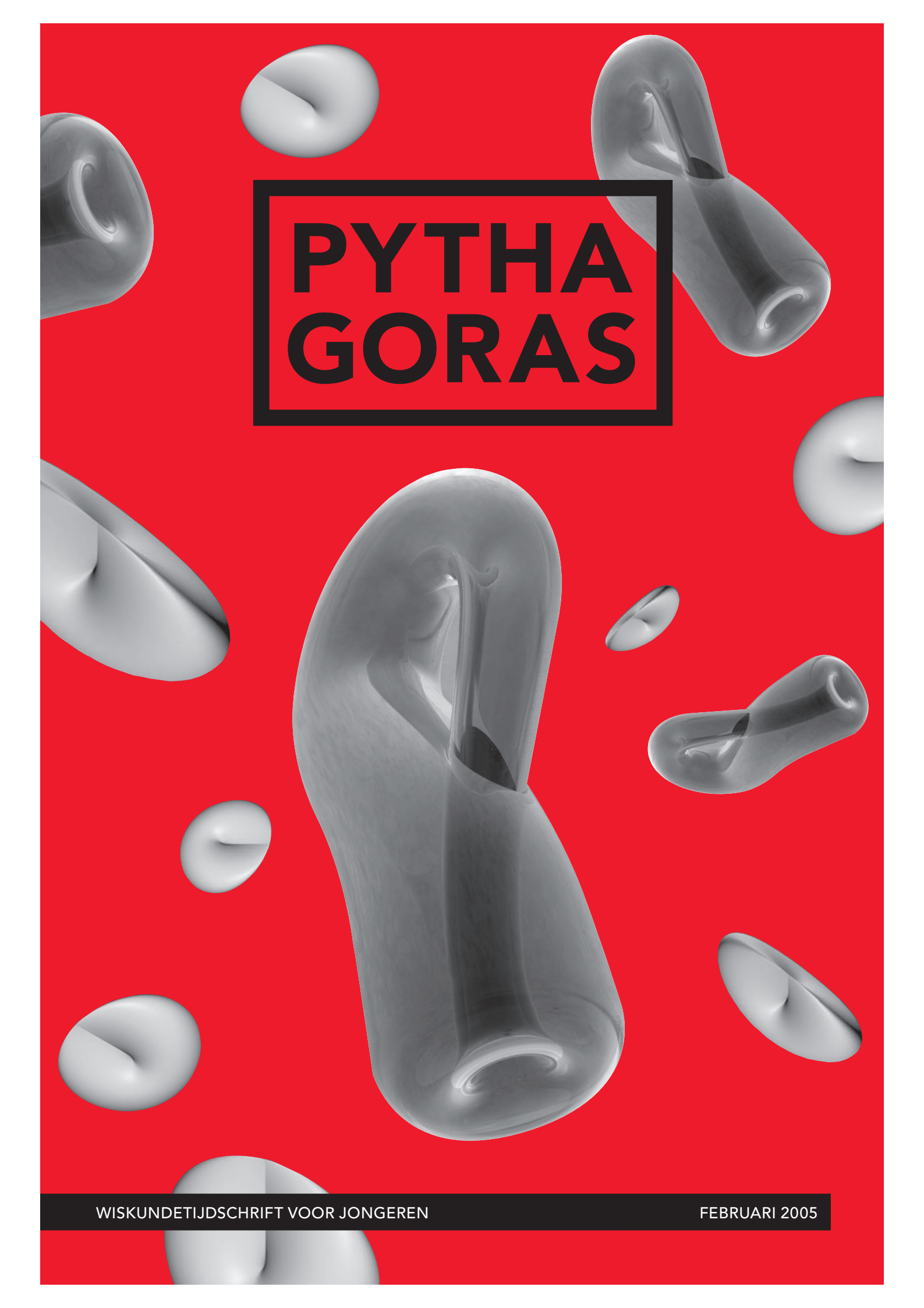


The background is a solid, vibrant red. Scattered across this background are several translucent, grey, three-dimensional geometric shapes. These shapes are primarily tori (donut-like forms) and elongated, curved tubes. Some are small and simple, while others are more complex, showing internal structures or multiple lobes. They are positioned at various angles, creating a sense of depth and movement. In the center, a black rectangular frame contains the title text.

PYTHA GORAS

PYTHA GORAS

44ste jaargang nummer 4
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom,
René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster
Timon Idema

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden. Telefoon 071 5277 121, fax
071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41,
7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland),
€ 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@its.tudelft.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. L.A.M. van den Broek, docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen (vdbroek@math.ru.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), drs. J.S. Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag (j.s.groot.member2@freeler.nl), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), W. Joris, auteur van '100 Strategic Games for Pen and Paper' (walter.joris1@pandora.be), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), E. Timmermans, onderzoeker van dissecties en rotaties in dissecties (trinitypuzzle@hotmail.com), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag

De fles van Klein en het projectieve vlak (figuren gemaakt door Rinus Roelofs, in Rhinoceros)

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met 1 rondje ^o zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met 2 rondjes ^{oo} heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met 3 rondjes ^{ooo} gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:



TU/e



TU Delft





1

INHOUD

2 – 3	Kleine nootjes	24 – 26	Christiaan Huygens, de mathematisering van de werkelijkheid
4 – 5	Uitslag Priemgetallen- prijsvraag	27	Pen en papier
6 – 9	Eenzijdige oppervlakken	28 – 29	Pythagoras Olympiade
10 – 11	Topologie met de handen	30 – 31	Problemen – Oplossingen
12 – 15	Driedimensionale dissecties	32 – 33	Journal
16 – 19	Het kleuren van kaarten	33	Oplossingen Kleine nootjes nr. 3
20 – 23	Van de stoep af		

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

2



Vervoeren

Een last wordt over 200 meter vervoerd door hem over cilindervormige palen te laten rollen. Hoeveel meter wordt al lopende afgelegd door de twee mannen wier taak het is om telkens samen de achter vrijkomende palen naar voren te brengen?

Glasplaat

Een glasplaat met een dikte van 2 centimeter laat 81% van het opvallende licht door. Hoeveel procent laat zo'n plaat met een dikte van 1 centimeter door?



Treintraject

Op het traject AB rijden twee treinen met verschillende snelheden. Uit A vertrekt een trein naar B en uit B vertrekt op hetzelfde moment een trein naar A . Ze passeren elkaar in C . Als de trein uit A vijf minuten vertraagd is, ontmoeten ze elkaar twee kilometer van C . Waar ontmoeten ze elkaar als de trein uit B vijf minuten vertraging heeft?



Leeftijden

Vorig jaar was mijn moeder twee keer zo oud als ik. Dit jaar bestaan onze leeftijden uit dezelfde cijfers, maar in omgekeerde volgorde. Hoe oud is mijn moeder en hoe oud ben ik?

Dieren

Emi heeft een aantal dieren. We weten het volgende: precies 2 dieren zijn geen zoogdieren, precies 3 dieren zijn geen honden, precies 4 dieren zijn geen katten en precies 5 dieren zijn geen papegaaien. Hoeveel honden en hoeveel katten heeft Emi?



Uitslag

Priemgetallenprijsvraag

door **René Swarttouw** en **Matthijs Coster**

4 De priemgetallenprijsvraag is zonder meer een groot succes geworden. De redactie ontving maar liefst 135 inzendingen. Bij 129 inzendingen waren voor alle getallen van 1 tot en met 100 oplossingen gevonden. Het vinden van alle mogelijke oplossingen boven de 100 werd als een stuk lastiger ervaren. Dit lukte uiteindelijk ongeveer de helft van de deelnemers. Het moeilijkst bleken 185 en 189. Die vermelden we hieronder:

$$185 = 5 \times (7 \times 11 - 3) / 2$$

$$189 = 7 \times (2 \times (3 + 5) + 11)$$

We hebben besloten om de andere oplossingen te verstrekken via internet: kijk op www.pythagoras.nu. Mocht je niet over het internet beschikken, stuur dan een briefje aan de redactie.

Op drie manieren gingen de deelnemers aan de slag. De meesten probeerden de afzonderlijke sommetjes te maken. Dat was voor 1 tot en met 100 goed te doen, maar daarboven waren voor zeven getallen, namelijk 145, 149, 172, 173, 181, 193 en 197,

de opgaven niet te maken. Dat maakte het extra spannend! Anderen schreven een programma in C, Java, Excel of nog een andere taal. Het is zeker niet eenvoudig om een dergelijk programma te schrijven. Dit bleek ook uit het feit dat diverse programmeurs niet op 185 of 189 uitkwamen. Tenslotte bleken er op internet programmaatjes in omloop te zijn waarmee deze sommetjes opgelost konden worden. Als redactie hebben we uiteraard meer waardering voor de inzenders die zelf de sommetjes hebben opgelost, of die daar een eigen computerprogramma voor schreven.

De prijsvraag zette een aantal inzenders aan tot verder onderzoek. Zo hadden diverse inzenders gekeken of de zeven opgaven die niet gemaakt kunnen worden, wel kunnen met 'plakken' (dan maak je van 2 en 11 het getal 211), machtsverheffing en het gebruik van binomiaalcoëfficiënten. We geven hieronder een aantal ingezonden oplossingen:

Varianten

$$145 = 5^3 + 2 + 7 + 11$$

$$149 = 2^3 \times (7 + 11) + 5$$

$$172 = (11 + 7 - 5)^2 + 3$$

$$173 = 211 - 5 \times 7 - 3$$

$$181 = 2^{7-3} \times 11 + 5$$

$$193 = \left(\frac{(11 - 7) \times 5}{2} \right) + 3$$

$$197 = 211 - 7 \times (5 - 3)$$

Uitgebreid onderzoek werd verricht door Wilke van der Schee, waarvoor zij een extra prijs ontvangt. Zij ging na dat de getallen 109, 134, 139, 142, 151, 157, 159, 163, 164, 175, 177, 185, 187, 189 en 199 op precies één manier te schrijven zijn als een som. (Uiteraard moet je dan $3 + 5$ en $5 + 3$ als gelijkwaardig beschouwen.) Dit zijn precies de getallen waarmee de inzenders de grootste moeite hadden. Zij stuurde tevens diverse grafiekjes en andere wetenswaardigheden in, die we op onze site hebben geplaatst. Eén wetenswaardigheid willen we je niet onthouden. Ze vond dat er voor 165 een oplossing bestaat met een – en verder alleen /, namelijk

$$165 = 5/(2/3 - 7/11).$$

Wij vinden dit een prachtige oplossing. Daarnaast heeft een aantal inzenders gekeken wat er boven 200 gebeurt. Er zijn steeds minder oplossingen. De grootste oplossing is

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

De winnaars

Eerste prijs: Klas 2 gymnasium van Scholengemeenschap Sophianum te Gulpen.

Tweede prijs: Klas 1e van de Philips van Horne Scholengemeenschap te Weert.

Extra prijzen: Wilke van der Schee uit Wageningen en Wouter Verbeke uit Gontrode (België).

Extra schoolprijzen: Klas havo 4g van het Dr. Nassau College te Assen, klas G2c van het Stanislas College Westplantsoen te Delft en vijf klassen van het Katholiek Secundair Onderwijs Glorieux te Ronse (België).

Enkele reacties van deelnemers

"Toen ik thuis kwam heb ik deze vraag ook gelijk aan iedereen gesteld. Diezelfde avond zaten we met z'n allen sommetjes te maken."
– Dion Koeze

"Het was in elk geval een maandje heerlijk hoofdrekenen. Bedankt voor de puzzel."
– Margreet Sanders

"De leerlingen zijn één week bezig geweest en konden op school hiermee een Sinterklaasverrassing winnen (de P van Pythagoras)."
– Gymnasium Apeldoorn

"Toen ik een aantal leerlingen die zich dreigden te gaan vervelen de prijsvraag voorlegde, kon ik niet vermoeden wat ik daarmee had losgemaakt."
– Van der Capellen SG, Zwolle

"Met gejuich werd elke nieuwe oplossing ontvangen."
– Vrije School, Den Haag

"De hele klas heeft er een dag aan gerekend en enkele fanatiekelingen zijn nog weken doorgegaan."
– SG Sophianum, Gulpen

"De vellen waren op A3-formaat en hebben een aantal weken in mijn lokaal gehangen; al mijn leerlingen konden hierop hun bijdrage schrijven."
– Mendelcollege, Haarlem

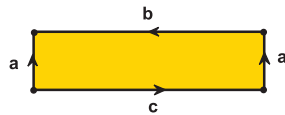
"Elke week druppelden er weer een paar oplossingen binnen."
– Vlaardingse OSG

"Bij het verzamelen van de resultaten heb ik voorrang gegeven aan vondsten die alleen de bewerkingen +, – en $\times$ bevatten. Dat waren ze bijna allemaal. We hebben slechts één getal gevonden dat alleen maar lukte met een deling, namelijk 185."
– Dr. Nassau College, Assen

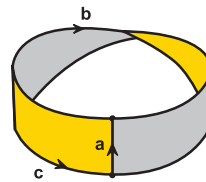
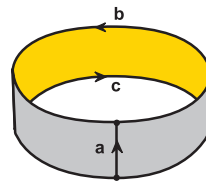
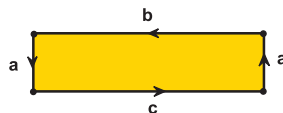
Een band, zoals een polsband of een haarband, is een oppervlak dat twee kanten heeft: een binnen- en een buitenkant. Er zijn ook oppervlakken die maar één kant hebben. In de vorige *Pythagoras* maakten wij kennis met zo'n eenzijdig oppervlak, de Möbiusband. We stelden toen vast dat hij wonderlijk genoeg één doorlopende rand heeft. In dit artikel komen twee oppervlakken met nog vreemdere eigenschappen aan de orde, de *fles van Klein* en het *projectieve vlak*: zij zijn éénzijdig en hebben helemaal geen rand.

