakken. Hun veredeld knip-en-plak-werk heeft onder meer een fraaie stelling opgeleverd die een overzicht biedt van alle oppervlakken die mogelijk zijn.**



# ° Van bouwplaat naar oppervlak



Van jongs af zijn we vertrouwd met oppervlakken: een bal, een kubus, een zwemband, een ijshoorntje. Dus ook zonder een wiskundige definitie hebben we een aardig idee van wat een oppervlak in het algemeen is. Een oppervlak is iets dat er overal van dichtbij plat uitziet, maar van een afstand wel gekromd en/of gedraaid kan zijn. Oppervlakken kunnen behoorlijk ingewikkeld in elkaar zitten, zo zeer dat er niet eens driedimensionale modellen van gemaakt kunnen worden. Hoe ingewikkeld ze echter ook zijn, in principe hebben ze altijd een bouwplaat, die gewoon uit platte stukjes bestaat die met bepaalde randjes aan elkaar geplakt moeten worden om het oppervlak te vormen. Het materiaal voor de (denkbeeldige) bouwplaten is geen karton of papier, maar zeer flexibel, super-elastisch materiaal dat je kan rekken of samentrekken naar believen. We zullen nu een hele stoet van oppervlakken met hun bouwplaat aan ons voorbij zien trekken.

## De riem

Het oppervlak in het eerste voorbeeld is de **riem.** In figuur 1 is een rechthoek getekend. Bij iedere zijde staat een letter en een pijl; de zijden zijn *gerichte* lijnstukken. Als bij twee zijden dezelfde letter staat, dan wil dat zeggen dat die twee zijden op elkaar geplakt moeten worden en wel zó dat de pijltjes dezelfde kant op wijzen. De informatie die op de rand van de rechthoek staat, kunnen we kort en bondig opschrijven met het *schema* $aba^tc$. Je moet dit schema zo lezen: als je langs de rand van de rechthoek linksom loopt, dan loop je (als je rechtsonder begint) eerst met de zijde $a$ mee, dan met $b$ mee, daarna tegen $a$ in, en tenslotte met $c$ mee. Dat je tegen een zijde in loopt, geef je aan door gebruik te maken van de bovenindex $t$. Was je linksboven begonnen, dan was het schema $a^tcab$ geworden, maar dat geeft op de rand dezelfde (cyclische) volgorde als het eerste. Voor ons zijn de schema's $aba^tc$, $ba^tca$, $a^tcab$ en $caba^t$ hetzelfde. Als je de

figuur 1

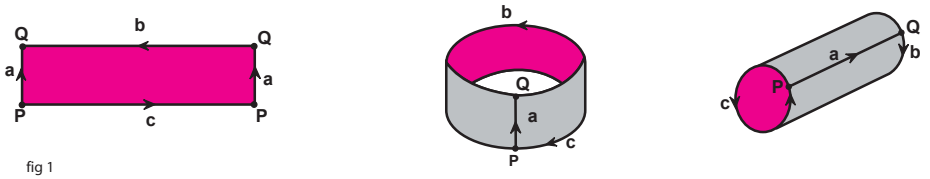
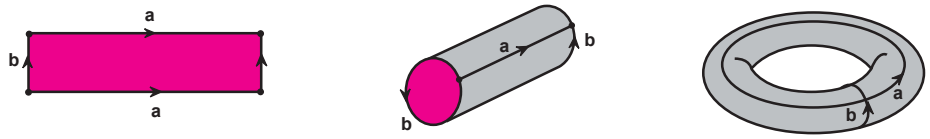
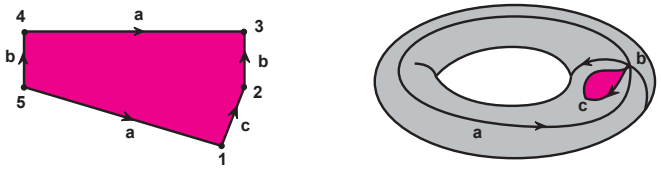



fig 1

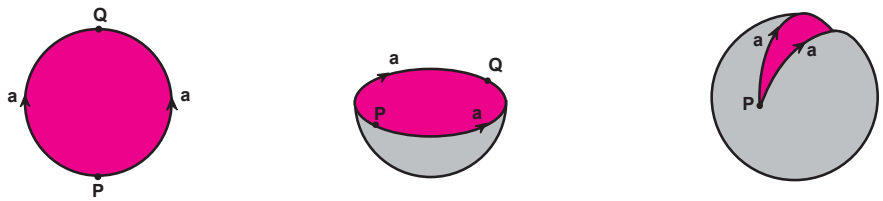
figuur 2




figuur 3




figuur 4






rechthoek smaller en hoger maakt, dan lijkt wat je krijgt meer op een **cilinder**.

## De torus

De bouwplaat van de **torus** in figuur 2 lijkt veel op die van de cilinder, alleen worden nu de kopse kanten nog aan elkaar geplakt. Dat kan natuurlijk omdat het materiaal super-elastisch is. Het schema is $aba^tb^t$.

Een **torus met gat**, maak je met de bouwplaat in figuur 3. Het schema is $acba^tb^t$. De hoekpunten zijn genummerd $1$ tot en met $5$. Als we nu het hoekpunt $1$ de naam $P$ geven, dan moeten we $3$ ook $P$ noemen, want $1$ en $3$ zijn beide eindpunt van $a$. Omdat $3$ en $4$ beide eindpunt zijn van $b$, zijn ze hetzelfde punt, dus ook $4$ moeten we $P$ noemen; maar dan ook $5$ (beginpunt $a$). Alle hoekpunten zijn dus hetzelfde en komen bij het plakken op elkaar terecht.

Bij de riem zijn er twee verschillende hoekpunten. Of hoekpunten al dan niet verschillend zijn, is helemaal bepaald door het schema. De torus met gat wordt meestal een **hengsel** genoemd.

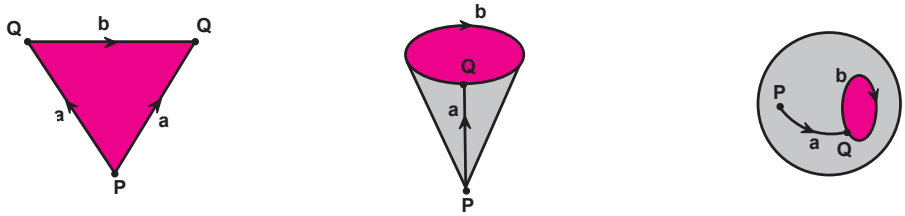
## De bol

Het schema van de bouwplaat van de **bol** in figuur 4 is $aa^t$. We hebben ondertussen zo veel ervaring met bouwplaten en schema's dat figuur 5 van de bol met $1$ gat, dat is een **muts** of **ijshoorn**, en figuur 6 van de bol met $2$ gaten geen toelichting nodig hebben.

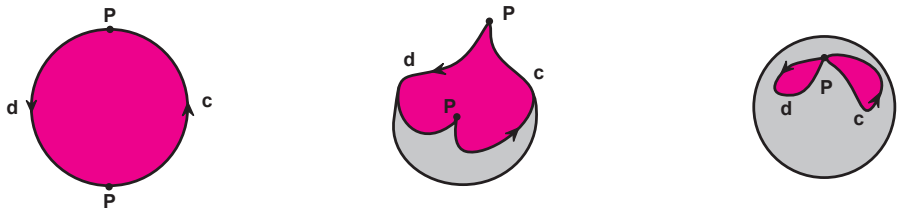
## Eenzijdig en tweezijdig

In de tot nu toe behandelde voorbeelden zijn de oppervlakken tweezijdig, je kunt altijd een binnen- en buitenkant (of voor- en achterkant) aanwijzen. Anders gezegd, je kunt ze met twee kleuren verven op zodanige wijze dat de kleuren niet tegen elkaar stoten. In het artikel *Topologie met de handen* (zie pagina 12) wordt een voorbeeld van een *eenzijdig* oppervlak besproken, de

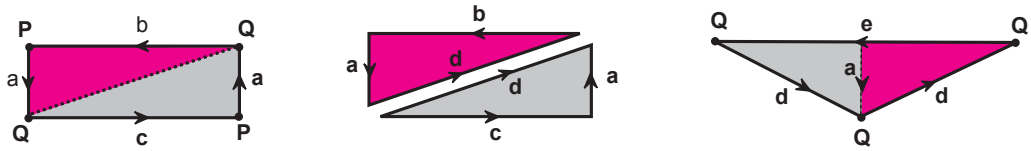
figuur 5



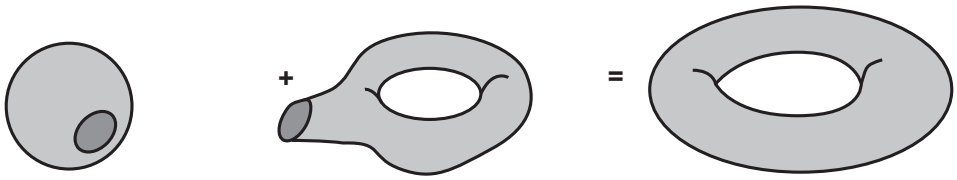

figuur 6




figuur 7




figuur 8





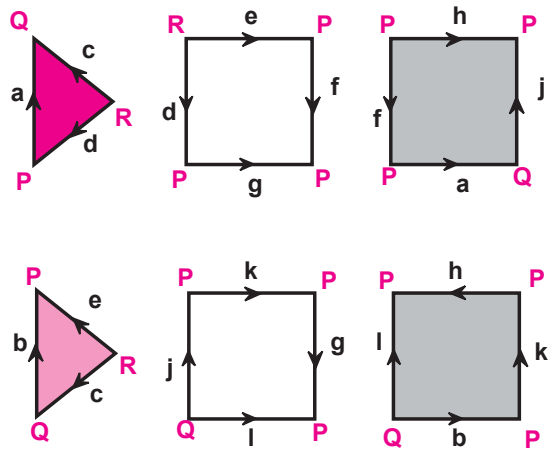

**Möbius-band.** Dat oppervlak kun je niet met twee kleuren verven zonder dat de kleuren op elkaar stoten. De Möbius-band wordt beschreven als bouwplaat, zie figuur 7, met schema $abac$. Door knippen en plakken kunnen we de Möbius-band omvormen tot een andere bouwplaat, maar nu met schema $edd$; het oppervlak is nog steeds gewoon de Möbius-band. In de nieuwe vorm lijkt de Möbius-band heel erg veel op de muts uit figuur 5. In deze vorm noemen we het oppervlak een **kruismuts**; de zijden $d$ worden nu gekruist op elkaar geplakt.

De kruismuts is een oppervlak dat in de driedimensionale ruimte niet aan elkaar geplakt kan worden zonder dat het zichzelf doorsnijdt. (Je kunt het natuurlijk wel weer verknippen en plakken tot een Möbius-band, die wel in de driedimensionale ruimte verwezenlijkt kan worden.) In het 'echt', dus als we de beperkingen van de driedimensionale wereld achter ons laten, doorsnijdt de kruismuts zichzelf niet. In het volgende nummer van *Pythagoras* zullen we uitgebreider ingaan op dit soort oppervlakken.

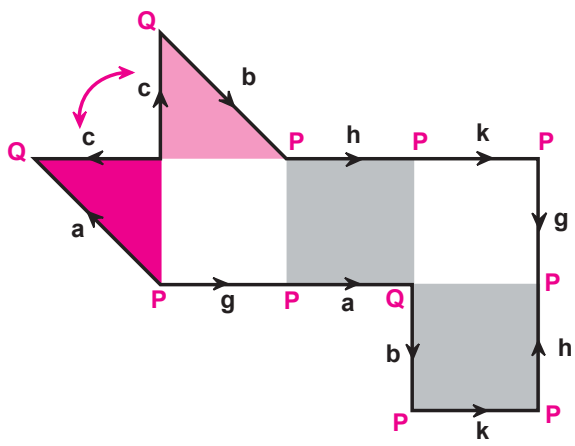
## Wat is een oppervlak?

We zijn nu aangekomen bij de algemene beschrijving van oppervlakken. Een **oppervlak** wordt gemaakt uit een aantal veelhoeken waarvan de zijden gerichte lijnstukken zijn. Iedere zijde wordt geplakt tegen ten hoogste één andere zijde. Tenslotte is het vereist dat na uitvoering van alle plakoperaties de figuur *samenhangend* is; met andere woorden, uit één stuk bestaat. Als iedere zijde tegen een andere zijde wordt geplakt, dan noemen we het oppervlak **gesloten**. De torus en de bol zijn gesloten oppervlakken. Als er ten minste één zijde is die niet tegen een andere zijde geplakt wordt, dan zeggen we dat het oppervlak een **rand** heeft. De riem, de cilinder, het hengsel, de muts en de kruismuts zijn oppervlakken met rand. Het

figuur 9




figuur 10




hengsel in figuur 4 heeft het schema $acba^tb^t$. De zijde $c$ is de rand van het hengsel. Je ziet dat de rand een cirkel is. De kruismuts in figuur 8 heeft het schema $edd^t$. De rand van de kruismuts is $e$; ook deze rand is een cirkel.



