

PYTHA GORAS



PYTHA GORAS

44ste jaargang nummer 6
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur

Marco Swaen

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Thijs Notenboom,
René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Reinie Erné

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster

Paulus Klerk

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41,
7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 20,35, € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland),
€ 17,25 (leerlingabonnement), € 14,00 (bulkabonnement).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

prof.dr. J.M. Aarts, hoogleraar technische wiskunde aan de TU Delft (j.m.aarts@its.tudelft.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), W. Joris, auteur van '100 Strategic Games for Pen and Paper' (walter.joris1@pandora.be), M. Kooiman, leerling van het Bonhoeffer College te Castricum (marleen@fysionet.nl), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), F. Roos, voormalig docent natuurkunde te Tolbert (fd_r@yahoo.com), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Caland-lyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. C.G. Zaal, educatief ontwerper aan het FI te Utrecht (chris@pythagoras.nu).

Op het omslag

De dekpuntstelling van Brouwer geïllustreerd met het roeren in een bakje vla

Niveau-rondjes

Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ^o zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes ^{oo} heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes ^{ooo} gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:



INHOUD



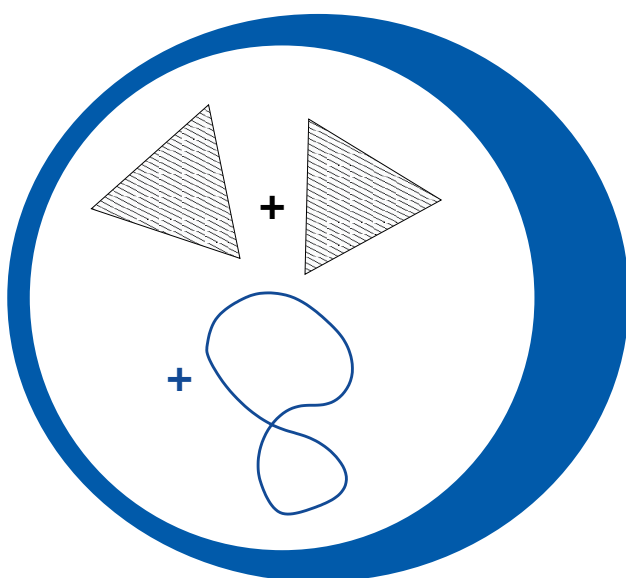
1

2 – 3	Kleine nootjes	18 – 19	Pen en papier
4 – 6	Kapotte trommels	20 – 21	Pythagoras Olympiade
7 – 9	De dekpuntstelling van Brouwer	22 – 23	Problemen – Oplossingen
10 – 11	Journaal	24 – 27	Nieuwe platonische lichamen
12 – 13	Topologie met de handen	28 – 30	Het volgende getal
14 – 17	De diagonalen van een regelmatige veelhoek	32 – 33	Een interessante reactie op Vos en ganzen
		33	Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Kleine nootjes zijn puzzeltjes
die weinig of geen wiskundige
voorkennis vereisen om opgelost
te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het
volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

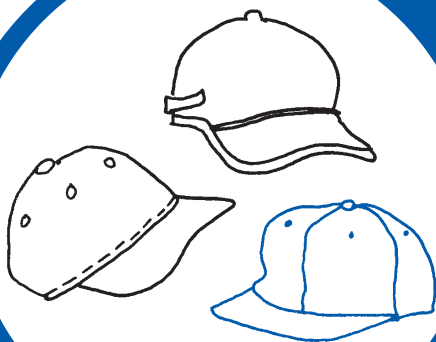
2



Waterpeil

Willemijn staat langs de rand van een zwembad, waarin een opblaasboot drijft. In haar hand heeft Willemijn een munt.

Hoe krijgt Willemijn het waterpeil verder omhoog: door de munt in het bad te gooien, of in het bootje?

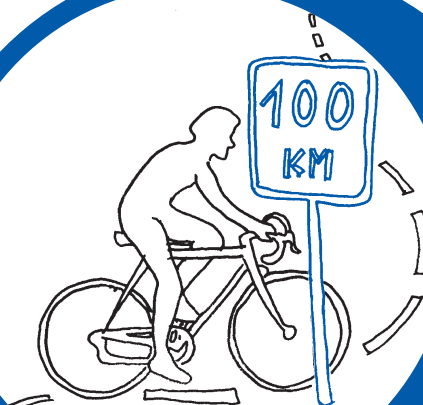


Welke is van wie?

Peter, Bart en Jos dragen tijdens hun fietstocht elk een pet. Geen van drieën draagt echter zijn eigen pet en geen fietst op zijn eigen fiets. Degene die de pet van Jos draagt, fietst op de fiets van Bart. Wie rijdt op Peters fiets?

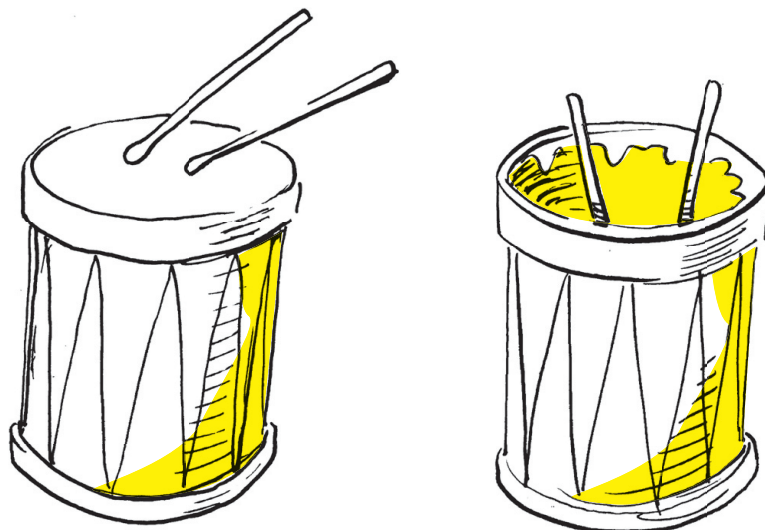
100 km fietsen

Peter, Bart en Jos fietsten tijdens hun vakantie 100 kilometer in vijf dagen. Elke dag reden zij zes kilometer meer dan de vorige dag. Hoeveel kilometer fietsten ze op de eerste dag?



door J.M. Aarts

Het ene moment heb je een mooie trommel, strak gespannen en met een fraai geluid, het volgende moment is het trommelvel kapot en zit het verfrommeld tegen de rand. Daarbij is geweld aan te pas gekomen, zoveel is zeker. De overgang van een strak gespannen trommel naar een verfrommeld vel op de rand is geen continue, zeg maar vloeiende, beweging.



4

° Kapotte trommels

De trommelstelling

Iedereen ziet in: als het trommelvel alleen nog maar tegen de rand zit, en de rand is niet losgehaald, dan moet het vel ergens gescheurd zijn. Dit intuïtieve inzicht kunnen we op de volgende wijze wiskundig onder woorden brengen. Noem de cirkelschijf D en zijn rand S . Dan:

Trommelstelling. *Er bestaat geen continue afbeelding f van de cirkelschijf D op zijn rand S met de eigenschap dat $f(x) = x$ voor elk punt x van S .*

De stelling van de trommel lijkt vanzelfsprekend waar, maar is heel lastig te bewijzen. Bekijk eens de volgende stelling, die er op het eerste gezicht niets mee te maken heeft.

Dekpuntstelling. *Iedere continue afbeelding g van D naar D heeft een dekpunt: er is een punt p in D met $g(p) = p$.*

Als een gebied afgebeeld wordt op (een deel van) zichzelf, dan krijgen alle punten een beeldpunt toegewezen. Wordt een punt daarbij naar zichzelf gestuurd, dan noemen we dat punt een *dekpunt* van de afbeelding. Is de afbeelding een draaiing, dan is het draaipunt een dekpunt. Is de afbeelding een spiegeling, dan heb je een hele spiegelas van dekpunten. Zie pagina 6.

De dekpuntstelling zegt dat, hoe je de punten van de schijf ook verplaatst (maar wel continu, en niet buiten de schijf!), er uiteindelijk altijd minstens één punt zich weer bevindt waar het zich tevoren ook al bevond.

De dekpuntstelling geldt niet voor alle gebieden. Is het gebied bijvoorbeeld de cirkelrand, en draai je die, dan blijft geen enkel punt op zijn plaats.

De dekpuntstelling staat op naam van de beroemdste Nederlandse wiskundige, L.E.J. Brouwer. De stelling geldt trouwens niet alleen in dimensie 2, maar in elke dimensie. Ter illustratie van de dekpuntstelling in de dimensie 3 wordt vaak het bakje vla aangehaald: roer de vla in een bakje flink om, dan zal daarna toch minstens één vladeeltje zich weer precies in zijn oorspronkelijke positie (van voor het roeren) bevinden.

Van dekpunt- naar trommelstelling

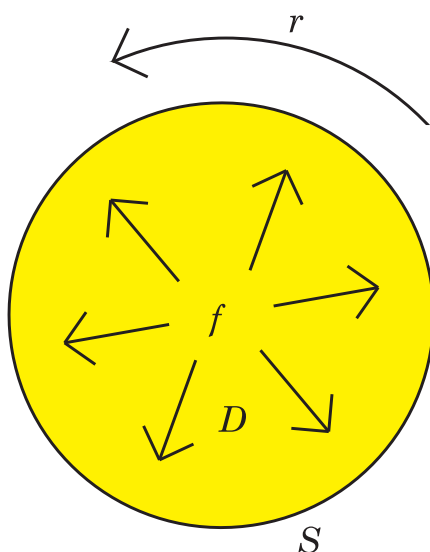
Ook de dekpuntstelling is lastig te bewijzen. Grappig genoeg zijn de twee stellingen wel gemakkelijk uit elkaar af te leiden. Neem maar aan dat de dekpuntstelling waar is. En stel dat er wel een continue afbeelding f van D op S bestaat met $f(x) = x$ voor elk punt x van S . We voeren nu eerst de afbeelding f uit en vervolgens een draaiing r van S over 90° linksom, zie figuur 1. De samenstelling van deze afbeeldingen, eerst f en dan r , is een continue afbeelding van D naar S . Volgens de dekpuntstelling is er een dekpunt p : $r(f(p)) = p$. Het punt p zit in S . Maar dan is $f(p) = p$ en komt er $r(p) = p$. Dat kan niet, omdat de draaiing r van de cirkelrand geen dekpunt heeft. De aanname dat er wél een

continue afbeelding f van D op S zou bestaan met $f(x) = x$ voor elk punt x van S , leidt tot een tegenspraak en is dus onhoudbaar. Zo'n afbeelding is er niet.

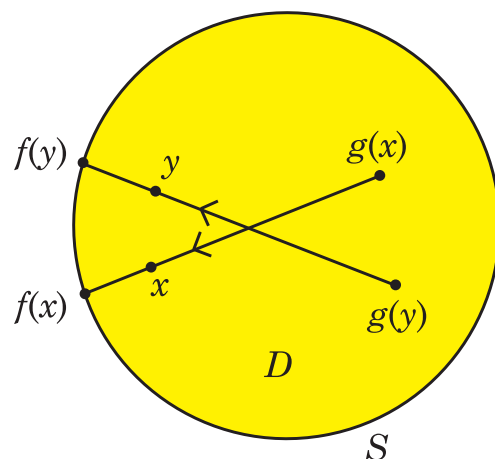
Van trommel- naar dekpuntstelling

Maar het omgekeerde is ook juist: de dekpuntstelling volgt uit de stelling van de trommel. Om dat te bewijzen gaan we uit van een gegeven continue afbeelding g van D naar D . Neem eens aan dat g geen dekpunt heeft: $g(x) \neq x$ voor alle x uit D . We verbinden $g(x)$ met x en verlengen de verbindingslijn tot die S snijdt. Het snijpunt noemen we $f(x)$, zie figuur 2. De afbeelding g is continu. Daarom is f het ook: als de punten x en y dicht bij elkaar liggen, dan liggen $g(x)$ en $g(y)$ ook dicht bij elkaar, maar dan ook $f(x)$ en $f(y)$. Verder geldt dat als z een punt van S is, dan is $f(z) = z$. Maar de stelling van de trommel zegt dat dat niet kan. De fout zit hem in de aanname: $g(x) \neq x$ voor alle x uit D . De aanname komt in conflict met de stelling van de trommel. En dus geldt: de dekpuntstelling volgt uit de stelling van de kapotte trommel.

We hebben nu bewezen dat de twee stellingen even waar zijn, maar weten daarmee nog niet of ze allebei waar zijn. Over het bewijs van de dekpuntstelling, en daarmee dus ook van de trommelstelling, gaat het artikel op pagina 7.



Figuur 1



Figuur 2



Bij een afbeelding van de cirkelschijf D naar zichzelf, wordt elk punt van de schijf naar een beeldpunt op die schijf (binnengebied of rand) gestuurd. We voorzien de schijf van een tekening en kunnen zo volgen waar elk punt naartoe gaat. Met de grijze tekening zijn de punten vóór de afbeelding aangegeven. De gele tekening geeft het resultaat van de afbeelding aan. De rode pijl rechts wijst aan waar bijvoorbeeld het puntje van de neus bij deze afbeelding naartoe gaat.

6



Een dekpunt is een punt dat op zijn plaats blijft; dus een punt waar de grijze en de gele tekening overeenstemmen. Links is een draaiing toegepast. Er is dan één dekpunt, namelijk het centrum van de draaiing. Rechts is een spiegeling toegepast. Dan is er een hele lijn van dekpunten: de spiegelas.



