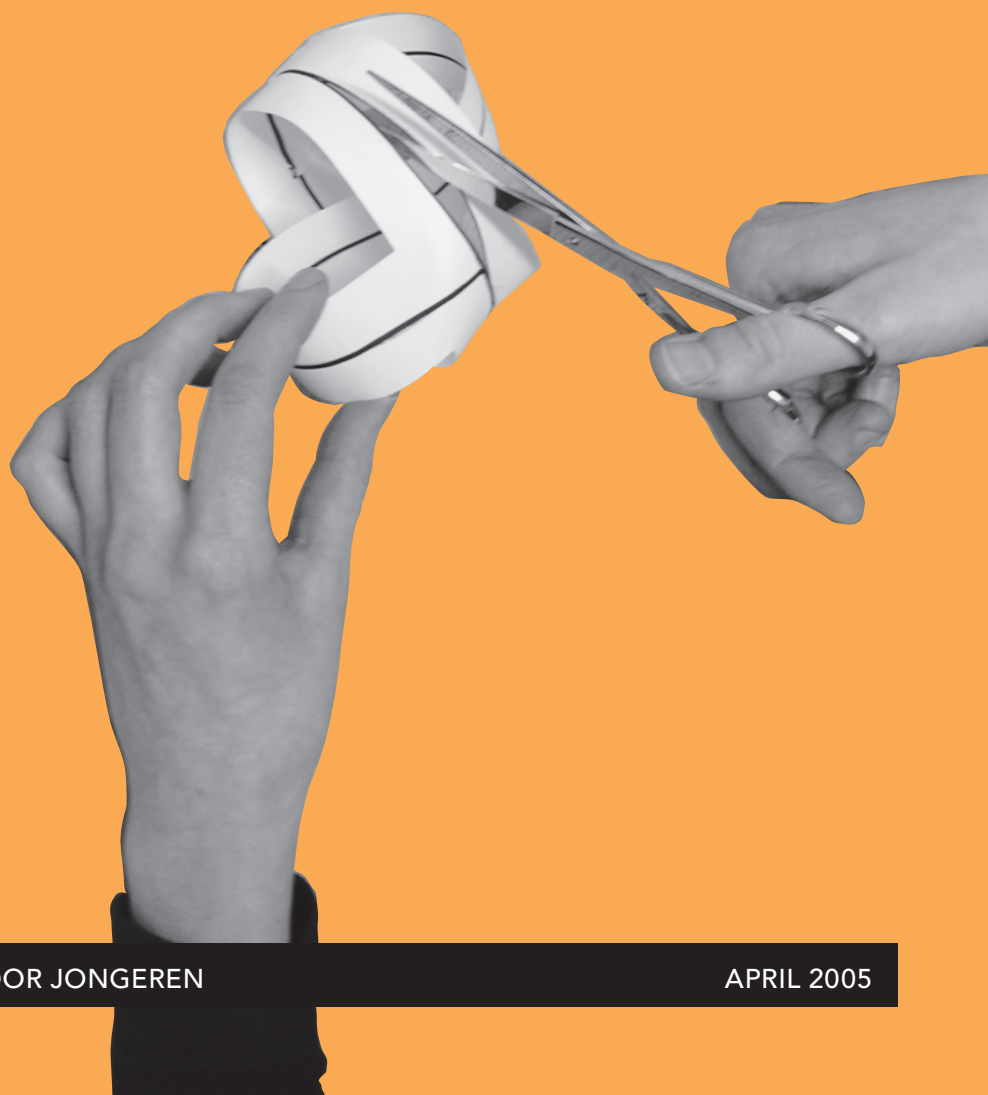




PYTHA GORAS



PYTHAGORAS

44ste jaargang nummer 5
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofredacteur

Marco Swaen

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom,
René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Reinie Erné

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster

Timon Idema

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41,
7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland),
€ 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@its.tudelft.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. L.A.M. van den Broek, docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen (vdbroek@math.ru.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), W. Joris, auteur van '100 Strategic Games for Pen and Paper' (walter.joris1@pandora.be), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), ir. I. Smeets, nationale PR-medewerker van de wiskunde (ionica@ch.tudelft.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Ca-landlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), E. Timmermans, onderzoeker van dissecties en rotaties in dissecties (trinitypuzzle@hotmail.com), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag

De slip van Klein

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ^o zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes ^{oo} heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes ^{ooo} gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:





INHOUD

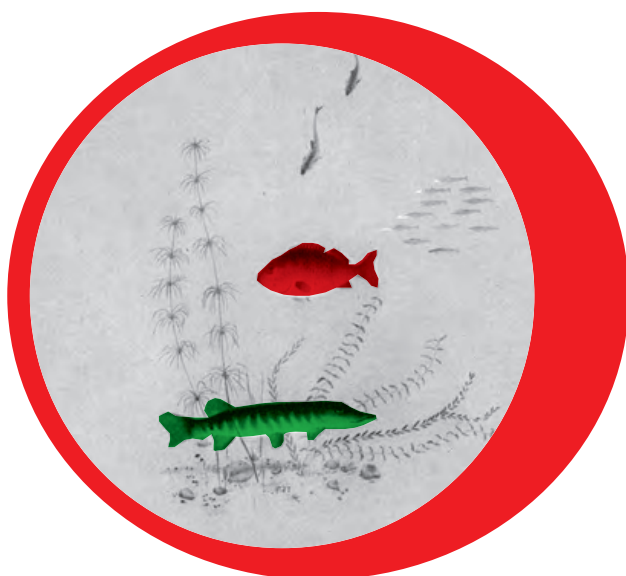
1

2 – 3	Kleine nootjes	18 – 20	Stenen van 1 bij n
4 – 5	Topologie met de handen	21	Journal
6 – 9	Vlakvullende krommen	22 – 23	Een schotel die liegt
10 – 11	De gehoornde sfeer van Alexander	24 – 25	Problemen – Oplossingen
12 – 13	Pen en papier	26 – 31	De stelling van Ramsey
14 – 15	Pythagoras Olympiade	32 – 33	Schoolroosters
16 – 17	Kubusdissecties met een bijzondere draai	33	Oplossingen
			Kleine nootjes nr. 4

**Kleine nootjes zijn puzzeltjes
die weinig of geen wiskundige
voorkennis vereisen om opgelost
te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het
volgende nummer van *Pythagoras*.**

Kleine nootjes

2



Aquariumbakken

We hebben twee kubusvormige aquariumbakken. De grootste is 10 bij 10 bij 10 cm en is voor de helft met water gevuld. De kleine bak van 8 bij 8 bij 8 cm is leeg en wordt in de grote tot op de bodem gedrukt. Hoeveel water komt er in de kleine bak?

Puzzel voor sluiswachters

Bij het schutten van hoog naar laag loopt een hoeveelheid water weg naar de lage kant. Is deze hoeveelheid afhankelijk van de grootte van het schip?



Planken leggen

We hebben planken die 3,60 meter en 3,80 meter lang zijn en 20 centimeter breed. Hoe kan daarmee een vloer van 4 bij 4 meter belegd worden zonder te zagen?



Waterniveau

Een man zit in een bootje in een vijver en werpt een gewicht van 50 kg over boord. Wat gebeurt er met het waterniveau in de vijver?

Klokken

Een antiquair verkocht twee klokken voor 480 euro elk. Op de een maakte hij 20% winst en op de ander 20% verlies. Maakte hij winst, leed hij verlies of speelde hij quitte?

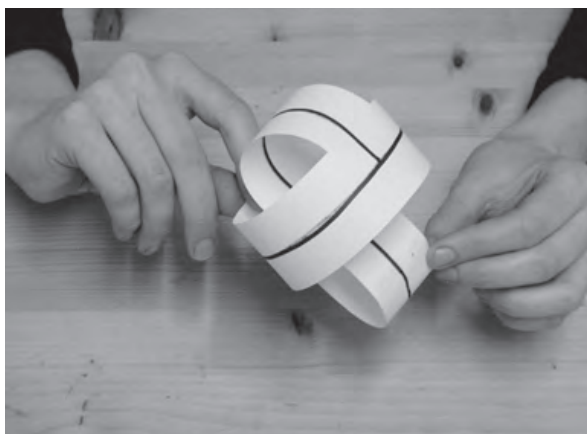


door **Marco Swaen**

Topologie met de handen

Aflevering **5** Knippen voor gevorderden

4



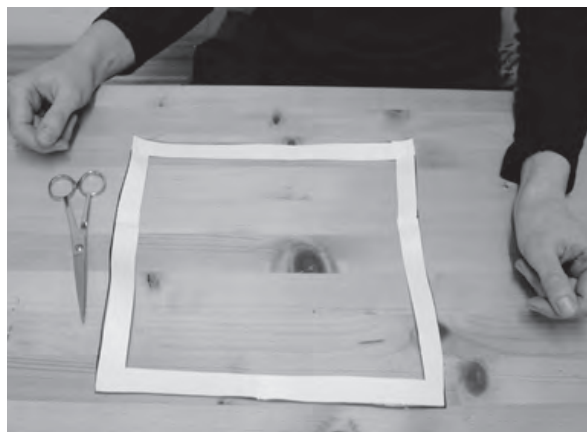
1 De *slip van Klein* ziet eruit als een modern vormgegeven onderbroek met een onverwachte slag erin.



2 Het zal je niet veel moeite kosten om de slip van papier te maken.



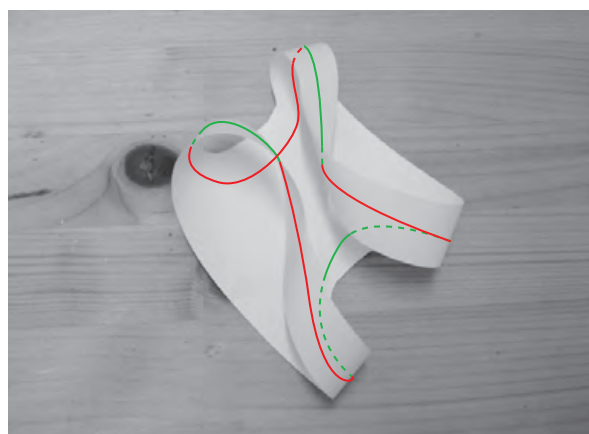
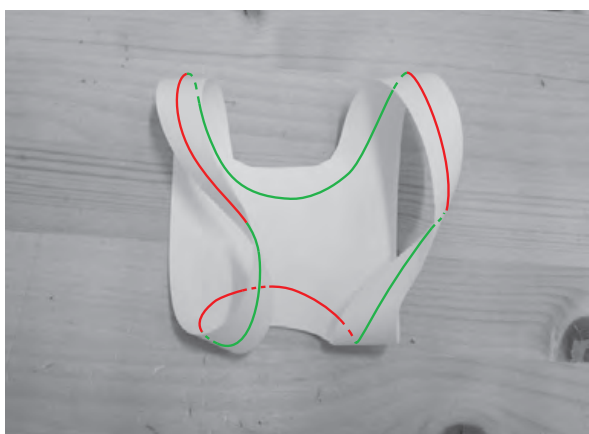
3a Knip de slip middendoor volgens de stippellijn.



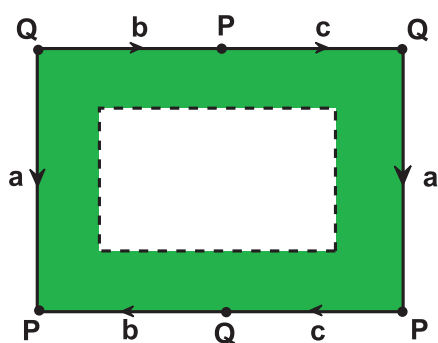
3b Je houdt dan deze rechthoek over!



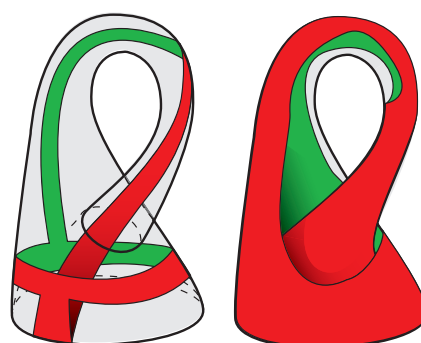
4 Probeer van de rechthoek maar weer eens de slip te maken.



5 Hier zijn nog twee knipopdrachten. Let goed op de verschillende slagen in de verbindingen.



6 Hier zie je de bouwplaat van de slip uitgaande van de rechthoek.



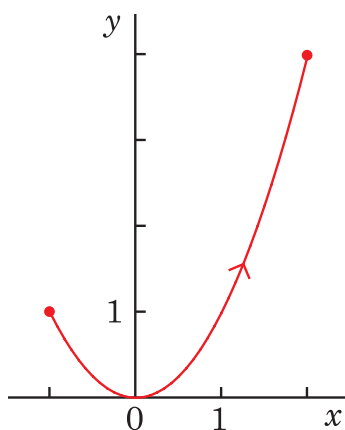
7 Topologisch is de slip een fles van Klein met een gat erin.

°° *Vlakovullende krommen*

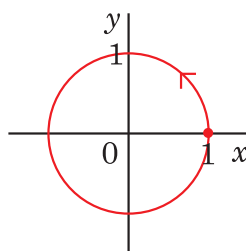
Al denken sommige mensen er anders over, wiskunde en fantasie gaan vaak hand in hand. Zeker in de topologie. Stel je lijnen voor als haarscherpe krassen, zo dun dat hun breedte 0 is. Hoe kun je met zo'n kromme dan ooit een heel oppervlak bedekken? Daar heb je zeker fantasie bij nodig.

6

De gebruikelijke methode om krommen in het vlak te beschrijven, is met behulp van *parametervergelijkingen*. Daarbij geef je voorschriften voor de x -coördinaat en de y -coördinaat als functie van de parameter t ; vaak is het handig om bij t aan de tijd denken. De voorschriften zijn altijd continue functies. Zo krijg je met $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, met $-1 \leq t \leq 2$ een stuk van de parabool $y = x^2$, zie figuur 1a. Als t van -1 naar $+1$ loopt, dan beweegt het corresponderende punt over de parabool van $(-1, 1)$ naar $(2, 4)$.