## Een stelling over gesloten oppervlakken

We hebben nu heel wat voorbeelden van oppervlakken gezien. Er zijn oneindig veel topologisch verschillende oppervlakken. Het is verrassend dat er van de *gesloten oppervlakken* een heel fraai overzicht is. Dat staat in de zogenaamde classificatie-stelling van oppervlakken:

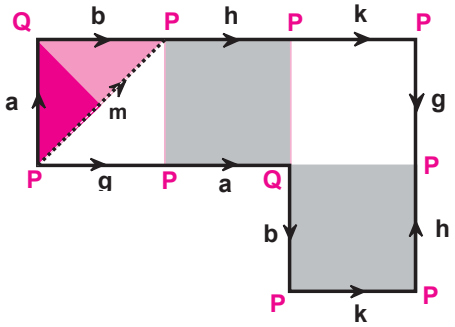
**Classificatie-stelling**. *Ieder tweezijdig gesloten oppervlak heeft de vorm van een bol met een aantal gaten waarbij op ieder gat een hengsel is geplakt. Ieder eenzijdig gesloten oppervlak heeft de vorm van een bol met een aantal gaten waarbij op ieder gat een kruismuts is geplakt.*

We zullen nu een aantal figuren tekenen die de stelling toelichten. We beperken ons tot kort commentaar bij de figuren. In figuur 8 laten we zien dat een bol met één gat waarop een hengsel is geplakt homeomorf is met de torus. In de figuren 9 tot en met 15 hebben we uitgaande van een bouwplaat met zes veelhoeken het oppervlak geconstrueerd.

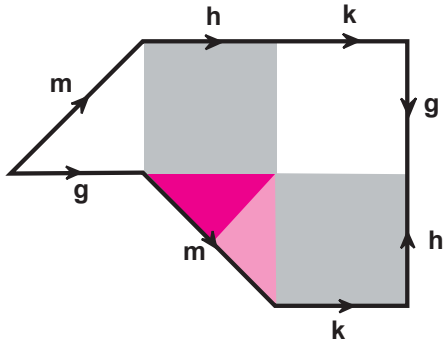
In figuur 9 staat de 'bouwtekening'. Iedere zijde wordt aan een andere zijde geplakt; het oppervlak is dus gesloten. Wat is het? Allereerst verkennen we welke hoekpunten hetzelfde zijn. Er blijken maar drie verschillende hoekpunten te zijn: $P$, $Q$ en $R$. We hebben de hoekpunten met rode letters aangegeven.

In figuur 10 zijn de losse veelhoeken aan elkaar geplakt. In het schema zien we het deelstuk $...bc^tca^t...$. Die $c^tc$ hierin kan weggewerkt worden, zie figuur 11; deze operatie lijkt op het sluiten van een melkpak. Uit de ontstane figuur knippen we een driehoekje weg en plakken dat op een andere plaats vast, zie figuur 12. Nu zijn alle hoekpunten hetzelfde. De ontstane figuur heeft het schema $gmkhg^tk^th^tm^t$. De figuur wordt omgevormd tot een achthoek, zie figuur 13. Na knippen en plakken zijn we in figuur 14: de achthoek heeft nu het schema $n^tgng^tk^th^tkh$. Hierin herkennen we twee hengsels, zie figuur 15. We hebben de achthoek opnieuw ingekleurd om te laten zien hoe de bol en de hengsels ontstaan. De bouwplaat was blijkbaar de bouwplaat van een bol met twee hengsels, een **krakeling**.

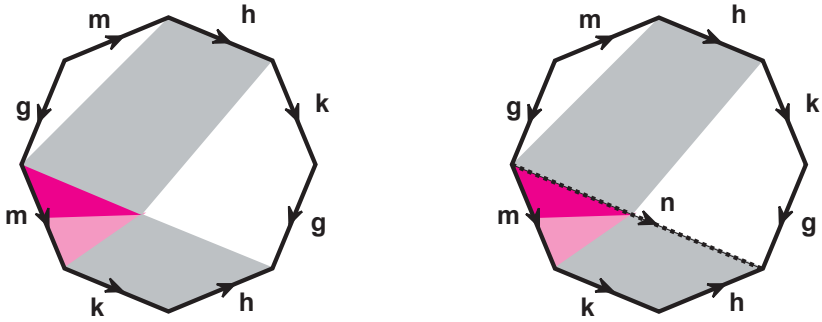
figuur 11



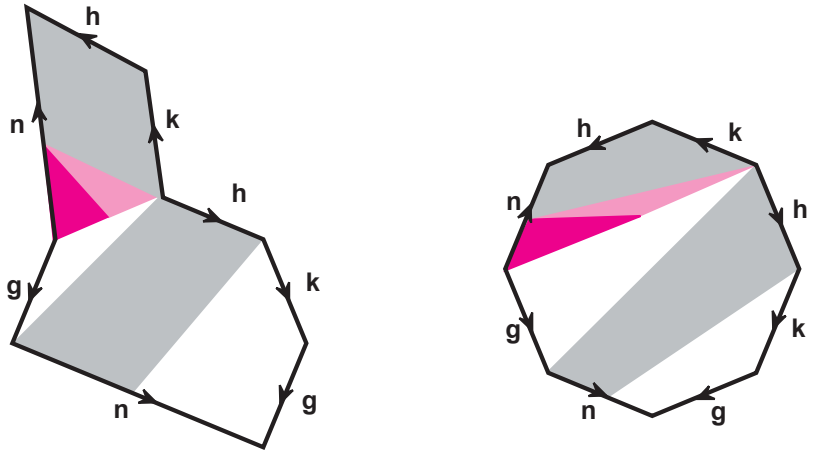

figuur 12



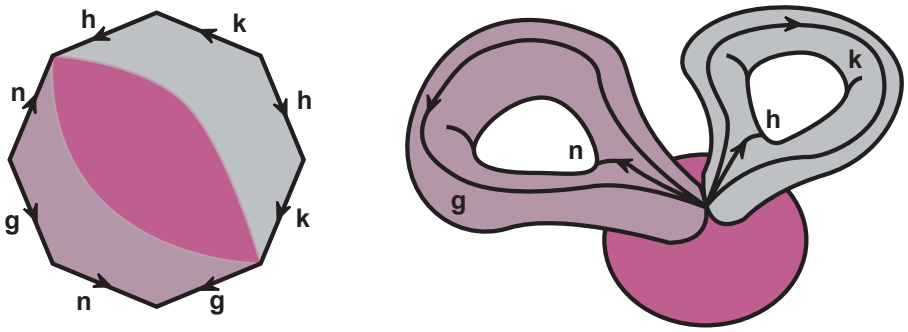

figuur 13




figuur 14



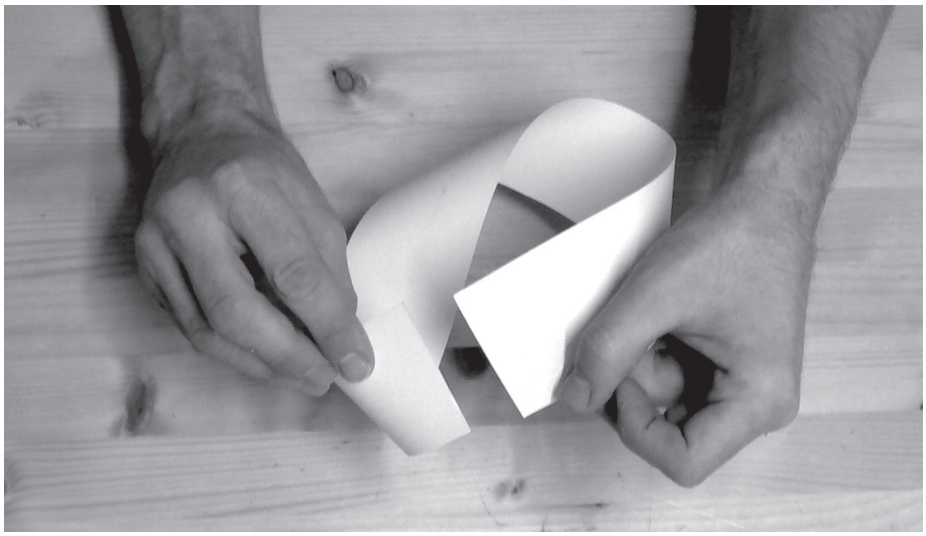

figuur 15



door **J.M. Aarts** en **M. Swaen**

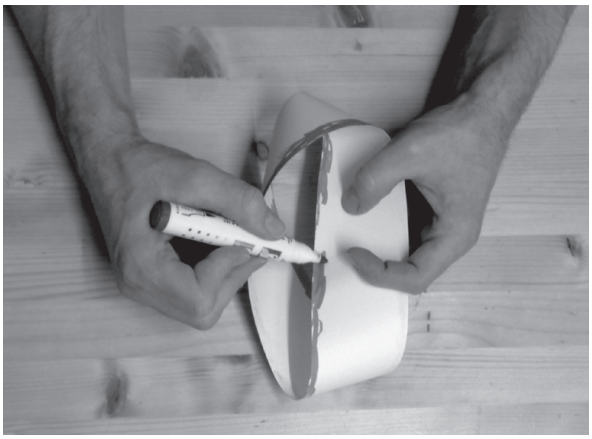
# Topologie met de handen

## Aflevering 3 *Draaien*



**1** Neem een strook papier, plak de uiteinden aan elkaar, maar leg voor je dat doet in de strook een halve slag. Het resultaat heet een *Möbiusband*, genoemd naar de bedenker, August Ferdinand Möbius (1790-1868).

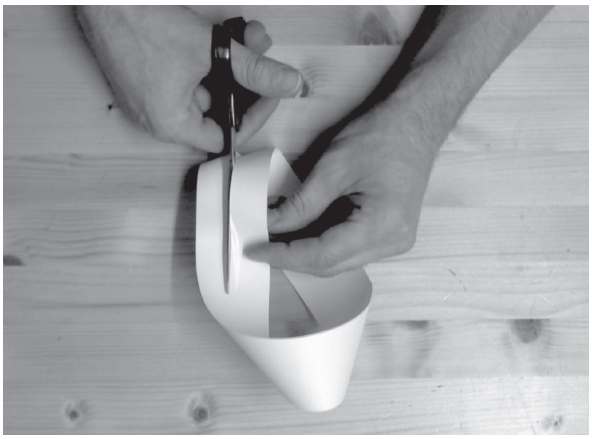
**2a** Kleur de rand van de Möbiusband.



**2b** Je merkt dat hij maar één rand heeft.

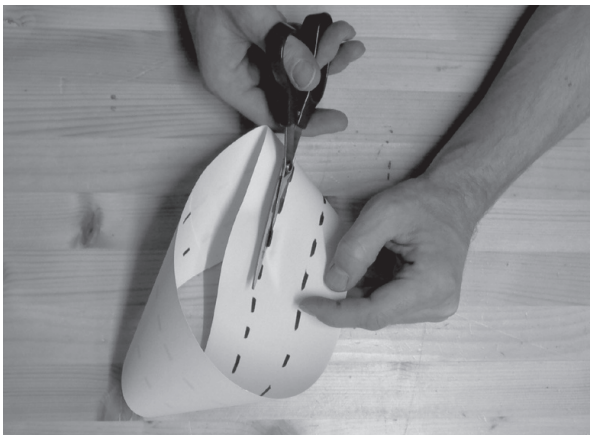
**3a** Probeer de Möbiusband te kleuren vanuit een punt ergens op de band, zonder de rand te passeren.