De dekpuntstelling zegt dat elke continue afbeelding van de cirkelschijf naar zichzelf minstens één dekpunt heeft. Links is een dekpunt van de betreffende afbeelding aangegeven. Zoek bij de afbeelding rechts zelf een dekpunt.

In 1910 verscheen het artikel *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* van L.E.J. Brouwer. Vele jaren was dit het sleutelartikel op het gebied van de topologie, waarin een nieuwe richting aan het vak gegeven werd. De laatste regels van het artikel bevatten bovendien de fameuze stelling, die voortaan bekend zou staan als de *dekpuntstelling van Brouwer*.

Over de inhoud van de stelling hebben we al iets verteld in het voorgaande artikel. Nu willen we het hebben over het bewijs, voor het geval dimensie-2 weliswaar.

door J.M. Aarts

°° De dekpuntstelling van Brouwer

De dekpuntstelling wordt gewoonlijk geformuleerd voor een cirkelschijf. Omdat het een topologische stelling is, kunnen we die cirkelschijf evengoed vervangen door een volle gelijkzijdige driehoek $\triangle$: zijden en binnengebied tezamen. Noem de hoekpunten van de driehoek A , B en C . De dekpuntstelling luidt dan:

Dekpuntstelling. *Iedere continue afbeelding g van $\triangle$ naar $\triangle$ heeft een dekpunt: er is een punt p in $\triangle$ met $g(p) = p$.*

Bij het bewijs komt heel wat kijken. Het is vooral zo gecompliceerd omdat de kern van het bewijs over *combinatorische* eigenschappen gaat. Het bewijs is dus een combinatie van topologie en combinatoriek. We zullen het bewijs in enkele hapklare brokken verdelen.

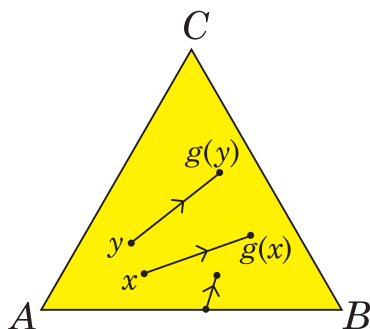
Neem vanaf dit moment aan dat we een continue afbeelding g van $\triangle$ naar $\triangle$ hebben. We zullen proberen een dekpunt van g te vinden.

L.E.J. Brouwer in 1912
(foto: Brouwerarchief)



Pijltjes

Trek bij ieder punt x uit Δ een pijltje $\overrightarrow{xg(x)}$ van x naar $g(x)$, zie figuur 1. We willen aantonen dat er een pijltje is waarvan begin- en eindpunt samenvallen, met andere woorden: een pijltje met lengte 0. Zodra zo'n pijltje gevonden is, hebben we het bewijs rond. Totdat we zo'n pijltje gevonden hebben, nemen we aan dat alle pijltjes die we tegenkomen een lengte *groter* dan 0 hebben en dus een verschillend begin- en eindpunt hebben. Merk op dat in elk punt van de rand van Δ het pijltje 'naar binnen wijst'. Als de punten x en y dicht bij elkaar liggen, dan liggen ook de pijltjes $\overrightarrow{xg(x)}$ en $\overrightarrow{yg(y)}$ dicht bij elkaar. De toevoeging van de pijltjes is dus continu.



Figuur 1 Vanuit elk punt x in Δ wordt een pijltje getrokken naar $g(x)$

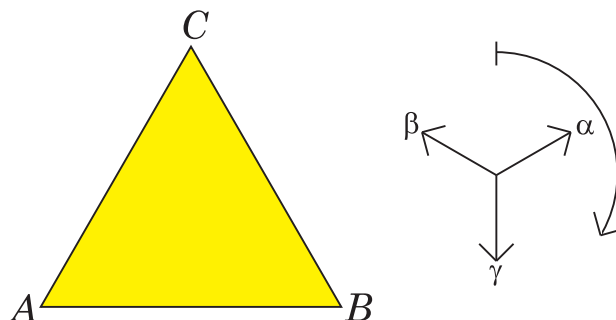
Labels

We gaan nu drie voorkeursrichtingen definiëren:

- de richting α wijst vanuit A loodrecht op de zijde BC ;
- de richting β wijst vanuit B loodrecht op de zijde AC ;
- de richting γ wijst vanuit C loodrecht op de zijde AB .

Bij ieder punt x kiezen we nu de voorkeursrichting die het dichtst bij het pijltje $\overrightarrow{xg(x)}$ ligt, zie figuur 2. In het geval dat je gedwongen wordt te kiezen uit twee van de voorkeursrichtingen, gaat rechts voor. Op deze manier krijgt, totdat we een dekpunt zijn tegengekomen, ieder punt een label α , β of γ , dat de voorkeursrichting aangeeft. Merk op dat de punten op de zijde AB een label α

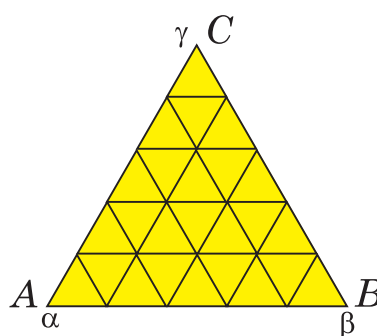
of β krijgen, maar nooit het label γ . Evenzo krijgen de punten op de zijde BC labels β of γ , maar niet het label α .



Figuur 2 De ronde pijl geeft voorkeursrichting α aan

Het combinatorisch deel

We stevenen nu af op de combinatorische kern van het bewijs. We leggen over Δ een netwerk van kleine driehoeken. Daartoe verdelen we iedere zijde van Δ door toevoeging van n deelpunten in $n + 1$ intervalletjes van gelijke lengte. Vervolgens verbinden we de deelpunten met lijnen evenwijdig met een van de zijden. Zo krijgen we een netwerk V_n bestaande uit $(n + 1)^2$ kleine driehoeken; in figuur 3 is het geval $n = 4$ getekend. Ieder hoekpunt dat hierbij optreedt, heeft een label (voorkeursrichting) gekregen. Wat we nu eerst willen bewijzen, is de volgende hulpstelling, die bekend staat als het *lemma van Sperner*.



Figuur 3 V_4 bestaat uit 25 kleine driehoeken

Lemma (Sperner). *Er is een kleine driehoek in V_n met drie verschillende labels.*

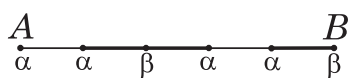
We bewijzen ietsje meer: er is een oneven aantal kleine driehoeken met drie verschillende labels.

We bekijken eerst de zijde AB en tonen

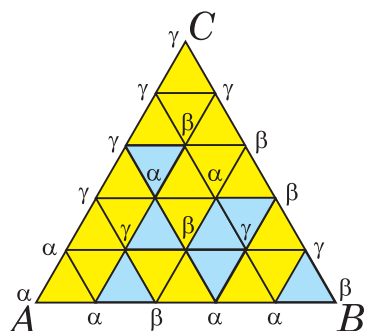
aan: er is een oneven aantal deelintervalletjes van AB met twee verschillende labels (en die zijn dus α en β), zie figuur 4. Dit gaat met een telargument. Het aantal intervalletjes met de verschillende labels α en β noemen we k , het aantal intervalletjes met twee labels α noemen we l . Dat levert samen $2l + k$ labels α . Hierbij zijn bijna alle labels α dubbel geteld. Het aantal dubbeltellingen van α noemen we c . Merk op dat het hoekpunt A het label α krijgt, en wel maar één keer. Zo komt er

$$2l + k = 2c + 1.$$

Hieruit volgt dat k oneven moet zijn.



Figuur 4 Het aantal deelintervalletjes met de labels α en β is hier 3 (k), het aantal deelintervalletjes met twee labels α is 2 (l) en het aantal dubbeltellingen van α is 3 (c)



Figuur 5 Er is een oneven aantal driehoeken in V_n met drie verschillende labels (hier: $k=7$, $l=5$, $c=7$, $d=3$)

Het bewijs dat er een oneven aantal driehoeken in V_n is met drie verschillende labels gaat bijna op dezelfde wijze, zie figuur 5. Het aantal driehoeken met drie verschillende labels noemen we k ; deze geven k zijden met de twee labels α en β . Het aantal driehoeken met een labeling van de vorm $\alpha\beta\alpha$ of $\beta\alpha\beta$ noemen we l ; die geven $2l$ zijden met de labels α en β . Hierbij zijn natuurlijk weer een aantal zijden, zeg c , dubbel geteld. Op de zijde AB zit een oneven aantal deelintervallen met de labels α en β . Noem dit aantal d . We hebben zojuist bewezen dat d oneven is. Deze deelintervallen, en ook alléén deze, worden maar één keer geteld. Op de zijden

BC en CA vinden we geen deelintervallen met de labels α en β . Zo komt er

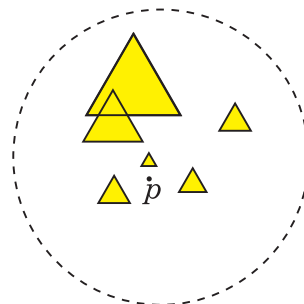
$$2l + k = 2c + d.$$

Omdat d oneven is, moet k het ook zijn. Daarmee is het combinatorische deel van het bewijs voltooid.

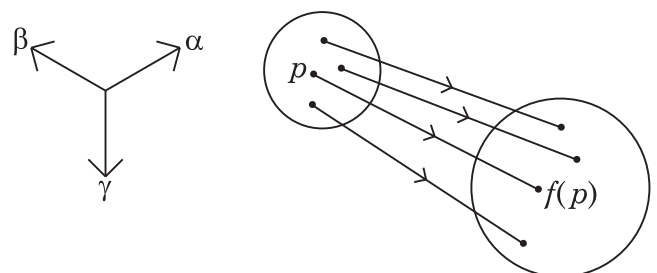
De finale

We kunnen nu het bewijs van de dekpuntstelling afronden. Zolang we geen dekpunt tegenkomen, kunnen we dit proces uitvoeren voor steeds grotere waarden van n : in V_n vinden we een driehoekje Δ_n met drie verschillende labels. Nu moeten we een *compactheidsargument* gebruiken. Er bestaat een punt p waar de driehoekjes Δ_n te hoop lopen: ieder cirkelschijfje om p , hoe klein ook, bevat een Δ_n voor geschikte n , zie figuur 6. Dat kan alleen maar als de pijl van p naar $f(p)$ lengte 0 heeft. Zou die lengte groter dan 0 zijn, dan komt in een voldoende kleine omgeving van p ten minste één label niet voor, zie figuur 7.

9



Figuur 6 Elk cirkelschijfje om p , hoe klein ook, bevat een Δ_n voor geschikte n



Figuur 7 Richting β komt hier niet voor (wel $-\beta$, maar daar gaat het hier niet om)

door Alex van den Brandhof

Snoeren in de knoop

Wie kent niet het verschijnsel van een telefoonsnoer dat zich steeds verder opkrult? Tot nu toe was de wiskundige beschrijving van dit type kronkels alleen bekend voor gesloten krommen, zoals elastiekjes. Onderzoeker Bob Planqué van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam bestudeerde het gedrag van gedraaide touwtjes met losse uiteindes. In april promoveerde hij aan de Technische Universiteit Eindhoven.



Planqué en zijn promotor Mark Peletier hebben een speciaal geval bekeken: een snoer rond een cilinder. Het snoer ligt tegen zichzelf aan, maar het aantal contactpunten waar krachten worden overgedragen blijkt verrassend genoeg beperkt te zijn. Over grote delen van het snoer waar het met zichzelf in aanraking komt oefent het snoer helemaal geen kracht uit op zichzelf.

Bron: www.cwi.nl/news

10

Prestigieuze prijzen uitgereikt

Op 11 april werd voor de achtste keer de Van Dantzigprijs uitgereikt. Dit gebeurde tijdens het jaarlijkse congres van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research op de Vrije Universiteit in Amsterdam. De Van Dantzigprijs is de hoogste Nederlandse prijs in de statistiek en besluitkunde en wordt eens in de vijf jaar uitgereikt. Deze keer waren er zelfs twee winnaars: Sem Borst en Mark van der Laan. Sem Borst werkt aan (telecommunicatie)netwerken. Mark van der Laan werkt aan verschillende onderwerpen in de biostatistiek. Op 24 mei werd in Oslo de Abelprijs – de grootste wiskundige onderscheiding, genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829) – uitgereikt aan aan Peter D. Lax van de universiteit van New York. Lax kreeg de onderscheiding vanwege zijn baanbrekende werk op het terrein van de partiële differentiaalvergelijkingen. Al eerder won hij prijzen, zoals

de Norbert Wiener Prize (van de American Mathematical Society) in 1975, de National Medal of Science in 1986 en de Wolf Prize in 1987. Met de Abelprijs heeft Lax 'de Nobelprijs voor de wiskunde' binnengehaald. De prijs – een bedrag van zes miljoen Noorse kronen (735.000 euro) – wordt sinds 2003 jaarlijks uitgereikt.

VERBETERING. In een illustratie van het aprilnummer is een foutje gesloten. In de linkerkubus onderaan bladzijde 17, in de tweede laag van onder, moet het achterste grijze kubusje paars zijn.

NWO. Dit jaar speelden 2221 leerlingen mee in de 1ste ronde van de NWO. De opgaven zijn helaas slechter gemaakt dan de voorgaande jaren. De scholenprijs ging dit jaar naar het St. Ignatius Gymnasium in Amsterdam.