°Eenzijdige oppervlakken

figuur 1



figuur 2



6

door J.M. Aarts

Band en Möbiusband

Neem een lange strook papier en plak de uiteinden ervan gewoon aan elkaar, dan krijg je een band (een riem of ceintuur om je broek op te houden), zie figuur 1, rechts. Om alle eigenschappen van de riem, die dadelijk aan de orde zullen komen, met eigen ogen te zien, kun je de band het beste van transparant papier maken. In figuur 1 is links precies aangegeven hoe je de band maakt. Iedere zijde van de rechthoek is een gericht lijnstuk (een pijl) en bij iedere pijl staat een letter. Als bij twee zijden dezelfde letter staat, worden die zijden op elkaar geplakt en wel zó dat de pijlen dezelfde kant op wijzen. Dit procédé is ook toegepast in het artikel 'Van bouwplaat tot oppervlak' in het vorige nummer. Wanneer we nu de lange strook eerst een halve slag draaien en pas daarna aan elkaar plakken, dan ontstaat de Möbiusband, zie figuur 2, rechts. In het linker deel van figuur 2 zie je dat de zijde a

twee keer voorkomt, en wel met tegengestelde richtingen. Daarom moet je de strook een halve slag draaien voordat je de zijden a op elkaar plakt.

Eénzijdig of tweezijdig

Nu iets over het verschil tussen de gewone band en de Möbiusband: de gewone band is *tweezijdig*, terwijl de Möbiusband *éénzijdig* is. Wat bedoelen we daarmee? De stroken, waaruit de band en de Möbiusband zijn gemaakt, hebben een onder- en een bovenkant. Dat kunnen we aangeven door op beide kanten verschillende kleuren aan te brengen; in de figuren 1 en 2 zie je links natuurlijk maar één kleur. Bij de gewone band zie je in figuur 1, rechts, dat de twee kleuren laten zien dat dit oppervlak twee kanten heeft. Daarom zeggen we dat de gewone band *tweezijdig* is. Maar bij de Möbiusband zien we in figuur 2 dat de kleuren met elkaar botsen. Sterker nog, als je de Möbiusband

met twee kleuren probeert te kleuren, dan zullen de kleuren altijd ergens tegen elkaar komen, hoe goed je ook je best doet. Daarom zeggen we dat de Möbiusband *éénzijdig* is.

Oriënteerbaarheid

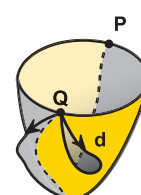
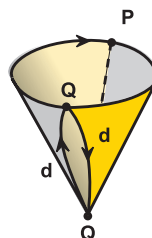
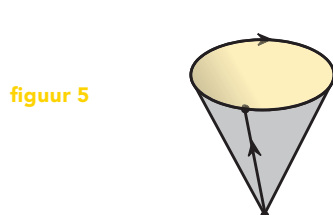
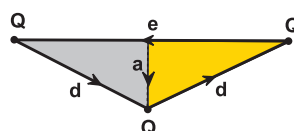
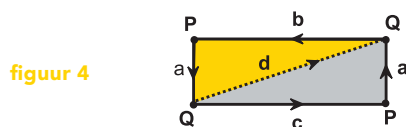
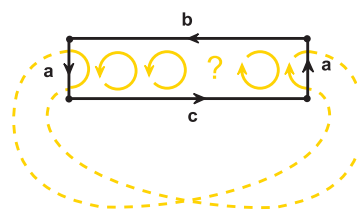
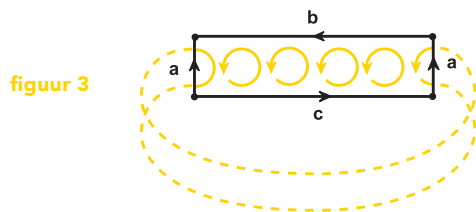
Een andere eigenschap die hier nauw mee samenhangt, is *oriënteerbaarheid*. Op een oriënteerbaar oppervlak is het mogelijk een draairichting (oriëntatie) af te spreken die over het hele oppervlak geldt. We geven de draairichting op een bepaalde plaats aan met een gericht cirkeltje, oftewel een cirkeltje met een pijltje erop. Om de *oriënteerbaarheid* van een oppervlak te onderzoeken, teken je het vol met gerichte cirkeltjes die steeds dezelfde kant moeten opdraaien als hun burens. Lukt dat, dan is het oppervlak oriënteerbaar. Hier zie je trouwens waarom het handig is om de oppervlakken te maken uit transparant papier. Zo besef je beter dat de gerichte cirkeltjes *in* het oppervlak liggen, en niet *er bovenop*. In figuur 3 zie je dat het bij de band zonder slag *wel* lukt om op deze wijze gerichte cirkeltjes aan te brengen, maar bij de Möbiusband *niet*: daarom zeggen we dat de gewone band *oriënteer-*

baar is, maar dat de Möbiusband *niet-oriënteerbaar* is. Het blijkt dat de tweezijdige oppervlakken altijd oriënteerbaar zijn, en de éénzijdige niet-oriënteerbaar.

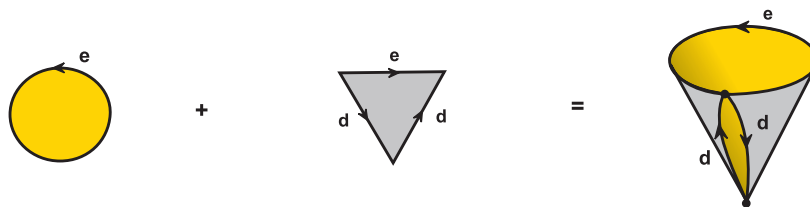
De kruismuts

We bestuderen nu de éénzijdige oppervlakken met de techniek van knippen en plakken. In figuur 4 zie je hoe je de Möbiusband door knippen en plakken een heel andere vorm kunt geven. In de nieuwe vorm noemen we het oppervlak een *kruismuts*. De Möbiusband en de kruismuts zijn natuurlijk topologisch hetzelfde oppervlak. Maar het verschil zit hem daar in dat het oppervlak op verschillende manieren in elkaar gezet wordt en op verschillende manieren in de ruimte wordt gelegd. De kruismuts lijkt heel veel op de gewone muts, zie figuur 5 links, maar bij de kruismuts moeten de randen *d* kruislings op elkaar geplakt worden; in de ruimte kun je dat alleen doen met *zelfdoorsnijding* van het oppervlak, zie figuur 5, midden en rechts.

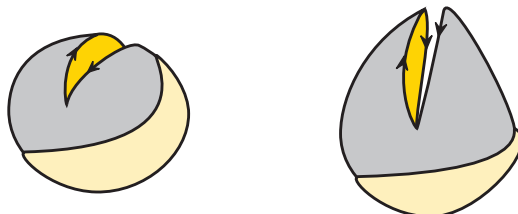
7



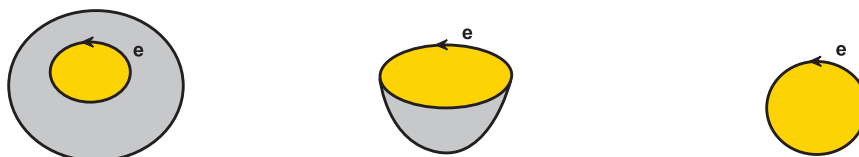
figuur 6



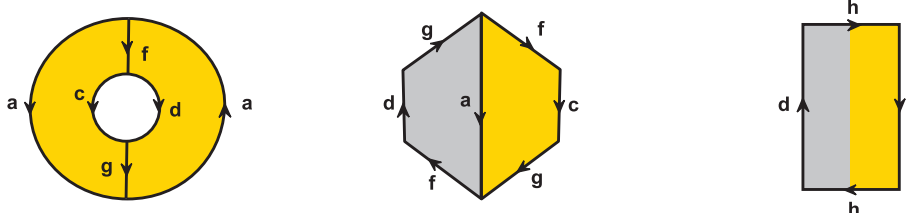
figuur 7



figuur 8



figuur 9



8

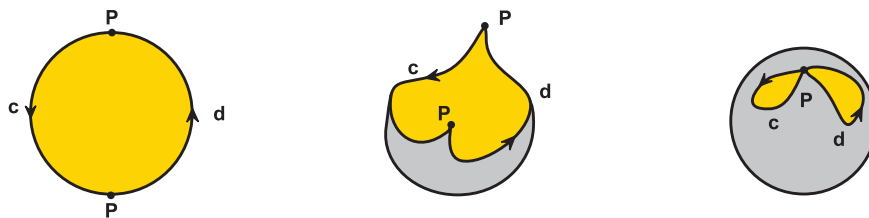
kruisemuts. Het oppervlak dat ontstaat kun je alleen maar in de ruimte leggen met zelfdoorsnijding, zie figuur 7. Dit oppervlak wordt het *projectieve vlak* genoemd, zie ook de figuren op het omslag. In figuur 8 brengen we in herinnering dat een cirkelschijf topologisch niet anders is dan een bol met één gat. Het zojuist verkegen resultaat kunnen we dus ook als volgt formuleren: het projectieve vlak ontstaat door op een boloppervlak met één gat een kruisemuts te plakken. En als je nu uit het projectieve vlak een cirkelschijf wegsnijdt, wat komt er dan? Dan moet je natuurlijk een Möbiusband (of kruisemuts) krijgen, zie figuur 9.

De fles van Klein

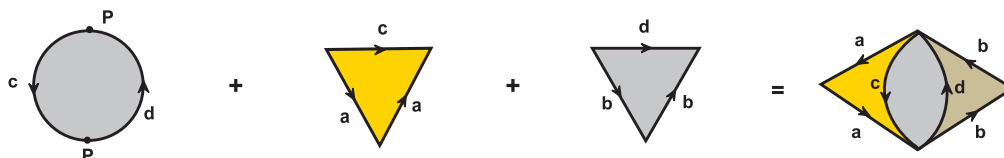
We onderzoeken nu wat er gebeurt als we een bol met twee gaten nemen en op elk van die gaten een kruisemuts plakken. In figuur 10 brengen we in herinnering hoe je een bol met twee gaten schematisch kunt tekenen. Dan zie je in figuur 11 wat je krijgt als je op

ieder gat een kruisemuts plaatst. In figuur 12 is het resultaat door knippen en plakken omgewerkt tot een strook; het resultaat lijkt heel veel op de bouwplaat van de torus. Net als bij de torus kunnen we eerst een cilinder maken door de lange zijden op elkaar te plakken, zie figuur 13. Maar nu kunnen we de kopse kanten niet zo maar op elkaar plakken, dat klopt niet met de oriëntatie van de zijden e . Met zelfdoorsnijding ziet het eruit als in figuur 13, rechts. De zo ontstane figuur wordt de *fles van Klein* genoemd, die ook op het omslag is afgebeeld. Omdat het oppervlak éénzijdig is, heeft de fles van Klein geen binnen- en buitenkant; je kunt er dus geen water in meenemen. Overigens berust de aanduiding 'fles' op een verwisseling van de Duitse woorden 'Fläche' (vlak) en 'Flasche' (fles). Uit de schets in figuur 14 kun je zien dat je de fles van Klein ook kunt krijgen door twee Möbiusbanden langs hun cirkelvormige rand aan elkaar te plakken.

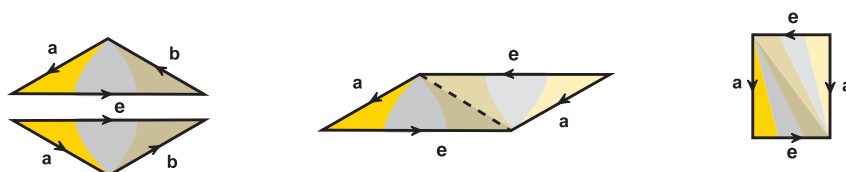
figuur 10



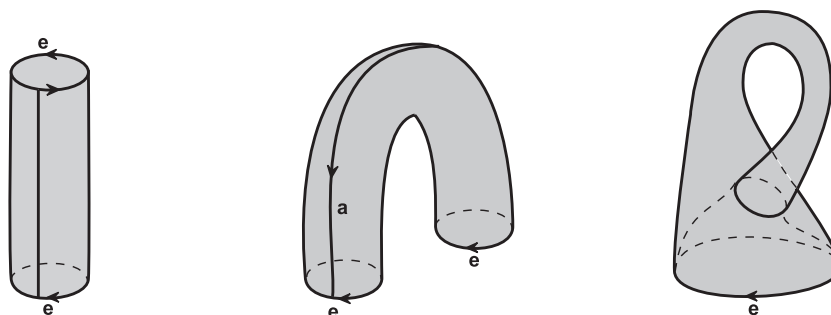
figuur 11



figuur 12



figuur 13

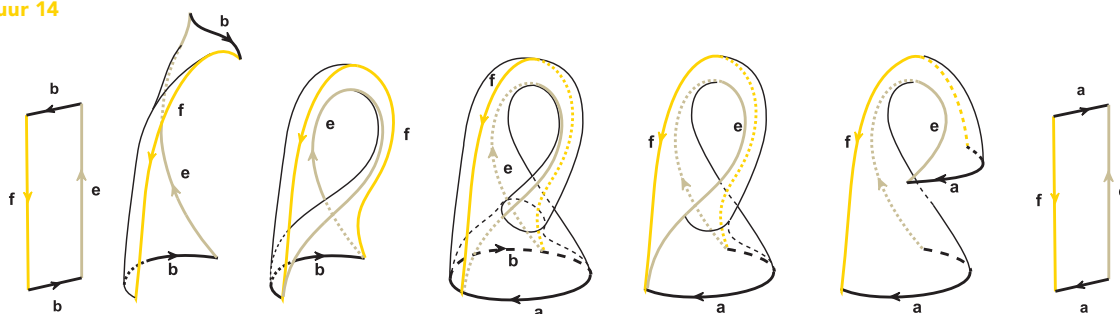


Nog andere oppervlakken?