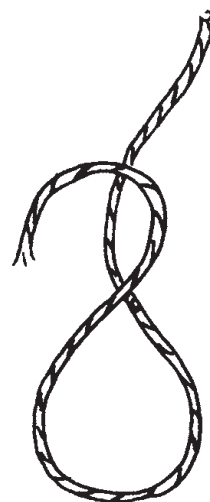
Figuur 1a



Figuur 1b

Een ander voorbeeld: met $x(t) = \cos 2\pi t$ en $y(t) = \sin 2\pi t$, waarbij t het interval $[0, 1]$ doorloopt, krijg je de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1, zie figuur 1b. Dit is een gesloten kromme.

Wat we hier zien klopt helemaal met het intuïtieve beeld van een kromme. Als je een stuk touw nonchalant neerlegt, dan krijg je een kromme, iets typisch 1-dimensionaals, zie figuur 1c.



Figuur 1c

Maar als je het volle vierkant met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en $(0, 1)$ wilt beschrijven, dan doe je dat meestal zo: het volle vierkant zijn alle (x, y) met $0 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y \leq 1$. De waarden van x en y kunnen onafhankelijk van elkaar veranderen en hangen dus niet van een gemeenschappelijke t af. Heb je om het volle vierkant te beschrijven dan twee parameters nodig? Zo'n honderdtwintig jaar geleden dacht iedereen nog dat je voor de beschrijving van een vlakke figuur (zoals het volle vierkant) inderdaad altijd twee parameters nodig had. De redenering daarbij was als volgt: die figuren zijn 2-dimensionaal en daarbij horen twee parameters. Op eenzelfde wijze heb je voor de beschrijving van een volume drie parameters nodig. Maar is dat nou wel zo?

Peano-krommen

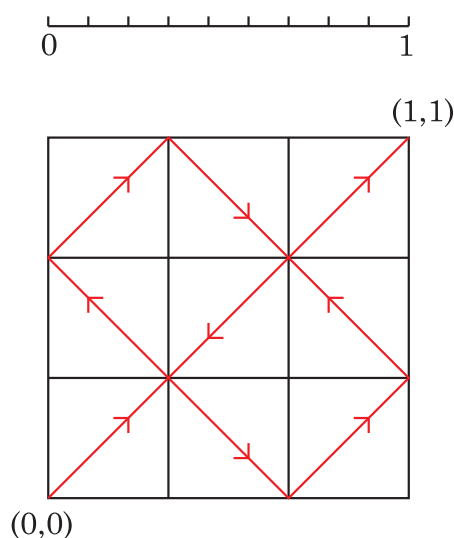
In 1890 publiceerde G. Peano in het tijdschrift *Mathematische Annalen*, Band 36, p. 157-160, een artikel met de titel *Sur une courbe, qui remplit une aire plane* (Over een kromme die een vlak gebied opvult). Het artikel beschrijft een continue afbeelding f van een interval $I = [0, 1]$ op het volle vierkant $W = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, een *vlakvullende kromme* geheten. Tegenwoordig kijken we nergens meer van op, maar in die tijd kwam dit als een schok. Je kunt een vierkant als kromme beschrijven, dus met één parameter. Maar een vierkant is 2-dimensionaal! Er is dus geen direct verband tussen het aantal parameters en de dimensie!

Het voorbeeld van Peano prikkelt natuurlijk wel de fantasie. Er zijn in de loop der tijden veel voorbeelden van continue functies van het interval I naar het volle vierkant W gemaakt. We zullen nu een voorbeeld van zo'n continue afbeelding van I naar W geven. Zodra je over die afbeelding beschikt, kun je zelf een continue afbeelding maken van de reële rechte $\mathbf{R}$ op het vlak $\mathbf{R}^2$.

Zigzaggend door het vierkant

We maken een continue afbeelding f van I op W met een limietproces. Daartoe maken we een rij van afbeeldingen $f_0, f_1, f_2, \dots$ van I naar W , die steeds beter gaan lijken op de afbeelding f van I op W ; de opeenvolgende krommen vullen het vierkant W steeds beter op.

De eerste afbeelding f_0 is gegeven door de formule $f_0(t) = (t, t)$. Door f_0 wordt het interval I uitgerekt met een factor $\sqrt{2}$ en op de diagonaal van het vierkant W gelegd. Om de volgende afbeelding f_1 te beschrijven, verdelen we het interval I in negen deelintervallen van gelijke lengte met behulp van de deelpunten $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}, 1$. Het vierkant W verdelen we in negen deelvierkanten van gelijke oppervlakte door middel van de deellijnen $x = 0, x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}, x = 1$ en $y = 0, y = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, y = 1$. Zie figuur 2.



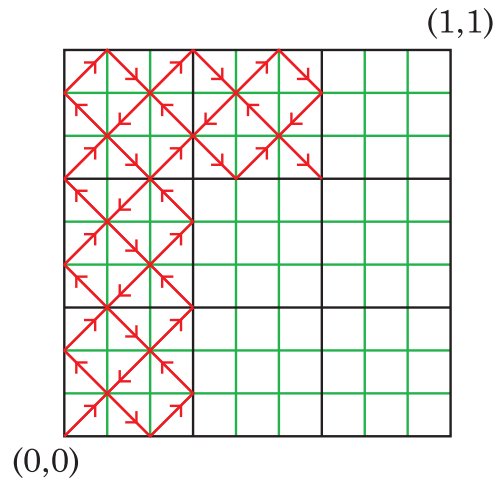
Figuur 2

In de onderstaande tabel beschrijven we wat f_1 doet met de deelpunten van I .

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	1
$f_1(x)$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(0, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}, 0)$	$(1, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(1, 1)$

Een interval tussen twee opeenvolgende deelpunten wordt uitgerekt met een factor $3\sqrt{2}$ en gelegd op de verbindinglijn tussen de beelden onder f_1 van die deelpunten, zie de rode lijnen in figuur 2. Als t het interval I doorloopt, gaat $f_1(t)$ zigzagsgewijs door W . In figuur 3 staan de grafieken van de x - en y -coördinaten van $f_1(t)$; we geven deze aan met $x_1(t)$ en $y_1(t)$. De kromme f_1 loopt zigzagsgewijs van linksonder (het punt $(0,0)$) naar rechtsboven (het punt $(1,1)$). Op dezelfde wijze kun je ook varianten maken van f_1 , namelijk afbeeldingen die lopen van rechtsboven naar linksonder, of van linksboven naar rechtsonder, of van rechtsonder naar linksboven.

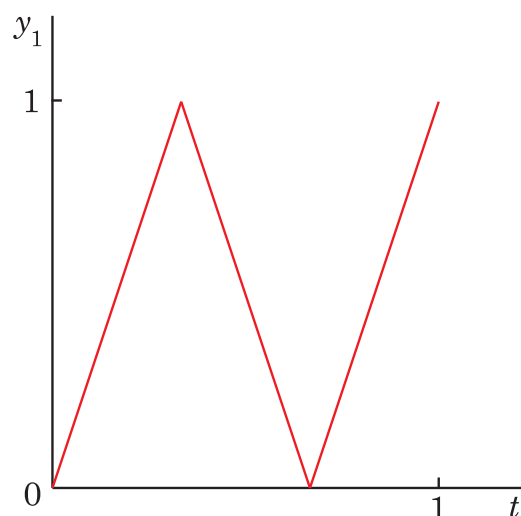
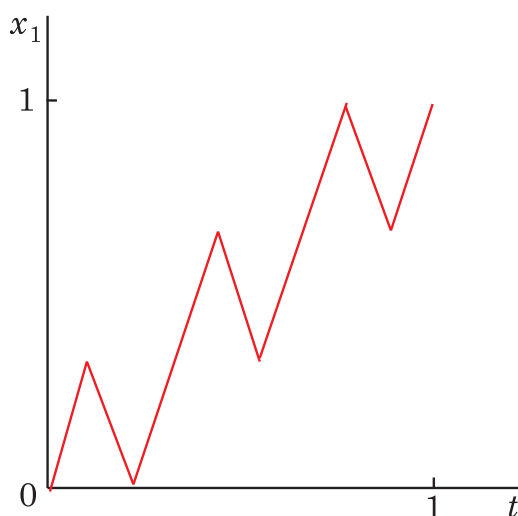
Om de afbeelding f_2 te maken, delen we het interval I in 81 intervallen van gelijke lengte en het vierkant W in 81 vierkanten van gelijke oppervlakte. Daarbij wordt elk van de negen deelintervallen van I die bij f_1 gebruikt werden weer in negen intervallen verdeeld en wordt elk van de negen vierkanten bij f_1 gebruikt werden weer in negen vierkanten verdeeld, zie de groene lijnen in figuur 4. Bij f_1 werd ieder van de negen deelintervallen afgebeeld op een diagonaal van een van de negen vierkanten; om f_2 te maken vervangen we die afbeelding door een kopie van de afbeelding f_1 of een variant daarvan, maar dan op een kleinere schaal.



Figuur 4

Als je naar figuur 4 kijkt, dan zie je het begin van de afbeelding f_2 (in rood) en dan is het meteen duidelijk hoe je f_2 kunt maken. Om f_2 uit f_1 te maken, ga je te werk als bij *fractals*: op elk van de negen deelintervallen die bij f_1 zijn gebruikt, herhaal je de constructie van f_1 of een variant daarvan, maar dan op een kleinere schaal. Merk op dat $f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = (0, 0)$, dat $f_0(1) = f_1(1) = f_2(1) = (1, 1)$, en dat $f_1(\frac{k}{9}) = f_2(\frac{k}{9})$ voor alle $k = 2, \dots, 8$. Door dit proces te herhalen, krijg je de rij afbeeldingen $f_0, f_1, f_2, \dots$. Deze afbeeldingen komen steeds dichterbij een limiet f ; dat is de gezochte afbeelding van I op W .

Dat f alle gewenste eigenschappen heeft,



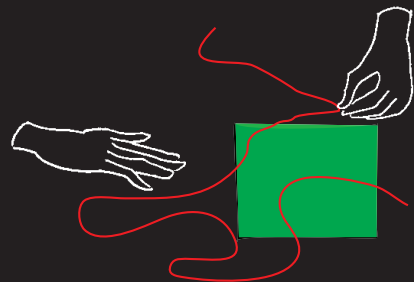
Figuur 3

is te lastig om hier precies te bewijzen. Met de volgende opmerkingen probeer ik enig gevoel te geven voor een bewijs. Door f_n wordt elk van de 9^n intervalletjes, waarin I verdeeld is, afgebeeld naar een vierkantje van $(\frac{1}{3})^n$ bij $(\frac{1}{3})^n$. Hetzelfde geldt voor de limietfunctie f . Daaruit volgt de continuïteit van f . Om in te zien dat ieder punt van W als beeld optreedt, nemen we een punt q uit W in het oog. Kies nu een van de negen vierkanten die bij f_1 gebruikt zijn waartoe

q behoort en noem dat vierkant V_1 . Zoek vervolgens het deelinterval uit I dat naar dit vierkant werd afgebeeld door f_1 en noem dat I_1 . Kies vervolgens binnen V_1 een van de 81 vierkantjes die bij f_2 gebruikt werden waartoe q behoort en noem dat V_2 . Hierbij hoort binnen I_1 weer een intervalletje I_2 dat naar V_2 wordt afgebeeld. Zo voortgaande krijgen we een krimpende rij intervallen $I_1, I_2, \dots$ in I . Deze rij heeft precies één gemeenschappelijk punt p en er geldt dat $f(p) = q$.

Recept

Fil en carré



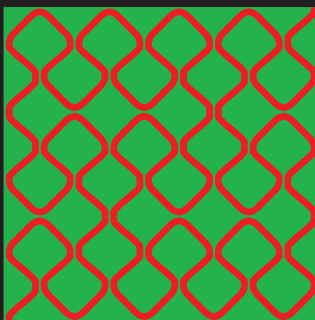
Benodigheden:

- een vierkant
- een stuk rekbaar touw zonder dikte

Bereidingswijze:

Neem het touwtje en leg het diagonaal over het vierkant.

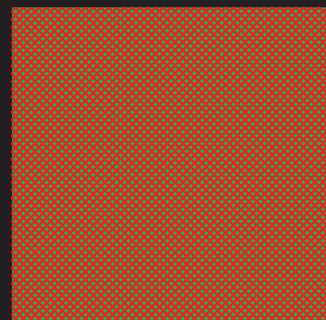
Rek het touw uit en leg er bochten in.



Rek het weer verder uit, en maak er weer bochten in.