RSA-getal gefactoriseerd

RSA-getallen (genoemd naar R. Rivest, A. Shamir en L. Adleman) zijn getallen met precies twee priemfactoren. Deze getallen spelen een belangrijke rol in de cryptografie. Op 9 mei 2005 zijn de twee factoren van een 200-cijferig getal gevonden door onderzoekers uit Nederland en Duitsland. Hoewel dit getal veel kleiner is dan het 42ste Mersenne-priemgetal (7.816.230 cijfers, zie

het Journaal in het vorige nummer), is de ontdekking bijzonder, omdat het bewijzen of weerleggen dat een getal priem is veel makkelijker blijkt te zijn dan het vinden van de priemfactoren van getallen die niet priem zijn. Hoewel het zeer eenvoudig is om twee grote priemgetallen met elkaar te vermenigvuldigen, kan het – ook met behulp van de computer – heel lastig zijn om de factoren p en

q te vinden als alleen het product pq gegeven is. Het totale rekenwerk van de factorisatie werd verricht in één en een kwart jaar. Als een enkele computer de berekening had moeten uitvoeren, dan was deze computer meer dan vijftig jaar bezig geweest. Enkele jaren geleden verscheen in *Pythagoras* een artikel over RSA (jaargang 37, nummer 5).

Bron: MathWorld Headline News

Multi-magische vierkanten

In een magisch vierkant staan getallen zodanig dat in elke rij, kolom en diagonaal hun som gelijk is. Recentelijk hebben de Nijmeegse wiskundigen Christian Eggermont en Arno van den Essen in samenwerking met Harm Derksen, oud-student, nu verbonden aan de universiteit van Michigan, een methode gevonden voor het maken van *multi-magische vierkanten*. De n -de macht van een vierkant is het vierkant dat wordt verkre-

gen door ieder element uit dat vierkant tot de n -de macht te verheffen. Een magisch vierkant heet nu n -magisch als ook de tweede, de derde, tot en met de n -de macht van het vierkant magisch zijn. Het vierkant dat je hier ziet, is 3-magisch: de som van elke rij, kolom en diagonaal is 870, de som van de tweede machten is 83810 en die van de derde machten is 9082800. Pas

in 2001 werd het eerste 4-magische en zelfs een 5-magisch vierkant gevonden. In oktober 2003 maakte de Chinees Pan

Fengchu het eerste 6-magische vierkant. Dit was het grootste tot dan toe gevonden multi-magische vierkant en goed voor een vermelding in het *Guinness book of records*.

Het Nijmeegse resultaat laat zien hoe voor *elke* macht n een n -magisch vierkant te construeren is. De methode is gebaseerd op technieken uit de lineaire algebra. Het eerste 7-magische vierkant dat ze

met deze methode gevonden hebben, heeft grootte 13^7 , dat wil zeggen: als ieder getal van dit vierkant in een hokje van 1 bij 1 cm geschreven zou worden, dan zou dit vierkant 627 km groot zijn. Het grootste getal dat in dit vierkant voorkomt, heeft zestien cijfers. Het eerste 8-magische vierkant dat ze vonden, is bijna 7000 km groot. Bron: www.puzzled.nl

11

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

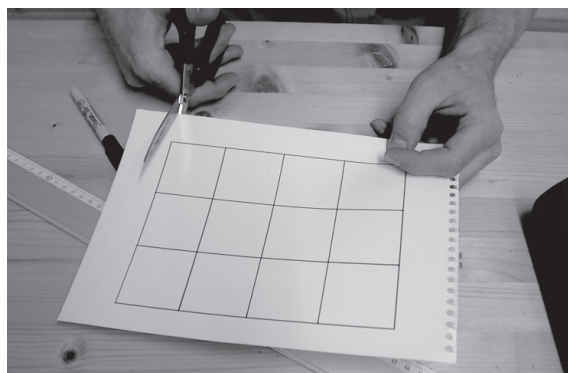
Topologie met de handen

Aflevering 6 Een blaadje met vier kanten

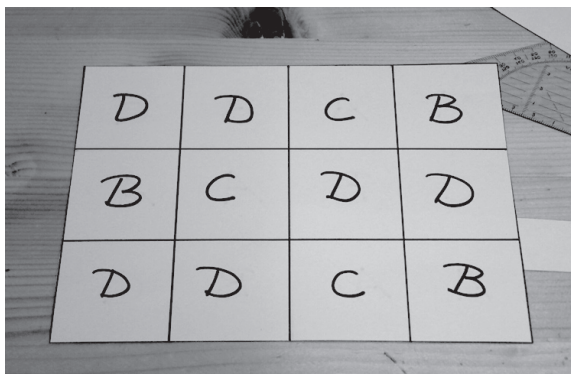
12



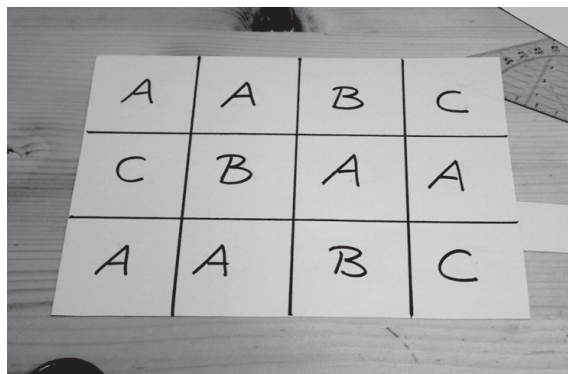
1 Je hebt nodig: papier, liniaal, schaar, plakband en potlood.



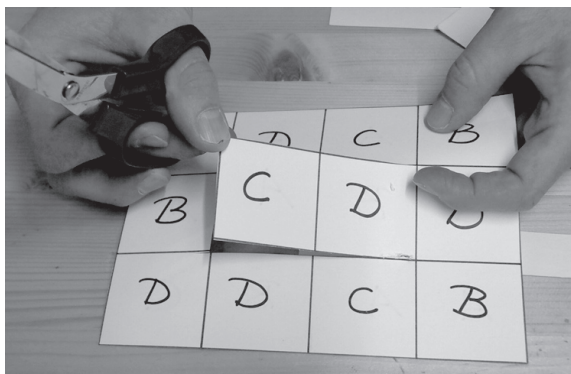
2 Teken op het papier een rechthoek van 3 bij 4 vierkanten. Knip de rechthoek uit.



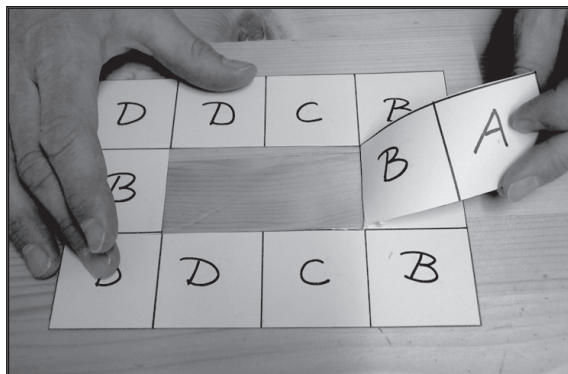
3 Schrijf dun in de vierkanten met potlood de letters zoals hier is aangegeven.



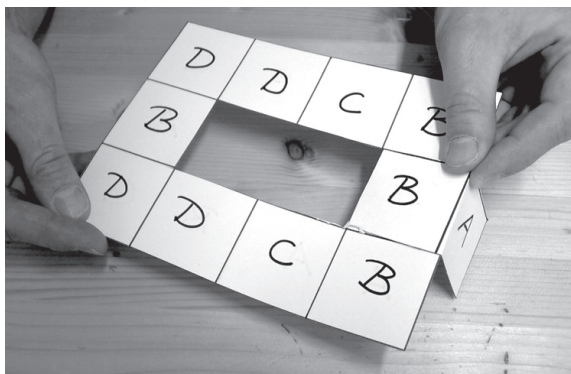
4 Teken ook op de achterkant de vierkanten en zet daar de letters zoals aangegeven.



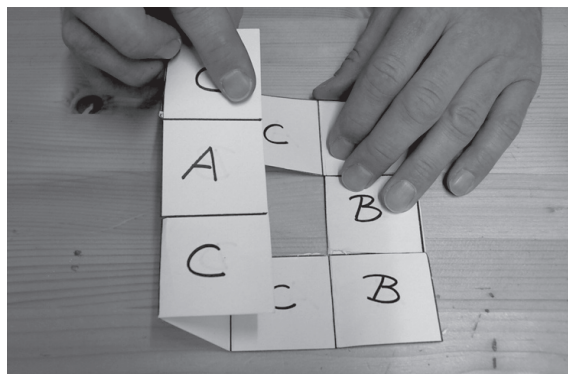
5 Knip een luikje in de rechthoek met de middelste twee vierkanten.



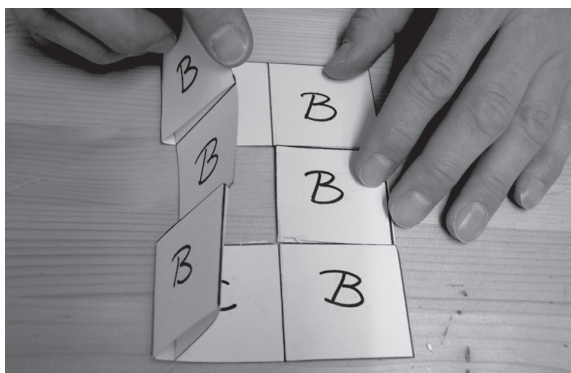
6 Vouw het luikje open.



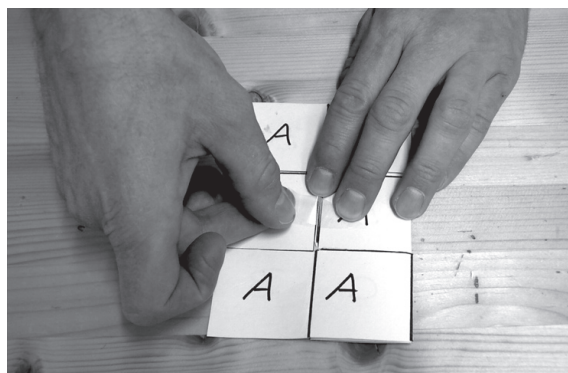
7 Vouw het uitstekende deel van het luikje om naar achteren.



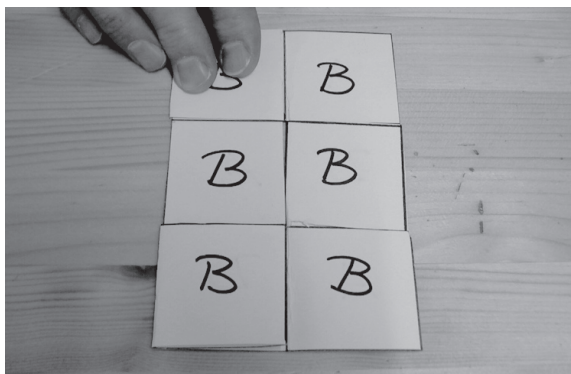
8 Vouw de linker kolom twee keer om naar voren.



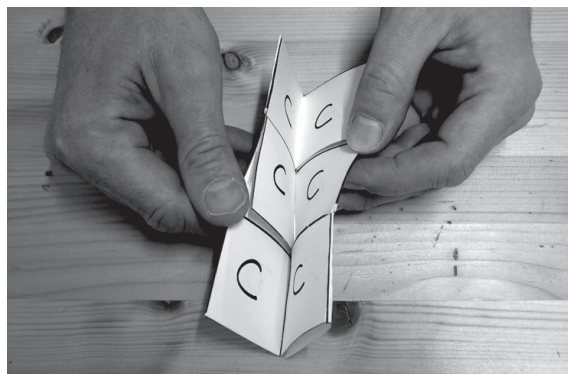
9 Je hebt nu een rechthoek over.



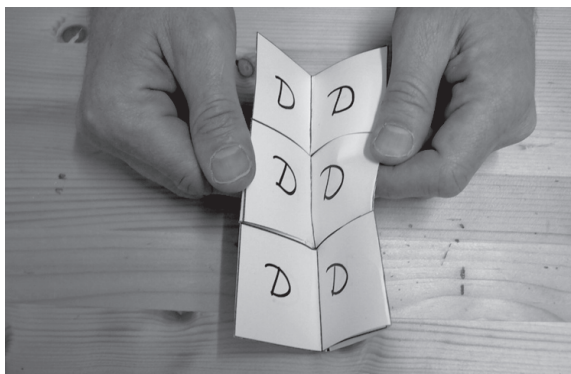
10 Draai de rechthoek om. Plak met plakband de twee A's in het midden aan elkaar.



11 Draai de rechthoek om, met de B's naar voren.



12 Vouw de rechthoek nu in het midden open.



13 Nogmaals. Het resultaat is een blaadje met vier kanten.



14 Maak het geheel af door er vier verschillende plaatjes op te plakken.

°° De diagonalen van een regelmatische veelhoek

Teken een veelhoek en trek alle diagonalen. Hoe meer hoeken, hoe mooier het resultaat. Het trekken van de diagonalen is een geduldwerk dat zich gedachteloos laat uitvoeren. Maar het resultaat is allerm minst voorspelbaar. Wie de tekening namelijk goed bekijkt, stuit op moeilijke wiskundige vragen.

De tekening

Om een regelmatige n -hoek te tekenen, trek je eerst een cirkel. Trek vervolgens vanuit het middelpunt n lijnstukken naar de cirkelomtrek, zó dat twee opeenvolgende lijnstukken een hoek maken van $360/n$ graden. Nu hebben we de n hoekpunten van de regelmatige n -hoek. Gum de hulplijnen waarmee je de hoekpunten vond uit, en verbind alle hoekpunten met elkaar. Je kunt ook een computerprogramma het tekenwerk

voor je laten doen. In figuur 1 zie je een stukje Pascal-code waarmee de diagonalen kunnen worden getekend. Op onze website www.pythagoras.nu vind je een programma dat elke n -hoek met al zijn diagonalen razendsnel voor je tekent.