In het artikel 'Van bouwplaat tot oppervlak' hebben we een stelling genoemd waarin een overzicht wordt gegeven van alle gesloten oppervlakken, dat zijn de oppervlakken zonder rand. Daarin stond dat *ieder tweezijdig gesloten oppervlak de vorm heeft van een bol met een aantal gaten waarbij op ieder gat een hengsel is geplakt en dat ieder éénzijdig gesloten oppervlak de vorm heeft van een bol met een aantal gaten waarbij op ieder gat een kruismuts is geplakt*. We hebben gezien dat de bol met één gat en één kruismuts het projectieve vlak is. En dat

een bol met twee gaten en twee kruismutsen de fles van Klein is. Blijft nog de vraag: waarom zijn er geen 'gemengde' oppervlakken, half éénzijdig, half tweezijdig? Bijvoorbeeld, een bol met twee gaten waarbij op één gat een kruismuts is geplakt en op het andere gat een hengsel. Dat komt doordat de aanwezigheid van één kruismuts het oppervlak éénzijdig maakt. Door handig knippen en plakken kun je laten zien dat het aanbrengen van een hengsel, zodra er al één kruismuts aanwezig is, precies hetzelfde effect heeft als het aanbrengen van twee kruismutsen.

figuur 14



Topologie met de handen

Aflevering **4** Keren



10



1 Neem een fietsband of een zwemband die kapot mag gaan. Dit oppervlak noemen we in de topologie een *torus*. Op de torus kun je op twee manieren rond lopen: om het gat, of om de tunnel.



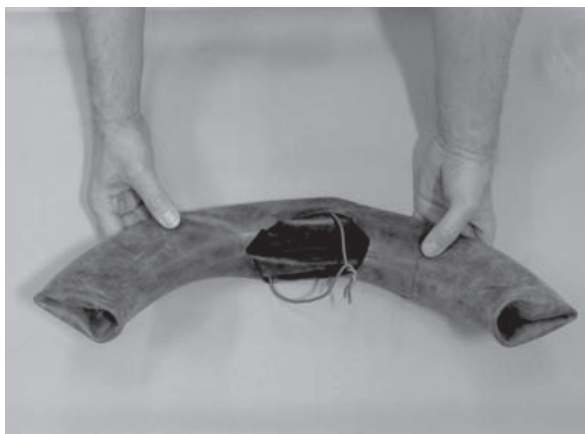
2a Knip er een gat in. Wat krijg je als je de band door het gat binnenstebuiten haalt?



2b Hier zie je het resultaat: weer een torus, maar nu erg langwerpig. Gat en tunnel zijn verwisseld!



3a Knoop tevoren een touwtje om de band ('rondom de tunnel'). Waar komt dat touwtje terecht nadat je de band binnenstebuiten keert?



3b Het touwtje komt weer rondom, maar nu 'rondom het gat'.



4a Om het binnenstebuiten keren van de band goed te volgen, maak je eerst het gat veel groter. Dan krijg je een soort armband met een bandje daaraan.



4b Keer je de zaak binnenstebuiten, dan krijg je dit.



4c Weer een torus, met een klein gat en een grote tunnel.



Met stof kun je een mooi model maken om het experiment vlot uit te voeren. Maak je nu de naden in beide richtingen even groot (dus rondom de tunnel en rondom het gat), dan lijkt het of bij het binnenstebuitenkeren er helemaal niets verandert.

Neem drie kubussen: een met ribbe 3, een met ribbe 4 en een met ribbe 5. Hun gezamenlijke inhoud is $3^3 + 4^3 + 5^3$ en dat is precies evenveel als de inhoud van één kubus met ribbe 6, immers $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Dat die inhoud overeenstemt, kun je ook laten zien door de kleinere kubussen in stukken te snijden, om met die stukken tezamen een kubus van ribbe 6 te maken. Zo'n puzzel heet een *dissectie*. Edo Timmermans laat in dit tweede artikel van zijn hand drie fraaie kubusdissecties zien.

Drie- dimensionale dissecties

door Edo Timmermans

Kubusdissecties

De drie kubusdissecties die ik zal laten zien, zijn gebaseerd op de gelijkheid $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, en betreffen dus het opsplitsen van drie kubussen met respectievelijk ribbe 3, 4 en 5. Er zijn overigens oneindig veel andere manieren om $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ in te vullen met gehele getallen, waar ook dissecties van grotere kubussen bij kunnen horen.

Kubusdissecties waarbij met drie kleinere kubussen één grotere wordt gemaakt, bestaan steeds uit ten minste acht stukken. De stukken van de kleinere kubussen zijn namelijk te kort om in de grote kubus twee hoekpunten tegelijk te bezetten. Dus in elk van de acht hoekpunten van de grote kubus zit een ander stuk.

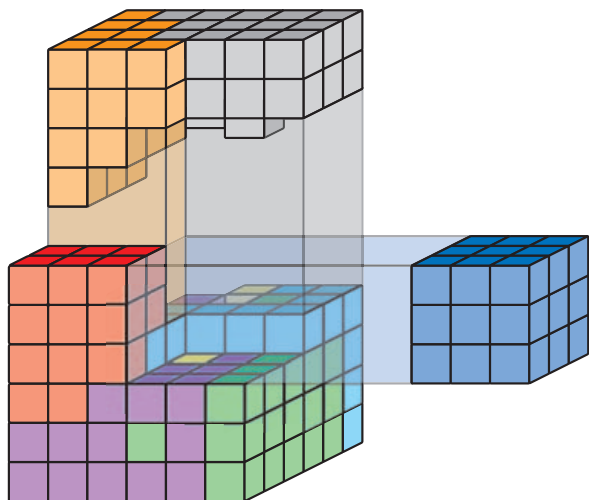
In mijn vorige artikel beschreef ik de eerste kubusdissectie die ik gevonden heb. Die dissectie vond ik nog met de hand. Al gauw echter schakelde in de computer in op zoek naar meer dissecties. Met mijn zelfgeschreven programma's kostte het weinig moeite die te vinden, blijkbaar zijn er heel veel. De meeste dissecties echter kunnen niet als een echte puzzel uitgevoerd worden, de stukken zitten vaak zozeer in elkaar gevlochten dat je ze niet uit elkaar zou kunnen halen als ze van concreet materiaal waren gemaakt.

Om dissecties te vinden die als puzzel uitgevoerd kunnen worden, en als zodanig ook interessant zijn, is het erg nuttig het zoekgebied te beperken. Van de ruim 1,7 miljoen verschillende dissecties die ik in dit gebied vond (mijn computer met een 2,4 Ghz. processor had nog ruim een maand nodig om de klus te klaren), kunnen er ruim 80.000 volledig uit elkaar schuiven als in een puzzel.

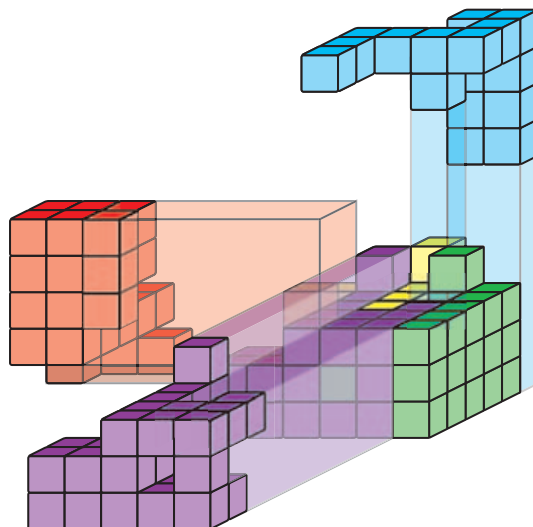
Voorwaarden

Het zoekgebied heb ik beperkt door het stellen van de volgende vier voorwaarden:

1. De 3-kubus (dat wil zeggen: de kubus met ribbe 3) vormt altijd één geheel, de 4-kubus bestaat altijd uit twee delen en de 5-kubus bestaat altijd uit vijf delen. Met deze keuze liggen de te verwachten afmetingen van de onderdelen zo dicht mogelijk bij elkaar.
2. Het *hoeksteenprincipe* houdt in dat ieder hoekpunt uit de 6-kubus ook ergens in een hoekpunt van een van de kleinere kubussen is geplaatst. Dat is een enorme beperking van het aantal mogelijkheden.
3. De 4-kubus kan maar in één richting uit elkaar. Dat maakt deze kubus optimaal interessant.
4. De twee stukjes uit de 4-kubus kunnen uit



Figuur 1a Uit de 6-kubus worden het donkerblauwe, het oranje en het grijze stuk geschoven



Figuur 1b Uit het resterende stuk worden het rode, het lichtblauwe en het paarse stuk geschoven

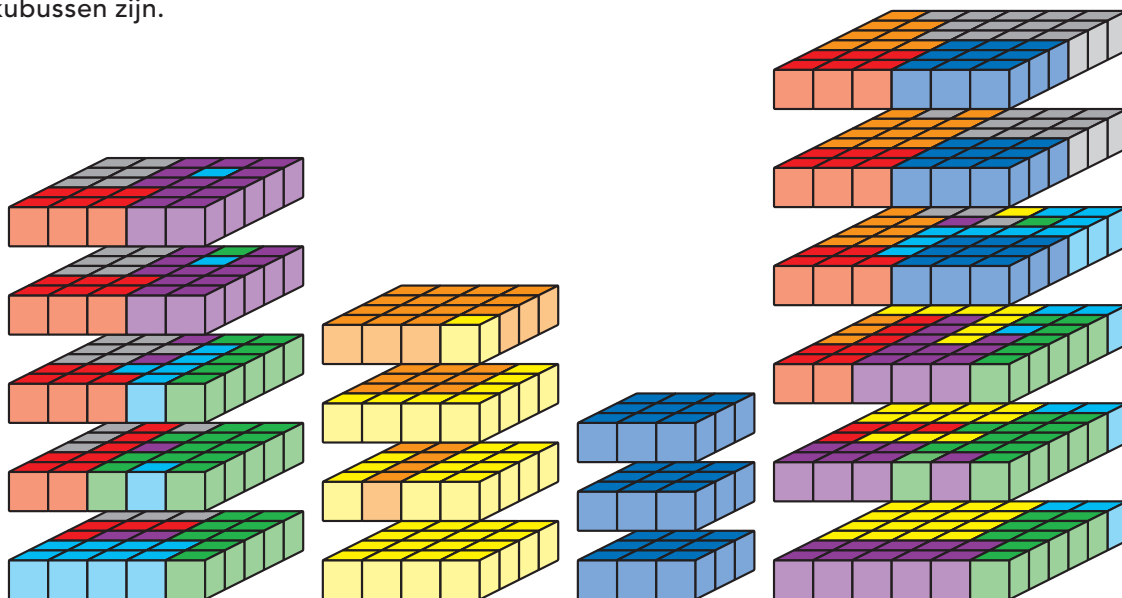
de volledige 6-kubus niet verwijderd worden zonder tenminste een ander puzzelstuk mee te trekken. Zo'n stukje kan dus niet in zijn eentje worden verwijderd wanneer het zich in de complete 6-kubus bevindt, terwijl die kubus mogelijk wel helemaal uit elkaar kan. Dat maakt de 6-kubus interessanter.

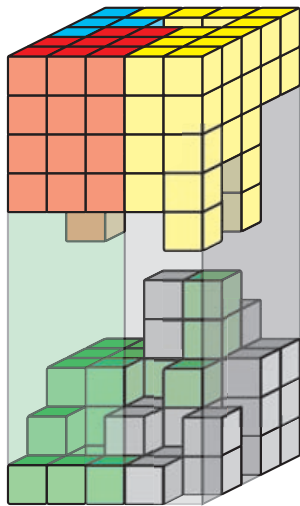
Er zijn drie soorten volgordeproblemen die een puzzel interessant kunnen maken. Dat zijn *schuifproblemen*, *draaiingen* en de aanwezigheid van een *sluitstuk*. In de eerste twee voorbeelden gaat het vooral om sluitstukken. In het tweede voorbeeld speelt bovendien een schuifprobleem. Bij het derde voorbeeld moet er gedraaid worden. De figuren onderaan deze en de volgende pagina's zijn zó gemaakt, dat álle blokjes te zien zijn. In werkelijkheid zitten de lagen natuurlijk tegen elkaar, zodat het echte kubussen zijn.