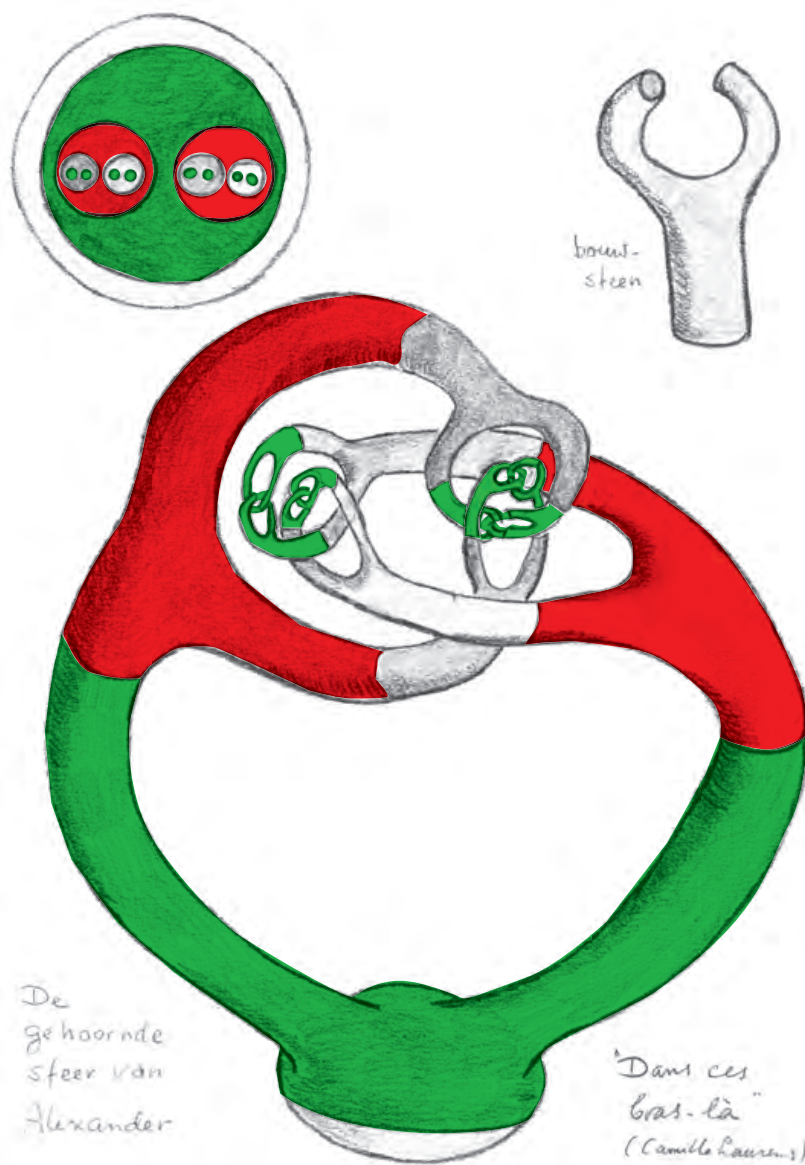
Als je dit proces oneindig vaak herhaalt...



...zal het touw het hele vierkant bedekken!

door J.M. Aarts

°De gehoornde sfeer van Alexander

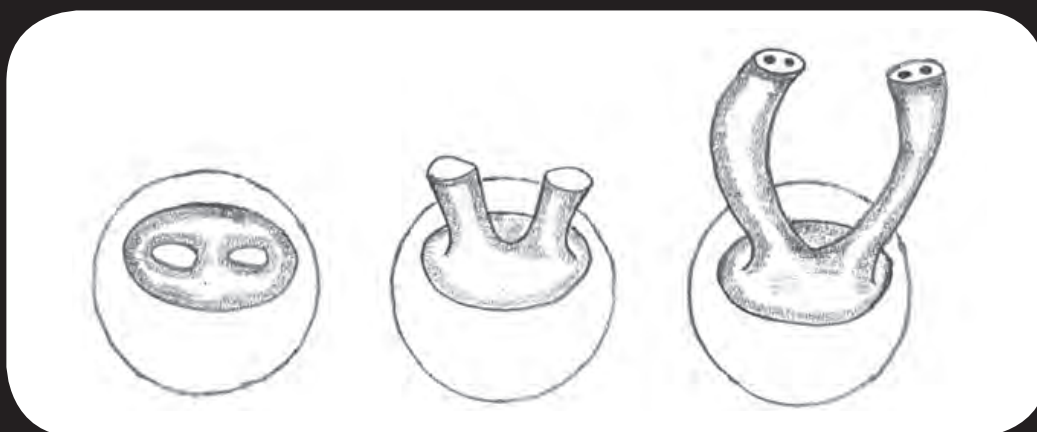


Kun je een *sfeer* in de knoop leggen? Een gekke vraag misschien, maar wel een met een verrassend antwoord. Een *sfeer* is het oppervlak van een bol. De bol is een 3-dimensionaal object met inhoud, maar de *sfeer* is de rand van de bol. De *sfeer* is 2-dimensionaal en heeft een oppervlakte. In dit artikel zullen we een topologische kopie maken van een *sfeer* met heel bijzondere eigenschappen. Deze kopie staat bekend als de *gehoornde sfeer van Alexander*, de *sfeer* met hoorns, je mag wel zeggen met een prachtig gewei. De *gehoornde sfeer* en de gewone *sfeer* hebben topologisch gezien dezelfde vorm; zij zijn homeomorf. De *gehoornde sfeer* behoort tot de familie van de *wilde sferen*.

In de tekening hieronder zie je links een bol met daarop *getekend* een cirkelschijf met twee gaten. Voor het gemak zullen we de cirkelschijf met twee gaten een *bril* noemen; de gaten in de bril noemen we de *glazen*. De sfeer bestaat dus uit een cirkelschijf, een bril en de twee glazen. Nu beginnen wij met de bril te vervormen, zodat het lijkt alsof de sfeer armen krijgt, zie het middelste plaatje in de tekening. De oorspronkelijke bril en de vervormde bril zijn topologisch hetzelfde. Vervolgens buigen we de armen naar elkaar toe. Op elk van de twee glazen tekenen we weer twee cirkelschijfjes, zie het meest rechtse plaatje. Zo krijgen we aan de uiteinden van de armen twee (zonne)brilletjes met in totaal vier glaasjes. De figuur die we zo

gekregen hebben, is topologisch nog steeds een sfeer. Dit proces gaan we herhalen. Elk van de twee brilletjes gaan we op eenzelfde manier vervormen als de eerste bril en zorgen ervoor dat elk paar armen het andere paar armen bijna gaat omarmen! In de figuur op de linker pagina is heel goed te zien wat we hiermee bedoelen. Deze tekening komt uit mijn schetsboek. Behalve de gehoornde sfeer zie je ook nog de oorspronkelijke sfeer en de fundamentele bouwsteen van de gehoornde sfeer.

We blijven dit vervormingsproces, waarvan we nu twee stappen hebben gedaan, onbeperkt herhalen. In de derde stap vervormen we de vier brilletjes tot acht armpjes en in de vierde stap vervormen we



acht brilletjes, die elkaar meer en meer gaan omarmen. In de tekening kun je vier stappen van het proces zien. Ook kun je zien hoe de correspondentie is tussen de brilletjes op de oorspronkelijke sfeer en de vervormde brilletjes in de gehoornde sfeer. Het uiteindelijke resultaat is een topologische kopie van de sfeer, maar wel een heel wilde kopie.

Dit voorbeeld is bedacht door J.W. Alexander in 1924. Wat is nu zo wild aan dit voorbeeld? Het gekke hier is de manier waarop de sfeer van Alexander in de ruimte ligt. Het buitengebied van deze sfeer is anders dan bij een gewone sfeer. Als je een gewone sfeer bekijkt en er ligt een elastiekje op die sfeer, dan kun je dat elastiekje zonder enig probleem van de sfeer weg halen. Maar stel je eens voor dat er een elastiekje rond een van de armen van de sfeer van Alexander zit. Als je op de sfeer zou leven, dan zou

je denken dat het elastiekje gewoon op de sfeer ligt. Maar je kunt dat nooit los krijgen van de sfeer! Als je je probeert voor te stellen hoe je het elastiekje weg moet halen, dan zie je dat het elastiekje steeds meer verward raakt in de kleiner en kleiner wordende armpjes, maar er nooit omheen komt. Deze sfeer zit in de knoop!

Wat deftiger zegt een topoloog dit zo: een gebied in de ruimte wordt *enkelvoudig samenhangend* genoemd als je ieder elastiekje binnen dat gebied kunt samentrekken.

Het buitengebied van een gewone sfeer is enkelvoudig samenhangend, maar het buitengebied van de sfeer van Alexander is dat niet. Dat is dus de clou: de gewone sfeer en de sfeer van Alexander zijn topologisch hetzelfde (homeomorf), maar hun buitengebieden in de ruimte zijn het niet.

door **Walter Joris**



In deze vijfde aflevering van pen-en-papier-spelen legt Walter Joris het spel Grupo uit. Het enige dat je nodig hebt, is een tegenstander, ruitjespapier en ieder een pen.

We beginnen met een veld van 6 x 6, met zwarte en witte pionnen, zoals in figuur 1. De hoekvelden zijn uitgesloten, vandaar de kruisen. Per beurt mag je één van je pionnen horizontaal of verticaal verplaatsen. Het aantal hokjes daarbij moet gelijk zijn aan het totaal aantal pionnen (wit en zwart) dat in de rij staat waarin de stappen gezet worden. Hebben we in een rij bijvoorbeeld één zwarte pion, dan een leeg veld, en dan twee witte pionnen, dan moet zwart drie verschuiven. Dit mag alleen *recht* gebeuren, dus niet diagonaal. De pion blijft óók op zijn oude plaats staan.

Bekijk de situatie van figuur 2a: zwart bevindt zich in een rij met in totaal drie pionnen, en mag dus alleen drie hokjes verschuiven. Doet hij dat, dan komt hij terecht op een witte pion, zie figuur 2b. Die witte wordt dan doorgekruist. Er zijn dan nog twee pionnen over. Nu moet wit dus in deze rij twee ver springen. Wit mag natuurlijk ook volgens de verticale kolom springen, of met een andere witte pion. In figuur 2c zie je de situatie waarbij wit ervoor kiest om de zwarte pion van figuur 2b te vernietigen.

Het is toegestaan om op een eigen pion te landen om deze te vernietigen. Op een doorgekruist veld kan natuurlijk nooit meer gespeeld worden. Je mag er wel overheen springen.

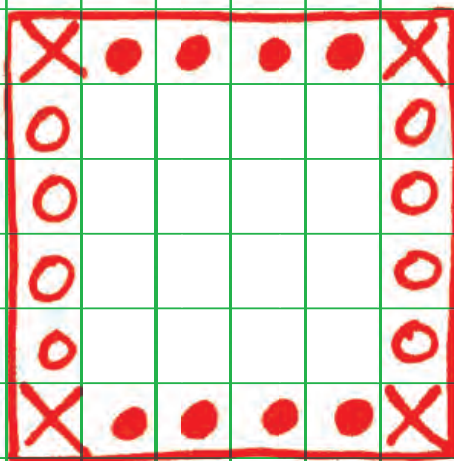
De bedoeling van het spel is niet elkaar te vernietigen, maar als eerste een *aaneengesloten groep* te maken. Die moet bestaan uit een ketting van *alle* levende pionnen van de eigen kleur. Dat moeten er wel minimaal twee zijn. De aaneensluiting van zo'n ketting mag ook diagonaal lopen. Tactisch is het dus belangrijk om geïsoleerde eigen pionnen eigenhandig op te ruimen!

Voorbeelden

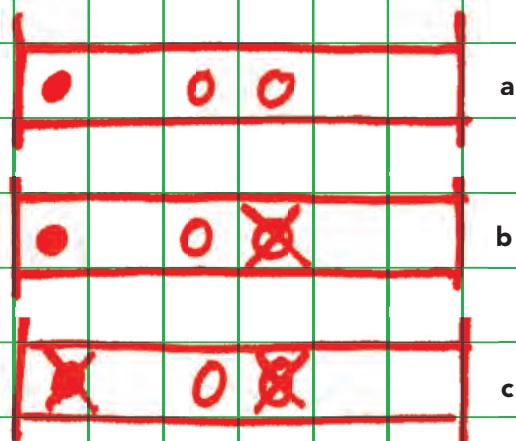
Bekijk de situatie in figuur 3a. Zwart moet zijn bovenstaande pion in 1 vernietigen om een aaneengesloten groep te hebben. Anders is het gelijk spel, want wit is kansloos geworden. Zwart speelt van 1 naar 2 (twee pionnen in de kolom). Dan zijn er drie in de kolom, en kan hij in de volgende beurt dus van 3 naar 1 en daarmee 1 vernietigen. De situatie die nu is bereikt, zie je in figuur 3b. Toch kan wit een poging doen de zwarte groep alsnog te verbreken, door op de een na onderste rij te spelen. Daar zijn twee pionnen: wit en zwart. Wit kan dus op zwart spelen, en die vernietigen. Maar dan springt zwart van 4 twee naar beneden, en vernietigt de middelste van de onderste drie zwarte pionnen. De huidige situatie zie je in figuur 3c. Tot slot kan de zwarte steen in 4, die nu verder alleen staat, één vakje zakken. Dan heeft zwart een ketting, en heeft dus gewonnen.

In figuur 4 zie je een andere eindstand. Zwart wint, want hij heeft een ketting.

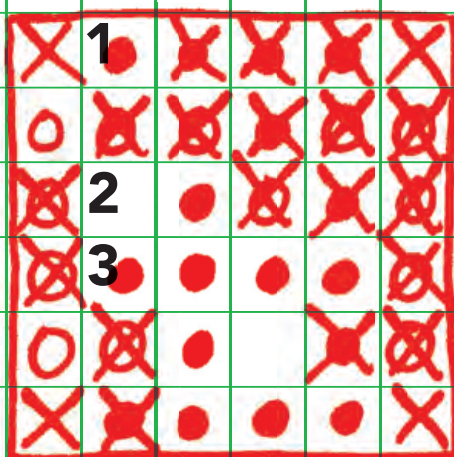
Bron: *100 Strategic Games for Pen and Paper*, Walter Joris, uitgegeven door Carlton, Londen. ISBN: 1-84222-727-0.