Het aantal diagonalen

Hoeveel verbindingslijnen zijn er eigenlijk in een n -hoek met zijn diagonalen? Vanuit elk van de n hoekpunten vertrekken lijnstukken naar alle $n - 1$ andere hoekpunten. De twee directe burens vallen af, die verbindingslijnen zijn immers zijden in plaats van diagonalen. Dus, zou je denken, in totaal zijn dat $n(n - 3)$ lijnstukken. Maar op deze manier tel je elk lijnstuk dubbel, het heeft immers twee uiteinden. We moeten het antwoord dus halveren. Het aantal diagonalen is dus $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

```
var
i,j,n : integer;
cosarr, sinarr : array [0..100] of real;
begin
for i := 0 to n do
begin
cosarr[i] := 100*cos(2*pi*i/n)+100;
sinarr[i] := 100*sin(2*pi*i/n)+100;
end;
for i := 0 to n-1 do
for j := i+1 to n do
begin
moveto(round(cosarr[i]),round(sinarr[i]));
lineto(round(cosarr[j]),round(sinarr[j]));
end;
end;
```

Figuur 1 Een stukje broncode

Het aantal snijpunten van de diagonalen

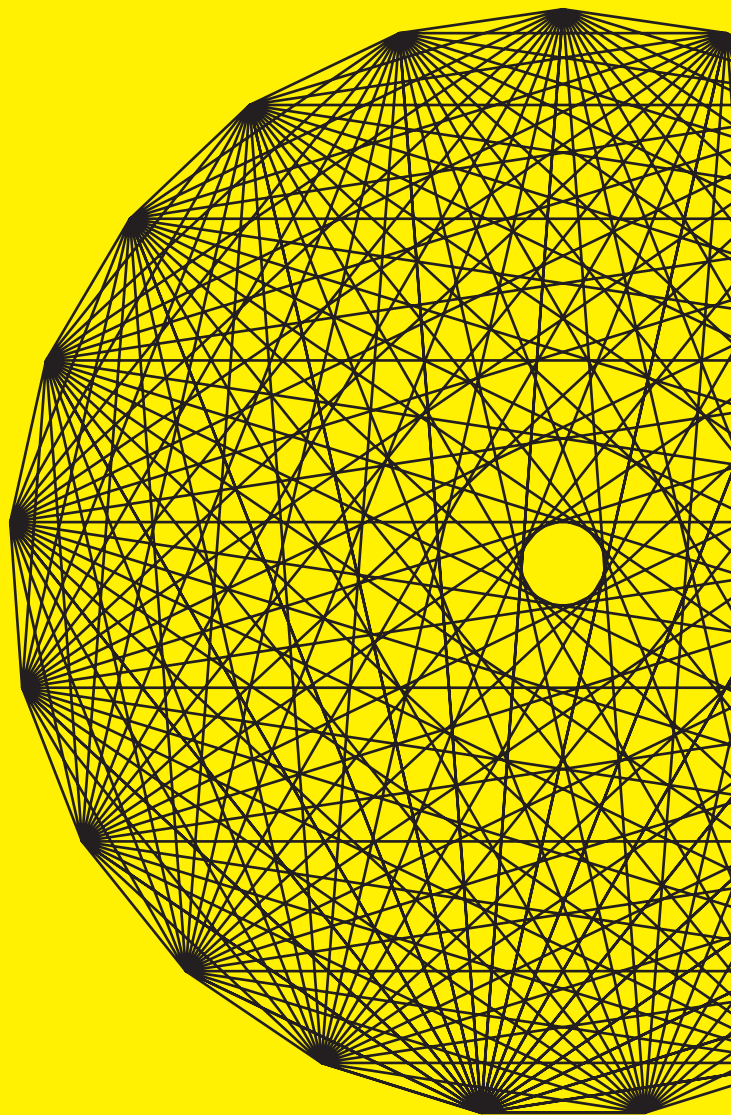
Als twee diagonalen snijden, dan zijn daar vier hoekpunten bij betrokken, namelijk de twee keer twee uiteinden van die diagonalen. Hoeveel viertallen hoekpunten kun je onderscheiden in een n -hoek? Dat zijn er $\binom{n}{4}$, oftewel $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Bij elk viertal punten kunnen op precies één manier twee elkaar snijdende diagonalen worden getekend. Dus is het aantal snijpunten van diagonalen hooguit $\binom{n}{4}$. Het echte aantal snijpunten kan echter minder zijn, want sommige snijpunten van diagonalen zouden kunnen samenvallen. In het geval van de regelmatige zeshoek verwacht je op grond van de bovengenoemde formule vijftien snijpunten, maar je zult er slechts dertien vinden. Dit komt door het middelpunt, waar drie diagonalen elkaar snijden, dus drie snijpunten samenvallen. Als er meer diagonalen door een punt gaan, dan wordt het totaal aantal snijpunten kleiner. Dit geldt in het bijzonder als het aantal hoekpunten even is, zeg $2m$. Dan gaan door het middelpunt van de betreffende regelmatige veelhoek m diagonalen. Is het aantal hoekpunten oneven, dan is er iets bijzonders aan de hand (zie figuur 2, waar $n = 21$). Men kan namelijk het volgende bewijzen:

Stelling. *Als n oneven is, dan gaan er nooit meer dan twee diagonalen door één punt (afgezien van de hoekpunten).*

Deze verrassende stelling werd in 1936 bewezen door de Nederlander Gerrit Bol. Het bewijs was gebaseerd op stevige algebra, en is veel te ingewikkeld om in dit artikel te behandelen. Een direct gevolg van de stelling is:

Gevolg. *Als n oneven is, is het aantal snijpunten $\binom{n}{4}$ (afgezien van de hoekpunten).*

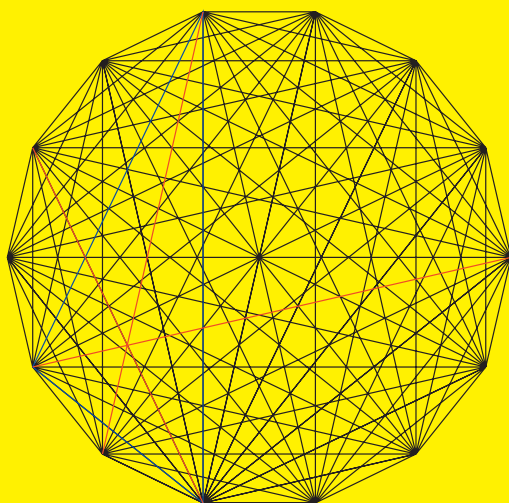
Een dergelijke formule voor even n laat zich niet zo gemakkelijk opschrijven. In het middelpunt vallen dan een stel snijpunten samen, zoals wij al opmerkten. Maar ook buiten het middelpunt kunnen er punten voorkomen waar drie diagonalen elkaar



Figuur 2

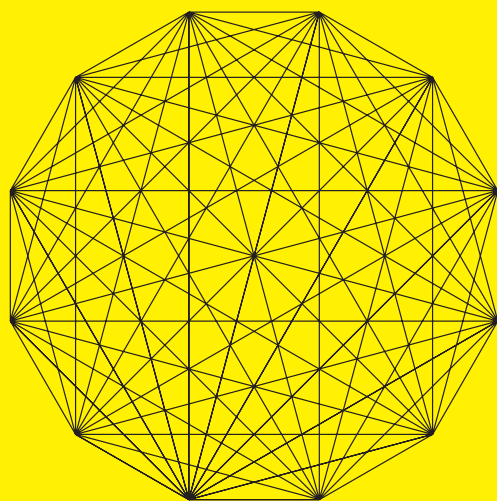
Een regelmatige 21-hoek. Het aantal snijpunten binnen deze veelhoek is $\binom{21}{4} = 5985$

snijden. Dit laten we zien aan de hand van figuur 3. Daar zie je een blauwe driehoek. In die driehoek zijn met rood de bissectrices getekend. Dat zijn de rode diagonalen. Nu geldt dat de bissectrices elkaar snijden in één punt. Dus de rode diagonalen snijden elkaar in één punt. Het is eenvoudig om dergelijke punten te construeren. Als $n = 2m$, kies dan u, v en w zó, dat $u, v, w > 0$ en $u + v + w = m$. Kies nu op de $2m$ -hoek punten A, B en C zó dat $\angle AMB = u \times 180^\circ/m$, $\angle BMC = v \times 180^\circ/m$ en $\angle CMA = w \times 180^\circ/m$. Nu vallen de bissectrices samen met diagonalen. Deze diagonalen snijden elkaar dus in hetzelfde punt.



Figuur 3
De regelmatige 14-hoek met driehoek en bissectrices

Vervolgens vraag je je af of er ook nog meer dan drie diagonalen door één punt kunnen gaan, buiten het middelpunt en de hoekpunten. Het antwoord is ja! Bijvoorbeeld in de regelmatige 12-hoek (zie figuur 4) zijn er dergelijke punten waar vier diagonalen elkaar snijden. En dit is ook het geval voor alle regelmatige $6m$ -hoeken, als $m > 2$.



Figuur 4 De regelmatige 12-hoek: er zijn punten waar vier diagonalen elkaar snijden

Dan kun je je afvragen of er buiten de hoekpunten en het middelpunt punten zijn waar meer dan vier diagonalen elkaar snijden. Ook dit is het geval. Gerrit Bol bewees in 1936 hierover de volgende stelling:

Stelling. Een punt buiten een punt dat geen hoekpunt of middelpunt is, kan snijpunt zijn van k diagonalen, waarbij:

$k = 2$, als n oneven of 6 is,

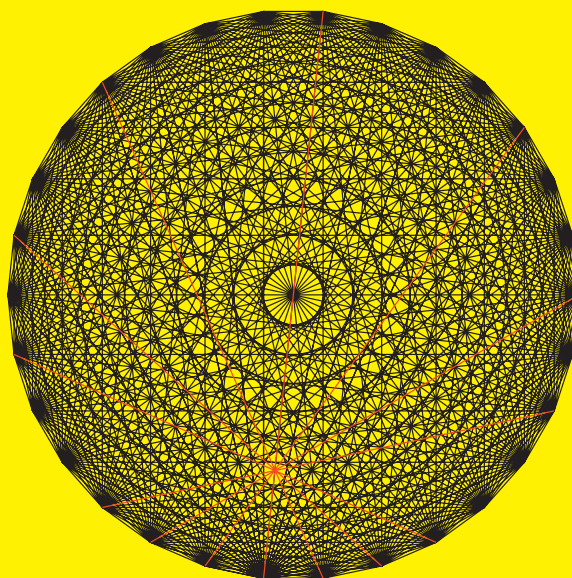
$k = 3$, als n even > 6 is en niet deelbaar door 6,

$k = 4$, als $n = 12$,

$k = 5$, als n deelbaar is door 6, $n > 12$ en n niet deelbaar is door 30,

$k = 7$, als n deelbaar is door 30.

Merk op dat volgens deze stelling er dus buiten het middelpunt nooit meer dan zeven diagonalen door een punt gaan, hoe groot n ook is. In figuur 5 zie je een regelmatige 30-hoek. Hierin bevinden zich 13800 snijpunten van twee diagonalen, 2250 van drie, 420 van vier, 180 van vijf, 120 van zes en 30 van zeven diagonalen; en in het middelpunt snijden vijftien diagonalen elkaar. De algemene formule voor het aantal snijpunten van diagonalen in de regelmatige n -hoek is vrij ingewikkeld; wil je hem graag zien, ga dan naar onze site www.pythagoras.nu. Daar vind je ook een verwijzing naar een recent artikel van Bjorn Poonen en Michael Rubinstein met moderne bewijzen gebaseerd op complexe eenheidswortels.



Figuur 5 Een van de 30 snijpunten van 7 diagonalen in de regelmatige 30-hoek

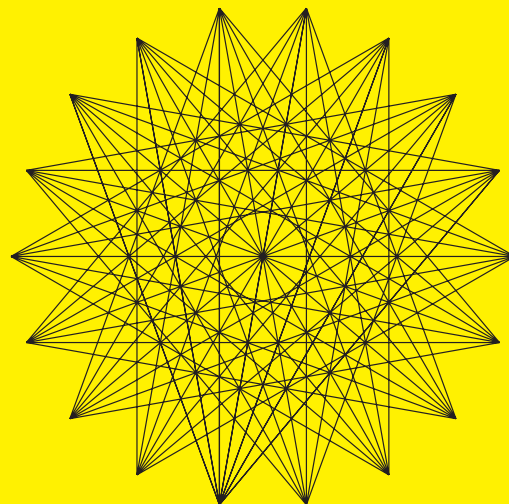
De lijn van Van Straten

Duco van Straten bekeek in 1987 een tekening van een regelmatige 30-hoek en pakte een liniaal. Hij kreeg de indruk dat er vele

snijpunten van diagonalen op een lijn liggen, die niet samenvalt met één van de diagonalen. Dit noemen we een *lijn van Van Straten*. In figuur 6 is een lijn van Van Straten afgebeeld. Inmiddels is Van Straten hoogleraar aan de universiteit van Mainz, in de meetkunde. Om aan te tonen dat al deze punten op een lijn liggen, kunnen we gebruik maken van projectieve meetkunde, en in het bijzonder de stelling van Pappos. Deze stelling valt echter buiten het bereik van de middelbare schoolwiskunde.