Puzzel met sluitstuk

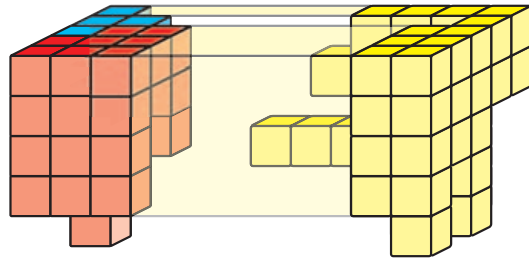
Bij de dissectie die hieronder is afgebeeld, gaat de 6-kubus als volgt uit elkaar. Het donkerblauwe stukje (de 3-kubus) zit (zoals altijd) los in de hoek. Afgezien daarvan fungeren het oranje en het grijze stukje samen als sluitstuk: zolang zij op hun plaats zitten, komt geen enkel ander stukje los. Na verwijdering daarvan naar boven toe, kunnen het oranje en het grijze stukje uit elkaar en kan het rode stukje er naar links uit, zie figuur 1a.

Vervolgens gaat het lichtblauwe stukje aan de bovenzijde eruit, dan het paarse stukje aan de voorkant en tenslotte kunnen het gele en het groene stukje uit elkaar naar links en rechts, zie figuur 1b. Probeer zelf maar of je kunt vinden hoe de 5-kubus uit elkaar kan.

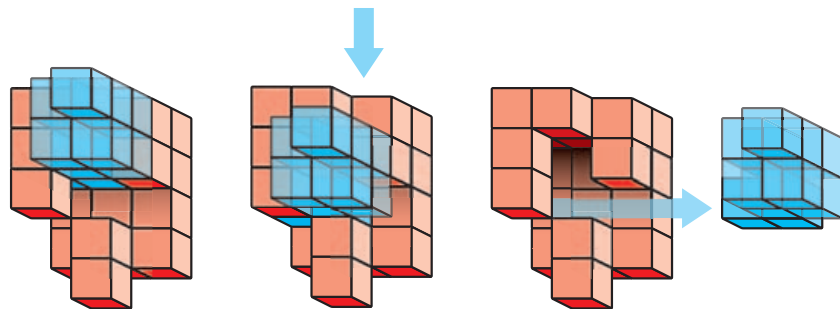




Figuur 2a Uit de 5-kubus worden het groene en het grijze stuk eruit geschoven



Figuur 2b Uit het resterende stuk wordt het gele stuk eruit geschoven



Figuur 2c Tot slot wordt het lichtblauwe stuk één positie naar beneden geschoven, waarna het eruit gehaald kan worden (het geheel is 180 graden gedraaid, zodat het lichtblauwe stuk goed zichtbaar wordt)

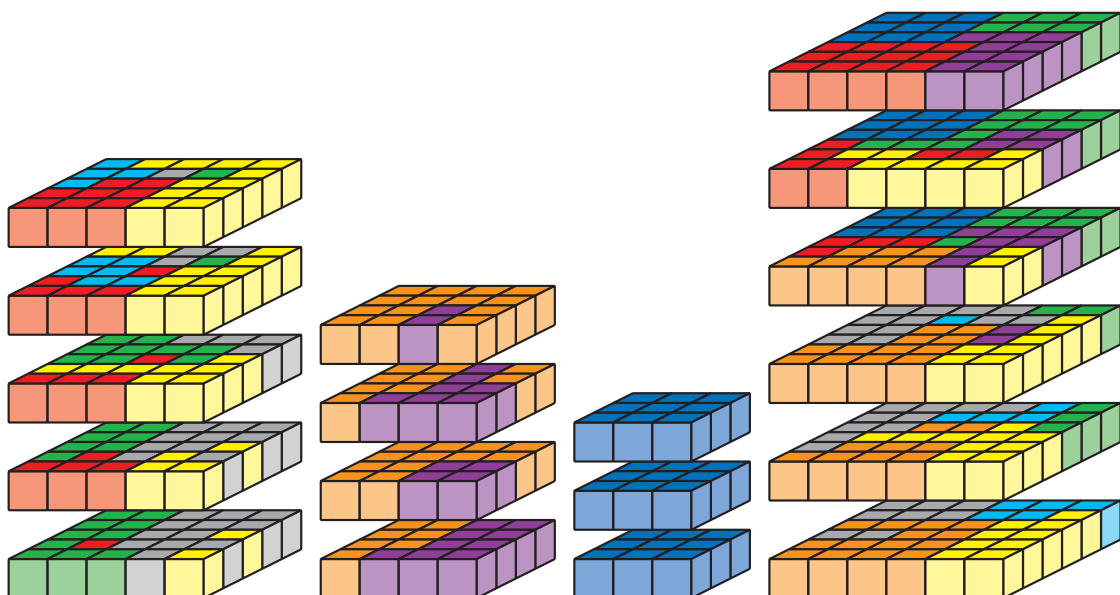
Puzzel met schuifprobleem

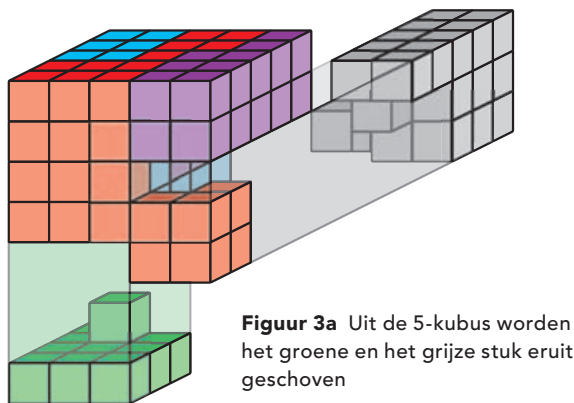
Ook in ons tweede voorbeeld komen we een sluitstuk tegen, hier speelt bovendien een schuifprobleem. In de 5-kubus vormen het groene en het grijze stukje samen het sluitstuk, zie figuur 2a. Vervolgens kan het gele stukje eruit, zie figuur 2b. Het schuifprobleem bestaat eruit dat het lichtblauwe stukje eerst naar onder moet schuiven ten opzichte van het rode stukje, voordat het eruit kan naar links, zie figuur 2c. Het is zeker de moeite waard om ook de 6-kubus te bestuderen!

De voorgaande twee voorbeelden zijn de enige dissecties in het hiervoor beschreven zoekgebied, waar de volgorde van het uit elkaar gaan van zowel de 5- als de 6-kubus uniek is. (De 3-kubus in die laatste even buiten beschouwing latend.) Het zijn dus bijzondere dissecties. Het is opvallend dat in beide puzzels stukjes voorkomen met een gaatje er in.

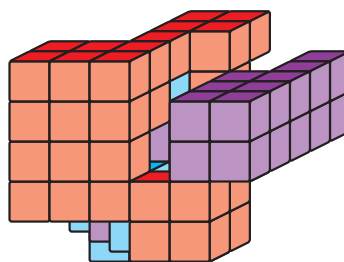
Puzzel met schuif- en draai-probleem

Een schuifprobleem wordt pas echt leuk, als er niet met één maar met meerdere stuk-

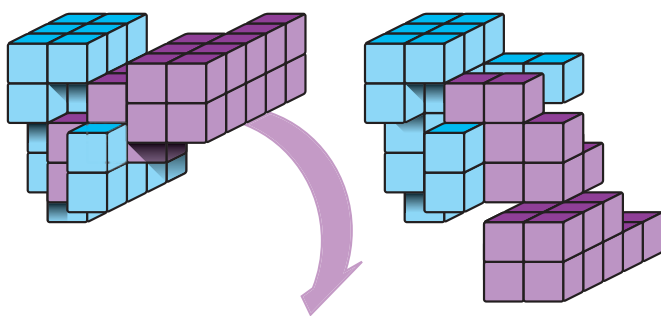




Figuur 3a Uit de 5-kubus worden het groene en het grijze stuk eruit geschoven



Figuur 3b In het resterende stuk kan het rode stuk naar voren worden geschoven



Figuur 3c Het paarse stuk is 90 graden gedraaid, zodat het naar rechts eruit kan worden gehaald



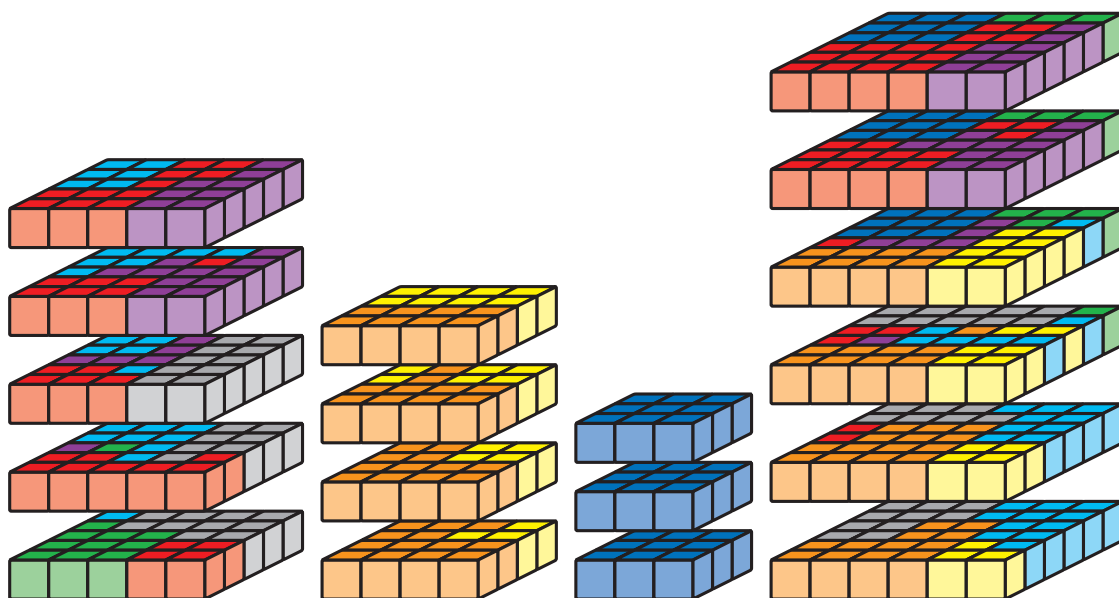
Figuur 3d De twee dromedarisstukken

ken geschoven moet worden. In dit derde voorbeeld doet zich dat voor, bovendien is hier een draaiing nodig om de stukjes uit elkaar te krijgen. Na het verwijderen van het groene en het grijze stukje (de sluitstukken) in de 5-kubus (zie figuur 3a), kan het rode stukje naar boven schuiven. Vervolgens kan het paarse stukje naar rechts schuiven. De situatie die dan ontstaat zie je in figuur 3b.

Er is nu voldoende ruimte ontstaan om het rode stukje naar voren toe weg te schuiven. Daarna kan het paarse stukje weer naar links schuiven, maar dat heeft geen zin. Andere

rechte verschuivingen zijn niet mogelijk. Wat wel zin heeft, is het paarse stukje een draai van 90 graden laten maken. Het gevolg daarvan zie je in figuur 3c. Na deze rotatie kan dit stukje naar rechts toe worden verwijderd. Eigenlijk kan dat ook al na een draai van 45 graden.

Ook in deze puzzel is iets bijzonders aan de hand met de vormen. Zowel het paarse als het lichtblauwe stukje lijkt op een dromedaris, zie figuur 3d. Tijdens de rotatie geven ze elkaar een omhelzing. Toch mooi, dat wiskunde zo romantisch kan zijn.



Kaartenmakers weten allang dat je aan vier kleuren genoeg hebt om de landen van een kaart zo te kleuren dat buurlanden nooit dezelfde kleur krijgen. Wiskundigen echter slaagden er lange tijd niet in een bewijs te leveren voor dit ervaringsfeit, dat dan ook bekend stond als het *vierkleurenprobleem*. De bewijzen, die inmiddels wel gevonden zijn, zijn nog steeds dermate ingewikkeld dat ze zonder computer niet geleverd noch gecontroleerd kunnen worden (lees ook het Journaal op pagina 33). Vreemd genoeg blijkt het kleurenprobleem voor landkaarten op ingewikkeldere oppervlakken een heel stuk gemakkelijker.