**3b** Dan kom je overal.

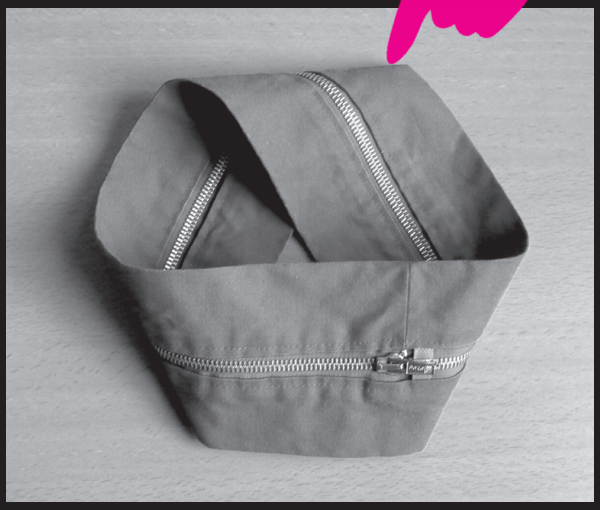


**4a** Knip de Möbiusband doormidden over de hele lengte.

**4b** Het resultaat: maar één stuk! (Een band met twee slagen erin.)



**5** Knip de band door in de lengterichting op $\frac{1}{3}$ van de breedte. Wat krijg je?



**6** Een mooi model van de Möbiusband kun je maken met een ritssluiting en een strook stof.

Pythagoras

Januari 2005 **Journaal** Nummer 3

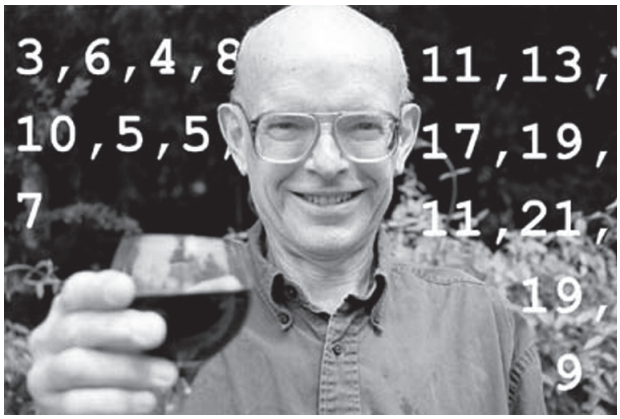
door **Alex van den Brandhof** en **Marco Swaen**

# Encyclopedie van getallenrijen

Op www.research.att.com/~njas/sequences is de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) te vinden. In november was er gelegenheid voor een feestje voor de makers van de encyclopedie: toen werd de 100.000ste rij toegevoegd aan de database.

De OEIS werkt als een zoekmachine. Je kunt een aantal achtereenvolgende termen van een rij invoeren, zoals “5, 7, 11, 23, 47”. Het resultaat is een lijst van alle rijen waar dit deelrijtje in voorkomt. Ook kun je zoeken op naam; zo vindt de machine bij “Fibonacci numbers” de rij 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., inclusief allerhande wetenswaardigheden, zoals de recursieve formule die bij deze rij hoort, de relatie tussen Fibonacci-getallen en de Mandelbrotverzameling, enzovoorts.

De OEIS is een initiatief van de wiskundige Neil Sloane. De afgelopen decennia heeft hij de encyclopedie samengesteld; in de jaren ’70 en ’80 nog op papier, later kwam de encyclopedie online. Op 7 november voerde Sloane de 100.000ste rij in. Deze rij begint met de getallen 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7. Dit zijn de eerste getallen van een rij die men vond in een 22000 jaar oude gravure uit Congo; een interessante rij voor archeologen derhalve.




Neil Sloane proost ter gelegenheid van de 100.000ste rij op de OEIS

**Bron:** *The South End Newspaper*, 10 november 2004

# *Tien biljoen nulpunten onderzocht*

Door velen wordt de *Riemann-hypothese* als het belangrijkste open probleem in de getaltheorie beschouwd, misschien wel in de hele wiskunde. In 1859 verscheen een kort artikel van Riemann (1826-1866) waarin hij de *zeta-functie* onderzocht en een vermoeden over haar nulpunten formuleerde.

De functie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ noemen we de Riemann-zeta-functie en noteren we met $\zeta(z)$ . Voor $z = 2$ heeft de reeks de eindige som $\frac{\pi^2}{6}$, zie bijvoorbeeld *Pythagoras* april 2002.

Riemann beschouwde de zeta-functie niet als reële functie, maar als complexe functie (d.w.z.: de variabele $z$ is van de vorm $x + iy$). De Riemann-hypothese zegt dat alle ‘niet-triviale’ nulpunten van $\zeta(z)$ op de lijn $x = \frac{1}{2}$ liggen. In oktober 2004 vonden Xavier Gourdon en Patrick Demichel een efficiënte methode om voor de eerste tien biljoen ($10^{13}$) niet-triviale nulpunten te bepalen of ze inderdaad op deze lijn liggen. Dat bleek het geval te zijn, maar van een bewijs van de Riemann-hypothese is uiteraard nog geen sprake.

Als de Riemann-hypothese waar is, heeft dat belangrijke gevolgen voor de verdeling van priemgetallen. Veel eigenschappen van getallen zijn alleen bewezen onder aanname van de Riemann-hypothese, of soms juist onder de aanname dat de hypothese niet waar is.

Voor degene die de Riemann-hypothese bewijst, ligt een miljoen dollar klaar. Vreemd genoeg gaat de prijs aan je neus voorbij als je de hypothese kunt *weerleggen*.

**Bron:** *MathWorld Headline News*, 8 november 2004

# Superformule vermindert bestandsgrootte 1000 keer

In het Journaal van *Pythagoras* juni 2003 schreven we dat de Belgische bioloog en wiskundige Johan Gielis een formule had bedacht waarmee zeer uiteenlopende vormen kunnen worden beschreven. Deze 'superformule', gebaseerd op vormen uit de natuur, is de basis voor grafische software waarmee de benodigde rekenkracht van de computer sterk gereduceerd wordt en de grootte van grafische bestanden tot duizend keer kan worden verkleind. Voor deze toepassing ontving Johan Gielis op 13 november in Atlanta de *Inter-Tech Technology Award 2004*.

Gielis heeft patent op de formule en richtte in 2002 het bedrijf Genicap op. Dit bedrijf maakt plug-ins voor onder meer Adobe Illustrator en Photoshop en voor Maxon dat betrokken was bij films als *Spiderman*, *Gladiator* en *Star Wars*. Daarnaast produceert Genicap software voor het genereren van 3D-vormen. In de toekomst zou de superformule toegepast kunnen worden op golfvormen, zoals geluiden, en op beelden, zoals beeldherkenning en medische beeldvorming.

**Op 12 november 2004 vond de prijsuitreiking van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Op de foto zie je de prijswinnaars. Boven (v.l.n.r.): Jinbi Jin, Daan Juttmann, Johan Konter, Wouter de Koning, Sietske Tacoma en Gert Jan Hoeve. Beneden (v.l.n.r.): Johannes Steenstra, Ewout Schotanus, Anne de Haan en winnaar Sjoerd Boersma. Zes van de tien prijswinnaars zullen worden geselecteerd om Nederland te vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Mexico in juli 2005.**

# *Even doorpriemen*

In de jaargang 1985-86 riep *Pythagoras* haar lezers op hun rekenkracht te beproeven in het vinden van priemreeksen, rijen van priemgetallen waarbij het volgende getal steeds het dubbele van de voorganger is plus 1. De langste reeks die toen gevonden werd, bestond uit zes getallen: 89, 179, 359, 719, 1439, 2879, het daaropvolgende getal 5759 is deelbaar door 13. Deze reeks werd door twee lezers – onafhankelijk van elkaar – ingestuurd: Guido Caers en Peter Deleu, beiden uit België.

Nu, vele jaren later, ontving *Pythagoras* opnieuw een brief van Peter Deleu over priemreeksen. Hij schrijft dat hij benieuwd was of de huidige computers langere reeksen zouden kunnen vinden. Dat was inderdaad het geval; hij heeft nu een reeks gevonden die uit negen priemgetallen bestaat: 85864769, 171729539, 343459079, 686918159, 1373836319, 2747672639, 5495345279, 10990690559, 21981381119. Het volgende getal in de rij is 43962762239 en dat is deelbaar door 11.

Peter Deleu wijst in zijn brief ook op het feit dat ook in deze rij alle getallen eindigen op een 9. Omdat het getal een priemgetal moet zijn (en niet 2 of 5), zal het alleen kunnen eindigen op een 1, 3, 7 of 9. Eindigt het op een 1, 3 of 7, dan strandt de rij al snel omdat dan binnen enkele stappen wel een 5 als laatste cijfer verschijnt.

# *Twee gaten gevuld*

In het juninummer van de vorige jaargang beschreef Popke Bakker een schema om regelmatige veelvlakken in onder te brengen onder de naam 'het Platonisch systeem'. De open plekken in het schema fascineerden Marleen Kooiman uit Castricum zo dat zij aan het werk toog en zelf twee nieuwe regelmatige veelvlakken vond. Zij stuurde de redactie een werkstuk waarin zij haar speurtocht uit de doeken doet en de twee veelvlakken beschrijft inclusief bouwplaatjes. De ene hoort in het schema op de plaats {6,5} en is een tweedimensionaal, oneindig veelvlak met in elk hoekpunt vijf zeshoeken. De tweede hoort op de plaats {5,6} en lijkt op het eerste gezicht op een dodecaëder, maar heeft in elk hoekpunt niet drie maar zes vijfhoeken. In een van de komende nummers van *Pythagoras* zullen we Marleen Kooimans vondsten uitgebreid behandelen.

# °Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman** en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.



**Hoe in te zenden**

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 1 februari 2005.

## OPGAVE 114

De *rij van Fibonacci*, waarvan de elementen genoteerd worden met $F_i$ $(i \geq 0)$, wordt als volgt geconstrueerd:
$F_0 = F_1 = 1$, en voor $i \geq 2$ geldt
$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.
Bewijs dat er voor elk positief geheel getal $n$ oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van $n$.

## OPGAVE 115

Twee cirkels van straal $r_1$ en $r_2$, waarvan de middelpunten afstand $d$ tot elkaar hebben, snijden elkaar in de punten $X$ en $Y$.
Een rechte lijn door $X$ snijdt de twee cirkels behalve in $X$ in de punten $P$ en $Q$.
Vind de grootste lengte die het lijnstuk $PQ$ kan aannemen.

# OPLOSSING

# 110

Op een $n$ x $n$ schaakbord zijn de vakjes in willekeurige volgorde genummerd van $1$ tot en met $n^2$. Bewijs dat er altijd twee aangrenzende vakjes (horizontaal, verticaal of diagonaal) zijn waarvan de nummers meer dan $n$ van elkaar verschillen.

**Oplossing.** Vanwege de grootte van het bord is het mogelijk om in ten hoogste $n - 1$ stappen (telkens naar een aangrenzend vakje verspringend) van vakje $1$ naar vakje $n^2$ te komen. Als je met al deze stappen hooguit $n$ omhoog zou gaan, zou je in totaal ten hoogste $n(n-1) = n^2 - n$ omhoog gaan, en zou je niet van $1$ naar $n^2$ kunnen komen. Er zijn dus ergens twee aangrenzende vakjes waarvan de nummers meer dan $n$ van elkaar verschillen.

Deze opgave werd goed opgelost door: Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum en Karel Gheysens van het **Edugo** te Gent. De boekenbon gaat naar Wouter Berkelmans.

# OPLOSSING

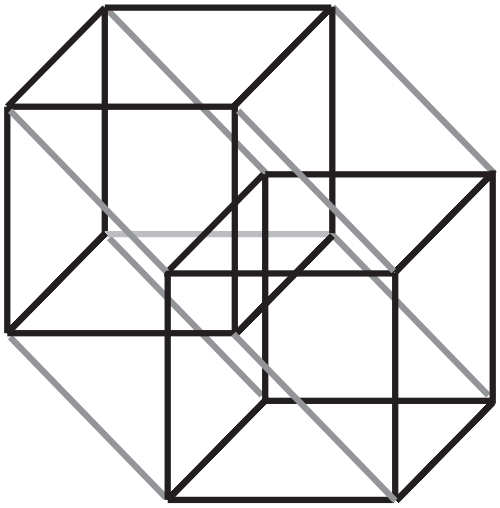
# 111

Bert en Ernie, verzot op spelletjes, spelen de volgende variant op *Vier op een rij*: Bert mag eerst bepalen hoe groot het bord wordt. Vervolgens mag hij in elke beurt twee keer een schijf laten vallen en Ernie telkens één keer. Bert moet proberen ergens duizend schijven op een rij (horizontaal, verticaal of diagonaal) te krijgen, Ernie moet dit zien te voorkomen. Kan Bert dit spel winnen?

**Oplossing.** Als Bert 1000 kolommen van hoogte 3 kiest, kan hij het spel winnen. Hij moet dan in elke kolom op de tweede rij een schijf zien te krijgen. Hiertoe begint hij door twee schijven in eenzelfde kolom te plaatsen. Als Ernie vervolgens een schijf in een ándere kolom doet, plaatst Bert daar twee schijven bovenop. Als Ernie een schijf in dezelfde kolom doet, plaatst Bert twee schijven boven op elkaar in een andere kolom. Op deze manier wint Bert in precies 1000 beurten.
*Opmerking*: Bij de hier beschreven situatie begint Bert. Indien Ernie het spel begint, kan Bert ook winnen; zie www.pythagoras.nu voor de oplossing.