Regelmatige sterren

Hoe kun je een regelmatige ster construeren? Dit kun je doen door de n -hoek zelf niet te tekenen en door niet alle diagonalen te tekenen kun je de ster een sterkere punt geven. In het uiterste geval houd je slechts $n/2$ diagonalen door het middelpunt over. In figuur 7 zie je een mooi voorbeeld.



Figuur 7 Een regelmatige 18-ster

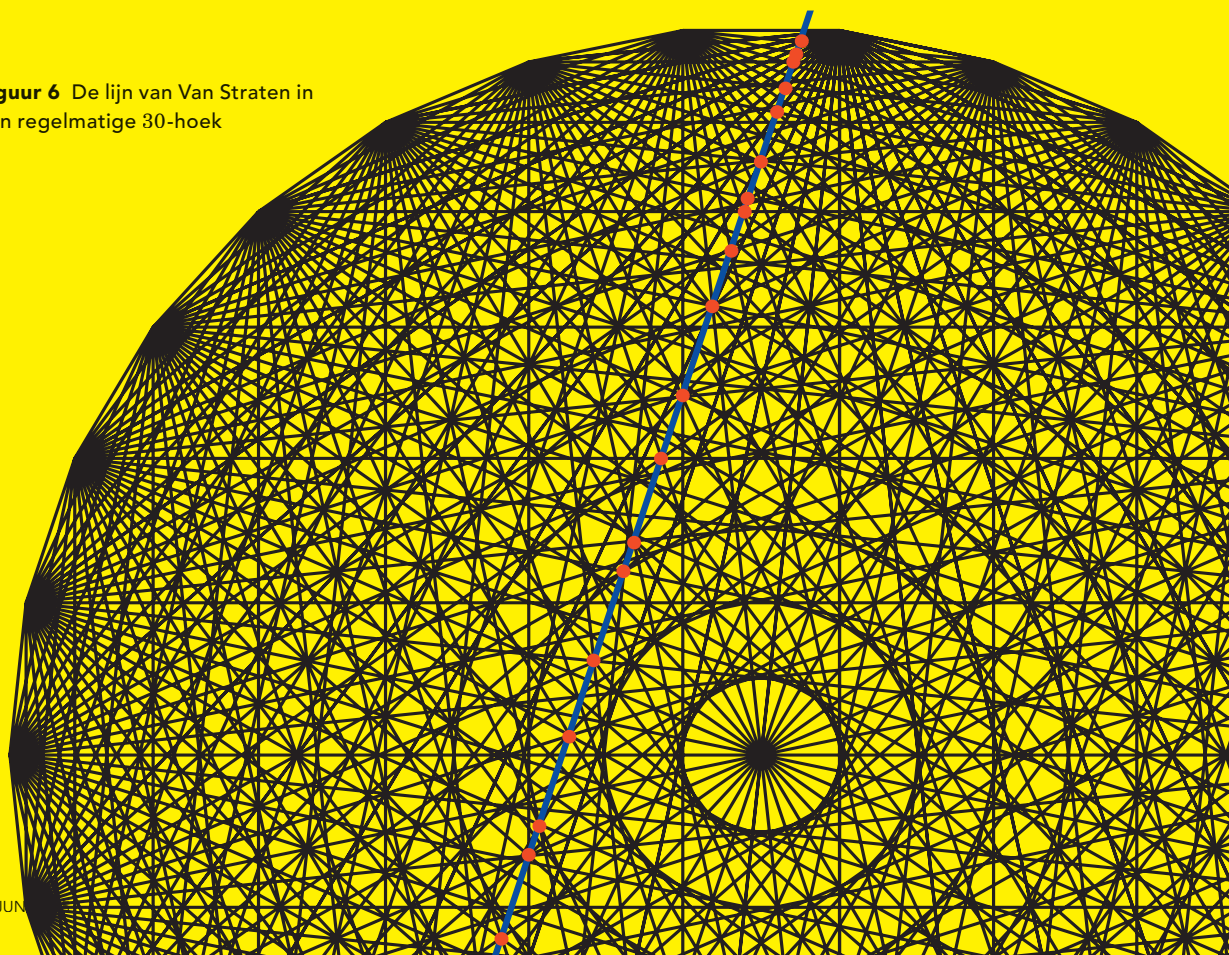
Opgaven

1. Hoeveel sterren kun je tekenen horende bij een regelmatige zevenhoek? Hoeveel regelmatige sterren kun je tekenen horende bij een regelmatige n -hoek?
2. Kun je de lengte van de grootste diagonaal van een regelmatige zeshoek (met zijden 1) uit je hoofd uitrekenen? En de één-na-grootste van een regelmatige achthoek?

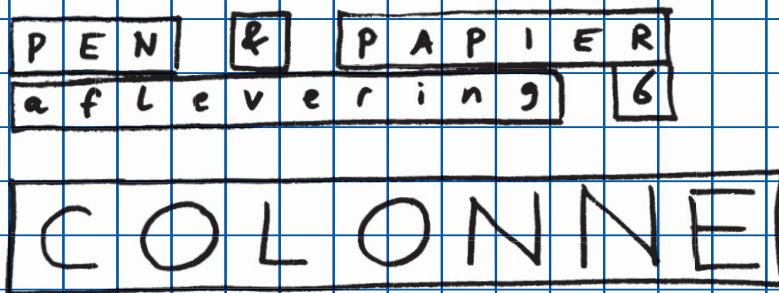
Matthijs Coster heeft in 1987 intensief aan de regelmatige veelhoeken gewerkt. Hij had geen weet van het bestaan van het werk van Gerrit Bol en bewees dat buiten het middelpunt en de hoekpunten er slechts eindig veel diagonalen door een punt kunnen gaan, en dat dit maximum wordt aangenomen in de regelmatige 2520-hoek.

17

Figuur 6 De lijn van Van Straten in een regelmatige 30-hoek



In de laatste aflevering van de serie pen-en-papier-spelen legt Walter Joris het spel *Colonne* uit. Het enige dat je nodig hebt, is een tegenstander, ruitjespapier en ieder een pen.



We spelen op een veld van 10 x 10, met zwarte en witte schijven. De beginopstelling zie je in figuur 1. Elke *afzonderlijke schijf* mag zich één vakje recht of diagonaal 'bewegen', waarbij een nieuw schijfje wordt getekend, terwijl óók het oude blijft staan. Een *colonne* is een serie van twee of meer schijven achter elkaar in één lijn, recht of diagonaal. Alleen een colonne mag slaan.

Slaan gebeurt wanneer een grotere colonne zich verplaatst tot vlak voor een kleinere colonne of een alleenstaande schijf. Als er geen plaats meer is, vult de grote aan wat er kan. De kleinere colonne wordt doorgeestreept.

In tegenstelling tot alleenstaande schijven mogen colonnes zich alleen verplaatsen om te slaan. Gelijke colonnes kunnen elkaar niet slaan. Een doorgekruist vakje geldt als barrière: daar kun je nooit meer overheen. Je mag colonnes ook splitsen. Zo kan een rij van drie schijven achter elkaar gezien wor-

den als drie afzonderlijke schijven, als een colonne van twee plus één alleenstaande, of als een colonne van drie.

Winnaar is degene met de meeste schijven. Zetten is verplicht. Je kunt nog blijven slaan, als het veld al vol is.

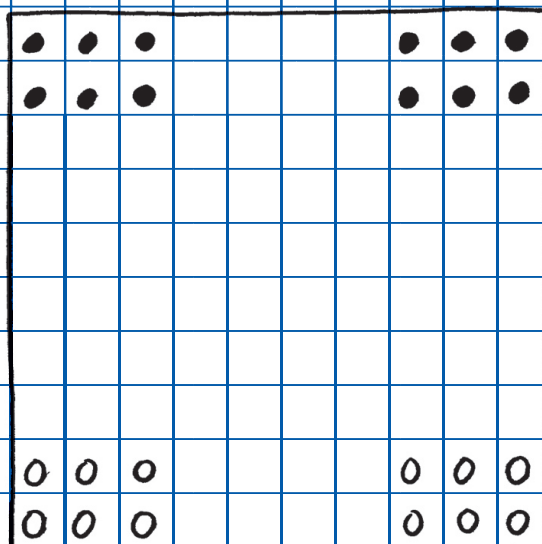
Voorbeelden

Bekijk figuur 2. Hier zijn drie zetten gedaan. In de linkerbenedenhoek is wit begonnen met één schijf te verschuiven. Vervolgens heeft zwart linksboven een zet gedaan. Hierna heeft wit met een diagonale colonne van drie stenen twee zwarte schijven rechtsboven geslagen.

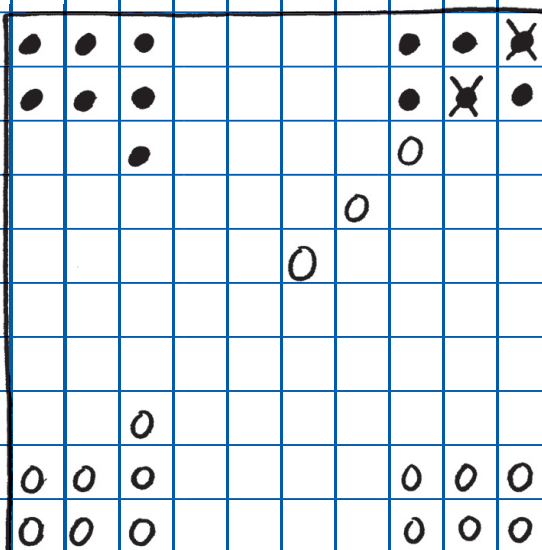
In figuur 3 zie je een ander spelverloop; dit is een eindsituatie waarbij alleen de achterlijnes nog moeten worden ingevuld en waarbij zwart duidelijk in het nadeel is.

Bron: *100 Strategic Games for Pen and Paper*, Walter Joris, uitgegeven door Carlton, Londen. ISBN: 1-84222-727-0.

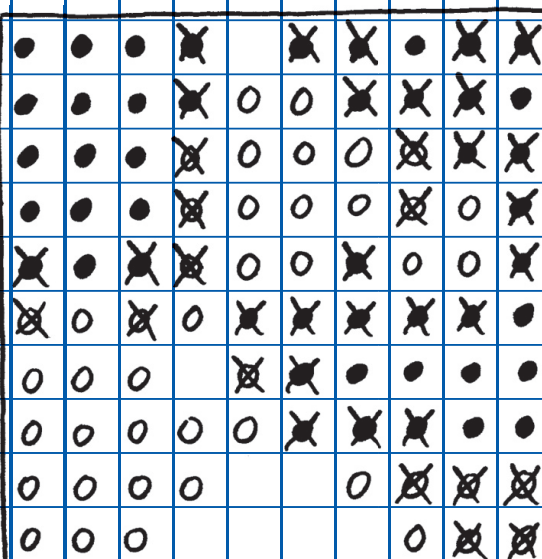
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



°Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman**
en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien worden er prijzen aan het eind van elke jaargang weggegeven: voor de drie leerlingen die over de hele jaargang het beste hebben gescoord, zijn er boekenbonnen van 120, 100 en 80 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

20

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 augustus 2005.

OPGAVE

120

In het platte vlak worden 1.000.000 punten gemarkeerd. Bewijs dat er een cirkel is waarbinnen precies 2005 gemarkeerde punten liggen.

OPGAVE

121

Bepaal de waarde van het volgende oneindige product:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdots$$

Aanwijzing: schrijf $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ en zoek iets dergelijks voor $n^3 + 1$.

OPLOSSING

116

Laat zien dat er voor elk geheel getal n een geheel getal is waarvan de decimale schrijfwijze alleen de cijfers 0 en 1 bevat en dat deelbaar is door n .

Oplossing. Laat n een willekeurig geheel getal zijn. Laat r_i de rest bij deling door n van 10^i zijn. Dan kan r_i slechts de waarden 0 tot en met $n - 1$ hebben. In het rijtje resten is er volgens het 'ladenprincipe' dus een getal dat oneindig vaak voorkomt. Als je nu de eerste n machten van 10 optelt die dit getal als rest geven, krijg je een getal dat alleen uit nullen en enen bestaat en bovendien rest $n \cdot 1 = n$ bij deling door n geeft, en dus deelbaar is door n .

Dit hoeft overigens niet het kleinste getal te zijn met de vereiste eigenschappen; sommige inzenders hebben methoden gevonden die in het algemeen kleinere oplossingen opleveren.

Deze opgave werd opgelost door: Wouter Berkelmans van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, Kenneth Saey van het Edugo de Toren te Oostakker (België), Jens Vande Cavey van het Heilige-Drievuldigheidsschool te Leuven (België) en Elias C. Buissant des Amorie te Castricum. De boekenbon gaat naar Jens Vande Cavey.

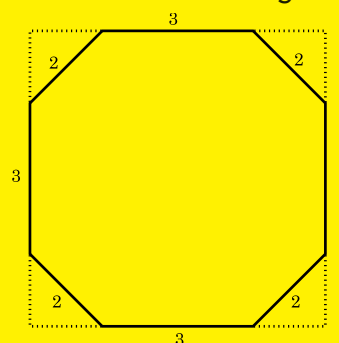
OPLOSSING

117

Van een convexe achthoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen, hebben vier opeenvolgende zijden lengte 3 en de andere vier lengte 2.

Geef de oppervlakte van de achthoek in de vorm $r + s\sqrt{t}$, waarbij r , s en t positieve gehele getallen zijn.

Oplossing. Noem de hoekpunten van de achthoek in volgorde A tot en met H . Stel dat B een hoekpunt is waar een zijde van lengte 3 en een van lengte 2 samenkomen. Als we driehoek ABC nu spiegelen in de middelloodlijn van AC , blijft de oppervlakte van de driehoek (en dus van de totale achthoek) hetzelfde, maar wisselen de twee zijdelengtes van plaats. Met een aantal van dit soort verwisselingen kunnen we ervoor zorgen dat de acht zijden om en om 2 en 3 zijn, zoals in onderstaande figuur.