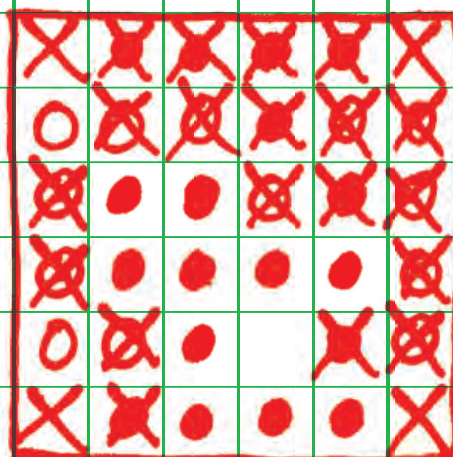
Figuur 1



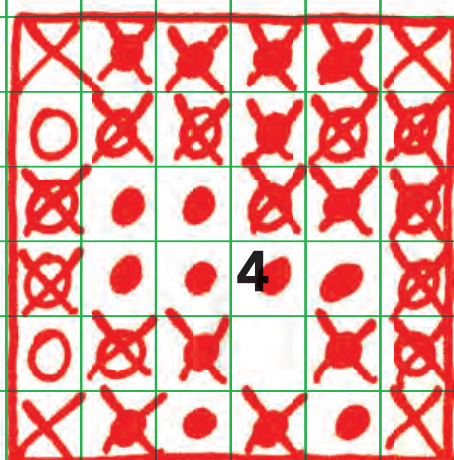
Figuur 2



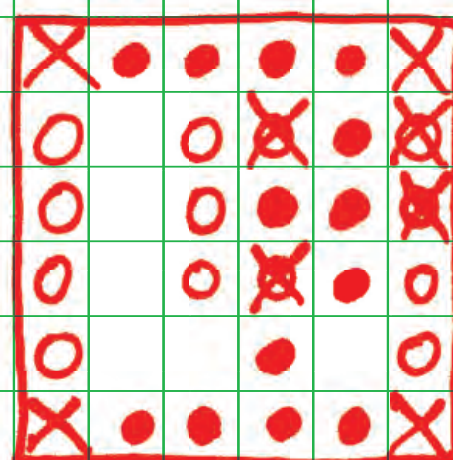
Figuur 3a



Figuur 3b



Figuur 3c



Figuur 4

°Pythagoras Olympiade

door Thijs Notenboom, Allard Veldman
en René Pannekoek

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

14

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 mei 2005.

OPGAVE

118

Vind alle vijftallen positieve gehele getallen (ze hoeven niet allemaal verschillend te zijn) waarvoor het product van de vijf getallen gelijk is aan de som.

OPGAVE

119

Alex, Bart, Carla en Dirk moeten de komende acht weken elk twee keer een spreekbeurt houden. Elke week is één van hen aan de beurt. Verder wil niemand in twee achtereenvolgende weken een spreekbeurt houden. Op hoeveel manieren kunnen de leerlingen ingedeeld worden?



OPLOSSING

114

De rij van Fibonacci, waarvan de elementen genoteerd worden met F_i ($i \geq 0$), wordt als volgt geconstrueerd: $F_0 = F_1 = 1$, en voor $i \geq 2$ geldt $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Bewijs dat er voor elk positief geheel getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n .

Oplossing. Laat n een positief geheel getal zijn. We bekijken de rij nu *modulo* n (we vervangen elk getal door de rest bij deling door n ; zie eerdere nummers van *Pythagoras* voor meer details over modularekenen). Omdat er slechts n verschillende resten kunnen voorkomen en twee resten na elkaar dus in n^2 verschillende paren kunnen komen, moet er op een gegeven moment een tweetal opeenvolgende resten zijn dat al eerder in die volgorde is opgetreden. Omdat elk getal door de twee voorgaande bepaald wordt, zijn alle getallen vanaf dat moment hetzelfde als eerder in de rij en is de rij dus *periodiek* (dezelfde reeks getallen wordt steeds herhaald). Om te bewijzen dat het getal 0 (de rest van een getal dat deelbaar is door n) oneindig vaak voorkomt, hoeven we dus slechts te bewijzen dat het één keer voorkomt. Dit is te zien door de rij van Fibonacci aan de voorkant aan te vullen: voor het eerste getal zou dan een getal komen dat met F_0 opgeteld F_1 zou opleveren, en omdat $F_0 = F_1 = 1$, zou dit 0 moeten zijn. Hiermee is bewezen dat er oneindig veel veelvouden van n in de rij van Fibonacci optreden.

Deze opgave werd goed opgelost door: Johannes Steenstra van het **Driestar College** te Gouda en Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam. De boekenbon gaat naar Johannes Steenstra.

OPLOSSING

115

Twee cirkels van straal r_1 en r_2 , waarvan de middelpunten afstand d tot elkaar hebben, snijden elkaar in de punten X en Y . Een rechte lijn door X snijdt de twee cirkels behalve in X in de punten P en Q . Vind de grootste lengte die het lijnstuk PQ kan aannemen.

Oplossing. Laat vanuit de middelpunten M_1 en M_2 van de twee cirkels loodlijnen op PQ neer en noem de voetpunten hiervan respectievelijk R en S . Omdat R het midden van PX is en S het midden van XQ , is $PQ = 2 \cdot RS$. RS is echter de projectie van M_1M_2 op PQ , en is dus hoogstens gelijk aan M_1M_2 . De maximale lengte van PQ verkrijgen we dus door de lijn door X evenwijdig met M_1M_2 te trekken en is gelijk aan $2 \cdot M_1M_2 = 2d$.

Deze opgave werd goed opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie.



In het vorige nummer lieten we zien hoe je van een kubus met ribbe 6 drie kubussen met ribben 3, 4 en 5 kunt maken. De twee dissecties die we deze keer zullen laten zien, hebben de extra bijzonderheid dat je, om de stukken uit elkaar te halen, een draaiing moet uitvoeren waarbij de draaiings-as verschuift.

°Kubusdissecties met een bijzondere draai

Een draai in de 6-kubus

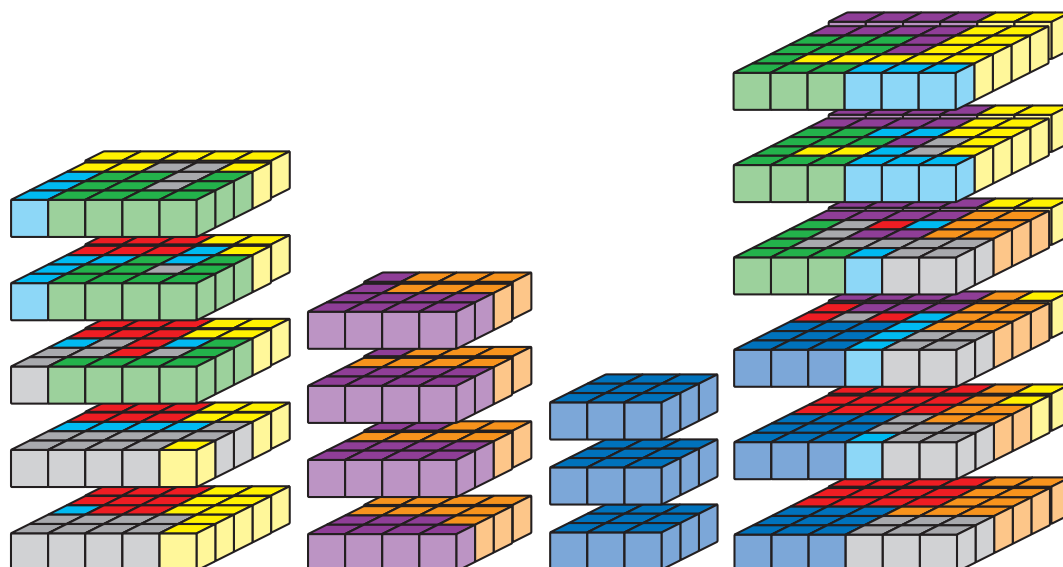
In de figuur hieronder zie je hoe de eerste dissectie die we bespreken, in elkaar zit (de lagen van de kubussen zijn los van elkaar getekend, zodat elk blokje te zien is). De kubus met ribbe 5 (die we voortaan kortweg aanduiden als de 5-kubus) is niet bijzonder interessant. De draaiing waar het om gaat, is nodig om de 6-kubus uit elkaar te halen, en vindt plaats tussen het lichtblauwe en het grijze stuk. Eerst verwijder je het rode, het donkerblauwe en het groene stuk. Vervolgens het paarse, dan kan het gele eruit en tenslotte het oranje stuk. Zo blijven het lichtblauwe en het grijze stuk over. Om deze stukken zo duidelijk mogelijk weer te geven, is in figuur 1 de vierde laag van de 6-kubus getekend. In het vierde plaatje zie je dat de draai mogelijk is, want $\frac{1}{2} + \sqrt{2} < 2$. De draai-

ing vindt plaats in het horizontale vlak. Na de draaiing kan het grijze stuk in verticale richting worden verwijderd.

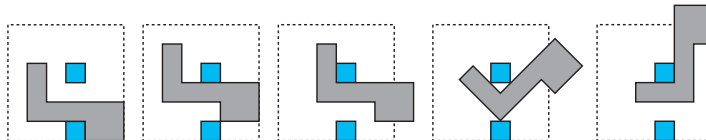
Als je de draaiing wilt uitproberen, kun je het blauwe en het grijze stuk van Lego™ maken. Wanneer je de hele 6-kubus van Lego™ maakt, is het helaas niet mogelijk om de drie kleinere kubussen te maken. Dat komt doordat je met Lego™ geen echte kubus kunt bouwen (op de website van *Pythagoras* vind je enige informatie over het gebruik van Lego™ bij zulke dissecties).

Een draai in de 5-kubus

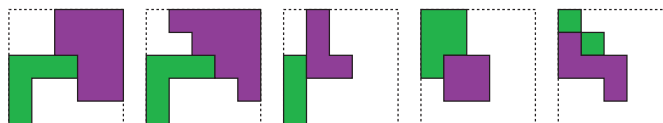
De rotatie in de volgende puzzel is wiskundig gezien veel interessanter. Hij vindt plaats in de 5-kubus, tussen het groene en het paarse stuk. De dissectie is onderaan pagina 17 afgebeeld. Na verwijdering van het rode,



Figuur 1 De draaiing, zoals die in de vierde laag van de 6-kubus van de eerste puzzel plaatsvindt



Figuur 2 Het groene en het paarse stuk van de 5-kubus van de tweede puzzel



Figuur 3 De draaiing van het groene en het paarse stuk

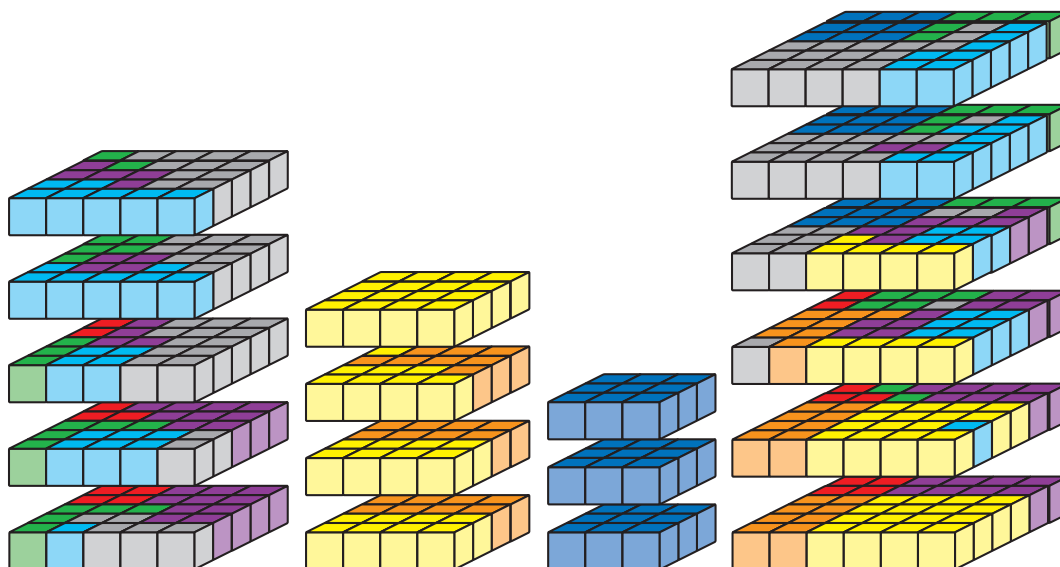


lichtblauwe en grijze stuk (eerst omhoog, dan opzij), blijven het groene en het paarse stuk over. In figuur 2 zie je deze stukken; het meest linkse vierkant is de onderkant van de kubus en het meest rechtse vierkant de bovenkant.

Beschouw de rand links-voor als lijn $(0, 0, z)$ en kies dan als rotatie-as $(2, 3, z)$. Het paarse stuk kan dan bijna overal zonder problemen tegen de wijzers van de klok in draaien. Alleen in het derde vierkant is er een probleem, namelijk in de as $(1, 3, z)$. Hier treedt links van paars een tekort aan ruimte op, wanneer je om de as $(2, 3, z)$ draait. Gelukkig ontstaat er rechts van paars een overschot aan ruimte, dat is te zien in de lijn $(3, 3, z)$ in het eerste en tweede vierkant. Je kunt het tekort links van paars en het overschot rechts van paars

berekenen. Stel dat je 45 graden gedraaid hebt; het tekort aan ruimte is dan $\sqrt{2} - 1$ links van paars, terwijl het overschot rechts van paars precies hetzelfde is! Bij draaiing over hoek α , blijkt zowel het tekort links als het overschot rechts precies $1 / \cos \alpha - 1$ te zijn. Wanneer je tijdens het draaien over hoek α zorgt dat de rotatie-as precies $1 / \cos \alpha - 1$ naar rechts schuift, dan kunnen het paarse en het groene stuk zonder problemen uit elkaar! In figuur 3 is de draaiing uitgevoerd. Ben je niet overtuigd, probeer het dan zelf uit door de twee stukken van Lego™ te maken.

Op de website van *Pythagoras* vind je nog een derde puzzel, waarin de 5-kubus zo leuk is, dat ik niet ga verklappen hoe hij uit elkaar gaat. Maak de hele 5-kubus van Lego™ en ontdek het zelf!





door Leon van den Broek

° Stenen van 1 bij n

Leonardo legt met stenen van 1 bij 6 een rechthoek. Wat kunnen de afmetingen van die rechthoek zijn? Leon van den Broek geeft in dit artikeltje antwoord op deze vraag.