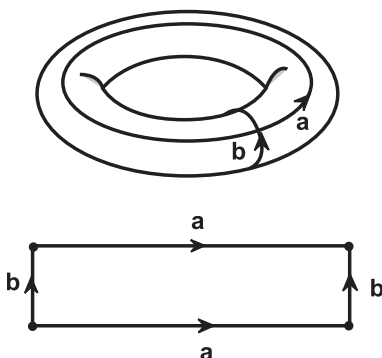
door J.M. Aarts

◦ Het kleuren van kaarten

16

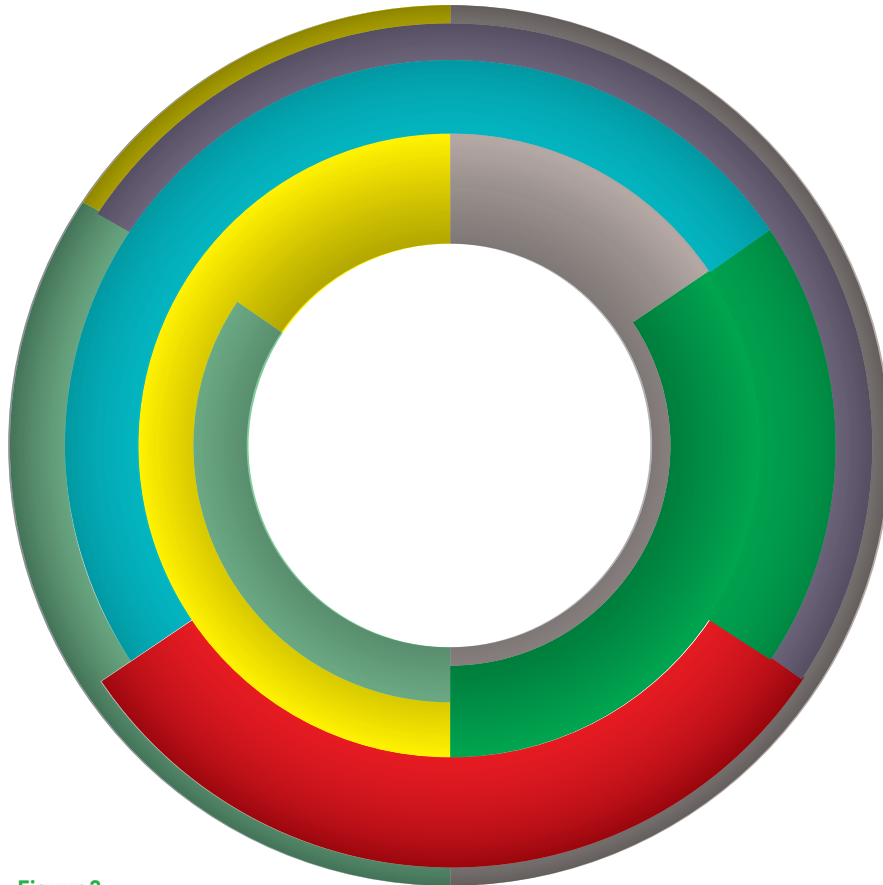
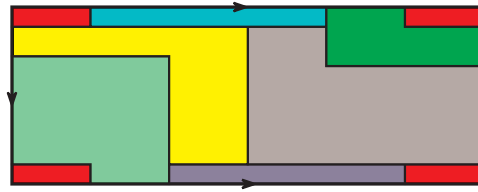
De torus

We kijken eerst naar de torus. Om het tekenen van kaarten op de torus te vereenvoudigen, knippen we de torus open, maar houden goed in de gaten hoe we hem weer in elkaar moeten plakken, zie figuur 1.



Figuur 1

In figuur 2 (boven) hebben we een kaart op de opengeknippte torus getekend die bestaat uit 7 landen die twee aan twee aan elkaar grenzen. Let goed op: nadat de torus in elkaar is geplakt (zie figuur 2, onder) vormen de vier rode stukjes in de hoeken samen één land! Om deze kaart zó te kleuren dat buurlanden verschillende kleuren krijgen, zijn 7 kleuren nodig. Deze kaart toont dus aan dat je op de torus niet vier, maar minstens 7 kleuren nodig hebt om landkaarten te kleuren. 'Zijn 7 kleuren dan wel genoeg voor de torus?' is dan de logischerwijs de volgende vraag. Om dit probleem aan te pakken, moeten we eerst nog even kijken naar de definitie van een kaart.



Figuur 2

Reguliere kaarten

Een *land* op de torus is een topologische veelhoek begrensd door ribben. Een *kaart op de torus* is een verdeling van de torus in een aantal landen, die alleen randpunten met elkaar gemeen kunnen hebben. Twee verschillende landen zijn *buurlanden* als de twee landen één of meer ribben gemeenschappelijk hebben. Een punt dat tot drie of meer landen behoort noemen we een *meerlandenpunt*. Als elk meerlandenpunt een drielandenpunt is, dan noemen we de kaart *regulier*. Voor ons probleem hoeven we alleen naar reguliere kaarten te kijken. In figuur 3 zie je waarom dat zo is. Het vijf-

ziging van de grenzen omgebouwd tot drie drielandenpunten, rechts. Als je de rechter kaart kunt kleuren, dan krijg je de kleuring van de linker kaart cadeau.

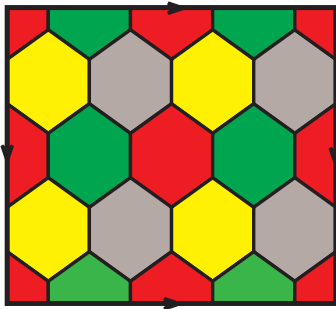


Figuur 3

Stel nu dat iemand voor ons een reguliere kaart op de torus tekent. Kunnen we die dan kleuren met 7 kleuren? We tellen eerst hoeveel landen, ribben en hoekpunten de kaart heeft. Het aantal landen ('zijvlakken') noemen we Z , het aantal ribben R en het aantal hoekpunten H . Als ik dit doe bij de kaart in figuur 2, dan vind ik $Z = 7$, $R = 21$ en $H = 14$, en je ziet dat

$$Z - R + H = 0.$$

Deze formule staat bekend als de *formule van Euler voor de torus*. De formule is geldig voor iedere kaart op de torus. Als je de moed kunt opbrengen, moet je dit maar eens controleren bij de kaart in figuur 4.



Figuur 4

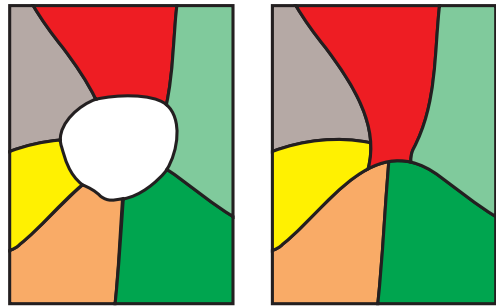
De kaart die we proberen te kleuren is regulier. Dat betekent dat in ieder hoekpunt 3 ribben samenkomen. Dat geeft $3H$ ribben. Maar hierbij wordt iedere ribbe 2 keer geteld, want iedere ribbe verbindt 2 hoekpunten. Dus $3H = 2R$. Dit stoppen we in de formule van Euler; er komt

$$3Z = 3R - 3H = R.$$

We beweren nu: *In onze kaart is er een land met ten hoogste 6 ribben, en dus ten hoogste 6 burens*. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Zou ieder land ten minste 7 ribben hebben, dan krijgen we ten minste $7Z$ ribben, waarbij iedere ribbe 2 keer geteld wordt (want iedere ribbe behoort tot 2 landen). We vinden $2R \geq 7Z$; maar dat is in strijd met het eerdere resultaat $R = 3Z$. Daarmee is het bewijs van de bewering voltooid.

Zeven kleuren volstaan

Om te bewijzen dat je onze kaart kunt kleuren met 7 kleuren, gaan we als volgt te werk. Iedere kaart met ten hoogste 7 landen kunnen we kleuren met 7 kleuren; dat is geen kunst. Dan gaan we alle kaarten met 8 landen kleuren, vervolgens alle kaarten met 9 landen, enzovoort. Iedere keer gaat dat op dezelfde manier, en ik zal nu vertellen hoe dat gaat. Ik neem aan dat ik iedere kaart op de torus met ten hoogste k landen gekleurd heb en dat ik nu een kaart met $k + 1$ landen voor me heb liggen. Ik zoek nu in die kaart een land met ten hoogste 6 burens; er is net bewezen dat zo'n land er is. Hoe ik nu verder ga, kun je zien in figuur 5.

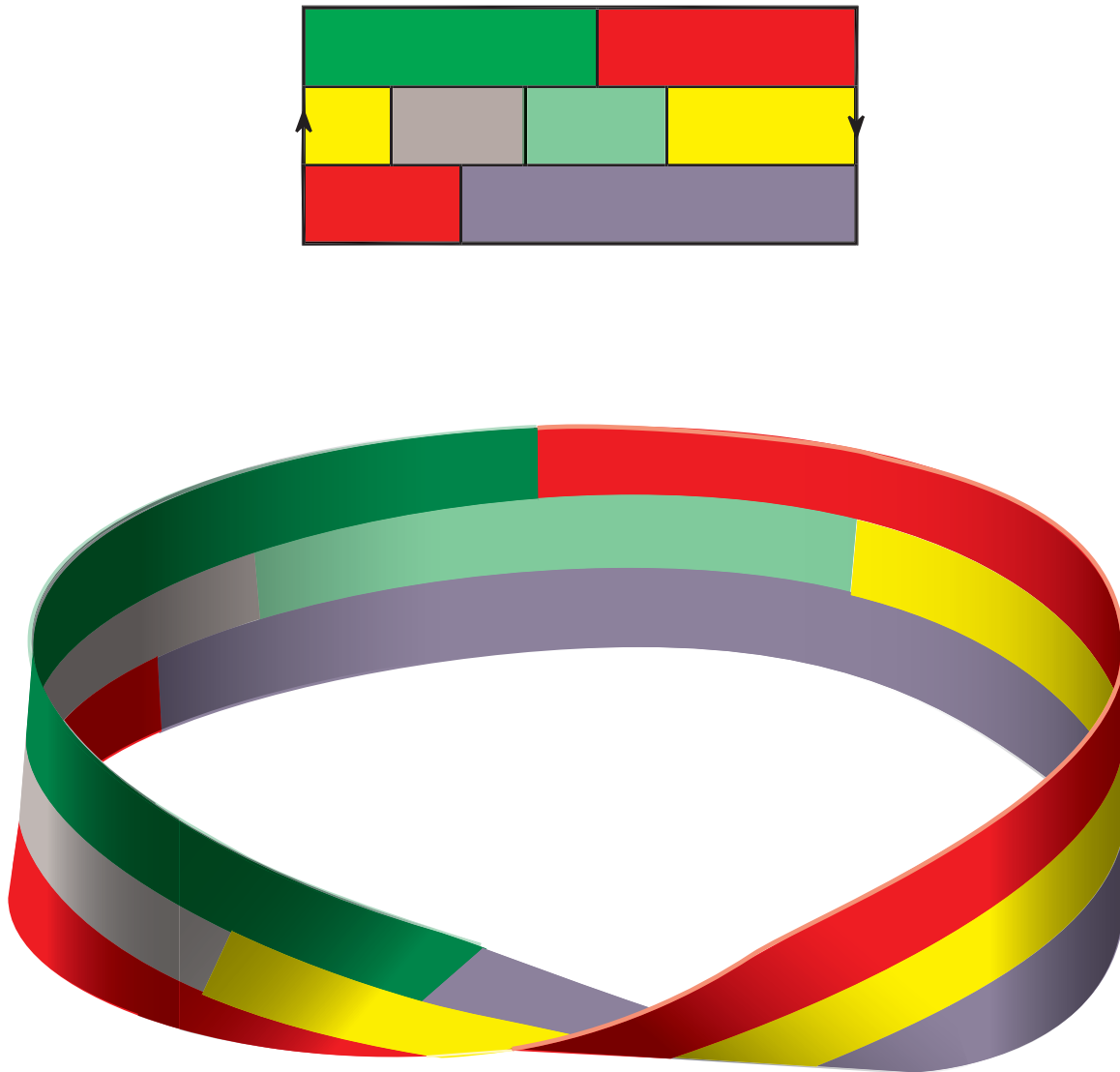


Figuur 5

Ik trek dat land met ten hoogste 6 burens eerst samen tot één punt en maak vervolgens de kaart weer regulier. De kaart rechts heeft nu één land minder dan de gegeven kaart, dus k landen. Die kaart is al gekleurd met 7 kleuren. Ik breng die kleuring over naar de gegeven kaart en kleur het binnenste land met de zevende kleur. Klaar: *iedere kaart op de torus kan gekleurd worden met ten hoogste 7 kleuren*.

Andere oppervlakken

En hoe zit het nu met andere oppervlakken? In figuur 6 is een kaart op de Möbiusband getekend. Als je goed kijkt, dan zie je dat je 6 kleuren nodig hebt om deze kaart te kleuren. En je kunt bewijzen dat iedere kaart op de Möbiusband gekleurd kan worden met ten hoogste 6 kleuren. Precies hetzelfde resultaat vind je voor het projectieve vlak en de fles van Klein.



Figuur 6

Voor de krakeling, dat is een bol met twee hengsels, blijken 8 kleuren nodig te zijn.

Het onderzoek naar het kleuren van kaarten op oppervlakken gaat terug tot het artikel *Map Colour Theorem* dat P.J. Heawood in 1890 publiceerde in het *Quarterly Journal of Mathematics*. Van hem zijn de eerste formules en resultaten, bijvoorbeeld de resultaten voor de torus die we hier besproken hebben. Het duurde enige tijd voor men in de gaten kreeg dat er een lacune in de bewijzen zat. Het resultaat voor de fles van Klein bijvoorbeeld is gevonden door Philip Franklin in 1934.

Het duurde tot 1968 voordat de bewijzen helemaal in orde waren. Dit alles kun je vinden in het boek *Map Colour Theorem* van Gerhard Ringel. Het boek opent met een spannend verslag van de dag waarop het bewijs door Ringel en Ted Youngs werd voltooid.

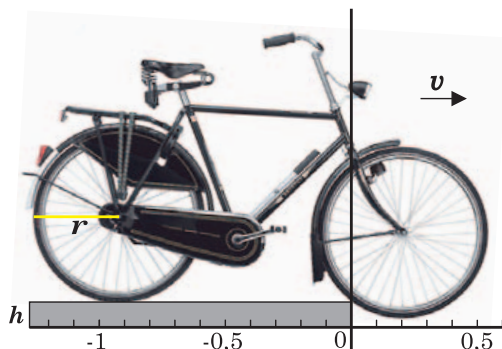
Over de formule van Euler voor *sferische veelvlakken* schreef J.M. Aarts een artikel in *Pythagoras*, december 2002.