De oppervlakte van deze figuur is $(3 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = 13 + 12\sqrt{2}$.

Deze opgave werd opgelost door: Clara Mertens van het Sint-Jozefsschool te Aarschot (België), Wouter Berkelmans van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, Kenneth Saey van het Edugo de Toren te Oostakker (België), Jens Vande Cavey van het Heilige-Drievuldigheidsschool te Leuven (België) en Elias C. Buissant des Amorie te Castricum. De boekenbon gaat naar Kenneth Saey.

Problemen

door Dion Gijswijt

Machten

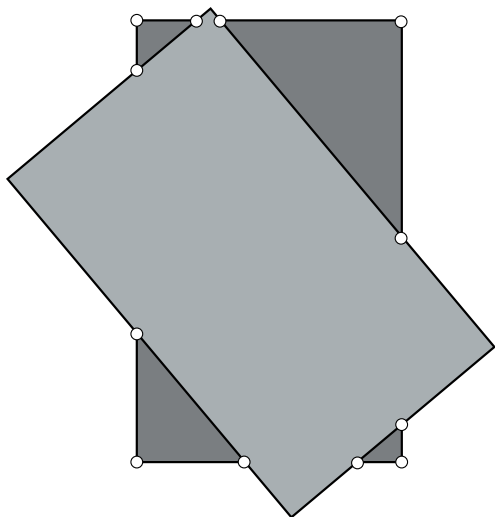
Als x een positief getal is met

$$x^4 + x^{-4} = 527,$$

welk getal is x dan?

Visitekaartjes

Op tafel liggen twee identieke visitekaartjes, de een bovenop de ander (zie de figuur). Van het onderste visitekaartje steken vier driehoekige puntjes onder het bovenste kaartje uit. Wat is de omtrek van deze vier driehoekjes samen?

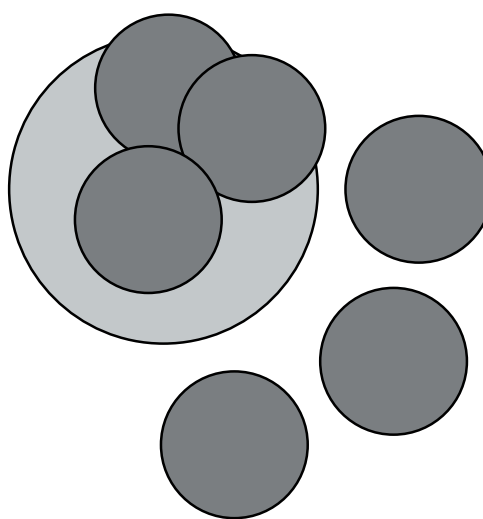


Coccinella septempunctata

Een vierkant is verdeeld in 7×7 kleine vierkantjes. Op elk van deze 49 velden zit één lieveheersbeestje. Een aantal van deze beestjes loopt elk naar een aangrenzend veld, op zo'n manier dat daarna weer op elk veld precies één lieveheersbeestje zit. Is het waar dat ten minste één lieveheersbeestje op haar eigen veld is gebleven?

Cirkelschijven

Kun je een gegeven cirkelschijf van straal 2 overdekken met zes schijven van straal 1?



Fiches stapelen

Voor je ligt een stapel van honderd fiches. Je mag nu de stapel splitsen in twee kleinere stapels. Telkens mag je een stapel nemen en die splitsen in twee kleinere stapels. Er mag echter nooit een stapel zijn met meer dan tweemaal zoveel fiches als in een andere stapel. Kun je de situatie bereiken die betaamt uit honderd 'stapeltjes' van elk één fiche?

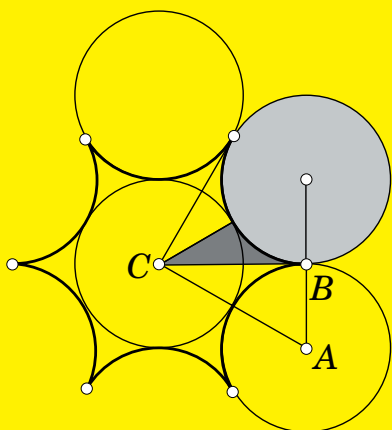
Oplossingen

Zeshoekige ster

Driehoek ABC is een rechthoekige driehoek met $AC = 2$. Dan geldt dat $AB = 1$ en $BC = \sqrt{3}$.

De oppervlakte van de zeshoekige ster is dus gelijk aan

$$6 \times \frac{1}{2} \cdot (2AB) \cdot (BC) - 6 \times \frac{1}{3} \cdot \pi (AB)^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi$$



Ramsey's feestje

Elk van de vijf dames kent minstens drie heren wel of minstens drie heren niet. We mogen wel aannemen dat de meeste dames minstens drie heren kennen, want het andere geval gaat net zo. Er zijn dus drie dames (Aline, Belle en Chloé) die elk minstens drie heren kennen. Laten we zeggen dat Aline de drie heren Fjodor, Gerard en Harald kent. Als een van beide andere dames twee of meer van deze drie heren kent, zijn we klaar. Neem daarom aan dat Belle en Chloé allebei hoogstens één van deze drie heren kennen. Omdat ze minstens drie heren kennen, moeten ze allebei wel de overige twee heren Isaac en Johan kennen.

Vier vieren

Je kunt met alleen de operaties $\log$, $\sqrt{\quad}$ en : en vier 4-en alle gehele getallen maken (zelfs alle breuken). Hoe dat precies moet, laten we aan jouzelf over. Het getal 2005 kun je zelfs met behulp van maar drie 4-en maken, namelijk als volgt:

$$2005 = \frac{\log\left(\frac{\log 4}{\log \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}\right)}{\log 4}$$

waarbij het aantal worteltekens gelijk is aan 2×2005 .

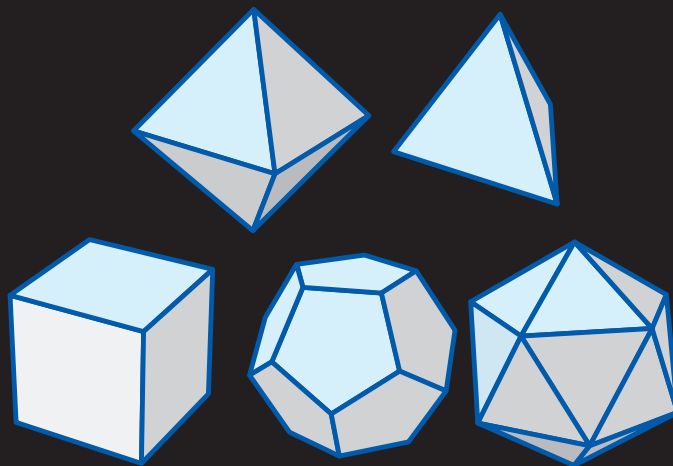
Mieren

Als bij iedere botsing de twee mieren elkaar zouden passeren in plaats van beide te keren, krijg je het gevraagde getal door te tellen hoe vaak er gepasseerd wordt. Maar iedere mier passeert dan iedere andere mier precies eenmaal. Het antwoord is dus $9 \times 10 = 90$.

Ring

Neem als middelpunt de oorsprong en als binnen- en buitenstraal $\sqrt{20\frac{1}{2}}$ en $\sqrt{24\frac{1}{2}}$. Dan is de oppervlakte van de ring gelijk aan $\pi(24\frac{1}{2} - 20\frac{1}{2})$, oftewel 4π . Omdat de getallen 21, 22, 23, 24 niet de som zijn van twee kwadraten, liggen er geen roosterpunten binnen de ring.

°° Nieuwe platonische lichamen



Figuur 1 De vijf platonische lichamen

24

Lange tijd was iedereen ervan overtuigd dat er maar vijf regelmatige veelvlakken bestaan: de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icoesaëder. Dit vijftal staat bekend onder de naam *platonische lichamen*, zie figuur 1. Kenmerkend aan een platonisch lichaam is dat de zijvlakken onderling congruente, regelmatige veelhoeken zijn, en dat de hoekpunten alle op dezelfde manier zijn opgebouwd.

Bij een platonisch lichaam draait het om twee getallen: n , het aantal hoeken van een zijvlak, en v , het aantal ribben dat in elk hoekpunt samenkomt. Bij de kubus geldt dat $n = 4$, want een kubus is opgebouwd uit vierhoeken, en $v = 3$, want in elk hoekpunt komen drie ribben samen. De kubus geven we verder aan als $\{4, 3\}$.

Vorig jaar riep Popke Bakker in het juni-nummer van *Pythagoras* op om systematisch te onderzoeken welke combinaties $\{n, v\}$ allemaal mogelijk zijn. De mogelijkheden bracht hij onder in een tabel, het *Platonisch systeem*, zie ook www.pythagoras.nu.

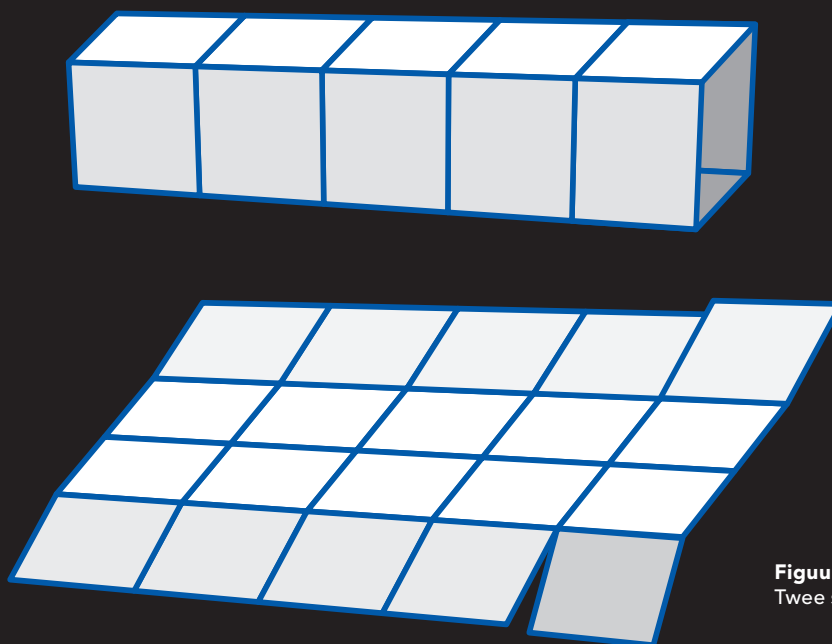
Marleen Kooiman ging aan de slag en bedacht bij nog twee openstaande vakjes in de tabel nieuwe 'platonische lichamen'.

Drie soorten ribben

Alle hoekpunten van een platonisch lichaam moeten 'gelijk' zijn, dat wil zeggen: zitten op dezelfde manier in elkaar. Daarom zou je denken dat alleen de twee getallen n (aantal hoekpunten van een zijvlak) en v (aantal zijvlakken in een hoekpunt) ertoe doen. Maar kijk bijvoorbeeld eens naar het geval $\{4, 4\}$. Het 'platonische lichaam' $\{4, 4\}$ zou moeten bestaan uit vierkanten, waarbij er in elk hoekpunt vier vierkanten samenkomen. In figuur 2 zie je dat er minstens twee verschillende manieren zijn om dat voor elkaar te krijgen.

Beide 'veelvlakken' hebben vier vierkanten in elk hoekpunt. Het verschil zit hem in de ribben. Als je de ribben ziet als vouwlijnen, dan is er bij sommige ribben naar binnen gevouwen, bij andere naar buiten, en weer bij andere is er niet gevouwen.

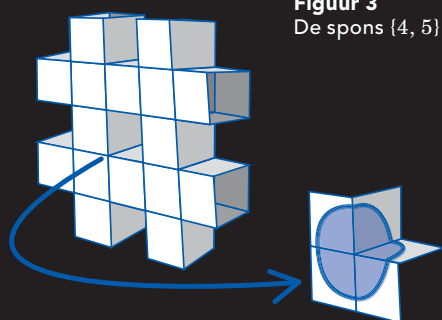
Voor het gemak heb ik deze drie soorten ribben namen gegeven: *bolle* ribben en *holle* ribben en *niet-gevouwen* ribben. Om de hoekopbouw te omschrijven, kun je nu rond een punt wandelen en opschrijven wat er bij elke ribbe gebeurt. Voor de bovenste oplossing die je in figuur 2 ziet, levert dat op niet-bol-niet-bol. Voor de onderste oplossing krijg je niet-niet-niet-niet. Zo'n combi-



Figuur 2
Twee soorten $\{4, 4\}$

natie die aangeeft hoe de ribben gevouwen moeten worden, noem ik het *ritme* van het hoekpunt.

Om nog een voorbeeld te geven: het oneindige veelvlak $\{4, 5\}$ in Popkes systeem heeft ribben met het ritme niet-niet-bol-hol-bol, zie figuur 3.