Figuur 1
Een rechthoek van 9 bij 16, met zes kleuren

De oppervlakte van een rechthoek gelegd met stenen van 1×6 is een zesvoud; dat spreekt voor zich. Als Leonardo de stenen allemaal in dezelfde richting aan elkaar past – zoals metselaars het noemen ‘zonder verband’ – dan krijgt hij een rechthoek waarvan de lengte of breedte een zesvoud is. Is het mogelijk dat Leonardo, door de stenen op een slimmere manier te gebruiken, ook nog andere rechthoeken krijgt? Zoals een rechthoek van 9×16 , waarvan lengte noch breedte een zesvoud is, maar de oppervlakte wel. Dan kan hij de stenen niet allemaal in dezelfde richting leggen en wordt het een interessante puzzel.

9 x 16 kan niet

Heb je genoeg stenen zoals Leonardo, dan zou je het kunnen uitproberen. Heb je ze niet, dan komt dat op zich niet slecht uit, want een 9×16 rechthoek is namelijk niet te leggen. Dat kun je zo inzien: neem zes kleuren en kleur de hokjes in een 9×16 rechthoek in schuine banen zoals in figuur 1. Elk 1×6 steentje zal dan precies van elke kleur één hokje bedekken. Dus er moeten van elke kleur evenveel hokjes zijn. En dat is niet zo, want – tel maar na – in de rechthoek zijn er 23 rood, en slechts 22 blauw.

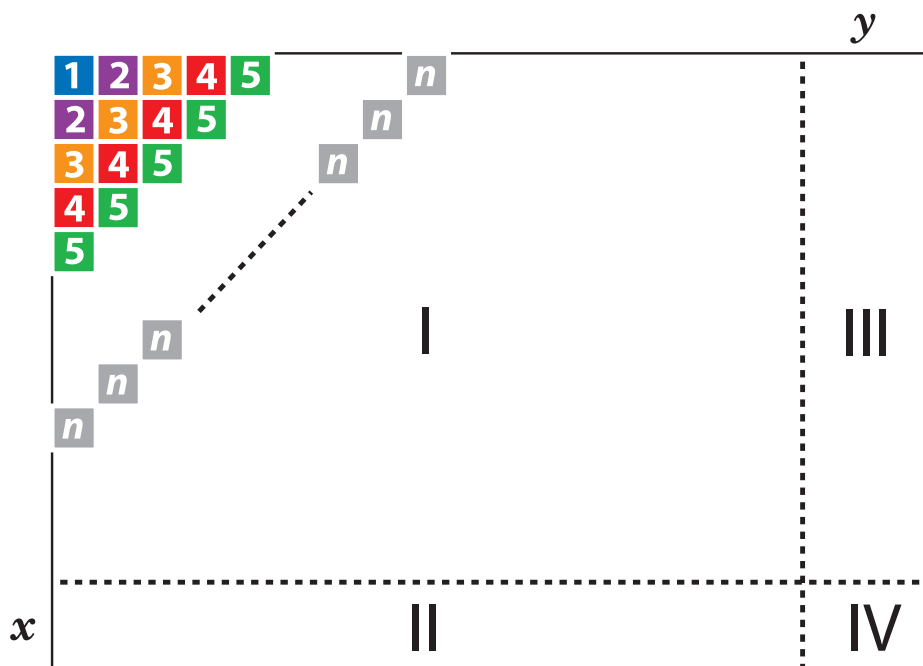
Lengte of breedte een n -voud

We kunnen de zaak nog wat algemener bekijken: neem stenen van $1 \times n$ en een rechthoek waarvan de lengte en de breedte beide geen n -voud zijn. Dan kan die rechthoek nooit met de $1 \times n$ stenen gelegd worden.

We gaan weer te werk zoals hierboven. Kleur de rechthoek in schuine banen, met n verschillende kleuren, beginnend linksboven, zoals in figuur 2 (de kleuren zijn genummerd $1, 2, \dots, n$). Omdat een $1 \times n$ steen altijd van elke kleur één hokje bedekt, moet de rechthoek van elke kleur evenveel hokjes hebben, wil hij met $1 \times n$ stenen gelegd kunnen worden.

Laat x en y de resten zijn van de lengte en de breedte bij deling door n . Dan geldt: $0 < x < n$ en $0 < y < n$.

We verdelen de rechthoek in vier stukken, zoals in figuur 2. De stukken I, II en III hebben inderdaad van elke kleur evenveel hokjes (kun je dat beredeneren?). We gaan aantonen dat stuk IV nooit van elke kleur evenveel hokjes kan hebben. Dan weten we dus dat Leonardo alleen maar flauwe puzzels kan maken, namelijk puzzels waarvan de lengte of breedte een n -voud is.

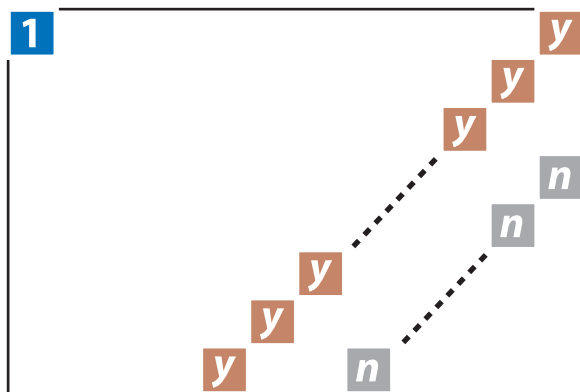


Figuur 2

De stukken I, II en III hebben van elke kleur evenveel hokjes, maar stuk IV niet

In figuur 3 staat stuk IV uitvergroot. Stuk IV begint linksboven weer met kleur 1 (kun je dat beredeneren?). Stel dat $y \geq x$. We gaan het aantal hokjes van kleur y vergelijken met het aantal hokjes van kleur n . In totaal zijn er in stuk IV xy hokjes, verdeeld over $x + y - 1$ schuine banen; dat zijn er hoogstens $2n - 3$.

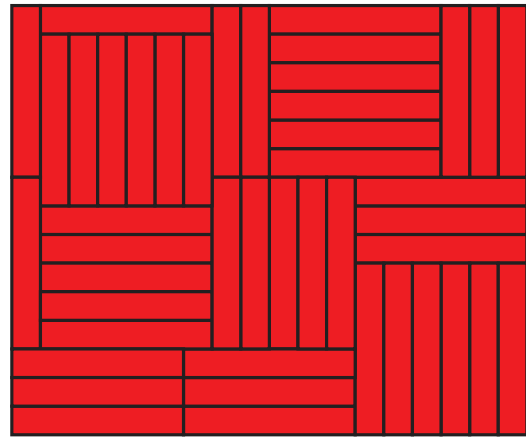
Kleur n komt dus maar in hoogstens één schuine baan voor. Die baan komt na de y -de baan en telt dus niet meer dan $x - 1$ hokjes. Kleur y komt in de y -de baan voor die x hokjes telt. Kleur n komt dus minder vaak voor dan kleur y . Mocht $y < x$, dan kun je dezelfde redenering gebruiken, maar nu met verwisseling van x en y .



Figuur 3
Een uitvergroting van stuk IV

Dus altijd flauw?

Het voorafgaande betekent niet dat alle rechthoeken die Leonardo kan leggen, flauw in elkaar moeten zitten. Wel zal lengte of breedte altijd een n -voud moeten zijn. In figuur 4 zie je een voorbeeld van een niet-flauwe rechthoek. Wat wel stoort bij deze rechthoek zijn de vierkanten van 6×6 die erin zitten. Zou het mogelijk zijn een rechthoek te leggen waar zulke 6×6 vierkanten niet voorkomen? Het antwoord hierop is 'nee'. Wij zijn benieuwd of er lezers zijn die dat kunnen bewijzen.

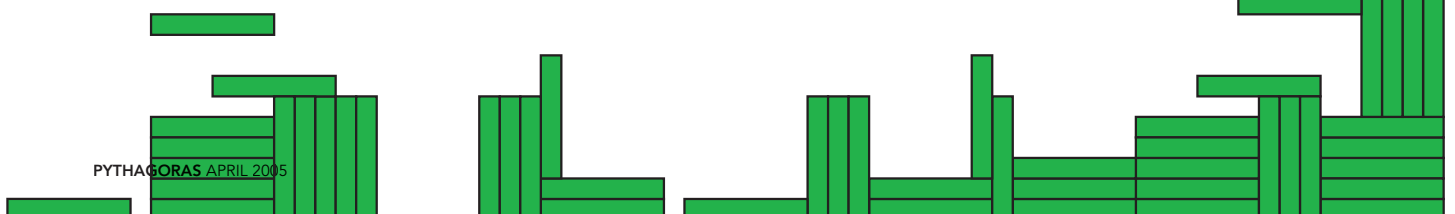


Figuur 4
Een niet-flauwe rechthoek, gemaakt van stenen van 1×6 .

In de ruimte

Een vergelijkbaar probleem is het volgende: kun je met bakstenen van $1 \times 2 \times 4$ een doos van $6 \times 6 \times 6$ opvullen? Prof. N.G. de Bruijn schreef over deze vraag een artikel in 1969 in de *American Mathematical Monthly*. De aanleiding was dat zijn zoontje van zeven jaar ontdekte dat dit met zijn blokken niet lukte. De Bruijn werkte het probleem in een algemene vorm uit en bewees dat het opvullen van dergelijke dozen in n dimensies alleen op een flauwe manier (alle stenen in dezelfde richting) mogelijk is voor een wijde categorie van stenen.

Het artikel (in het Engels, niveau ^{ooo}) is te downloaden via www.math.uni-bielefeld.de/~sillke/POLYCUPE/PROOF/deBruijn/filling-boxes-with-bricks.pdf.



door Alex van den Brandhof

Wiskunde en handwerken

De Amerikaanse meteoroloog Edward Lorenz is de bedenker van de *chaostheorie*. Hij ontdekte dat een kleine verstoring in de atmosfeer grote gevolgen kan hebben voor het weer elders: de vleugelslag van een vlinder in China kan een storm in Amerika tot gevolg hebben. Dit is van groot belang voor de methode waarmee de weersverwachting tegenwoordig wordt berekend. Ook buiten de meteorologie heeft de chaostheorie toepassingen. Bij een simpele versie van een model van Lorenz wordt de baan van een punt in de driedimensionale ruimte door drie vergelijkingen bepaald. Het driedimensionale, gekromde oppervlak dat aldus ontstaat, wordt wel een Lorenz-op-



pervlak genoemd. Het wiskundig duo Hinke Osinga (Universiteit van Bristol, Engeland) en Bernd Krauskopf (Universiteit van Bristol en VU, Amsterdam) kwam in 2003 tot het besef dat zo'n oppervlak in feite bestaat uit een serie haakinstructies. Met het algoritme waarmee zij hun Lorenz-oppervlak opbouwen, breidt het oppervlak zich na iedere slag in alle richtingen uit. Na vele uren noeste hardarbeit had het duo

een wiskundig object dat alleen maar bekend was van het computerscherm, tastbaar in drie dimensies gemaakt. Eind 2004 werd hun werkwijze gepubliceerd in *The Mathematical Intelligencer*, inclusief kleurenfoto's en haak- en opzetinstructies.

21

Regelmatige veelhoeken tekenen

Matthijs Coster, redacteur van dit tijdschrift, heeft een programma geschreven waarmee je een re-

gelmatige veelhoek van flinke afmetingen kunt tekenen met al zijn diagonalen. Het werkt vlot en

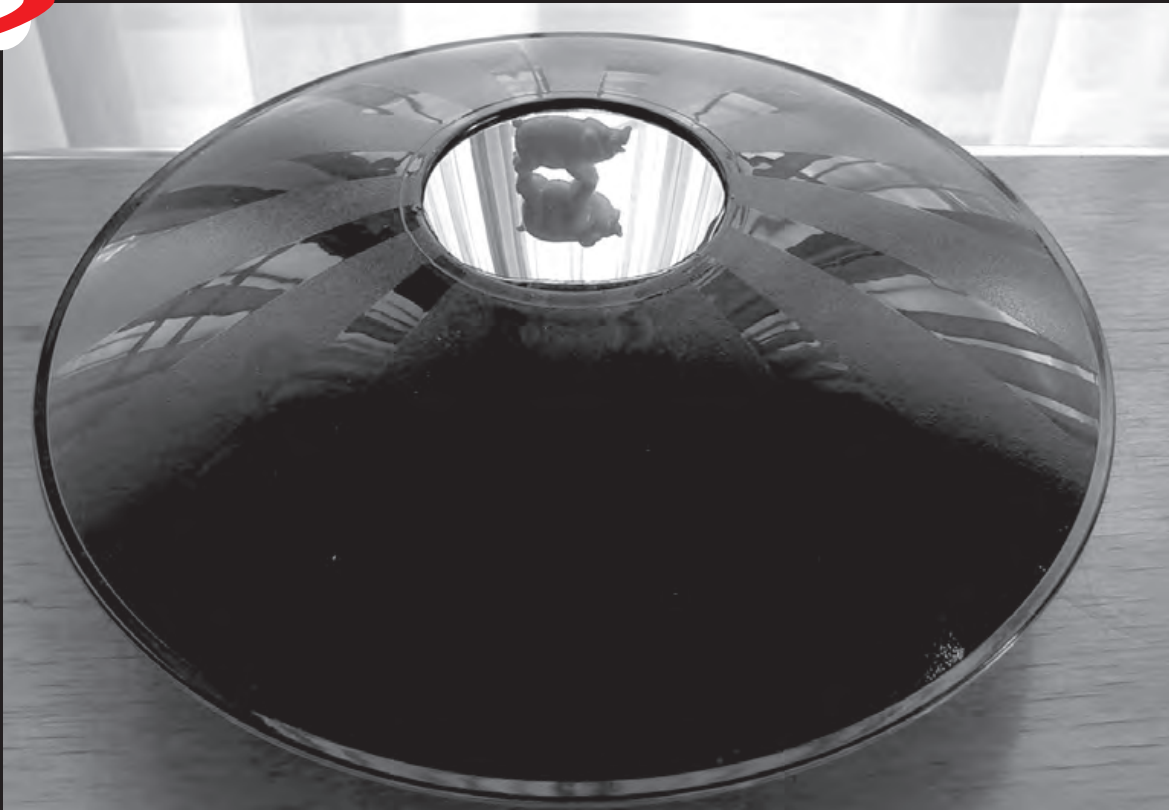
levert prachtige plaatjes op. In de volgende *Pythagoras* kun je hierover een artikel lezen, maar het programma is nu al te downloaden van onze website.