Deze opgave werd goed opgelost door: Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), Johan Konter van het **Stedelijk Gymnasium** Breda, H. Verdonk te Den Haag, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Milo van Holsteijn van het **RSG Pantarijn** te Wageningen, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffer College** te Castricum, Jan Boogert van het **Driestar College** te Gouda, Judith Mulder van het **Christelijk Lyceum** Delft, Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam en Karel Gheysens van het **Edugo** te Gent. De boekenbon gaat naar Judith Mulder.

door **Wenda Posch** en **José Spaan**



**Figuur 1** Een hyperkubus

# °Snijden in de hyperkubus



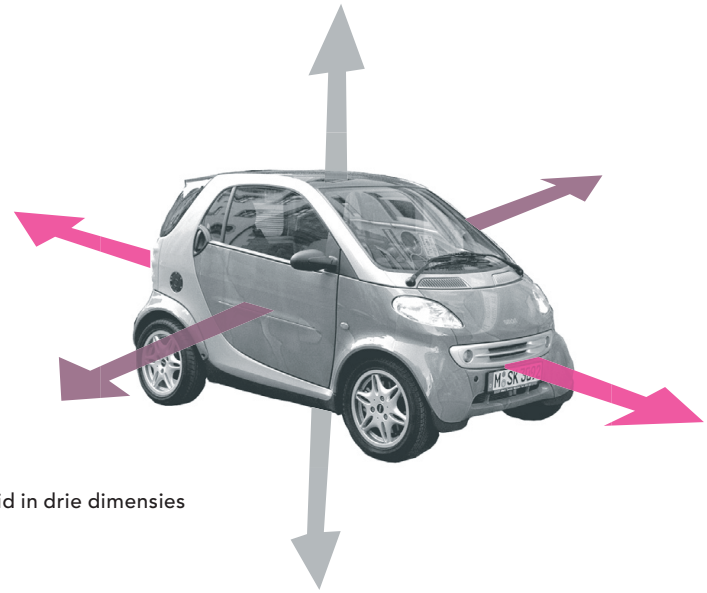
**Zet een kubus op z'n punt en snij hem horizontaal in plakken. Dat levert een mooie serie driehoeken en zeshoeken op. Beschik je over het nodige ruimtelijk voorstellingsvermogen, dan zie je dat zo voor je. Maar zie je ook wat er gebeurt als je een *hyper*kubus op dezelfde manier aan plakjes snijdt?**

### Dimensies om ons heen

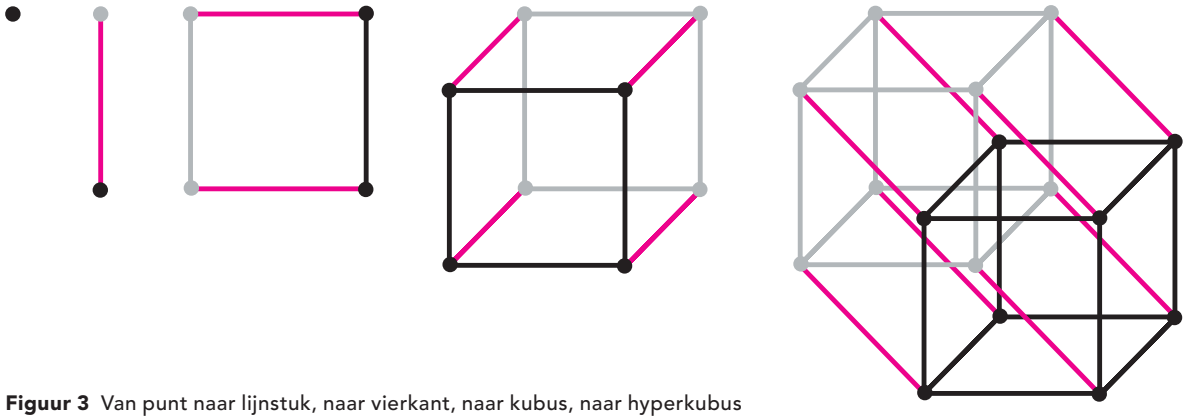
Voor we uitleggen wat een hyperkubus precies is, staan we stil bij het begrip 'dimensie'. We kiezen voorbeelden uit het dagelijks leven. Stel je rijdt in een tunnel achter een langzame vrachtwagen, maar door de doorgetrokken witte streep mag je niet van de rijstrook af. Je bewegingswereld is dan eendimensionaal, want je kunt je alleen over één lijn bewegen. Na de tunnel krijg je een onderbroken witte streep en mag je weer van rijstrook veranderen. Nu kun je in twee dimensies bewegen, in principe over een heel vlak. Een tijdje later zijn alle rijstroken versperd door werkzaamheden aan een brug. Je auto wordt nu van alle kanten ingeklemd. Je zou willen dat je zou kunnen ontsnappen via de derde dimensie door je auto over de file heen te laten vliegen. Stel nu tenslotte dat je in de tunnel vastzit, je kunt niet voor of achteruit, niet opzij en ook niet omhoog of omlaag. Dan zou alleen een vierde dimensie nog uitkomst kunnen bieden.

### Van punt tot kubus

Een kubus is driedimensionaal. Een hyper-



**Figuur 2** Bewegingsvrijheid in drie dimensies



**Figuur 3** Van punt naar lijnstuk, naar vierkant, naar kubus, naar hyperkubus



kubus is *vier*dimensionaal, dus een kubus met nog een extra richting, dwars op de andere richtingen. Die extra richting is in de wereld om ons heen niet voorhanden, zodat we de hyperkubus niet echt kunnen maken. Desalniettemin kunnen we wel bedenken hoe zo'n hyperkubus in elkaar zit, omdat het toevoegen van een richting op zich niets geheimzinnigs heeft. Laten we eens bekijken hoe in lagere dimensies het toevoegen van richtingen verloopt, zie figuur 3.

We beginnen met een nuldimensionaal ding: de punt. Geef de punt een duw, en volg het spoor. De punt trekt dan een lijnstukje. Dat lijnstukje heeft een beginpunt, een eindpunt en één 'ribbe'. Het lijnstukje is een eendimensionaal object.

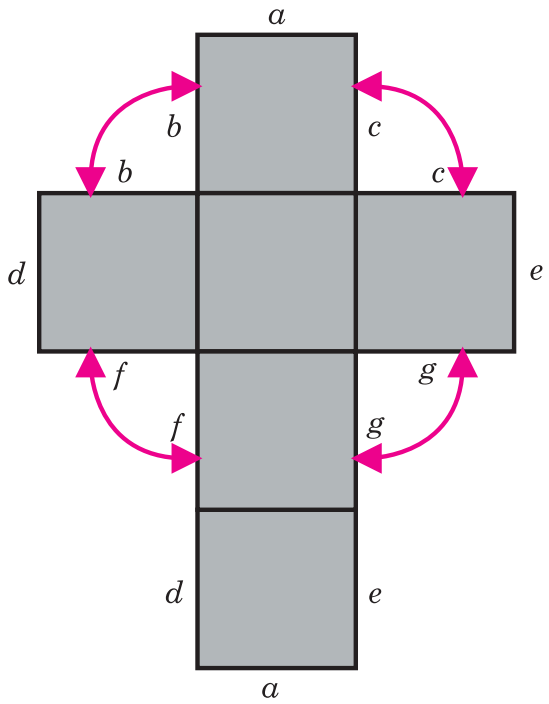
Vervolgens geven we het lijnstukje een duw, in een richting dwars op dat lijnstuk. Het spoor is dan een vierkant. De twee hoekpunten zijn er nu vier. Terwijl we de duw geven, trekt elk hoekpunt zelf een lijnstukje en trekt het lijnstukje een vierkant; een tweedimensionaal object.

Geef het vierkant weer een duw, dan krijgen we een kubus; een driedimensionaal object. En geef die weer een duw, dan hebben we een hyperkubus: de laatste in de serie van figuur 3.

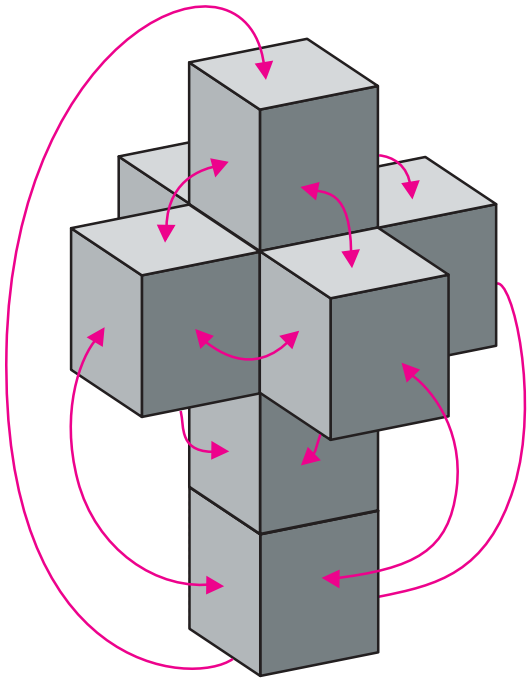
## Systematisch tellen

De tekening in figuur 1 (en de laatste in de serie van figuur 3) geeft een erg gebrekkig beeld van de echte hyperkubus, die zelf immers vierdimensionaal is, en nu tweedimensionaal is afgebeeld, dus twee keer platgeslagen. Met alleen zo'n gebrekkige tekening kun je van de hyperkubus toch nooit echt iets begrijpen? Toch wel, je hebt die tekening namelijk niet eens nodig, want door het proces van richtingen toevoegen goed te volgen, kun je de meeste vragen over de

**Figuur 4** Het uitgeklapte patroon van een vierkant




**Figuur 5** Een bouwplaat van de kubus



**Figuur 6** Een bouw'lichaam' van de hyperkubus



hyperkubus oplossen. Om dat duidelijk te maken, zetten we eerst een stapje terug in de dimensies. Het vierkant dat je wel kent, heeft vier ribben, vier hoekpunten en één zijvlak. De kubus ontstaat daaruit door er een duw tegen te geven. Wat betreft de ribben, hebben we nu de vier ribben in het beginvierkant en de vier ribben in de eindstand, dus daarmee alvast acht ribben. Tijdens de duw trekt ieder hoekpunt zelf ook een ribbe. Het vierkant had vier hoekpunten, dus in totaal heeft de kubus $2 \times 4 + 4 = 12$ ribben.

Zo trekken de ribben van het vierkant ook nieuwe zijvlakken tijdens de beweging. Het vierkant had één zijvlak, dat zijn nu de twee van de begin- en eindstand, en daar komen dan de zijvlakken bij die het spoor zijn van de vier zijden van het vierkant. De kubus moet dus zes zijvlakken hebben.

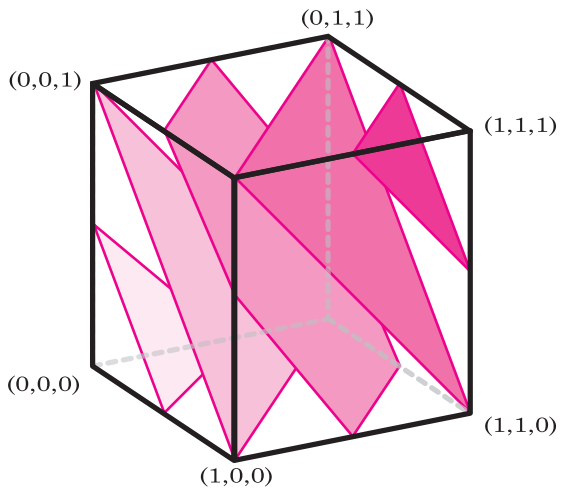
**Van kubus naar hyperkubus**

Op dezelfde manier gaan we nu van de kubus naar de hyperkubus. Geef de kubus een duw, en analyseer hoeveel ribben, zijvlakken en zijruimten dat oplevert. Om te beginnen is het duidelijk dat de hyperkubus 16 hoekpunten heeft (8 van de beginstand-kubus, en 8 van de eindstand). Verder heeft de hyperkubus van die begin- en eindstand $2 \times 12$ ribben; terwijl elk hoekpunt van de kubus een nieuwe ribbe heeft getrokken, dus nog eens 8 ribben, waarmee het totaal komt op 32. Zo heeft de hyperkubus $2 \times 6 + 12 = 24$ zijvlakken, en $2 \times 1 + 6 = 8$ 'zijruimten' of zijkubussen.