Over het kleuren van *sferische veelvlakken* schreef Dion Gijswijt een artikel in *Pythagoras*, februari 2003.



Iedereen doet het
wel eens, ook al mag het niet:
op de stoep fietsen en dan hup, de
weg op. Als je hard rijdt, kom je met een
bons op de weg terecht, als je genoeg
afremt niet. In dit stukje wordt uitge-
rekend wat de snelheid is waarbij je
nog net zacht landt.

°° Van de stoep af



Figuur 1
Een fiets rijdt van de stoep af,
op het wegdek

Figuur 1 schetst de situatie waar we van uitgaan: een fiets die van de stoep de weg op fietst. De oorsprong van het coördinatenstelsel ligt op de kruising van het wegdek en de stoeprand. De onderstaande tabel geeft de betekenis van de symbolen (variabelen) in de tekening (samen met enkele andere die later gebruikt worden).

variabele	betekenis	waarde
h	stoephoogte	0,10 m
r	wielstraal	0,35 m
v	snellheid	diverse
g	valversnelling	9,81 m/s ²
β	versnellingsfactor	0,34

Langzaam of snel

Na de invoering van de nodige begrippen, kunnen we twee gevallen onderscheiden:

1. Je fietst langzaam. Het voorwiel is dan eerst voortdurend in contact met de stoep. Bij de rand aangekomen 'kantelt' het voor-

wiel om de rand van de stoep totdat het wiel op de weg belandt. Het contact met de stoep houdt dan op. Omdat je wiel de hele tijd óf de stoep óf de weg raakt, is er geen sprake van een harde landing.

2. Je fietst snel. Bij de rand aangekomen verlies je het contact met de stoep, maar je hebt nog geen contact met de weg. Je voorwiel valt nu een klein stukje. Het neerkomen veroorzaakt een bons.

De baan die de as van het wiel aflegt in geval 1 noemen we de *contactbaan*, die van geval 2 de *valbaan*.

De contactbaan

Als (x, y) de coördinaten zijn van de as, dan is het niet zo moeilijk uit te rekenen dat er drie gevallen zijn voor de ashoogte y :

$$y = \begin{cases} h + r, & x \leq 0, \\ h + \sqrt{r^2 - x^2}, & 0 < x < \sqrt{2hr - h^2}, \\ r, & x \geq \sqrt{2hr - h^2}. \end{cases}$$

In het bovenste geval is het wiel op de stoep, en is de as op de stoephoogte h plus de wielstraal r . In het middelste geval raakt het wiel de rand van de stoep. De wielas beschrijft dan een cirkelvormige baan met straal r en middelpunt $(0, h)$. De onderste vergelijking tenslotte komt overeen met rijden op de weg: de wielashoogte is dan altijd r .

De valbaan

Voor de afleiding van de valbaan gaan we ervan uit dat de as een valbeweging uitvoert vanaf het moment dat de as de stoeprand passeert. Van een kogel is bekend hoe zo'n baan eruit ziet: in de x -richting vindt een eenparige beweging met de beginsnellheid plaats en in de y -richting een eenparig versnelde beweging met valversnelling g . Dat

geeft de bekende paraboolvormige baan. Maar... dit geldt niet precies zo voor ons 'vallende' voorwiel. Hoe dit dan wel gaat en hoe je dit in principe uit kunt rekenen, staat in de laatste paragraaf. Het blijkt dat in ons geval de as in de y -richting bij benadering ook een eenparig versnelde beweging uitvoert, echter niet met de valversnelling g , maar met een kleinere, βg . Daarbij is β de zogenaamde versnellingsfactor. In de laatste paragraaf zullen we laten zien dat $\beta \approx 0,34$. Er zijn nu weer drie gevallen voor de ashoogte:

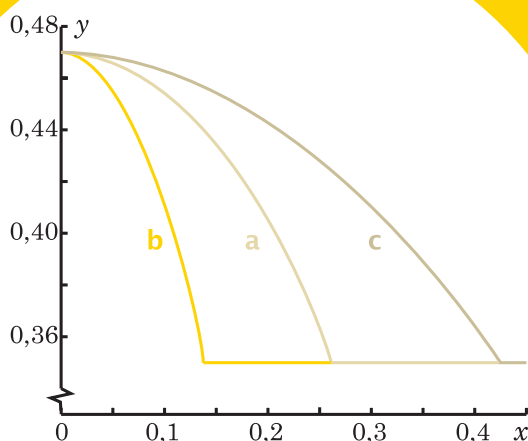
$$y = \begin{cases} h + r, & x \leq 0, \\ h + r - \frac{\beta g x^2}{2v^2}, & 0 < x < v \cdot \sqrt{\frac{2h}{\beta g}}, \\ r, & x \geq v \cdot \sqrt{\frac{2h}{\beta g}}. \end{cases}$$

Indrukwekkende formules, maar minder ingewikkeld dan ze lijken. De middelste volgt direct door de eenparige x -beweging $x = vt$ in te vullen in de eenparig versnelde y -beweging

$$y = h + r - \frac{1}{2}\beta g t^2.$$

Vergelijking van de banen

Door de banen voor een verschillende snelheid met elkaar te vergelijken, krijgen we een indruk van hoe ze eruit zien. Dat gebeurt in figuur 2.



Figuur 2 Voorbeeldbanen: grafiek a is de contactbaan, b de valbaan voor $v = 0,5$ m/s, c de valbaan voor $v = 1,5$ m/s

De contactbaan (grafiek a) is een deel van de cirkel. Maar let op: hij lijkt niet op een cirkel doordat de schalen van de x - en y -as veel verschillen. De valbaan voor $0,5$ m/s (grafiek b) ligt helemaal links van de contactbaan, en kan daardoor niet bestaan: het wiel zou dan door de stoep heen zijn gezakt. Die voor $1,5$ m/s (grafiek c) ligt juist rechts en kan wél voorkomen.

De kunst is nu de kritieke snelheid v_k te vinden die hoort bij de valbaan die net buiten de contactbaan ligt.

De kritieke snelheid v_k is dus de kleinste v waarvoor geldt:

$$h + r - \frac{\beta g x^2}{2v^2} > h + \sqrt{r^2 - x^2},$$

voor $0 < x < \sqrt{2hr - h^2}$.

Het linkerlid hoort bij een parabool, het rechterlid beschrijft een halve cirkelboog. De x -coördinaat van een mogelijk snijpunt van die parabool en die halve cirkel voldoet aan de volgende vergelijking:

$$h + r - \frac{\beta g x^2}{2v^2} = h + \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Na wat opruimen en kwadrateren, krijgen we de vergelijking voor mogelijke snijpunten van de parabool en de hele cirkel:

$$x^2 \left(\frac{\beta^2 g^2 x^2}{4v^4} + 1 - \frac{2r\beta g}{2v^2} \right) = 0.$$

De factor x^2 vertegenwoordigt het snijpunt bij $x = 0$, namelijk de top van de parabool die de cirkel sowieso raakt. Als er nog meer snijpunten zijn, komen die van de tweede factor, en hebben dan een x -coördinaat die voldoet aan

$$\frac{\beta^2 g^2 x^2}{4v^4} = - \left(1 - \frac{2r\beta g}{2v^2} \right).$$

Juist als $1 - \frac{2r\beta g}{2v^2} = 0$, levert ook deze tweede factor alleen het snijpunt bij $x = 0$. Dat levert ons de volgende uitdrukking voor de kritieke snelheid:

$$v_k = \sqrt{\beta gr}.$$

Na al die lange formules eindelijk een prettig elegant resultaat. Voor ons geval wordt de kritische snelheid 1,1 m/s, ofwel bijna 4 km/uur. Dat komt wel overeen met de ervaring: je remt af tot ongeveer loopsnelheid om zacht te landen.

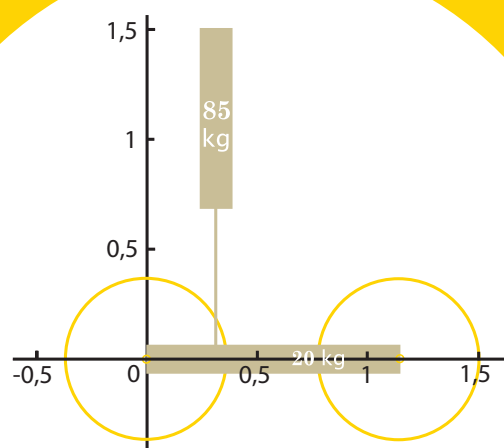
De versnellingsfactor lijkt voor kinderen en volwassenen ongeveer hetzelfde te zijn. Kleine kinderen (met kleinere wielen) moeten daarom met een kleinere snelheid van de stoep af om niet op het wegdek te bonzen, maar of ze dat leuk vinden? Door de wortelfunctie maakt het trouwens niet eens zoveel uit of je groot of klein bent: een 1,5 keer zo groot wiel geeft maar een 1,2 keer zo grote kritische snelheid.

Tenslotte: de kritieke snelheid

Bij onze berekeningen gingen we uit van een waarde van 0,34 voor de versnellingsfactor β . Hoe kom je aan die waarde? Met wat kennis van mechanica is β te berekenen. De formule die je daarbij nodig hebt, is die voor de hoekversnelling; fiets en berijder maken immers onder invloed van de zwaartekracht een cirkelbeweging. De hoekversnelling wordt gegeven door $M = I \times \alpha$, waarbij M het moment is (in Nm), I het traagheidsmoment (in kgm^2) en α de hoekversnelling (in rad/s^2).

We gaan uit van een persoon van 85 kg op een fiets van 20 kg, versimpeld zoals in figuur 3: een balk voor de persoon en een balk voor de fiets. We nemen aan dat ze één star lichaam vormen. De wielen en zitbuis zijn voor de duidelijkheid getekend, maar doen niet mee in de berekening.

De rotatie-as is de as van het achterwiel (0, 0). Het moment M wordt veroorzaakt door de in het zwaartepunt aangrijpende zwaartekracht: 359 Nm. Het traagheidsmoment I komt uit op 124 kgm^2 . Dus $\alpha = M/I = 2,9 \text{ rad/s}^2$. Dit veroorzaakt een versnelling van de vooras van ongeveer $3,3 \text{ m/s}^2 \approx 0,34 g$. De gezochte versnellingsfactor β komt aldus uit op 0,34.



Figuur 3

Model van een persoon op een fiets

Overigens verandert de versnelling gedurende de beweging enigszins doordat de stand van fiets en berijder verandert. Maar β blijkt toch ongeveer constant gedurende de eerste 0,5 seconde, en dat is langer dan de val duurt.

Het zou ook interessant zijn de versnellingsfactor β experimenteel te bepalen. De auteur is benieuwd naar uitkomsten van zo'n experiment, en is ook graag bereid eraan mee te werken.



Christiaan Huygens, de mathematisering van de werkelijkheid

door Jan Guichelaar

Op 14 januari kwam het ruimtevaartuig Cassini-Huygens bij de planeet Saturnus aan en maakte foto's van de maan Titan. Dit ruimtevaartuig is genoemd naar de Italiaanse astronoom Cassini en de Nederlandse natuurwetenschapper Christiaan Huygens, beiden uit de zeventiende eeuw. Van de hand van Rienk Vermij is onlangs een biografie over Huygens verschenen die zeer de moeite waard is: *Huygens, de mathematisering van de werkelijkheid*.

24



Christiaan Huygens (1629-1695)

Christiaan Huygens werd geboren in 1629 als een van de kinderen van Constantijn Huygens, die als hoge ambtenaar diende onder drie prinsen van Oranje (Maurits, Frederik Hendrik en Willem II) en tevens schrijver en dichter was.

Hoewel zijn vader Christiaan voorbestemde voor een carrière als hoge ambtenaar en hij rechten moest studeren in Leiden en later in Breda, werd Christiaan al gauw gegrepen door de in die tijd ontluikende natuurwetenschappen. Toen Constantijn na de dood van Willem II zijn hoge positie verloor en hij

voor zijn zoons dus niet voor een vergelijkbare positie kon zorgen, voelde Christiaan zich vrij om zich geheel op de wiskunde en natuurwetenschappen toe te leggen.

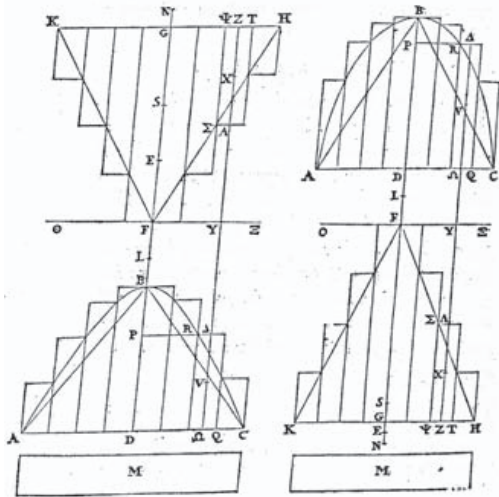
Christiaan onderhield veel contacten met wetenschappers uit zijn tijd en verbleef meerdere keren langdurig in Parijs, waar hij een stuwende kracht was bij de oprichting van de Koninklijke Academie van Wetenschappen (Académie Royale des Sciences) in 1666. De Franse koning Lodewijk de XIV, de Zonnekoning, betaalde Christiaan voor zijn werkzaamheden een jaarlijks honorarium van 6000 pond (livres). Christiaan werd enkele keren voor een langere periode ernstig ziek en keerde voor herstel steeds terug naar Nederland. Uiteindelijk was zijn positie in Parijs vanwege de politieke ontwikkelingen niet meer houdbaar en bleef Christiaan definitief in Nederland. Hij maakte in 1689 nog wel een reis naar Londen, waar hij Isaac Newton ontmoette. In 1695 overleed Christiaan Huygens.