Figuur 3
De spons $\{4, 5\}$

Een nieuw hoekpunt zoeken

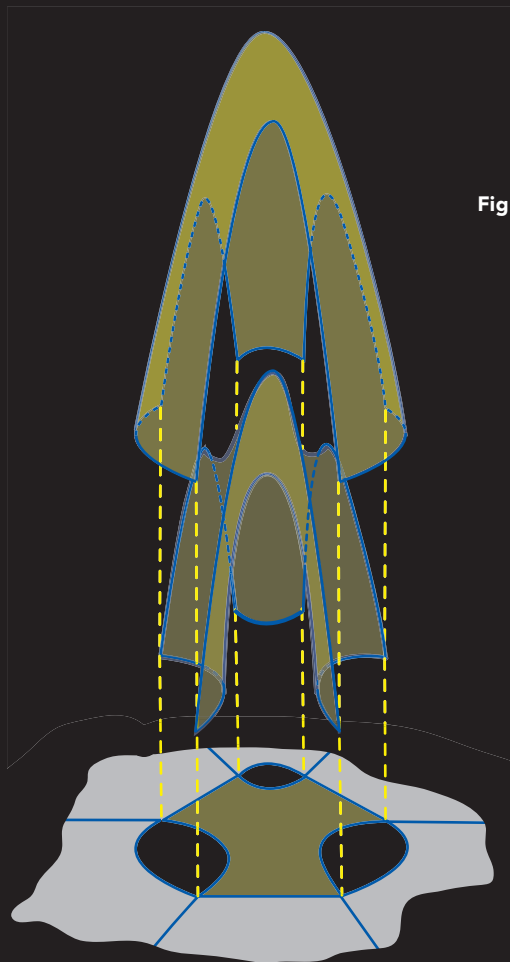
Je kunt de situatie ook omdraaien. Je schrijft dan eerst alle mogelijke ritmes van een hoekpunt op, en vervolgens probeer je uit bij welk ritme een echt hoekpunt hoort. Het kan namelijk ook zijn dat het met een bepaalde beschrijving niet mogelijk is om alle ribben aan elkaar te plakken.

Omdat er maar drie mogelijkheden zijn om een ribbe te vouwen, is er een beperkt aantal mogelijkheden om de ribben die in

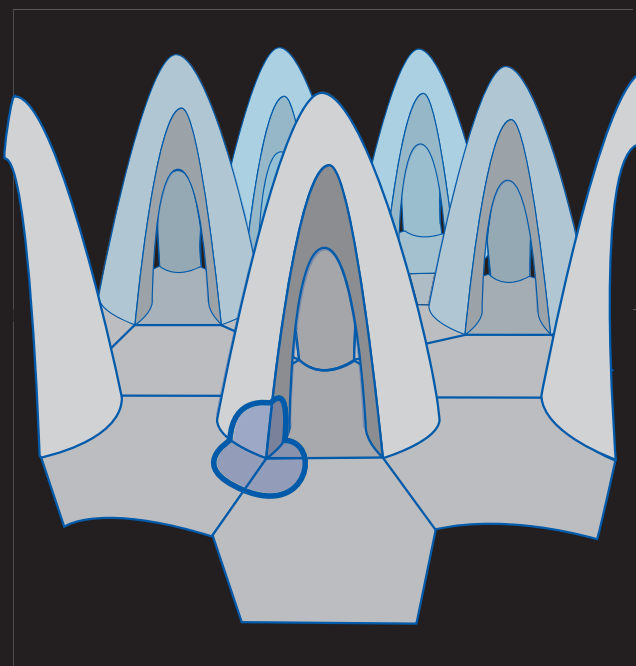
een hoekpunt samen komen te vouwen (het zijn er 3^v , waarbij v het aantal zijvlakken (en dus ribben) in het hoekpunt is). Deze kun je natuurlijk allemaal uitproberen, maar dat is heel veel werk. Gelukkig komen veel van deze beschrijvingen meerdere keren voor, die hoef je natuurlijk maar één keer uit te proberen.

Er zijn verschillende redenen waarom een beschrijving meerdere keren voorkomt, namelijk:

- Je kunt in een hoekpunt bij verschillende ribben beginnen een hoekpunt te beschrijven. Zo is niet-bol-hol hetzelfde als bol-hol-niet.
- Je kunt een hoekpunt met de klok mee en tegen de klok in beschrijven. Dat betekent dus dat elke beschrijving op hetzelfde neerkomt als die beschrijving achterstevoren. Dus bijvoorbeeld niet-bol-hol is hetzelfde als hol-bol-niet.
- Een bolle ribbe is aan de achterkant een holle ribbe. Als je in het ritme van een hoekpunt elke bolle ribbe vervangt door een holle ribbe, en elke holle door een bolle, komt die beschrijving neer op hetzelfde hoekpunt, alleen dan beschrijf je de achterkant.



Figuur 5 Het lichaam {6, 5} nader bekeken



26

Ook zijn er ritmes waarvan je direct al kunt zeggen dat je er geen gesloten hoekpunt mee kunt maken. Bij vijfhoeken valt bijvoorbeeld niet-niet-niet-niet af, omdat je niet vier vijfhoeken in een hoekpunt kunt laten samenkomen door alleen maar niet-gevouwen ribbes te gebruiken. Je krijgt dan namelijk overlap. Zo kun je, voor je ritmes uit gaat proberen, de lijst al aanzienlijk inkorten.

Een nieuw veelvlak vinden

Vervolgens probeer je de overgebleven ritmes een voor een uit. Als een beschrijving inderdaad een gesloten hoekpunt beschrijft, moet je nog uitproberen of het mogelijk is om er een heel veelvlak mee te maken.

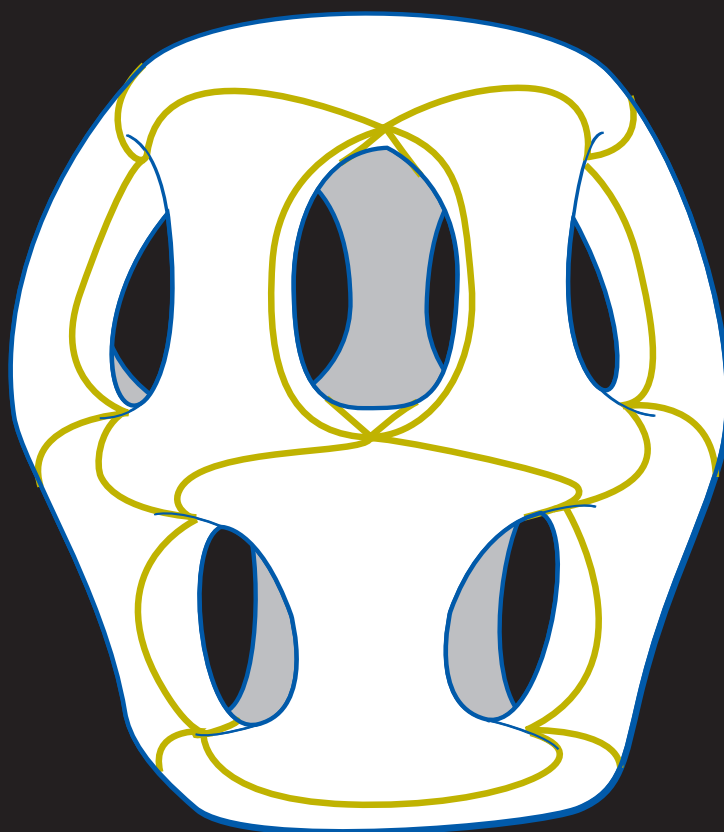
Op deze manier heb ik twee nieuwe platonische lichamen ontdekt. Bij het ene veelvlak komen er vijf zeshoeken in een hoekpunt samen, en in het andere zes vijfhoeken. Oftewel, ik heb oplossingen voor {5, 6} en {6, 5} gevonden in Popkes Platonische systeem. Ook heb ik gevonden dat het niet mogelijk is om een figuur te maken waarbij er vier vijfhoeken in een hoekpunt samen komen.

Vijf zeshoeken

Het hoekpunt van dit veelvlak lijkt heel erg op een regelmatige vlakverdeling met zeshoeken, maar op een van de zeshoeken liggen nog twee zeshoeken. Omdat er namelijk drie niet-gevouwen ribbes achter elkaar voorkomen, moeten er vier zeshoeken in een plat vlak liggen. De vijfde is als een soort tosti tussen de dubbele zeshoeken geschoven. De omschrijving van dit hoekpunt is niet-niet-niet-hol-bol. Het veelvlak – of eigenlijk het ‘oppervlak’ – lijkt op een regelmatige vlakverdeling met zeshoeken, maar op sommige zeshoeken liggen dan nog twee extra zeshoeken, zie figuur 4.



Figuur 4 Het nieuwe platonische lichaam {6, 5}



Figuur 7
Opgerekt beeld van
het lichaam {5, 6}

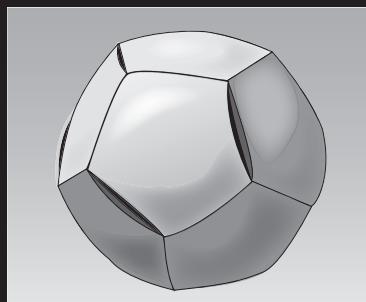
De driedubbele zeshoeken grenzen niet aan elkaar. Op het stapeltje van de zeshoeken zijn drie van de zes zijden om en om aan de enkele zeshoeken verbonden. Aan de andere zijde zit de middelste van de drie zeshoeken. De onderste zeshoek zit net zo vast als de bovenste. Steeds aan drie zijden (om en om) van een zeshoek liggen er twee ribben boven elkaar. Bij de andere drie ribben liggen er juist twee ribben naast elkaar. In figuur 5 is te zien hoe de zeshoeken aan elkaar zitten, daarbij zijn de driedubbele zeshoeken uit elkaar getrokken.

Zes vijfhoeken

Bij de vijfhoeken levert het ritme bol-hol-hol-bol-hol-hol een nieuw veelvlak op. Het ziet eruit als twee dodecaëders in elkaar. De twee dodecaëders zijn door sommige ribben met elkaar verbonden. Er moet namelijk in elk hoekpunt één ribbe zijn die wel verbonden is met de andere dodecaëder, en twee die dat niet zijn. Dat is mogelijk op de volgende manier. Als je naar een dodecaëder kijkt, terwijl je de bovenste en de onder-

ste vijfhoek horizontaal houdt, zijn er twee ringen van vijfhoeken te zien. Er zijn boven en onder dan elk vijf ribben in de ringen, en daartussen tien ribben die de ringen verbinden. Alleen de ribben in de ringen moet je verbinden met de andere dodecaëder.

In figuur 6 is het veelvlak getekend. Daar is tussen de dubbele vlakken een beetje lucht geblazen, en de ribben die verbonden zijn met de andere dodecaëder. In figuur 7 zie je een geheel opgeblazen model. De vorm van de zijvlakken klopt daar helemaal niet meer, maar wel is goed te zien hoe in ieder 'hoekpunt' zes vijfhoeken bij elkaar komen.



Figuur 6 Het nieuwe lichaam {5, 6}

door Jan Guichelaar en Marco Swaen

• 7Et
~019E~dE
9EtAl

28

Je hebt zeker wel eens opgaven gehad waar je een rij getallen moet voortzetten. Hier zijn er een paar:

12, 19, 26, ...

7, 14, 28, ...

8, 18, 38, 68, ...

3, 7, -2, ...

De bedoeling is dat je een regelmaat ontdekt in de gegeven getallen, en dat je die regelmaat dan voortzet. Er zijn vele manieren om regelmaat in een rij getallen te zien. Zo kunnen de getallen 1, 2, 4 het begin zijn van een exponentiële rij: 1, 2, 4, 8, 16, ... (steeds $\times 2$), maar zou ook verder kunnen als een kwadratische: 1, 2, 4, 7, 11, ... (steeds 1 méér erbij).

De regelmaat van een rij komt tot uitdrukking in een formule. Noem de getallen in de rij $a_0, a_1, a_2, \dots$. Dan ziet de formule voor de exponentiële rij 1, 2, 4, 8, 16, ... er zo uit:

$$a_n = 2^n,$$

en die van de kwadratische rij 1, 2, 4, 7, 11, ... is

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1.$$

Hoe je aan die laatste formule komt, zul je verderop zien. Merk wel op dat je niet elk beginrijtje op elke gewenste manier kunt voortzetten. Van 1, 2, 4 kun je geen lineaire rij maken, de onderlinge verschillen zijn immers niet gelijk. Van 1, 2, 3 kun je geen exponentiële rij maken, want de quotiënten zijn niet gelijk.

Voortzetten volgens een veelterm

Hoeveel getallen je ook hebt, er is altijd een formule te verzinnen die er een regelmaat in legt. Heb je maar twee begingetallen, dan kun je er altijd een lineaire formule bij vinden. De formule voor de termen heeft dan de volgende vorm:

$$a_n = a + bn.$$

Heb je drie begingetallen, dan lukt dat meestal niet. Wel kun je dan een kwadratische formule vinden:

$$a_n = a + bn + cn^2.$$

Mochten de drie getallen wel een lineaire rij vormen, dan heb je de kwadratische term niet nodig: dan geldt $c = 0$.

Zo gaat het door. Bij vier begingetallen moet je ook derde machten toelaten:

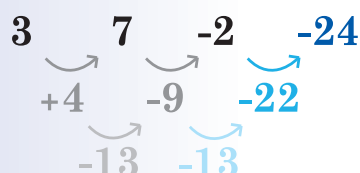
$$a_n = a + bn + cn^2 + dn^3.$$

Formules van deze vorm noemen we *veeltermen*. Komt in de veelterm als hoogste macht een 3 voor, dan noemen we het een veelterm van de derdegraad. Heb je tien begingetallen, dan is er een veeltermformule bij te vinden met een graad van hoogstens 9.

Je kunt dus elk willekeurig rijtje voortzetten volgens een veelterm.

Zonder de formule

Om het volgende getal te vinden, heb je de veelterm zelf niet nodig. Je kunt het volgende getal namelijk vinden door gebruik te maken van de onderlinge verschillen in de rij. Hoe dat werkt, laten we zien aan de hand van het beginstuk 3, 7, -2 (de zwarte getallen in onderstaande figuur).