**Uitslagen**

Er is ook een andere manier om op te klimmen in dimensies, namelijk met bouwplaten.

We beginnen met het uitgeklapte patroon van een vierkant. Een vierkant is een tweedi-




**Figuur 7** Enkele kubusdoorsneden

mensionale figuur, zijn uitslag is eendimensionaal. De 'bouwlijn' van het vierkant bestaat uit vier lijnstukjes, waarvan de uiteinden aan elkaar gezet moeten worden, zie figuur 4.

Een bekende uitslag van de kubus zie je in figuur 5. Hier gaat het dus om een geheel van vierkanten (tweedimensionaal) dat langs ribben (eendimensionaal) aan elkaar gezet moet worden. Uit het patroon van deze bouwplaat valt af te lezen hoe het 'bouwlichaam' van de hyperkubus in elkaar moet zitten. De bouwplaat van de kubus ontstaat als volgt. Begin met één vierkant en hecht een vierkant aan elk van zijn vier zijden, zo ontstaat een kruis. Klap de vierkanten die aan hetzelfde hoekpunt liggen naar elkaar, zo ontstaat een open doos. Er zijn dan precies vier vrije randen over die nog nergens aan vastzitten. Hierop past het laatste vierkant, dat in de bouwplaat onderaan hangt.

Net zo maken we een bouwsel van kubussen die met hun zijvlakken aan elkaar gezet moeten worden tot een hyperkubus, zie figuur 6. Een hyperkubus heeft acht kubusvormige zijkanten. Begin met één kubus die omringd wordt door zes kubussen (aan elk zijvlak één). Pas de zes kubussen met hun zijvlakken aan elkaar als zij een ribbe van de grondkubus gemeen hebben. Dan zullen er nog zes vierkante vlakken overblijven zonder geplande aanhechting. Daar moet de achtste kubus aan vastgemaakt worden. Die hangt nu onderaan het bouwsel. Helaas kan niemand in onze ruimte echt helemaal zien hoe dit proces werkt en hoe dit geheel een hyperkubus wordt.

**Snijden in de vierde dimensie**

Nu we een redelijke voorstelling hebben van de hyperkubus, keren we terug naar de eigenlijke vraag: welke vorm hebben doorsnijdingen? Realiseer je wel wat doorsneden van een vierdimensionaal object zijn. In de driedimensionale ruimte betekent snijden terug gaan naar iets tweedimensionaals. In de vierdimensionale ruimte zullen de doorsneden niet twee- maar driedimensionaal zijn. We snijden daar dan niet met een vlak, maar met een ruimte (of *hypervlak*). De doorsneden van de hyperkubus zullen dus driedimensionale vormen zijn.

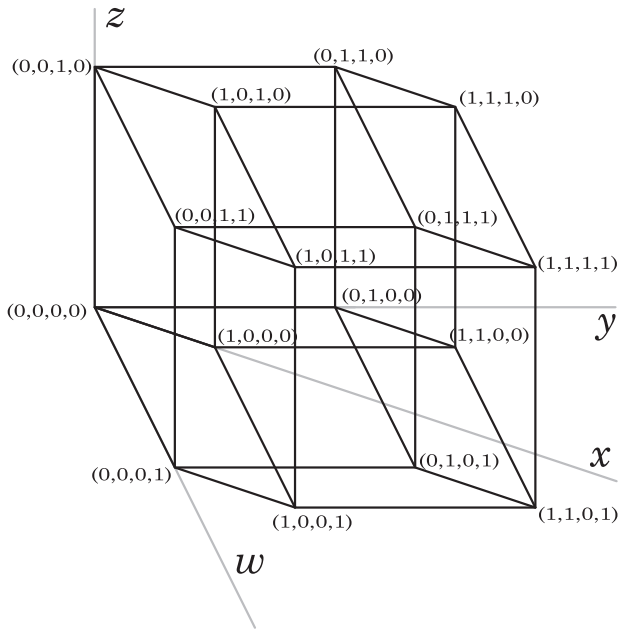
**Coördinaten**

Een heel geschikt hulpmiddel om de hyperkubus in beeld te brengen is een coördinatenstelsel. We hebben dan vier assen nodig, en elk punt wordt dan vastgelegd met vier coördinaten $(x, y, z, w)$. In dit coördinatenstelsel is de hyperkubus goed weer te geven door één hoekpunt in de oorsprong te kiezen, en dan de vier aanliggende ribben langs de vier assen te leggen. In figuur 8 is de hyperkubus in het $xyzw$-assenstelsel getekend, met de coördinaten van alle hoekpunten.

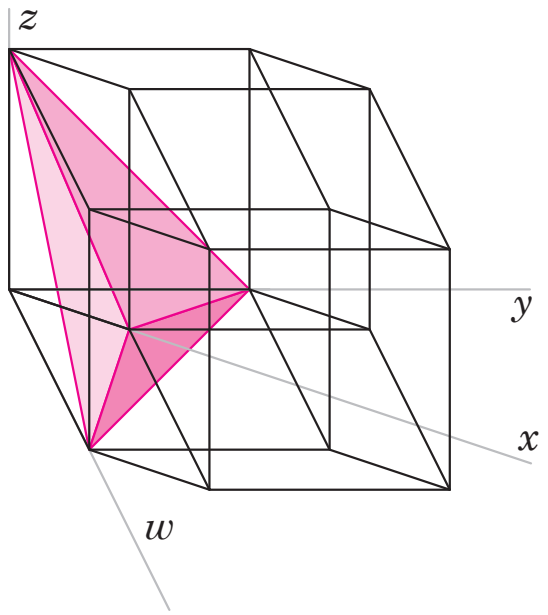
**Doorsneden bij de kubus**

Om te zien hoe we de hyperkubus nu aan plakjes moeten snijden, spieken we eerst weer even een dimensie lager, naar het doorsnijden van de driedimensionale kubus.

In figuur 7 is een serie doorsneden gete-




**Figuur 8** De hyperkubus in een $xyzw$-assenstelsel




**Figuur 9** De hyperkubusdoorsnede bij $x + y + z + w = 1$



kend. Bekijk je de verschillende doorsneden, dan valt op dat punten die in dezelfde doorsnede liggen, ook steeds dezelfde som van de coördinaten hebben. Zo heb je de gelijkzijdige driehoek met hoekpunten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$, alle met $1$ als som van hun coördinaten. Een verfijning van de doorsnijdingen krijg je door ook series punten te zoeken met een coördinatensom van bijvoorbeeld $1\frac{1}{2}$ (dit is de zeshoek halverwege de hoofddiagonaal).

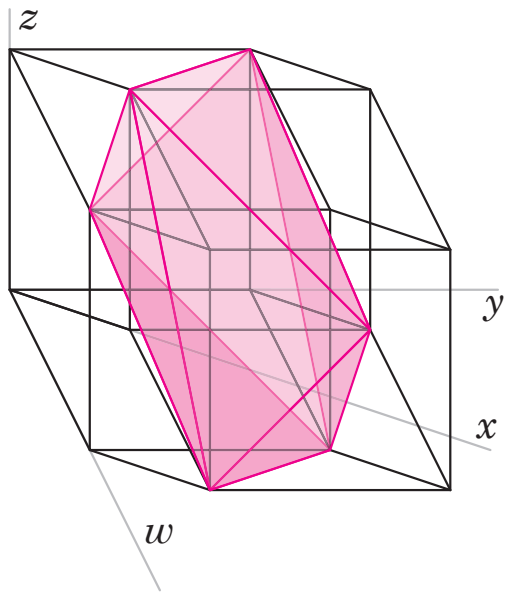
**En nu de hyperkubus**

We kunnen dezelfde analyse doen voor de hyperkubus in de vierde dimensie. Als we de hyperkubus loodrecht op de hoofddiagonaal van $(0, 0, 0, 0)$ naar $(1, 1, 1, 1)$ doorsnijden, dan gaat een eerste snede door de oorsprong $(0, 0, 0, 0)$. Dan komt de figuur met hoekpunten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ en $(0, 0, 0, 1)$, waarvan de coördinaten allemaal optellen tot $1$, een tetraëder, zie figuur 9.

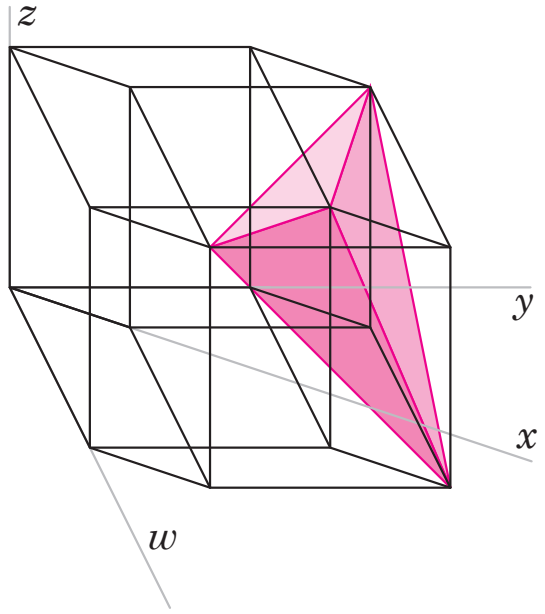
De punten die in eenzelfde hypervlak loodrecht op de hoofddiagonaal liggen, zullen allemaal weer dezelfde coördinatensom hebben, een getal van $0$ tot en met $4$. Het enige hoekpunt dat coördinatensom $0$ heeft, is natuurlijk de oorsprong, en recht daar tegenover hebben we $(1, 1, 1, 1)$, het enige hoekpunt met coördinatensom $4$. De snede met hoekpunt die samen $3$ leveren, heeft hoekpunten $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$ en $(1, 1, 1, 0)$, zie figuur 11.

Precies in het midden vinden we een heel interessante snede, waar de coördinaten samen $2$ zijn: $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ en $(0, 0, 1, 1)$. Ze vormen de hoekpunten van een regelmatig achtvlak halverwege de hyperkubus, zie figuur 10.

De serie doorsneden kun je verder verfij-



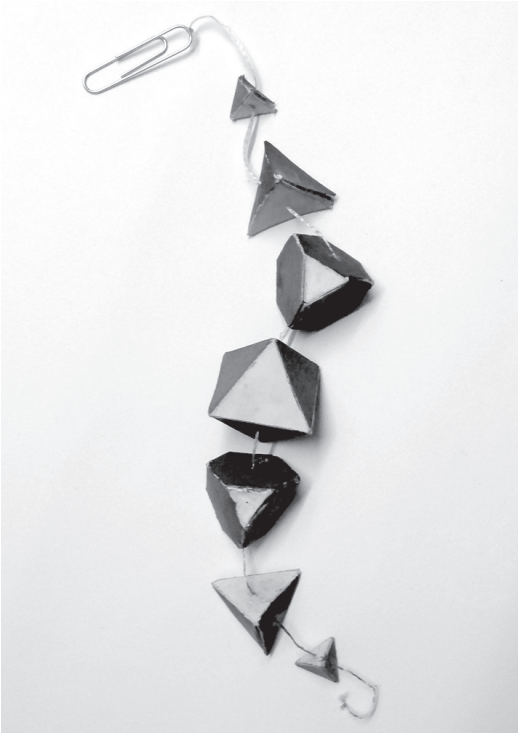

**Figuur 10** De hyperkubusdoorsnede bij $x + y + z + w = 2$




**Figuur 11** De hyperkubusdoorsnede bij $x + y + z + w = 3$



nen door ook series met een gebroken coördinatensom op te sporen. Neem je bijvoorbeeld ook halven, dan snijden de vlakken ook door de middens van de ribben en krijg je de serie doorsneden van figuur 12. De serie doorsneden die op deze foto staat, is twee jaar geleden gemaakt door leerlingen van het Barlaeusgymnasium in Amsterdam. Dit was de winnende klasseninzending van de Veelvlakkenprijsvraag, die *Pythagoras* in 2002 uitschreef.