Wiskunde open dag in Amsterdam

Op vrijdag 13 mei 2005 organiseren het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde en het Institute for Logic, Language & Computation de open dag *Leve de wiskunde!*, bedoeld voor wiskundecenten, scholieren en andere belangstellenden. Het programma bestaat uit een reeks lezingen door internationaal bekende onderzoekers uit eigen huis. De onderwerpen lopen uiteen van de wiskunde van tsunami's tot de geometrische structuur van muziek. Op de informatiemarkt worden onder andere profielwerkstukken van scholieren gepresenteerd. Meer informatie en een aanmeldingsformulier vind je op www.science.uva.nl/congres.

Weer een nieuw Mersenne-priemgetal

In het project *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS) stellen duizenden vrijwilligers rekentijd op hun computer beschikbaar om te zoeken naar een speciaal soort priemgetallen, de Mersenne-priemgetallen. Dat zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$. Eind februari vond de pc van een oogarts uit het Zuid-Duitse Michelfeld een nieuw Mersenne-priemgetal: $2^{25.964.951} - 1$. Dit priemgetal, dat nog geen jaar na het vorige Mersenne-priemgetal is gevonden, is met 7.816.230 cijfers het grootste priemgetal dat tot nu toe bekend is. Het aantal bekende Mersenne-priemgetallen is nu 42. De organisatie van GIMPS looft een beloning van 50.000 dollar uit aan iedereen die een recordgetal ontdekt. Wie als eerste een priemgetal van meer dan tien miljoen cijfers ontdekt, ontvangt 100.000 dollar.



22

Een schotel die liegt

Misschien heb je hem al eens gezien, een soort schaal in de vorm van een vliegende schotel. Op de schotel lijkt een varkentje of een ander klein voorwerpje te staan, maar als je het probeert te pakken blijkt het er niet te zijn, zie figuur 1. Waar je het varkentje ziet, zit in werkelijkheid een gat, en kijk je daarin dan zie je onderin het echte varkentje staan. Een ernstig geval van gezichtsbedrog.

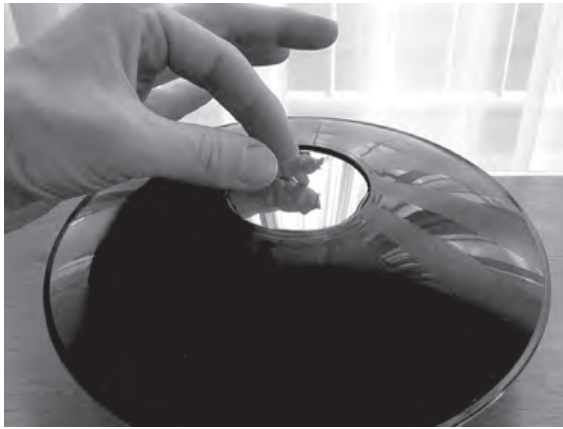
Hetzelfde principe wordt door illusionisten ook in grotere afmeting toegepast om een heel mens te laten 'verdwijnen'. Het principe is niet nieuw, het was al aan het einde van de negentiende eeuw bekend. De laatste jaren echter zie je de liggende schoteltjes steeds vaker en wordt het tijd om er eens met een wiskundig oog naar te kijken.

Parabolen en brandpunten

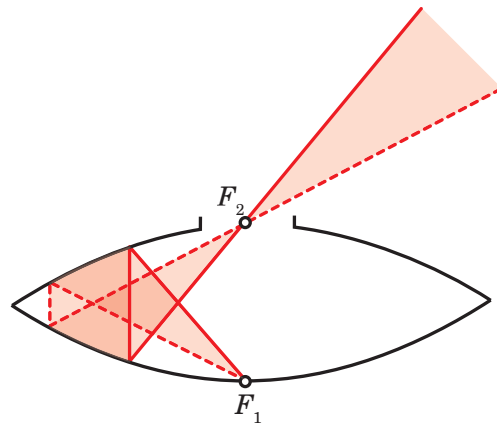
Het geheel blijkt uit twee schotels te bestaan met een flauwe kromming.

Een kennersoog herkent hier *parabolische spiegels* in. Het bijzondere van een parabool is dat hij stralen die evenwijdig met de as invallen, kaatst naar een centraal punt, het *brandpunt* geheten, zie figuur 2, zoals bij een schotelantenne. Omgekeerd kaatst hij licht dat vanuit het brandpunt straalt evenwijdig met de as weg, zoals in de koplampen van een auto of een ouderwetse fietslamp.

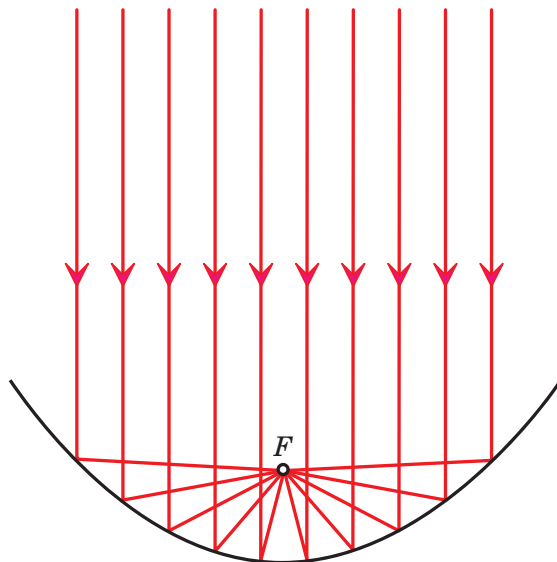
Die brandpunteigenschap van de parabool vormt de verklaring van dit gezichtsbedrog. Het licht van het varkentje op de bodem



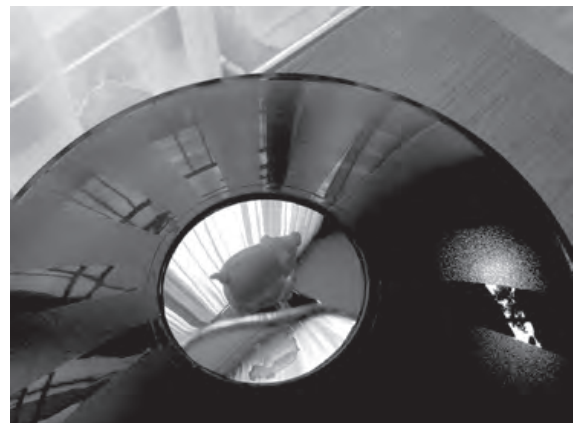
Figuur 1 Een poging om het varkentje te pakken: de vingers grijpen erdoorheen!



Figuur 3 De verklaring voor het feit dat we het varkentje op de schotel zien



Figuur 2 De kaatsingeigenschap van een parabool (met brandpunt F)



Figuur 4 Hier zie je het werkelijke varkentje

(in F_1) kaatst via de bovenste schotel in de onderste en van daar naar het brandpunt (F_2) van de onderste schotel, in het gat. De lichtstralen die vanuit het echte varkentje ons oog treffen, komen dus via dat brandpunt in het gat bij ons, en onze hersenen die er graag vanuit gaan dat stralen recht van het object afkomen in plaats van via hoeken en bochten, 'zien' het varkentje dus daarboven, zie figuur 3.

Een grappig effect is verder dat het virtuele varkentje 180 graden gedraaid is ten

opzichte van het echte varkentje. Volg je de stralen, dan is dat ook goed te begrijpen.

Kopen

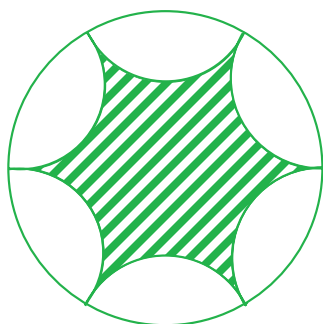
Wil je zelf een liegende schotel hebben? Hij is te koop bij onder meer *Arabesk* in Rotterdam (www.arabesk.nl) en *Tinkerbells Toys* op de Spiegelgracht 10 in Amsterdam, of te bestellen via het Duitse postorderbedrijf *Manufactum* (www.manufactum.de). De liegende schotel is er in verschillende maten en in verschillende kwaliteiten.

°Problemen

door Dion Gijswijt

Zeshoekige ster

Wat is de oppervlakte van deze regelmatige zespuntige ster als gegeven is dat de oppervlakte van de cirkel gelijk is aan 3π ?



Ramsey's feestje

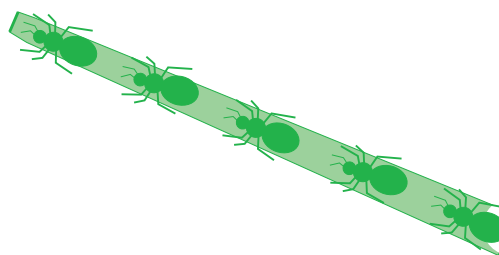
Op Ramsey's feestje zijn vijf dames en vijf heren uitgenodigd. Nu wordt er beweerd dat er twee dames en twee heren zijn met de volgende eigenschap: geen van deze twee dames kent een van beide heren, óf beide dames kennen beide heren. Klopt deze bewering?

Vier vieren

Kun je met vier 4-en en de operaties $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{}$ en $\log$ (de logaritme met grondtal 10) het getal 2005 maken? Je mag zoveel haakjes gebruiken als je wilt.

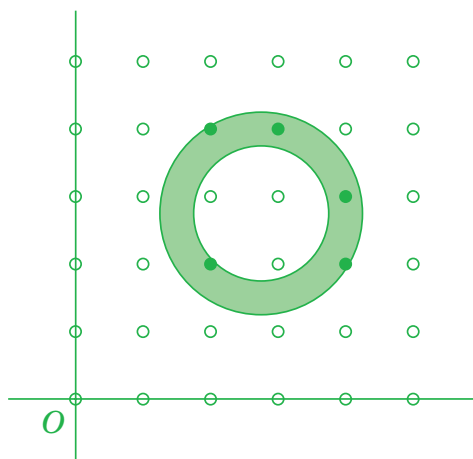
Mieren

Op een grasspriet lopen tien kleine mieren richting het uiteinde. Ze lopen allemaal met dezelfde snelheid. Wanneer een mier bij het uiteinde aankomt, keert hij om. Wanneer twee mieren tegen elkaar 'botsen', keren ze allebei om. Hoe vaak botsen er twee mieren tegen elkaar?



Ring

Hier zie je een ring die vijf roosterpunten bevat (roosterpunten zijn punten met gehele coördinaten). Kun je een ring in het vlak tekenen met een oppervlakte van 4π die geen enkel roosterpunt bevat?



° Oplossingen

Kleinste of grootste

De twaalf getallen kun je als volgt verdelen.

1	7	8	2
10	4	9	3
11	5	6	12

Het 4 x 4-vierkant is op deze manier niet te vullen. Er zijn immers precies 16 'labels' ('kleinste van de rij', 'grootste van de rij', 'kleinste van de kolom', 'grootste van de kolom') te verdelen over de zestien getallen. Getal 1 krijgt al twee labels: 'kleinste van de rij' en 'kleinste van de kolom', dus is er een getal dat geen label krijgt.

Delen

Er zijn 1002 getallen deelbaar door 2, 668 deelbaar door 3 en 334 deelbaar door 2 én door 3. Dus zijn er $2005 - 1002 - 668 + 334 = 669$ getallen deelbaar door 2 noch door 3.

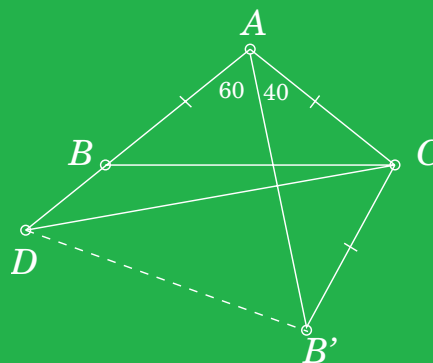
Tetraëder

Iedere tetraëder $ABCD$ heeft een hoekpunt met de eigenschap dat de drie ribben uit dat hoekpunt een driehoek kunnen vormen. Merk op dat drie ribben een driehoek kunnen vormen als elk van de drie ribben korter is dan de andere twee ribben samen.

Kies eerst een langste van de zes ribben, zeg ribbe AB . Nu geldt $AB < AC + BC$ en ook $AB < AD + BD$, want ABC en ABD zijn driehoeken. Hieruit volgt dat $2AB < (AC + AD) + (BC + BD)$. Maar dan moet $AB < AC + AD$, of $AB < BC + BD$. In het eerste geval is punt A het gezochte punt, in het tweede geval punt B .

Ontbrekende hoek

Construeer op zijde AC driehoek $B'CA$ congruent met driehoek BAC , zoals in de figuur. Omdat hoek CAB' 40 graden is, is hoek DAB' gelijk aan zestig graden. Dus driehoek DAB' is een gelijkzijdige driehoek (want $AD = BC = AB'$). Hieruit volgt dat driehoek ADC en driehoek $B'DC$ gelijke zijden hebben, zodat hoek ADC en hoek $B'DC$ beide 30 graden zijn.



door Klaas Pieter Hart

De stelling van Ramsey

26



Als je heel veel dingen over weinig dozen verdeelt, zal ten minste één van die dozen behoorlijk vol raken. Veel resultaten uit de wiskunde zijn tot deze observatie terug te brengen; de stelling van Ramsey is één van de fraaiste voorbeelden.