Het grote belang van Huygens is gelegen in het feit dat hij al zijn onderzoeksresultaten trachtte af te leiden uit eerste principes. Hij was niet alleen theoretisch een voor-
aanstaande wetenschapper maar ook een begenadigd experimentator. Hij was wellicht de eerste echte natuurwetenschapper in de moderne zin van het woord.

Rienk Vermij gaat in zijn boek uitgebreid in op de vele wetenschappelijke successen die Huygens in zijn leven behaalde. Wij laten er hier een aantal de revue passeren, vergezeld van enkele van de vele prachtige illustraties uit Vermij's boek.

De kwadratuur van de cirkel

Wij weten nu dat je met passer en liniaal uit de straal r van een cirkel geen vierkant met zijde p kunt construeren zó, dat $p^2 = \pi r^2$. De kwadratuur van de cirkel is niet mogelijk. Huygens bewees dat in het werk van de jezuïet Gregorius a Sancto Vincentio, die meende dit wel bewezen te hebben, een kapitale fout zat. Helaas erkende Gregorius zijn fout niet.



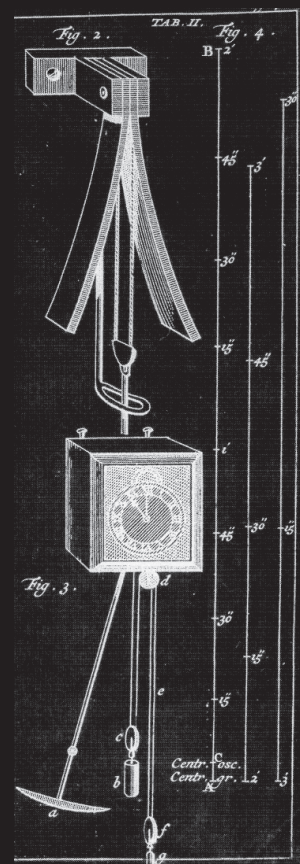
Beginsel van Huygens

Huygens wist een aantal verschijnselen van de voortplanting van licht te verklaren met de volgende veronderstelling, die het *Beginsel van Huygens* is gaan heten: licht breidt zich uit als golven (vergelijk de golven die in een wateroppervlak lopen nadat er een steen in is gevallen). Daarbij fungeert elk punt waar de golf arriveert opnieuw als het centrum van lichtgolven. Met dit principe kon hij een groot aantal lichtverschijnselen, bijvoorbeeld de breking van lichtstralen aan het oppervlak van lucht en glas, verklaren.



Slingeruurwerk

Huygens hield zich gedurende zijn hele wetenschappelijke leven bezig met het ontwerpen, maken en verbeteren van slingeruurwerken. Hij slaagde er als eerste in de vaste slingertijd (bij kleine uitwijkingen) van een slinger te benutten om klokken te maken die vrijwel exact gelijk liepen. Door de top van de slinger binnen 'wangetjes' te laten bewegen, kreeg Huygens het voor elkaar om het slingergewicht een cycloïde te laten beschrijven in plaats van een cirkel. Daarmee bleef de slingertijd ook bij grotere uitwijkingen constant.



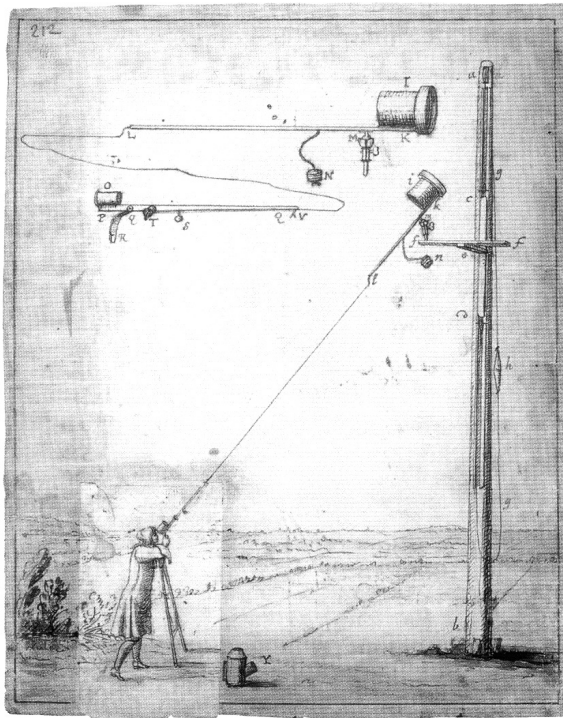
Plaatsbepaling op zee

Voor de plaatsbepaling op zee was een goedlopende klok nodig. De breedtegraad kon met de hoogte (in graden boven de horizon) van bijvoorbeeld de Poolster bepaald worden, maar voor de bepaling van de lengtegraad was een klok aan boord noodzakelijk. Huygens heeft vele pogingen gedaan om een aangepast slingeruurwerk te maken voor gebruik op een (wild) bewegend schip op zee. Uiteindelijk vond hij hiervoor toch geen bevredigende oplossing.

De maan Titan van Saturnus

Huygens was een ervaren lenzenlijper en slaagde er in 1655 in met een eigengebouwde telescoop de maan Titan van Saturnus te ontdekken en zijn omlooptijd van zestien dagen te bepalen.

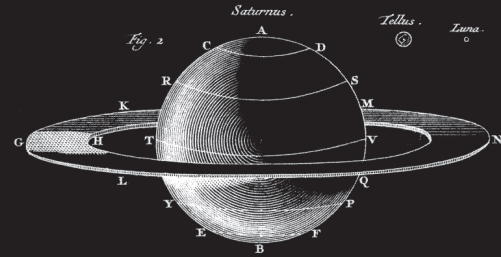
Het gekke was dat Huygens aarzelde om zijn ontdekking te publiceren (een aarzeling die hij bij al zijn ontdekkingen had). Hij stuurde daarom een anagram (alle letters door elkaar) van de zin 'Om Saturnus draait zijn maan in zestien dagen en vier uur' naar een aantal wetenschappelijke kennissen van hem. Dan kon hij later altijd aantonen dat hij de ontdekking van de maan als eerste had gedaan.



26

Ringen van Saturnus

De rare uitstulpingen van Saturnus interpreteerde Huygens uiteindelijk als een platte ring die rond de planeet draaide.



Botsingswetten

Huygens leidde voor elastische botsingen (geen energieverlies) een aantal regels af. Daarbij verwerkte hij de relativiteit van de waarnemer ten opzichte van de botsende kogels: de regels moeten gelijkelijk gelden voor iemand die stilstaat als voor iemand die beweegt ten opzichte van de botsende kogels. Hij bewees hiermee dat de botsingsregels van zijn illustere voorganger Descartes grotendeels onjuist waren. In die tijd een moedige houding.



Kansrekening

Voortbouwend op werk van Pascal publiceerde Huygens ook een verhandeling over het berekenen van kansen, het eerste standaardwerk op dit gebied.

*Als het getal der kansen die ick hebbe tot a is p, ende het getal der kansen die ick tot b heb is q; nemende altydt dat ieder kans even licht kan gebeuren:
Het is my weerdt $(pa + qb)/(p + q)$.*

Huygens, de mathematisering van de werkelijkheid, door Rienk Vermij. Veen Magazines, Diemen 2004, ISBN 90 76988 35 8

door **Walter Joris**

Aflevering 4 Knip

In deze vierde aflevering van pen-en-papier-spelen legt Walter Joris het spel *Knip* uit. Het enige dat je nodig hebt, is een tegenstander, ruitjespapier en ieder een pen.

Om *Knip* te spelen, teken je eerst op ruitjespapier een veld van 4 x 4 vakjes. Om de beurt zetten de spelers één lijntje op de zijlijn van een vakje binnen het veld. Dit verbeeldt telkens een knip met een schaar-tje. Zodra je een stuk van het papier afknijpt, mag je dat stuk arceren met jouw kleur. Hierbij moet je altijd het *kleinste* stuk kiezen. (Als je één vakje van het papier afknijpt, heb je natuurlijk twee stukken: één van 1 vakje en één van 15 vakjes.)

Verder is er nog de volgende spelregel: zodra er zeven vakjes of minder overblijven, worden ze automatisch eigendom van de tegenstander!

Winnaar is diegene met de meeste punten (gearceerde vakjes).

Voorbeelden

Dit spel heeft meer diepgang dan het lijkt. In figuur 1 is de volgende situatie bereikt (de spelers spelen met zwart en groen): er zijn nog dertien stuks over die zwart overal kan

afknippen. Wat is de voordeligste knip?

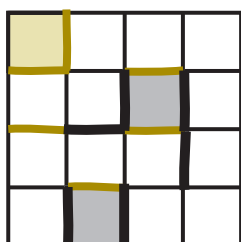
In de tabel hieronder staan een aantal knip-mogelijkheden van zwart (Z) en groen (G).

Z	G	Z	G
6	7		
5	4	4	
4	4	5	
4	1	4	4
3	5	5	
2	2	4	5

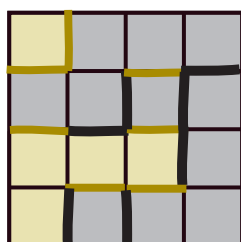
Let erop dat we steeds het kleinste stuk moeten kiezen! En wanneer we minder dan zeven vakjes overlaten, gaan die automatisch naar de tegenstander. De beste keuze is dus dat zwart er van die dertien slechts vijf afknijpt. Van de resterende acht knipt groen er vier af, en zwart neemt de rest.

In figuur 2 zien we de eindstand: zwart heeft 11 punten, groen heeft er 5.

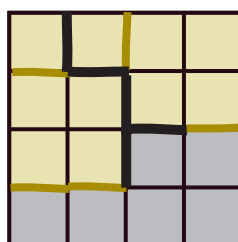
In de figuren 3 en 4 zie je nog twee voorbeelden van een spelverloop. In figuur 3 wint groen met 10 punten, in figuur 4 wint groen met 9 punten.



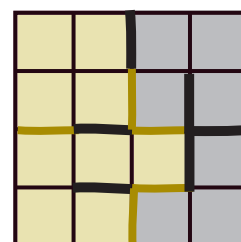
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

°Pythagoras Olympiade

door Thijs Notenboom, Allard Veldman
en René Pannekoek

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

28

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 20 maart 2005.

OPGAVE

116

Laat zien dat er voor elk geheel getal n een geheel getal is waarvan de decimale schrijfwijze alleen de cijfers 0 en 1 bevat en dat deelbaar is door n .

OPGAVE

117

Van een convexe achthoek (alle hoeken kleiner dan 180°) waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen, hebben vier opeenvolgende zijden lengte 3 en de andere vier lengte 2.

Geef de oppervlakte van de achthoek in de vorm $r + s\sqrt{t}$, waarbij r , s en t positieve gehele getallen zijn.

OPLOSSING

112

Bewijs dat er precies één natuurlijk getal n is zó, dat $2^8 + 2^{11} + 2^n$ een kwadraat is.

Oplossing. Stel dat $2^8 + 2^{11} + 2^n = m^2$, met m geheel. Dan is $2^n = m^2 - 2^8 - 2^{11} = m^2 - 2304 = m^2 - 48^2 = (m + 48)(m - 48)$.

Twee getallen die als product een macht van 2 hebben, zijn zelf ook een macht van 2, dus $m + 48 = 2^s$ en $m - 48 = 2^t$.

Dan is $2^s - 2^t = (m + 48) - (m - 48) = 96$, oftewel $2^t(2^{s-t} - 1) = 3 \cdot 2^5$. Omdat $2^{s-t} - 1$ oneven is, hebben we $2^t = 2^5$ en $2^{s-t} - 1 = 3$, dus $t = 5$, $s = 7$ en $n = s + t = 12$.

Deze opgave werd opgelost door: Clara Mertens van het Sint-Jozefscollege te Aarschot (België), Ariyan Javanpeykar te Zoetermeer, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Wouter Berkelmans van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, Johannes Steenstra van het Driestar College te Gouda, Lieselotte van de Capelle van het Edugo Campus de Toren te Oostakker (België) en Marianne Garlich van het Candea College te Duiven. De boekenbon gaat naar Lieselotte van de Capelle.

OPLOSSING

113

In de ontbindingen in priemfactoren van $r + 1$ natuurlijke getallen (r geheel, positief) komen samen slechts r verschillende priemgetallen voor. Bewijs dat er een deelverzameling van deze getallen bestaat waarvan het product een kwadraat is.

Oplossing. Een getal is een kwadraat als elke priemfactor die in de ontbinding voorkomt, een even aantal keer voorkomt. We nummeren nu de r verschillende priemfactoren van p_1 t/m p_r en geven elk van de $r + 1$ getallen a_1 t/m a_{r+1} weer met een rijtje van r o's en e's, waarbij een 'o' als i -de letter betekent dat de betreffende priemfactor p_i een oneven aantal keer voorkomt en 'e' een even aantal keer. Voor elke plek zijn er twee letters mogelijk, dus er zijn 2^r verschillende rijtjes denkbaar. Als we alle mogelijke producten van de $r + 1$ getallen a_1 t/m a_{r+1} nemen, zijn dit 2^{r+1} producten. Dit is meer dan 2^r , zodat er twee producten B en C moeten zijn die hetzelfde rijtje o's en e's hebben (ladenprincipe). Als je nu het product van alle getallen a_i neemt die ofwel alleen in B ofwel alleen in C voorkomen, heb je een getal met alleen maar even exponenten, oftewel een kwadraat: $B \cdot C$ is een kwadraat, en hieruit kun je alle dubbele factoren wegdelen en hou je een kwadraat over. Omdat B en C verschillend zijn, kan dit niet het lege product zijn.