**Figuur 12** Een serie doorsneden verfijnd

Van de website www.pythagoras.nu kun je een serie tekenbladen over de hyperkubus downloaden.
De auteurs bedanken Marco Swaen voor zijn adviezen bij het totstandkomen van dit artikel.

door **Elias C. Buissant des Amorie**

# °Stambreuken

**In het oude Egypte kende men geen breuken zoals bij ons. De Egyptenaren gebruikten *stambreuken*; dat zijn breuken met $1$ als teller, zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{536}$. Er waren enkele uitzonderingen: men werkte wel met $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$, waarvoor men ook speciale symbolen had; zie figuur 1, waarin verder de symbolen voor $1$, $10$, $25$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ te zien zijn. Zo werd $\frac{2}{3}$ aangeduid als 'de twee delen'. De aanvulling tot $1$ is dan 'het derde deel'. En misschien komt daar onze benaming 'een derde' voor $\frac{1}{3}$ wel vandaan.**
**Bij deze zienswijze is het enigszins begrijpelijk dat men niet kon spreken van 'drie vijfde', want er is dan maar één vijfde deel.**



Onze kennis van de Egyptische wiskunde is voornamelijk gebaseerd op een papyrusrol die bekend staat als de 'papyrus Rhind', genoemd naar de Schotse Egyptoloog mr. A.H. Rhind, die deze papyrus in 1858 in Luxor kocht en later aan het Brits Museum vermaakte. De rol stamt uit 1650 voor Christus en we weten zelfs door wie hij geschreven is. De schrijver deelt namelijk mee dat hij Ahmes heet, hij vermeldt ook dat hij de rol overschreef van een rol die toen al twee eeuwen oud was. De papyrus Rhind bevat 87 vraagstukken met uitwerkingen.

Opvallend is dat Ahmes breuken met teller $2$ niet opsplitst in de som van twee gelijke stambreuken, maar als som van verschillende stambreuken. Zo schrijft hij $\frac{2}{5}$ niet als $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, maar als $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. En $\frac{2}{7}$ als $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$.

De papyrus Rhind bevat onder meer een tabel van dergelijke opsplitsingen voor $\frac{2}{3}$ tot en met $\frac{2}{101}$.

De techniek van het rekenen met breuken was in die tijd behoorlijk ver ontwikkeld. Zo werden delingen als de volgende uitgevoerd:

$$37:(1+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{7})=16+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{679}+\tfrac{1}{776}$$

**Als som van stambreuken**

Elke onvereenvoudigbare breuk is te schrijven als de som van verschillende stambreuken, bijvoorbeeld

$$\tfrac{8}{11}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{37}+\tfrac{1}{4070}.$$

Maar die schrijfwijze is niet eenduidig, zoals bijvoorbeeld blijkt uit

$$\tfrac{2}{19}=\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{70}+\tfrac{1}{14630},$$

maar ook

$$\tfrac{2}{19}=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{190}.$$

$1$ $10$ $25$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

**Figuur 1** Enkele Egyptische symbolen

Bereken jij $\frac{1}{9}$ van 9, er komt 1;

Bereken jij het verschil als 8,

bereken jij $\frac{1}{9}$ van 8;

Er komt $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$;

Bereken jij het verschil van deze 8 met

deze $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$; Er komt $7\frac{1}{9}$;

Bereken jij $7\frac{1}{9}$ maal $4\frac{1}{2}$;

Er komt 32. Zie het oppervlak is dit.

Je hebt het goed gevonden.

**Figuur 2** Een stukje Egyptische wiskunde in hiërogliefen. Goed is te zien hoe getallen en stambreuken geschreven werden. Het fragment gaat over de berekening van de inhoud van een halve bol waarvan de dubbele diameter 9 is.



Als we echter afspreken dat we steeds een zo groot mogelijke stambreuk afsplitsen, dan is de splitsing wel eenduidig.

Aan de hand van een voorbeeld tonen we aan hoe dat te realiseren is.

Neem $\frac{5}{11}$.

Omdat $2<\frac{11}{5}<3$, geldt $\frac{1}{3}<\frac{5}{11}<\frac{1}{2}$. Daardoor is $\frac{1}{3}$ de grootste stambreuk die kleiner is dan $\frac{5}{11}$.
Verminder $\frac{5}{11}$ met $\frac{1}{3}$. Dat levert
$\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{15-11}{33}=\frac{4}{33}$.
Omdat $8<\frac{33}{4}<9$, geldt $\frac{1}{9}<\frac{4}{33}<\frac{1}{8}$. Daardoor is $\frac{1}{9}$ de grootste stambreuk die kleiner is dan $\frac{4}{33}$.
Verminder $\frac{4}{33}$ met $\frac{1}{9}$. Dat levert
$\frac{4}{33}-\frac{1}{9}=\frac{12-11}{99}=\frac{1}{99}$.

Daarmee hebben we dus gevonden
$\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$.

Je ziet dat je steeds hetzelfde principe toepast. Het totale proces kan lang duren, en leiden tot stambreuken met een erg grote noemer. Bij elke stap wordt de teller van de restbreuk wel kleiner, zodat het zeker is dat het proces op een gegeven moment eindigt.

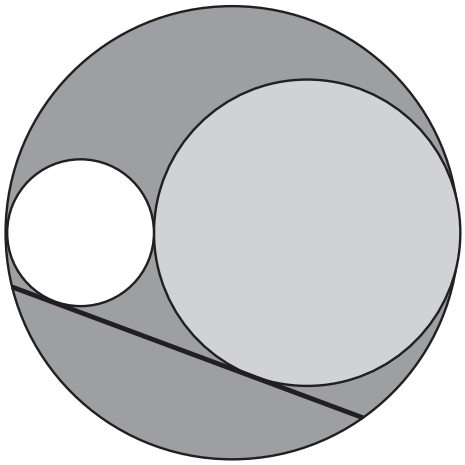
**Opgave 1.** Probeer $\frac{3}{7}$ op zoveel mogelijk manieren te schrijven als som van drie stambreuken.
**Opgave 2.** Probeer $\frac{99}{100}$ te schrijven als som van verschillende stambreuken. Als laatste noemer vonden wij 230409900.
**Opgave 3.** Bekijk figuur 2 en controleer de berekeningen.

**Meer informatie**
Meer informatie over stambreuken kun je op Internet vinden met het trefwoord 'egyptian fractions' in een zoekmachine.
**Bron:** *Fontes Matheseos*, E.M.Bruijns Leiden 1953

# °Problemen

door **Dion Gijswijt**

**Koorde**
In de figuur zie je drie cirkels met stralen $3$, $6$ en $9$ die elkaar twee aan twee raken. De grootste cirkel heeft een koorde die de twee kleinere cirkels raakt. Wat is de lengte van deze koorde?

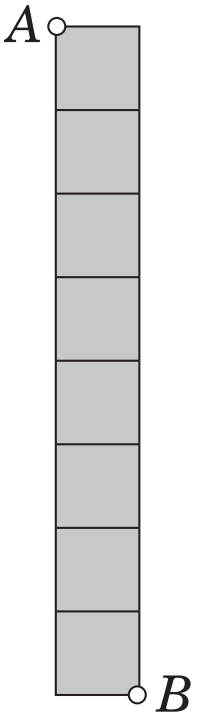


**Valexperiment**
Een zekere natuurkundige, Leila Go, heeft identieke stenen kogels. Vanuit een 100 verdiepingen hoge toren laat zij kogels naar beneden vallen. Wanneer een kogel van een te hoge verdieping wordt losgelaten, zal deze op het plaveisel uiteen spatten. Leila wil uitvinden wat de hoogste verdieping is, van waaraf kogels kunnen worden gegooid zonder te breken.

Leila heeft slechts twee kogels om mee te experimenteren. Wat is het kleinste aantal experimenten waarmee ze gegarandeerd haar vraag kan beantwoorden?

**Fibonacci-getallen**
De Fibonacci-getallen zijn de getallen $1$, $2$, $3$, $5$, $8$, $13$, $21$,..., waarbij ieder getal in de rij (vanaf $3$) de som is van de twee vorige getallen. Het getal $11$ kun je op drie manieren schrijven als som van verschillende Fibonacci-getallen: $11 = 8 + 3$, $11 = 8 + 2 + 1$ en $11 = 5 + 3 + 2 + 1$. Welke getallen kun je slechts op één manier als som van verschillende Fibonacci-getallen schrijven?

**Van A naar B**
Op hoeveel manieren kun je via de zwarte paden van hoekpunt $A$ naar hoekpunt $B$ lopen, als je niet tweemaal langs het hetzelfde punt mag komen? Je hoeft dus niet via een kortste weg te lopen.



# °Oplossingen
## nr. 2

### 2004 2005

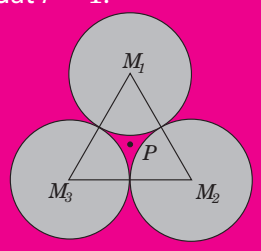
Uit $a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ volgt dat $a_{n+1}\,a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$. Dus $a_1\,a_2 = 2$, $a_2\,a_3 = 3$, ... , $a_{2004}a_{2005} = 2005$.

### Munten wisselen

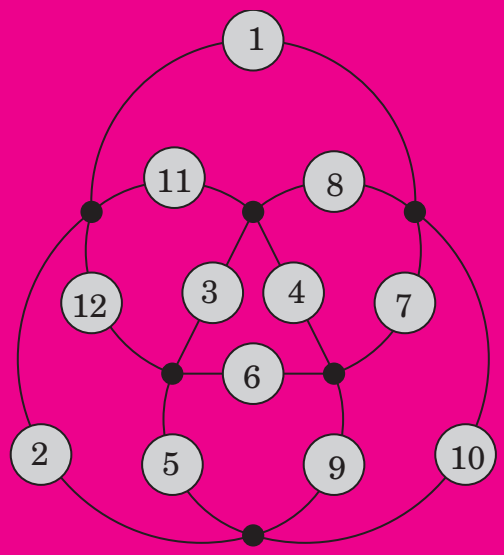
Kies munten van 5 en van 6 cent. Het aantal manieren om ten hoogste vijf munten te wisselen, is gelijk aan het aantal paren $(p, q)$ met $|p| + |q| \le 5$, dus $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 61$. Dus $2n + 1 \le 61$ en $n \le 30$, wat je voor $a$ en $b$ ook neemt.
Alle bedragen $5p + 6q$ met $|p| + |q| \le 5$ liggen tussen $-30$ en $30$. Bovendien zijn deze bedragen verschillend. Immers, zou $5p + 6q = 5r + 6s$ (met $p \ne r$ of $q \ne s$), dan zou $5(p - r) = 6(s - q)$ en waren $p - r$ en $s - q$ deelbaar door 6 respectievelijk 5. Maar dan zou $|p - r| + |s - q| \ge 5 + 6$, terwijl $|p - r| + |s - q| \le |p| + |q| + |r| + |s| \le 5 + 5$.
De bedragen $-30, -29, ..., 30$ kunnen dus elk op precies één manier worden betaald.

### Vijf metalen bollen

In de figuur zijn $M_1$, $M_2$, $M_3$ de middelpunten van de bollen met straal 6. Punt $P$ is het middelpunt van de gelijkzijdige driehoek $M_1\,M_2\,M_3$. De twee andere bollen met middelpunten $N_1$ en $N_2$ raken het vlak door $M_1$, $M_2$, $M_3$ aan weerszijden in $P$. De afstand $N_1M_1$ is $6 + r$, dus met de stelling van Pythagoras vinden we $(r + 6)^2 = r^2 + |M_1\,P|^2 = r^2 + 48$, zodat $r = 1$.




### Octaëder




### Triominos

Met een beetje puzzelen heb je zelf waarschijnlijk een betegeling met stukje I gevonden.
Met stukje II kun je de figuur niet betegelen. Kleur de elf kolommen afwisselend rood, wit en blauw, zodat de aantallen rode en witte zeshoekjes gelijk zijn aan $11 + 8 + 5 + 2 = 26$ en $10 + 7 + 4 + 1 = 22$, een verschil van 4. Merk nu op dat ieder stukje altijd óf van iedere kleur een zeshoekje bedekt, óf drie zeshoekjes van dezelfde kleur. Het verschil tussen het aantal rode en witte zeshoekjes dat door stukjes van type II bedekt wordt, is daarom altijd een drievoud. Daar 4 geen drievoud is, kan de figuur niet worden betegeld.

Een vierkant met zijde 3 en een vierkant met zijde 4 hebben samen dezelfde oppervlakte als een vierkant met zijde 5, immers $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dat de oppervlakte van de kleinere twee gelijk is aan die van het grote vierkant, kun je ook laten zien door het grote vierkant in stukken op te delen waarmee je de kleinere twee dan kunt leggen. Zo'n legpuzzel heet een *dissectie*.
Edo Timmermans doet sinds enkele jaren op eigen houtje onderzoek naar dissecties van vierkanten en kubussen. In dit artikel presenteert hij enkele van de resultaten van zijn onderzoekingen.

# Pythagoreïsche dissecties

door

**Edo Timmermans**



Een jaar of twee geleden sprak een redacteur van *Pythagoras* mij aan op een bijeenkomst van *Ars et Mathesis*. Hij vroeg of ik een artikel wilde schrijven over het onderzoek waar ik mee bezig ben. Mijn onderzoek is ondertussen zo ver gevorderd dat ik de tijd rijp acht om dat te doen. Eerdere publicaties heb ik reeds gedaan in het blad van *Cubism For Fun*.