Als je vijf individuen bij elkaar zet, weet je zeker dat er ten minste drie hetzelfde geslacht zullen hebben. Met andere woorden: als je *alléén* de eigenschap 'man of vrouw' gebruikt om mensen te onderscheiden, zullen er in een groep van vijf mensen zeker drie zijn die je niet uit elkaar kunt houden.

Je kunt naar hartelust op dit thema variëren: als je 367 mensen bij elkaar zet, zijn er zeker twee op dezelfde dag jarig (denk aan 29 februari). Als je dertien getallen uit het interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ kiest, zullen er twee minder dan $\frac{1}{12}\pi$ verschillen. Je kunt zelfs een algemene stelling formuleren.

Stelling. Als m en n twee natuurlijke getallen zijn en je verdeelt $nm + 1$ dingen over m potten, dan moet één pot ten minste $n + 1$ dingen bevatten.

De stelling van Ramsey, die we in dit artikel bespreken, zegt dat dergelijke verschijnselen altijd optreden: als je een aantal eigenschappen opschrijft, kun je bij een gegeven n altijd een N vinden zó dat in elke groep van N mensen er n te vinden die door die eigenschappen niet onderscheiden kunnen worden. De eigenschappen waar de stelling van Ramsey over spreekt, kunnen ook van toepassing zijn op paren, drietallen, enzovoort. In dit artikel bekijken we eigenschappen van paren.

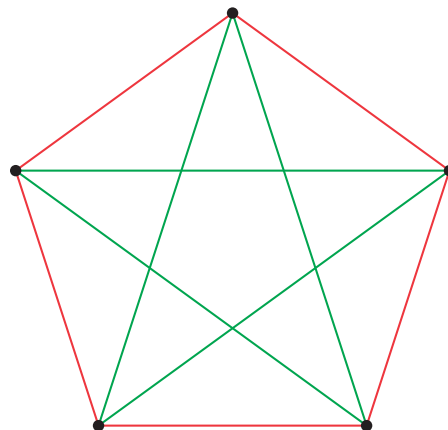
Kennen jullie elkaar?

Op een feestje kun je, aan het begin, van elk tweetal aanwezigen vaststellen of ze elkaar kennen of niet. Als er zes aanwezigen zijn, kun je een groepje van drie maken die elkaar alledrie kennen of juist alledrie niet. Dit doe je als volgt. Kies één aanwezige en verdeel de rest in twee groepen: degenen die zij wel kent en de rest. In één van die groepen zitten ten minste drie aanwezigen, bijvoorbeeld de mensen die zij kent. Als twee daarvan elkaar kennen, hebben we een groepje van drie waarin iedereen elkaar kent, zie figuur 1a (linker situatie) op de volgende pagina; als dat niet zo is, hebben we

een groepje van drie waarin (nog) niemand elkaar kent, zie figuur 1a (rechter situatie).

Opgave 1. Hoe luidt de redenering als er ten minste drie mensen zijn die zij niet kent? (Zie figuur 1b waar zij maar liefst vier gasten niet kent.)

Slechts vijf gasten. Als je vijf mensen bij elkaar hebt, hoeft dit niet te lukken.



Figuur 2

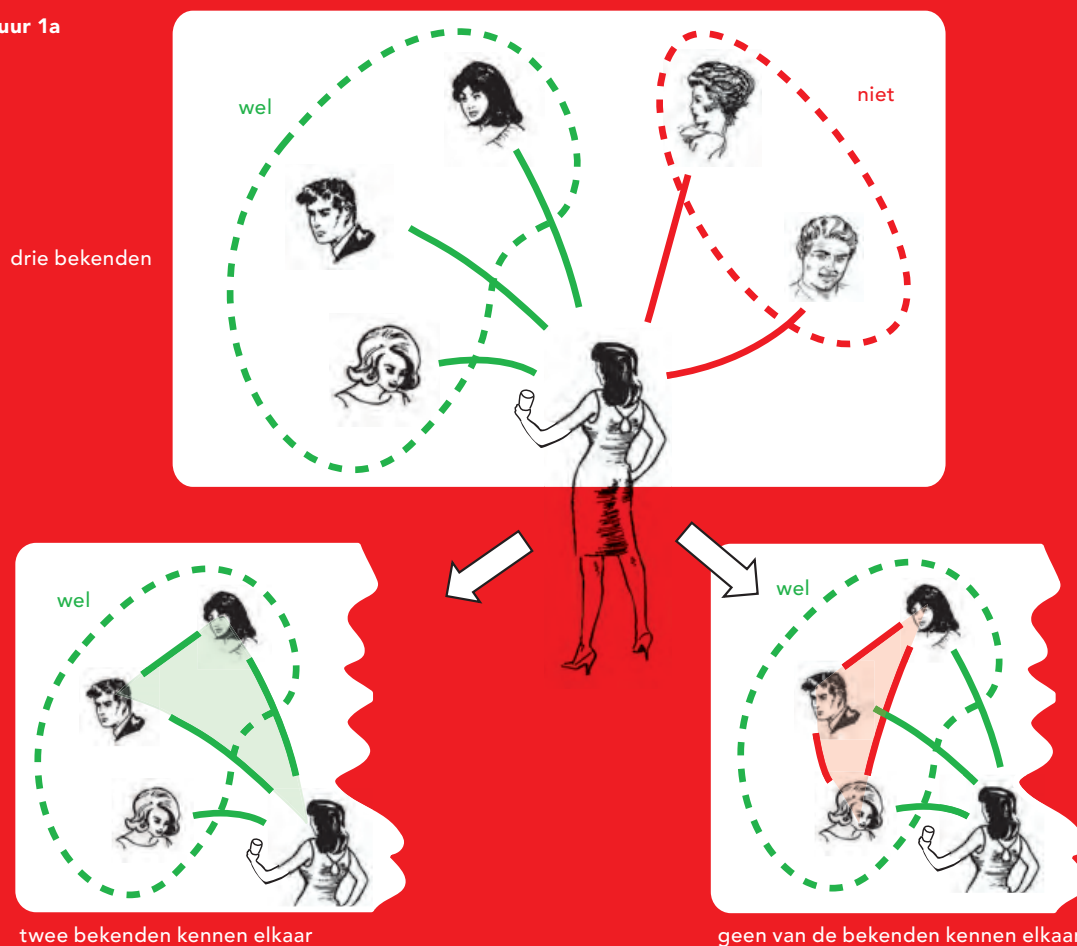
In figuur 2 betekent een groen lijntje 'elkaar kennen' en rood betekent 'elkaar niet kennen'; er zijn geen groene of rode driehoeken.

Op naar de vier

De logische stap lijkt nu te kijken hoe groot het feest moet zijn opdat er een groep van vier mensen is die elkaar allemaal wel of juist allemaal niet kennen. Dat zullen we ook doen, maar het blijkt handiger te zijn ook niet-symmetrische situaties te bekijken. We gaan daarom eerst kijken naar samenkomsten waar óf vier mensen te vinden zijn die elkaar wel kennen óf drie mensen die elkaar niet kennen.

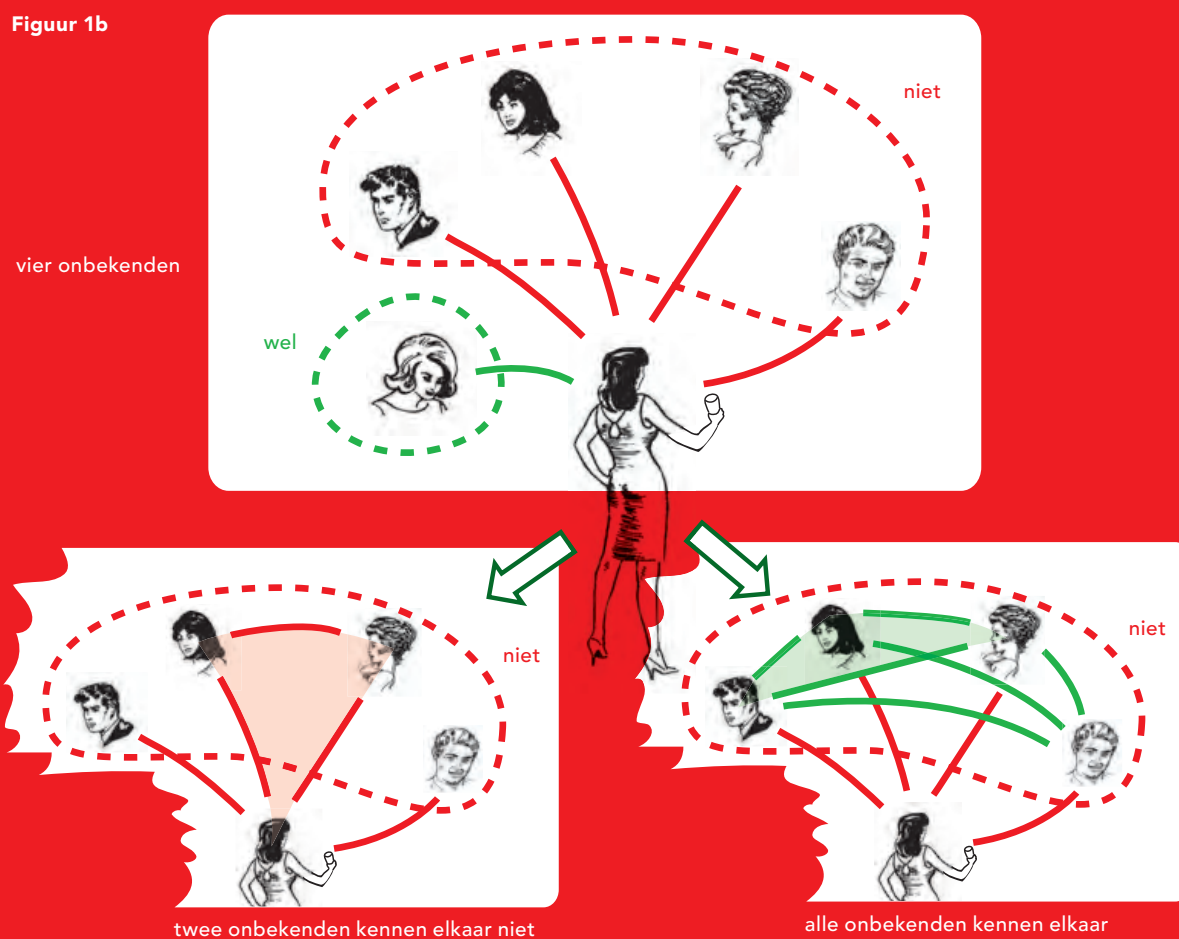
Vier wel of drie niet. Zet op zo'n bijeenkomst weer één aanwezige apart en verdeel de rest in twee groepen: de mensen die hij wel kent en de rest. In de volgende, gunstige, situaties kunnen we concluderen dat er vier mensen zijn die elkaar allemaal kennen of juist drie die elkaar niet kennen.

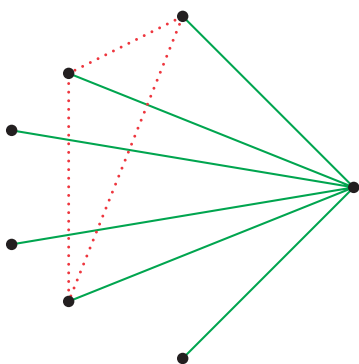
Figuur 1a



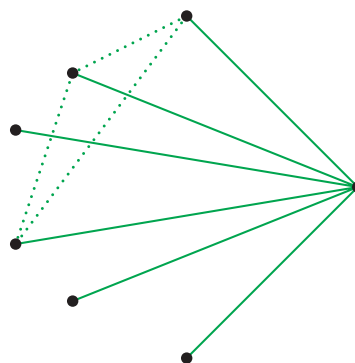
28

Figuur 1b

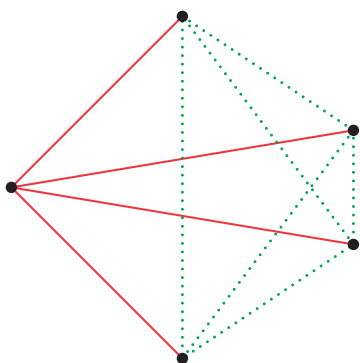




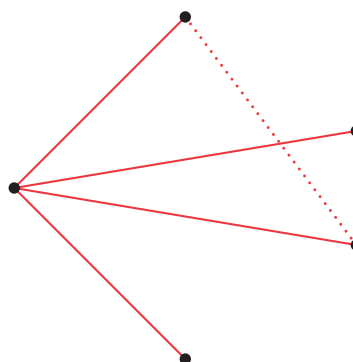
Figuur 3a



Figuur 3b



Figuur 4a



Figuur 4b

Situatie 1. *Er zijn zes mensen die hij kent.* Nu hebben we twee mogelijkheden:

1. Er zijn er drie die elkaar niet kennen, dan zijn we klaar, zie figuur 3a.
2. Er zijn er drie die elkaar wel kennen en samen met onze apart gezette persoon geeft dat een groep van vier die elkaar allemaal kennen, zie figuur 3b.

Situatie 2. *Er zijn vier mensen die hij niet kent.* Weer hebben we twee mogelijkheden:

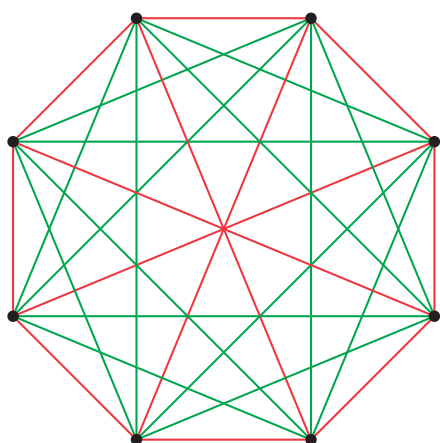
1. Die vier kennen elkaar allemaal, dan zijn we klaar, zie figuur 4a.
2. Twee van die kennen elkaar niet en samen met onze apart gezette persoon geeft dat een groep van drie die elkaar allemaal niet kennen, zie figuur 4b.