Deze opgave werd opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie te Castricum en Wouter Berkelmans van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam. De boekenbon gaat naar Wouter Berkelmans.

°Problemen

door Dion Gijswijt

Kleinste of grootste

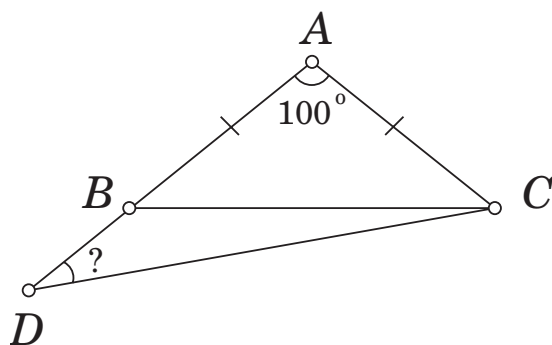
De getallen 1 tot en met 9 zijn in een vierkant van 3 bij 3 gerangschikt zó, dat ieder getal de kleinste van zijn rij of van zijn kolom is, of de grootste van zijn rij of kolom.

Rangschik nu de getallen 1 tot en met 12 in een 3 x 4 rechthoek zó, dat dezelfde eigenschap geldt. Kun je op deze manier ook de getallen 1 tot en met 16 in een 4 x 4 vierkant rangschikken?

5	3	2
4	7	1
6	8	9

Ontbrekende hoek

In de figuur zie je een gelijkbenige driehoek ABC met top A . De hoek bij A is 100° . Op het verlengde van AB ligt punt D , zo dat $AD = BC$. Bepaal $\angle ADC$.

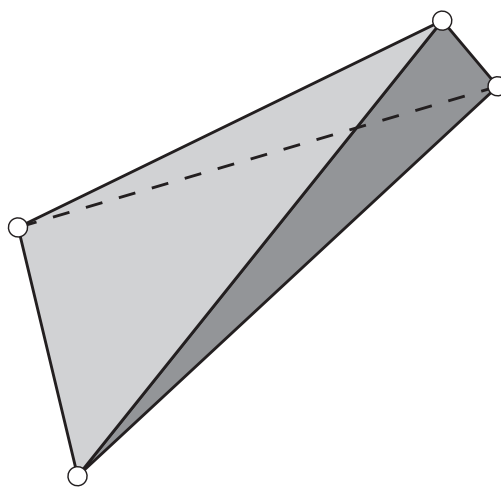


Delen

Hoeveel van de getallen 1 tot en met 2005 zijn *niet* deelbaar door 2 of 3?

Tetraëder

In de figuur zie je een tetraëder (viervlak). Is het waar dat iedere tetraëder een hoekpunt heeft met de eigenschap dat de drie ribben uit dat hoekpunt een driehoek kunnen vormen? We zeggen dat drie ribben een driehoek kunnen vormen als er een driehoek bestaat waarvan de lengtes van de drie zijden gelijk zijn aan de lengtes van de drie ribben.



Oplossingen

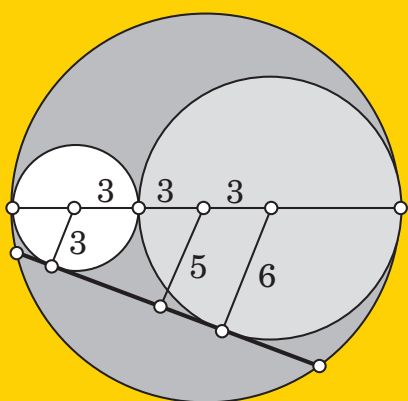
nr. 3

Valexperiment

Leila gooit de eerste kogel achtereenvolgens van verdieping 13, $13 + 13$, $13 + 13 + 12$, $13 + 13 + 12 + 11$, enzovoorts, tot deze breekt. Als de eerste kogel bijvoorbeeld op verdieping $13 + 13 + 12 + 11 = 49$ uiteenspat, test ze met de tweede kogel achtereenvolgens verdieping 39, 40, ..., 48 totdat ook deze breekt. Zo komt ze met maar 14 experimenten altijd achter de gezochte verdieping.

Bij een experiment met k tests zijn er ten hoogste $1 + k + \binom{k}{2}$ mogelijke uitkomsten (geen kogel breekt, één kogel breekt, beide kogels breken). Omdat ze uit 101 mogelijkheden moet kiezen (de kogel kan ook vanaf verdieping 1 al breken), moet $2 + k + k^2 \geq 202$. Leila heeft dus ook ten minste $k = 14$ tests nodig.

Koorde



Noem de middelpunten van de cirkels met straal 3, 6 en 9 respectievelijk M_1 , M_2 en M .

Laat nu vanuit deze drie punten loodlijnen neer op de koorde en noem de voetpunten P_1 , P_2 en P . Dan geldt $M_1 P_1 = 3$, $M_2 P_2 = 6$ en $M_1 M = 6$, $MM_2 = 3$. Daaruit volgt dat $MP = 5$. Nu volgt met de stelling van Pythagoras dat de lengte van de koorde gelijk is aan $2\sqrt{81 - 25} = 4\sqrt{14}$.

Fibonacci-getallen

Je kunt elk getal schrijven als som van verschillende Fibonacci-getallen door van dat getal steeds het grootste mogelijke Fibonacci-getal af te trekken, bijvoorbeeld: $100 = 89 + 0 + 0 + 0 + 0 + 8 + 0 + 3 + 0 + 0$. We kunnen dit kort noteren met een rijtje $f(100) = 1000010100$ van nullen en enen die aangeven welke Fibonacci-getallen je gebruikt. Als in $f(n)$ de combinatie 00 of 11 voorkomt, kun je n op meerdere manieren schrijven als som van verschillende Fibonacci-getallen (vervang 100 door 011 en 011 door 100). Zo niet, dan is $f(n)$ van de vorm $1010\cdots 01$ of $1010\cdots 10$ en is n een Fibonacci-getal min 1. In dit geval is n maar op één manier te schrijven als som van verschillende Fibonacci-getallen (zie je waarom?).

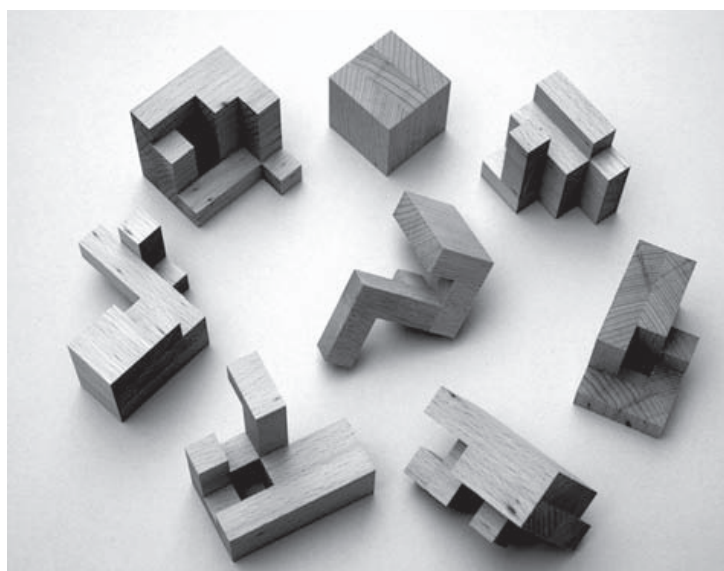
Van A naar B

Je weg van A naar B ligt vast als je hebt besloten welke van de negen horizontale lijnen je doorloopt. Het aantal mogelijke wegen is daarom gelijk aan het aantal manieren om een oneven aantal uit 9 te kiezen. Maar dit is gelijk aan het aantal manieren om een even aantal uit 9 te kiezen, en dus gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 2^9 = 256$.

door Alex van den Brandhof

Kubusdissecties

In het vorige nummer van *Pythagoras* schreef Edo Timmermans over 'twee-dimensionale dissecties'. Eerder al publiceerde hij over dissecties in *Cubism for fun*, het blad van de Nederlandse Kubus Club, en in dit nummer kun je van zijn hand een artikel lezen over 'driedimensionale dissecties' (zie pagina 12). De dissectie die als eerste wordt besproken kan echt als puzzel worden uitgevoerd, zie nevenstaande foto. Edo Timmermans heeft van meer dissecties echte puzzels gemaakt. Geïnteresseerden kunnen hem mailen: trinitypuzzle@hotmail.com



32

Ruimtesonde Huygens heeft bestemming bereikt

Na een reis van zeven jaar is de ruimtesonde Huygens (genoemd naar de Nederlandse wis- en natuurkundige Christiaan Huygens, die Saturnus en Titan in 1655 ontdekte; lees ook het artikel op pagina 24) op 14 januari geland op Titan, de grootste maan van de planeet Saturnus.

Titan lijkt op de aarde, zoals die er vier miljard jaar geleden uitzag. De oranje dampkring bestaat uit stikstof, methaan (aardgas) en een smogdeken van andere koolwaterstoffen. Huygens ging op zoek naar de chemische reacties waardoor op aarde het leven is ontstaan.

Op www.huygens.com zijn foto's te zien van Titan.

Bestaan oneven volmaakte getallen?

Een volmaakt getal is een natuurlijk getal n zó, dat $n = \sigma(n)$, waarbij $\sigma(n)$ staat voor de som van de delers van n (behalve n zelf). Zo is 6 (met delers 1, 2 en 3) een volmaakt getal, want $1 + 2 + 3 = 6$. De eerste drie volmaakte getallen zijn 6, 28, 496.

Tot op de dag van vandaag is het onbekend of er oneven volmaakte getallen bestaan. Wel is nagegaan dat van de eerste 10^{300} getallen geen enkel oneven getal volmaakt is.

De wiskundige Kevin Hare van de University of Waterloo (Canada) heeft onlangs bewezen dat als er een oneven volmaakt getal bestaat, dit getal dan ten minste 47 priemfactoren moet hebben. Als hij de priemfactoren van het 301-cijferige getal $\sigma(\sigma(11^{18})^{16})$ kan vinden, is hij alweer een stap verder, laat hij weten op <http://mersenneforum.org>.

Bron: MathWorld Headline News

Laatste twijfels bewijs Vierkleurenprobleem weggewerkt

Hoeveel kleuren heb je minimaal nodig om een landkaart zó te kleuren dat buurlanden nooit dezelfde kleur hebben? Dat je aan vier kleuren genoeg hebt, proberen wiskundigen al sinds 1852 te bewijzen; in dat jaar wierp Francis Guthrie het probleem op. In de bewijzen die werden gepresenteerd, bleken altijd fouten te zitten.

In 1976 werd door Kenneth Appel en Wolfgang Haken een bewijs geleverd dat gebruik maakt van de computer, waarin zo'n 1500 'configuraties' onderzocht werden, ieder leidend tot duizenden gevallen. Sceptici keurden dit computerbewijs af,

omdat ze niet vertrouwden op de berekeningen die de computer maakte. Sinds 1994 is er een tweede bewijs (van Neil Robertson en anderen), dat eveneens gebruik maakt van de computer. In dit bewijs is het aantal configuraties teruggebracht tot 633 en werd de complexiteit van de verificatie per configuratie teruggebracht. Maar ook toen ontstond er discussie over de betrouwbaarheid van de nog steeds omvangrijke computerberekeningen. Misschien dat aan die discussie nu een eind komt. In december 2004 namelijk presenteerde Georges Gonthier op een conferentie in

Jouy-en-Josas (nabij Parijs) een versie van Robertsons bewijs, die zo nauwkeurig uitgeschreven is dat de juistheid van elke stap gecontroleerd kon worden. Die controle werd uitgevoerd door de 'bewijs-assistent' Coq: een redelijk simpel programma van Franse origine, dat de juistheid van wiskundige bewijzen verifieert.

In *Pythagoras* van december 2003 kun je meer lezen over automatische bewijsverificatie en in het juninummer 2004 over het vierkleurenprobleem.

Bronnen: www.cs.ru.nl/~henk/4CT-Coq.pdf en www.maa.org/devlin/devlin_01_05.html

Oplossingen Kleine nootjes nr. 3

Paardensprong

Ja, dat kan als volgt:
A8, C7, B5, D4, E6, G7,
H5, F4, H3, F2, H1.

Dammen

Wit heeft 9 mogelijkheden als eerste zet. Daarna kan zwart ook 9 verschillende zetten doen. Er zijn dus $9 \times 9 = 81$ mogelijke zetten.

Dominostenen

Het is niet mogelijk, omdat de velden A8 en H1 dezelfde kleur hebben, terwijl één dominosteen altijd een zwart en een wit veld bedekt.

Grootste cirkel

De straal is $\frac{1}{2}\sqrt{10} \times a$, waarbij a de zijde van een speelveld is.

Gevangenis

Jan komt alleen vrij als hij, na zijn bezoek aan zijn eerste buurcel, terugkeert naar zijn eigen cel en daarna de andere 62 cellen afloopt.