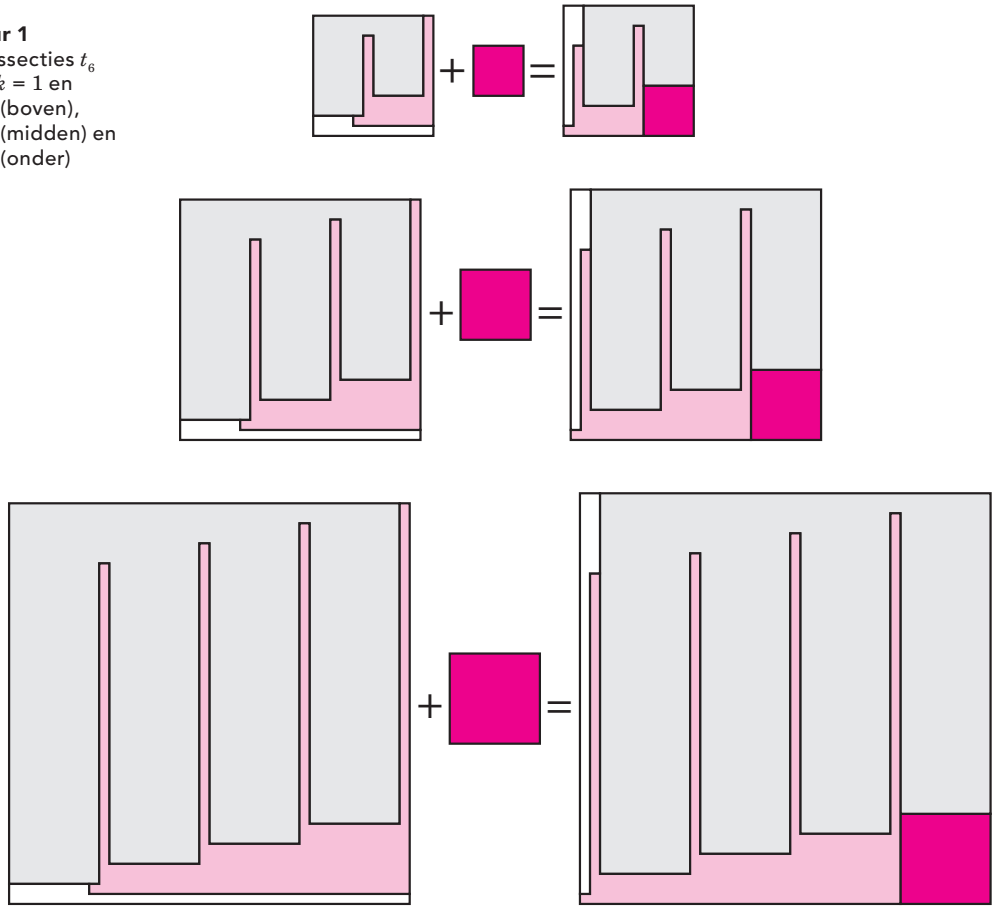
Begin jaren '90 stond er een puzzel in het tijdschrift van de faculteit wiskunde en informatica van de Technische Universiteit Eindhoven, alwaar ik op dat moment studeerde. Gevraagd werd om een 13 x 13 vierkant zodanig in vier stukken te verdelen, dat je met deze delen ook een 5 x 5 en een 12 x 12 vierkant kunt vormen. Met de hand vond ik een oplossing, en ik raakte zo geboeid door het vraagstuk dat ik een computerprogramma schreef dat hielp meer oplossingen te vinden. Het programma leverde verschillende leuke oplossingen en ik besloot om systematisch alle oplossingen op te sporen voor zowel het bovengenoemde probleem als voor 8 x 8 + 15 x 15 = 17 x 17. Daarbij keek ik alleen naar oplossingen waarbij de stukken niet gespiegeld mogen worden. Tevens ontdekte ik dat de oplossingen vaak op een algemeen idee terug te voeren waren, waarmee je ook vierkanten met andere afmetingen kon opdelen. Uiteindelijk leverde dit mij 29 formules die ieder een oneindige reeks van dissecties beschrijven.

## Pythagoreïsche drietallen

Drietallen zoals (3, 4, 5) en (5, 12, 13) noemen we *Pythagoreïsche drietallen*. Het zijn gehele getallen die volgens de stelling van Pythagoras kunnen optreden als de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek. Oftewel, gehele getallen $a$, $b$, $c$ waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$.

Omdat (3, 4, 5) een Pythagoreïsch drietal is, zijn bijvoorbeeld (6, 8, 10) en (9, 12, 15) het ook. We noemen (3, 4, 5) een *priem-*

**Figuur 1**
De dissecties $t_6$ voor $k = 1$ en $n = 1$ (boven), $n = 2$ (midden) en $n = 3$ (onder)





*drietal*, omdat het niet de uitvergroting is van een ander drietal.

Een bekende stelling zegt dat er oneindig veel Pythagoreïsche priemdrietallen zijn. Met de onderstaande formule zijn die allemaal te vinden.*

*Kies gehele getallen $k$ en $n$, met $k$ positief oneven en $n$ niet negatief. Neem dan*

$$a = k^2 + 2k(n+1),$$

$$b = \frac{a^2 - k^4}{2k^2} = 2(n+1)(k+n+1),$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

*dan is $(a, b, c)$ een Pythagoreïsch priemdrietal.*

Kies je bijvoorbeeld $k = 1$ met $n = 0$, dan krijg je het 'kleinste' drietal $(3, 4, 5)$. En neem je bijvoorbeeld $k = 1$ en $n = 3$, dan krijg je $(9, 40, 41)$.

## Oneindige series

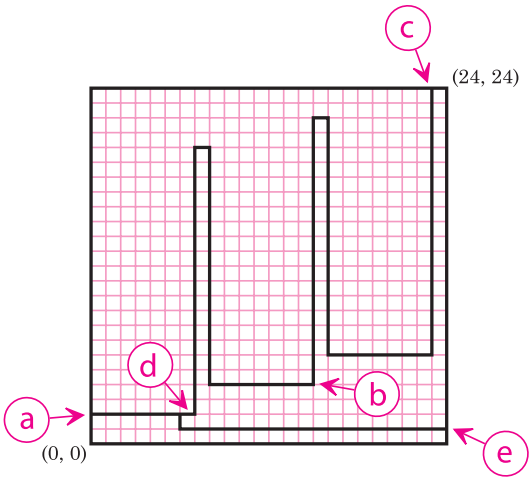
Veel van de dissecties die ik vond, bleken na enige aanpassing ook toepasbaar op grotere Pythagoreïsche priemdrietallen. Aldus waren zij de eerste in een oneindige serie dissecties. In figuur 1 is een voorbeeld te zien van het begin van zo'n serie ($k = 1$ en $n = 1, 2, 3$). Bekijk de dissecties en het zal je weinig moeite kosten de volgende dissectie in de serie te bedenken, voor het drietal $(11, 60, 61)$ (dat is het geval $k = 1$ en $n = 4$).

Elke serie die ik vond, legde ik vast met een formule. Deze serie heb ik vastgelegd met de formule $t_6$, die luidt:

$t_6$ = `(0,2)[nRaUc-aR1Dc-a-2]`
`RaUc-a(b,1)Lc-aU1.`

Ik zal nu uitleggen hoe je deze formule moet lezen. Op de website van *Pythagoras* vind je alle 29 formules.

**Figuur 2**
Dissectie van het 24 x 24 vierkant volgens formule $t_6$




Elke formule geeft aan hoe het $b$ x $b$ vierkant moet worden opgesplitst. In het $b$ x $b$ vierkant gebruiken we coördinaten, waarbij onderaan links $(0, 0)$ is en bovenaan rechts $(b, b)$.

Iedere tekenformule begint met een start–coördinaat, gevolgd door een aantal tekenbewerkingen. Iedere keer dat je weer een coördinatenpaar in de formule tegenkomt, ga je met je potlood naar dat betreffende punt. Verder voer je alle tekenbewerkingen uit in de volgorde zoals je ze tegenkomt, zonder je potlood van het papier te halen.

Laten we bijvoorbeeld $k = 1$, $n = 2$ nemen. Dan krijgen we $a = 7$, $b = 24$ en $c = 25$. Vul die waarden nu in bij $t_6$, dan krijgen we de tekeninstructie:

`(0,2)[2R7U18R1D16]R7U18(24,1)L18U1.`

De `R`, `L`, `U` en `D` in de formule staan voor de richtingen waarin je moet tekenen, waarbij `R` voor rechts, `L` voor links, `U` voor omhoog ('up') en `D` voor omlaag ('down') staat. Direct achter de letter staat dan het aantal hokjes dat je in die richting moet gaan.

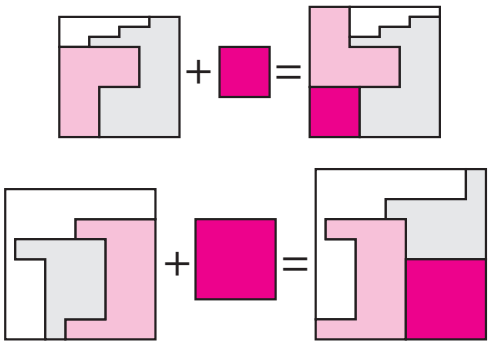
De rechte haak staat voor het begin of einde van een herhaling van twee of meer tekenbewerkingen. Direct na `[` volgt altijd een getal. Dat is het aantal maal dat er herhaald dient te worden.

Begin dus bij $(0, 2)$ en voer twee keer de serie uit: $7$ naar rechts, $18$ omhoog, $1$ naar rechts, $16$ omlaag. Na die twee keer zit je in het punt $(16, 6)$. Dan zijn we klaar met het gedeelte tussen de haken. Rest ons het gedeelte

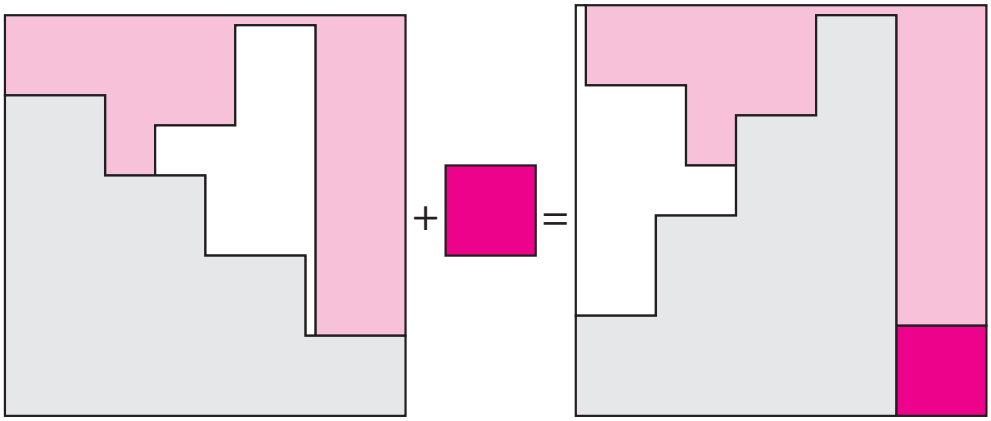
`R7U18(24,1)L18U1.`

We gaan vanuit $(16, 6)$ nu dus $7$ naar rechts en $18$ omhoog. Op dat moment botsen we op de bovenrand van het vierkant. In de formule zijn we aangeland bij $(24, 1)$; haal je potlood van het papier, ga dus naar $(24, 1)$ en teken vandaar tenslotte $18$ naar links en $1$ omhoog. Het resultaat zie je in figuur 2. Met de drie stukken die zijn ontstaan, en het $7$ x $7$ vierkant, kun je nu inderdaad een $25$ x $25$ vierkant leggen, zie figuur 1 (midden).

**Figuur 3** Twee voorbeelden van oplossingen die geen begin zijn van een oneindige serie dissecties



**Figuur 4**
*Beeld op Paaseiland,* (9, 40, 41)



De volgende dissectie in de serie krijgen we door nu $k = 1$, $n = 3$ te nemen. Dat levert een dissectie voor het drietal (9, 40, 41) op. Met $k = 1$, $n = 1$ krijgen we een dissectie voor het drietal (5, 12, 13), die ik tevoren met de computer gevonden had.

## Niet altijd een serie

De serie $t_6$ leidde ik af uit een oplossing voor (5, 12, 13). Overigens bleken niet alle oplossingen het begin van een oneindige serie dissecties. In figuur 3 zie je twee dissecties die ik niet wist te generaliseren voor grotere priemdrietallen.