Hieruit blijkt dat het voldoende is als er

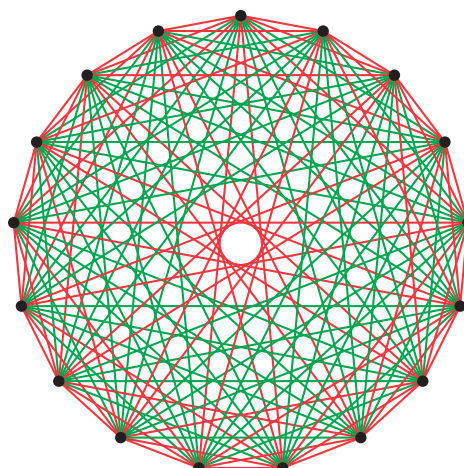
negen anderen zijn: dan doet één van de gunstige situaties zich zeker voor. Een feest met tien aanwezigen is voor deze niet-symmetrische eis dus groot genoeg.

Negen gasten is al genoeg. Maar zelfs een feest met *negen* aanwezigen is groot genoeg. We hebben namelijk maar één aanwezige nodig waarvoor zich één van de gunstige situaties voordoet (bij tien personen is dat voor *elke* aanwezige zo). Bij elke aanwezige zijn er acht 'anderen' en als de gunstige situaties zich nooit voordoen, is het zo dat bij iedereen die acht zich verdelen in twee groepen: vijf mensen die hij wel kent en drie die hij niet kent.

Trek nu tussen elk tweetal mensen dat elkaar wel kent een lijn. Iedereen is dan eindpunt van vijf lijnen, er zijn negen mensen, dat maakt dus 45 eindpunten; dat kan echter niet: elk lijntje heeft twee eindpunten, het totaal aantal eindpunten moet wel even zijn.



Figuur 5



Figuur 6

Acht mensen is te weinig. Een groep van acht mensen kan te klein zijn, zie figuur 5.

De kleuren betekenen hetzelfde als in figuur 2. Nummer de mensen/punten van 1 tot en met 8 tegen de klok in. Als je goed kijkt, zul je zien dat de lijn van i naar j groen is als $j - i$ gelijk is aan 2, 3, 5 of 6 en rood als dat verschil gelijk is aan 1, 4 of 7. Er is geen rode driehoek. Stel $i < j < k$ is zo'n driehoek; dan zijn er drie mogelijkheden: $j - i = 1$ en $k - i = 4$ (kan niet, want dan moet $k - j = 3$) of $j - i = 1$ en $k - i = 7$ (kan ook niet, want dan zou $k - j = 6$) of $j - i = 4$ en $k - i = 7$ (kan ook niet, want ...). Evenzo kunnen we nagaan dat $i < j < k < l$ geen groep vormt met alleen groene lijnen. Er zijn vier mogelijkheden voor de verschillen $(j - i, k - i, l - i)$: (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 5, 6) en (3, 5, 6). Ga zelf na dat altijd een van de lijnen jk , jl of kl rood zal zijn.

Vier wel of vier niet. Met behulp van de kennis die we hierboven hebben opgedaan, is het niet moeilijk meer een N te bepalen zó dat op elk feest met N aanwezigen er zeker vier mensen zullen zijn die elkaar allemaal niet of juist allemaal wel kennen.

Opgave 2. Bepaal een N die goed genoeg is voor de vier-vier situatie. Is dat ook de kleinste mogelijke N ?

De methode van één persoon opzij zetten en de rest in twee groepen verdelen, is al sterk genoeg om het algemene probleem aan te pakken; dat gaan we nu doen.

Ramseygetallen

Het algemene probleem vraagt, gegeven twee getallen k en l , een getal N te bepalen zó dat op een bijeenkomst met N personen er zeker k mensen zijn die elkaar niet kennen of l mensen die elkaar juist wel kennen. Het kleinste aantal mensen dat genoeg is noteren we met $R(k, l)$; de $R(k, l)$ heten *Ramsey-getallen*, naar de logicus F. Ramsey die in 1929 liet zien dat de getallen $R(k, l)$ inderdaad bestaan.

Het verhaal over het feestje met zes mensen laat zien dat $R(3, 3) \leq 6$ en het speciale feestje met vijf mensen toont aan dat $R(3, 3) > 5$ en dus $R(3, 3) = 6$.

Om aan te tonen dat de getallen $R(k, l)$ echt bestaan, zullen we bovengrenzen voor ze afleiden. Voor we dat doen maken we twee eenvoudige opmerkingen.

Allereerst: door 'kennen' en 'niet kennen' te verwisselen volgt $R(k, l) = R(l, k)$. Ook is meteen duidelijk dat $R(k, 2) = k$: in een groep van k mensen kent iedereen elkaar of twee mensen kennen elkaar niet.

De redenering voor $R(3, 3) \leq 6$ kunnen we gebruiken om het volgende aan te tonen:

$$R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) \quad (*)$$

Dat gaat als volgt: stel je hebt $R(k, l-1) + R(k-1, l)$ mensen bij elkaar. Zet er één apart en verdeel de rest in twee groepen: w mensen die hij wel kent en n mensen die hij niet kent. Dan geldt dus

$$w + n = R(k, l-1) + R(k-1, l) - 1.$$

Wat niet kan gebeuren, is dat tegelijk $w < R(k, l-1)$ én $n < R(k-1, l)$, want dan hadden we $w + n \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) - 2$. Er kunnen zich dus twee gevallen voordoen.

Geval 1: $w \geq R(k, l-1)$. Dan zijn er onder die w mensen k die elkaar niet kennen of er zijn er $l-1$ die elkaar wel kennen en samen met onze vriend vormen die een club van l mensen die elkaar kennen.

Geval 2: $n \geq R(k-1, l)$. Behandel dit zelf.

Onze eerste redenering toonde aan dat $R(3, 3) \leq R(3, 2) + R(2, 3) = 3 + 3 = 6$. Daarna gebruikten we dezelfde redenering weer om in feite aan te tonen dat $R(3, 4) \leq R(3, 3) + R(2, 4) \leq 6 + 4 = 10$. De wat fijnzinniger redenering gaf ons $R(3, 4) \leq 9$ en met een voorbeeld hebben we aangetoond dat $R(3, 4) > 8$ en dus $R(3, 4) = 9$.

Misschien had je ondertussen de opgave al gemaakt en geconcludeerd dat $R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 9 + 9 = 18$.

Opgave 3. Vind een bovengrens voor $R(5, 5)$. Hoeveel stappen kost het afschatten van $R(10, 10)$?

Opgave 4. Maak een regelmatige 17-hoek, nummer de punten 1 tot en met 17 en kleur de lijn van i naar j rood als $j-i$ gelijk is aan

1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 of 16 en anders groen, zie figuur 6. Toon aan dat er geen viertal punten is met alle verbindingslijnen van dezelfde kleur. Conclusie: $R(4, 4) = 18$.

Een algemene formule

Misschien heb je al de overeenkomst van (*) met de volgende bekende eigenschap van binomiaalcoëfficiënten ontdekt.

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (**)$$

Zoals we weten, geldt $R(k, 2) = k$ en dus $R(k, 2) = \binom{k}{k-1}$; dit schrijven we als $R(k, 2) = \binom{k+2-2}{k-1}$ om de 2 zichtbaar te maken. Met *volledige inductie* kun je dit uitbreiden tot de volgende stelling.

Stelling. Voor elke k en l geldt

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Kleine verbeteringen

De afschatting in de stelling is niet scherp. Dat hebben we al gezien aan $R(3, 4)$ en $R(4, 4)$. De stelling zegt $R(3, 4) \leq \binom{5}{2} = 10$ en $R(4, 4) \leq \binom{6}{3} = 20$, maar we wisten al dat $R(3, 4) = 9$ en $R(4, 4) = 18$.

De wat fijnzinniger redenering die we voor $R(3, 4) \leq 9$ hebben gebruikt, laat zich gebruiken om het volgende aan te tonen: als $R(k, l-1)$ en $R(k-1, l)$ beide even zijn, dan geldt

$$R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) - 1.$$

De exacte waarde van $R(k, l)$ is maar voor heel weinig paren (k, l) bekend. Er wordt nog steeds hard gezocht naar betere afschattingen (naar boven en naar onderen). Op <http://mathworld.wolfram.com/Ramsey-Number.html> en www.combinatorics.org/Surveys/ds1.pdf wordt de stand van zaken bijgehouden. Daar kun je zien dat $R(5, 5)$ nog steeds niet bekend is; men weet alleen dat $43 \leq R(5, 5) \leq 49$.

° Schoolroosters maken bij Wiskunde in actie



32

Je hebt vast wel eens gemopperd omdat je rooster tussenuren bevatte. Of omdat iedereen op vrijdag vroeg vrij was terwijl jij tot het achtste uur op school zat. De Delftse wiskundestudenten Shiraz Abdoel en Marco Tabak lieten zien dat het knap lastig is om een goed rooster te maken. Zij deden dat op de dag Wiskunde in actie. Deze dag wordt elk jaar aan de Technische Universiteit Delft georganiseerd. Middellbare scholieren volgen daar workshops en kunnen zelf werken aan toepassingen van de wiskunde.

De roostermaker moet rekening houden met een heleboel dingen: klassen, docenten, lokalen en tijden. Een eenvoudig roostermodel is het zogenaamde *Class Teacher with Teacher Availabilities* (CTTA) model. Daarbij worden klassen aan docenten gekoppeld. Er wordt ook rekening gehouden met het feit dat docenten niet altijd beschikbaar zijn. Om een rooster te kunnen maken, moet ook bekend zijn hoeveel uren les per week de docenten aan elke klas geven.

Beperkende voorwaarden

We moeten rekening houden met de volgende dingen:

- m , het aantal klassen op de school;
- n , het aantal docenten op de school;
- p , het aantal lesuren in een week, laten we zeggen 40.

Verder moeten we van elke docent weten op welke uren hij of zij beschikbaar is. Dit leggen we vast met getallen A_{dt} : dit getal zegt of docent d op lesuur t beschikbaar is of niet. Als docent d beschikbaar is op lesuur t , dan zetten we $A_{dt} = 1$; is docent d op lesuur t niet beschikbaar, dan is $A_{dt} = 0$.

Om het rooster te maken, bekijken we ook de getallen R_{kd} : zo'n getal R_{kd} is gelijk aan het aantal lessen dat docent d geeft aan klas k .

Wat we graag willen weten, is hoe het rooster er nu uit ziet. De onbekenden zijn de getallen X_{kdt} . Er geldt dat $X_{kdt} = 1$ als klas k op tijdstip t les krijgt van docent d ; is dat niet het geval, dan is $X_{kdt} = 0$.

Hoeveel van die onbekenden X_{kdt} hebben we hier eigenlijk? Stel dat we een kleine school hebben, met $m = 20$ klassen, $n = 25$ docenten en $p = 40$ lesuren. Dan hebben we toch al 20.000 onbekenden. Er zijn ook een heleboel vergelijkingen waaraan die onbekenden moeten voldoen. Zo moet klas k precies het aantal uren R_{kd} krijgen van docent d . Dus $X_{kd1} + X_{kd2} + \dots + X_{kd40} = R_{kd}$.

Het is ook de bedoeling dat er op ieder tijdstip in iedere klas niet meer dan één docent staat. Dus als bijvoorbeeld $X_{4A3} = 1$ (dat betekent dat klas 4 op uur 3 van de week les heeft van meneer Aarts), dan is $X_{4d3} = 0$ voor elke docent d , die niet Aarts is. Dit geeft de vergelijking $X_{413} + X_{423} + \dots \leq 1$.

In het algemeen moet voor elke klas k en elk tijdstip t gelden $X_{k1t} + X_{k2t} + \dots \leq 1$. Ook kan een docent maar één klas tegelijk lesgeven. Dat betekent dat voor iedere docent d en ieder tijdstip t geldt $X_{1dt} + X_{2dt} + X_{3dt} + \dots \leq 1$.

Tenslotte moet ook nog $X_{kdt} \leq A_{dt}$, immers een docent kan alleen lesgeven als hij of zij er is. Dit eenvoudige model is met een

zogenaamde *solver* in enkele seconden op te lossen.

Lokalen

Een van de problemen met dit model is dat er geen rekening wordt gehouden met de lokalen. Wat moet er veranderd worden als we in dit model ook die lokalen mee willen nemen? Tijdens *Wiskunde in actie* mochten de scholieren zelf de aanpassingen en toevoegingen die nu nodig zijn in woorden formuleren. Probeer dat zelf ook eens te bedenken.

Shiraz Abdoel en Marco Tabak lieten zien dat met de lokalen erbij het aantal onbekenden en eisen snel oploopt. Al snel wordt het oplossen van alle vergelijkingen ook voor de computer zeer tijdrovend. En dan wordt er nog niet eens rekening gehouden met een aantal redelijke eisen: leerlingen die geen tussenuren willen, docenten die meer dan één vak geven en clusters in de bovenbouw. Zo makkelijk is dat dus nog niet, een rooster maken.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 4

Vervoeren
De twee mannen lopen samen
400 meter.

Glasplaat
Een glasplaat met een dikte
van 1 centimeter laat
 $\sqrt{0,81} \times 100\% = 90\%$
van het licht door.

Treintraject
Als trein *B* vijf minuten
vertraagd is, ontmoeten ze elkaar
twee kilometer aan de andere
kant van *C*.

Leeftijden
Mijn moeder is 73 en
ik ben 37.

Dieren
Emi heeft in totaal 5
dieren (voor de goede orde:
zij kan ook andere dieren
hebben dan honden, katten
en papegaaien), en wel: 1 kat,
2 honden en (bijvoorbeeld)
2 vissen (en dus
0 papegaaien!).