Kijk wat er steeds bijkomt van de ene term naar de volgende term en zet dat eronder (de grijze getallen in de figuur). Dit is de eerste verschilrij. Kijk ook bij die getallen weer naar de verschilrij: in dit geval heeft de tweede verschilrij nog maar één getal (het lichtgrijze getal in de figuur). Brei nu aan die onderste rij een volgende schakel (het lichtblauwe getal) en werk dan verder naar boven. De volgende term van de rij is dus -24 (het donkerblauwe getal).

Een nadeel aan deze methode van de verschilrijen is dat het veel tijd kost om te voorspellen wat bijvoorbeeld het 41-ste getal in de rij zal zijn, je moet dan alle tussenliggende getallen en hun verschillen van verschillen (van verschillen, enzovoorts) uitrekenen. Dan is het toch handiger de formule van de rij op te stellen.

De formule maken

Om bij een beginstuk van drie getallen de formule te vinden, ga je als volgt te werk.

Neem weer de getallen 3, 7, -2. We maken een formule die er zo uitziet:

$$a_n = p(n-1)(n-2) + qn(n-2) + rn(n-1).$$

Dit ziet er op het eerste gezicht overdreven ingewikkeld uit, maar verderop wordt duidelijk wat het voordeel is van deze vorm. Merk op dat in de eerste term n ontbreekt, in de tweede $(n-1)$ en in de derde $(n-2)$. We gaan nu p , q en r zó kiezen dat de for-

mule het juiste beginstuk oplevert, dus dat $a_0 = 3$, $a_1 = 7$ en $a_2 = -2$.

Invullen gaat nu heel gemakkelijk. Vul je $a_0 = 3$ in, dan krijg je

$$3 = 2p.$$

Vul ook de andere twee termen in: $a_1 = 7$ geeft

$$7 = -q$$

en $a_2 = -2$ geeft

$$-2 = 2r$$

We hebben dus de volgende oplossing:

$$p = 1\frac{1}{2}, \quad q = -7, \quad r = -1.$$

We hebben nu de volgende formule:

$$a_n = 1\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 7n(n-2) - n(n-1).$$

Op zich is dit de formule voor de rij. Maar uiteraard is de formule veel eenvoudiger te maken door hem even uit te werken. Je krijgt dan:

$$a_n = -6\frac{1}{2}n^2 + 10\frac{1}{2}n + 3.$$

Controleren geeft inderdaad 3, 7 en -2 voor de eerste drie termen (a_0 , a_1 en a_2). Verder geldt dan: $a_3 = -24$. De volgende termen kun je zo uitrekenen.

Als je een beginrij hebt van vier getallen, neem je natuurlijk een startformule met vier onbekenden p , q , r en s . De termen van a_n zijn dan $p(n-1)(n-2)(n-3)$, enzovoorts. Zo kun je bij elke rij begingetallen een passende formule vinden.

Nog een andere aanpak

Je zou de formule ook kunnen vinden door simpelweg alle begingetallen in te vullen in de algemene formule, en dan te kijken of je daaruit de onbekenden kunt oplossen. Omdat we drie getallen hebben, nemen we de formule voor een tweedegraads veelterm:

$$a_n = a + bn + cn^2,$$

en vullen de eerste drie termen in. Voor $n = 0$ krijg je dan

$$a = 3,$$

voor $n = 1$ krijg je

$$a + b + c = 7$$

en voor $n = 2$ krijg je

$$a + 2b + 4c = -2.$$

Wil je nu a , b en c weten, dan moet je deze vergelijkingen combineren om ze op te lossen. Het voordeel van de eerste methode is dat je niets hoeft op te lossen, maar alleen een formule hoeft uit te werken.

Wat is hier het volgende getal?

18, 46, 94, 63, 52, ...

De veeltermmethode neggeert patronen die we door goed te kijken kunnen ontdekken: draai deze tweecilferige getallen om en je hebt: 81, 64, 49, 36, 25, oftewel de kwadraten van 9, 8, 7, 6 en 5. Als we dit patroon volgen, is het volgende getal het omgekeerde van 4^2 , oftewel 61.

Het volgende getal is dan 358.

$$a_n = 18 - 64\frac{1}{2}n + 150\frac{1}{2}n^2 - 66n^3 + 8\frac{1}{4}n^4.$$

Oplossing. De veeltermrij die begint met 18, 46, 94, 63, 52, ... is:

Bedrijfswiskunde?

Praktische problemen kraken met wiskunde en ict is voor jou een uitdaging. Samen met anderen daaraan werken is ok. De resultaten? Die deel je uiteraard met anderen.

Waar jij voor staat: je vooropleiding (havo/vwo, profiel N&T of N&G) zit er bijna op. Het bedrijfsleven trekt je. En nu? Actuarialaat? Bedrijfskunde? Cryptologie? Database marketing? Economie? Risico management? Software ontwikkeling? Statistiek? Techniek? Voorraadbeheer? Klinkt allemaal goed. Maar kiezen is moeilijk.

Is wiskunde voor jou de verbindende schakel? Dan is een studie bedrijfswiskunde jouw keuze:

- hbo-opleiding
- kleinschalig
- goed toekomstperspectief (bankwezen, verzekeringsmaatschappijen, industrie, handel, transport en communicatie, overheid en automatisering)

Meer informatie:



Noordelijke Hogeschool
Leeuwarden
www.nhl.nl/iec/exact



Fontys Hogescholen
www.fontys.nl



Hogeschool van Amsterdam
www.hva.nl



Hogeschool INHOLLAND
www.inholland.nl



Technische Hogeschool
Rijswijk
www.thrijswijk.nl

Pythagoras zoekt per 1 september 2006 een enthousiaste

HOOFDREDACTEUR (m/v),

die verantwoordelijk zal worden voor de inhoud van *Pythagoras*.

Taken

- zorgdragen voor nieuwe kopij en het redigeren daarvan
- leidinggeven aan het redactieteam
- aansturen van het productieteam

Geboden

- een betaalde functie (één dag per week), zo mogelijk via detachering
- een goed geolied productieproces
- de mogelijkheid de werkzaamheden voornamelijk thuis te verrichten
- een ruime inwerkperiode

Gevraagd

- brede kennis van de wiskunde
- uitstekende beheersing van de Nederlandse taal
- affiniteit met het populariseren van wiskunde
- goede communicatieve vaardigheden

Meer informatie

- Alex van den Brandhof (alex@pythagoras.nu)
- Klaas Pieter Hart (kp@pythagoras.nu)
- Chris Zaal (chris@pythagoras.nu)

Sollicitaties dienen uiterlijk 1 augustus 2005 per e-mail gestuurd te worden naar vacature@pythagoras.nu.

Een interessante reactie op *Vos en ganzen*

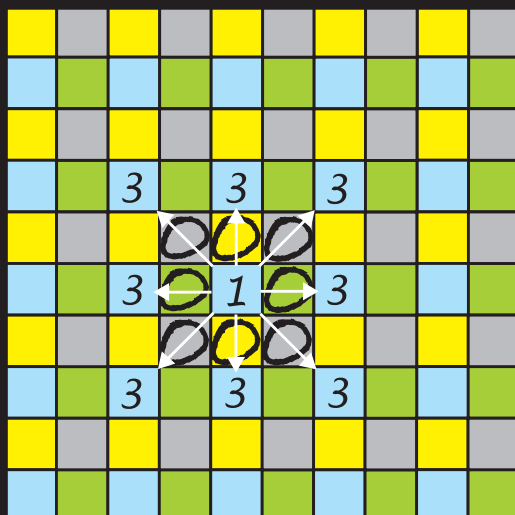
Vijf leerlingen van de school EDUGO De Toren in Oostakker (België) bogen zich over *Vos en Ganzen*, het pen-en-papier-spel uit ons novembernummer. Aangemoedigd door hun leraar Luc van den Broeck deden zij al snel een mooie vondst en stuurden de redactie van *Pythagoras* de volgende (hier enigszins ingekorte) brief.

Het spelletje *Vos en ganzen* ging als volgt: de vos begint en mag in een willekeurig vakje van een veld van 10 bij 10 vakjes het cijfertje 1 zetten. De ganzen mogen vervolgens ergens in het veld een bolletje (een gans) plaatsen. Daarna moet de vos ergens naast zijn vorige cijfer het cijfer 2 zetten. Dit mag zowel horizontaal, verticaal als diagonaal. Maar: als ergens op de acht vakjes rondom hem een bolletje staat, dan moet hij daar overheen springen en daar het cijfertje plaatsen dat 2 groter is dan het vorige. Belandt hij dan weer ergens bij een bolletje, dan moet hij ook daaroverheen springen.

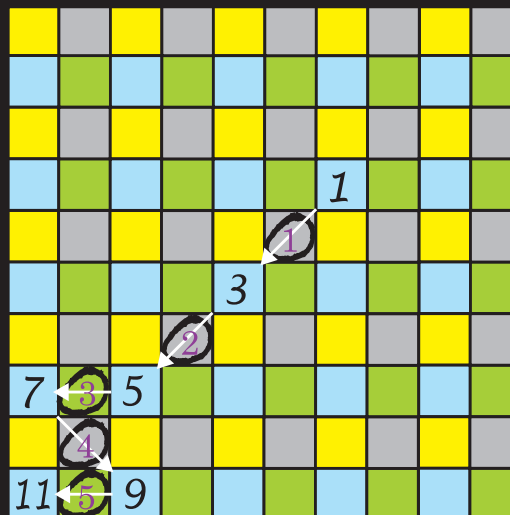
De bedoeling van het spel is dat de vos het getal 30 probeert te bereiken, terwijl de ganzen dat proberen te voorkomen.

Wij zijn op zoek gegaan naar een manier om de ganzen altijd te laten winnen en daarin zijn we geslaagd. Eerst hebben we opgemerkt dat er op een speelveld van 10 bij 10 vier soorten vakjes zijn. De vakjes hebben we met verschillende kleuren aangegeven in figuur 1. Als de vos bijvoorbeeld op een blauw vakje staat, kun je hem door hem over een bolletje te laten springen alleen maar op een ander blauw vakje krijgen. Dit is de basis van onze strategie.

Als we de bolletjes zó zetten dat de vos altijd gedwongen is over een bolletje heen te springen, dan kan hij dus niet van kleur veranderen. Op deze manier gaan we de vos in een hoek opsluiten. In figuur 2 zie je hoe dat verder in zijn werk gaat. Zetten de ganzen hun bolletjes precies zo, dan is de vos reddeloos verloren.



Figuur 1



Figuur 2

Deze tactiek werkt altijd, behalve als de vos al in een hoek begint. Maar ook hiervoor bestaat een simpele oplossing. Je laat hem eerst zelf een stap doen (dus plaatst geen bolletje in zijn buurt). Dan komt hij zeker en vast op een andere kleur terecht en kun je hem dus naar een andere hoek lokken. Bij deze tactiek van de ganzen komt de vos niet hoger dan 14. Ziezo, dit was onze tactiek.

Ward Rottiers, Stijn Vandriessche, Karel Gheysens, Luc van den Broeck, Kenneth Saey uit klas 5 LaWi6, 5WeWi8 van EDUGO De Toren, Oostakker (België).

Naschrift Walter Joris

Knap gevonden! Dat de ganzen theoretisch altijd kunnen winnen, was wel al bekend, en is ook te lezen in mijn boek. Als de vos in een hoek begint en hij zet nummer 2 op een van de randen, moet je hem wel eerst naar de diagonaal lokken. Met een variatie kun je hem ook langs de randen leiden. Hij bereikt dan 15. Het systeem is dan bijvoorbeeld:

vos 8 naar het 3-3 punt lokken, dan naar de andere kant, dan de hoek, dan het 2-2 punt sluiten, dan de enig overblijvende vluchtroute sluiten. Een probleem is wel dat je moet berekenen waar je die eerste gans mag zetten. Er zijn maar weinig plaatsen beschikbaar. De vos heeft dan immers nog steeds de keuze uit drie mogelijkheden. Als men die uittekent, kan men kruisjes zetten in de vakjes die verboden zijn voor de eerste gans, omdat de vos anders later kan ontsnappen via die gans. Ben je van plan de vos eerst naar de diagonaal te lokken, dan verandert dit schema weer. Het spel zou dus een stuk complexer worden als de ganzen moeten beginnen in plaats van de vos.

Hiermee is de gedachtewisseling nog niet ten einde. De vijf uit Oostakker bogen zich opnieuw over de kwestie en concludeerden dat in alle gevallen 14 stappen genoeg zijn. Op www.pythaogras.nu kun je hun tweede brief vinden.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Aquariumbakken

Als de kleine bak recht op de bodem van de grote bak wordt gedrukt, zal er 200 kubieke centimeter (cc), ofwel 200 milliliter in terecht komen. Er wordt 12 cc verspild.

Puzzel voor sluiswachters

Nee, de genoemde hoeveelheid water heeft niets te maken met de afmetingen van het schip.

Planken leggen

Met vier planken van 3,80 meter maak je een vierkant van 4 bij 4 meter. Het gat binnen dit vierkant is een vierkant van 3,60 bij 3,60 meter. Dit vierkant kan met achttien planken van 3,60 meter worden opgevuld.

Waterniveau

Het waterniveau zal dalen (aangenomen dat we te maken hebben met een gewicht van materie die zwaarder is dan water).

Klokken

De inkoopprijzen bedroegen respectievelijk 400 en 600 euro. Van deze 1000 euro zag de antiquair $2 \times 480 = 960$ euro terug. Hij leed dus verlies.