## Bijzondere dissecties

Aan enkele fraaie en elegante dissecties heb ik namen gegeven. In de $t_6$-serie deed $k = 1$, $n = 3$ (zie figuur 1) mij denken aan een *fabriek*. Om je een indruk te geven van de veelheid aan mogelijkheden, behandel ik nog enkele voorbeelden.

*Beeld op Paaseiland.* De derde formule (ik begin met $t_0$) in mijn lijst luidt

$t_2$ = `(0,c-a)[nRa+1Da-1]`
`Ra+1(b-a,a-1)Ub-a[n:2La-1Da+1]`
`Ln-en-e+1Lea-eDen+2e.`

Hierin komt ook het getal $e$ voor. Wanneer $n$ even is, geldt $e = 0$, anders geldt $e = 1$. Het symbool : in deze formule staat voor delen zonder rest, naar beneden afronden dus.

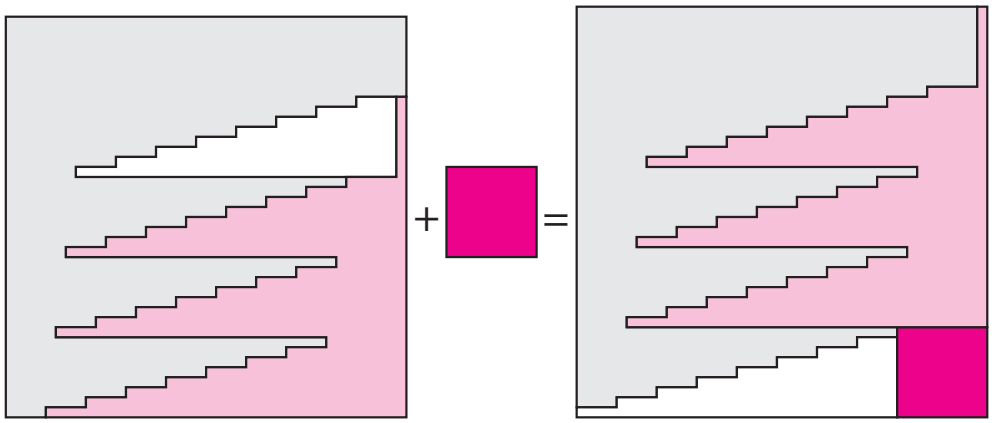
Neem je $k = 1$, $n = 3$, dan krijg je de dissectie in figuur 4, die ik de naam *Beeld op Paaseiland* gaf.

*Dennenboom.* De enige formule met herhalingen binnen een herhaling is:

$t_9$ = `(n+1,0)[pU1[a-2Rn+1U1]Lan]`
`[a-1U1Rn+1](b,c-a)`
`[n+1-pL1Da-1]Ln+2.`

In deze formule komt ook een extra variabele $p$ voor; $p$ moet geheel zijn en in deze formule gekozen worden tussen 0 en $n + 1$. Neem je $n = 3$, $p = 3$, dan krijg je de *dennenboom*, zie figuur 5.

**Figuur 5**
*Dennenboom,* $t_9$ met $n = 3$, $p = 3$



## Om zelf te proberen

Nog drie opmerkelijke dissecties, om zelf te proberen:

*Man met punkhaar.* Neem $n = 3$, $p = 1$ in

$t_{13}$ =
```
(0,1)Ra-2[p:2U1Ra-1UaL2]
[n-p+1U1Ra-2Ua-2La]
U1[n-p+1Ra-2UaR1Da-2]
[n-p+1RaD1La-2Da-2]
Ra[p:2Da-1R1U2Ra]
(0,b-a+2)R1[p:2Da-1RaU2R1]Da-2.
```

*Soepopscheplepel.* Neem $k = 5$, $n = 0$ in

$t_{24}$ =
```
(2k,0)[k:2U2R2k]
UbLa-4k(a-3k,k-1)U2k
La-4k[k:2+1U2R2k].
```

Hier is $b$ het kleinste, en slaat de verdeling dus op het $a$ x $a$-vierkant.

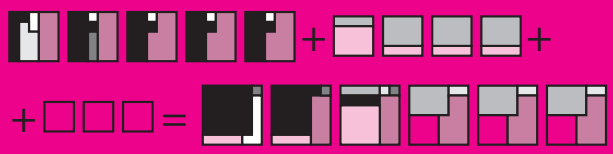
*Volgezogen mug (zonder vleugels).* Neem $k = 13$, $p = 4$ in

$t_{28}$ =
```
(2k,0)U2[k:2R2kU2]
La-4k[p:2UbRb-4]R2
[k:2-p+1U2R2k]
[p:2-1Db-4Rb]
(a-3k,k-1)La-4k[p:2UbRb-4]
[k:2-p+1U2kL2][k:2-p+1U2R2k]
U2R2[k:2-p+1D2kR2].
```

Hierin staat : weer voor delen met afronding naar beneden. Ook in dit geval is $b$ weer kleiner dan $a$, en slaat de verdeling dus op het $a$ x $a$-vierkant.

## Verder

Op de website van *Pythagoras* vind je al mijn formules. Ook kun je zelf gaan zoeken naar dissecties. Er zullen nog vele mogelijkheden zijn buiten de 29 series die ik gevonden heb.
Jouw school kan mij uitnodigen om langs te komen om wat meer over mijn onderzoek te vertellen en om enkele ingewikkelde modellen van hout en karton te demonstreren. Het e-mail adres dat ik hiervoor heb aangemaakt is: trinitypuzzle@hotmail.com.



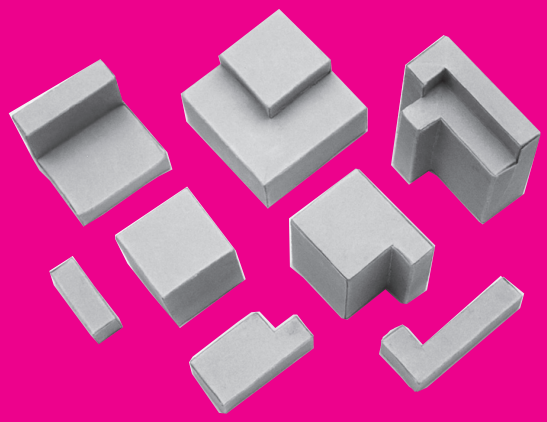
**Figuur 6** Een kubus-dissectie

## Ruimtelijke dissecties

Wat mij ook bijzonder bezighield, was het idee van ruimtelijke dissecties. Ik kon me herinneren dat ik al spelend met mijn rekenmachientje een keer had ontdekt dat $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Ik heb inmiddels een flinke hoeveelheid kubusdissecties gevonden met acht stukken voor $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. In sommige van die dissecties doen zich interessante volgorde-, schuif- en draaiproblemen voor wanneer je de dissectie als puzzel uitvoert.

In figuur 6 zie je de eerste 3D-dissectie, deze vond ik trouwens handmatig. Het meest linker vierkant bevat telkens de onderste laag, het tweede vierkant de laag direct daarboven, etcetera. Deze puzzel valt als los zand uit elkaar, in tegenstelling tot vele puzzels die ik met mijn computer gevonden heb.



* Een bewijs van de formule voor Pythagoreïsche priemdrietallen is te vinden op de website van *Pythagoras*. In het boekje *Speeltuin van de wiskunde* (red. Bart de Smit en Jaap Top) schreef Peter Stevenhagen een artikel over de rol van Pythagoreïsche priemdrietallen in de laatste stelling van Fermat.

## Oplossingen Kleine nootjes nr. 2

**Canonieke vorm**
DEEGHOUW.

**Palindroom**
GAD NEE, POEZIE,
ZEI ZE OP EEN DAG.

**Anagram**
HERENTALS en HALSTEREN, of DIEMENBRUG en MUIDERBERG.

**Getal-associatie**
'1492 Columbus ontdekt Amerika' en '13 slagen bij groot slem'.

**Gemeenschappelijk**
De eerste zes namen typ je door alleen de bovenste rij letters van een toetsenbord te gebruiken.

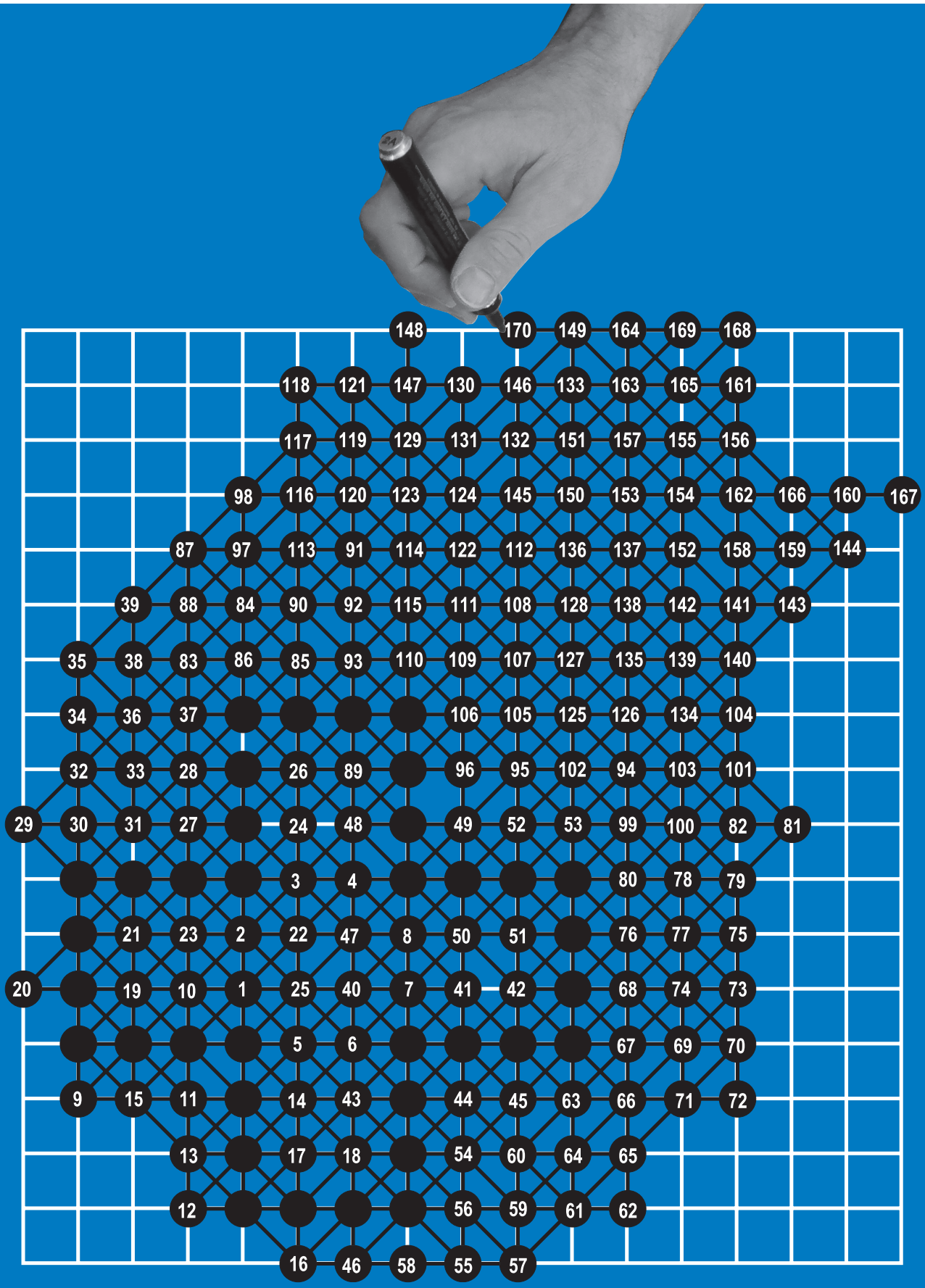


## Decimalen van $\pi$

Om de decimalen van $\pi$ te onthouden bestaan rijmpjes, in vele talen.
Daarin geeft het aantal letters per woord steeds de decimaal aan. Bekend is het Engelse *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!*
In het Nederlands hebben wij het onderstaande gedicht dat 31 decimalen geeft, en dat wij in 1986 ook al eens publiceerden.

*Wie $\pi$ voor 't eerst optekende*
*en daarna nacht aan nacht geplaagd berekende,*
*schreef natuurlyk vel na vel.*
*Nochtans, arme fanaat*
*(ja, ietwat laat)*
*met een computer kun je sneller benaderen, jawel!*

$\pi \approx$
3,14159
2653589
79323
846
264
33832795




44ste JAARGANG NUMMER 3