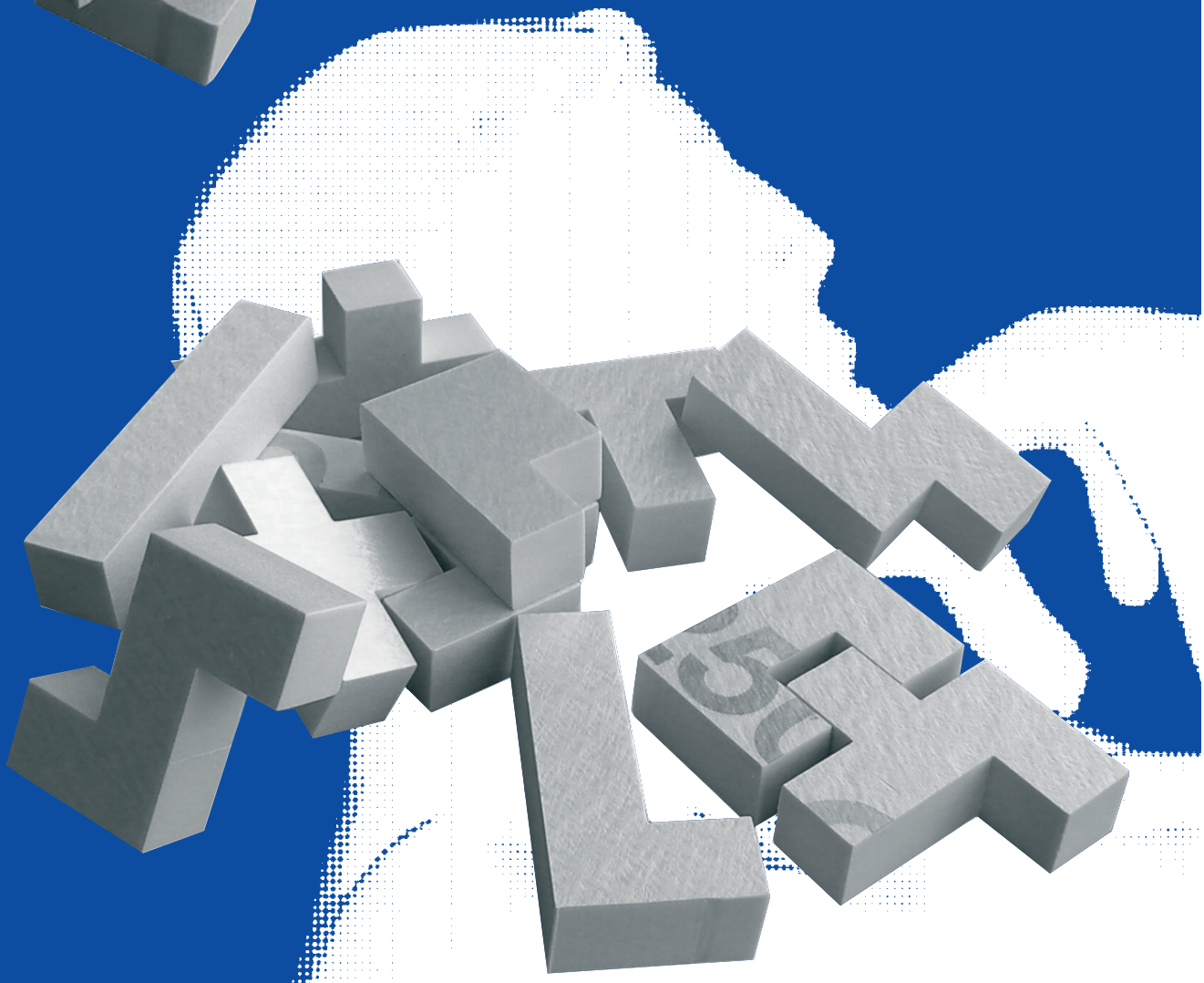
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN SEPTEMBER 2005

PYTHAGORAS

45ste jaargang nummer 1
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster
Paulus Klerk

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

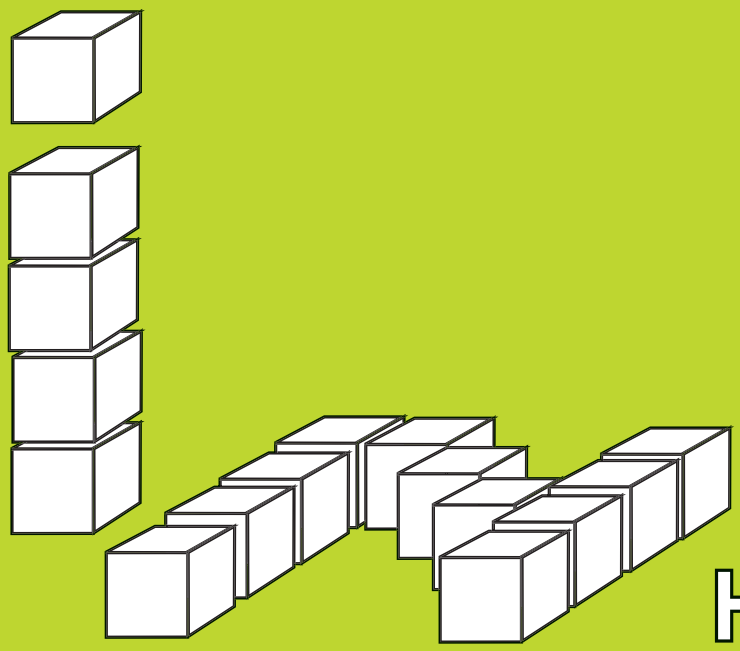
Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), prof.dr. J. van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit (craats@science.uva.nl), drs. D.C. Gijswijt, aio discrete wiskunde aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, algemeen directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector aan het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde aan het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), R. van der Veen, student wiskunde aan de UvA (roland.vanderveen@student.uva.nl), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), dr. ir. T. Verhoeff, docent informatica aan de TU/e (wstomv@win.tue.nl)

Op het omslag
De eerste 50 die schrijven aan o.d.m@scarlet.be krijgen de puzzel toegestuurd

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:



HOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 7 **Een miljoen dollar voor een bewijs**

8 – 9 **Drie veelvlakken van papier**

10 – 13 **Haal meer uit je GR**

14 – 15 **Problemen – Oplossingen**

16 – 17 **De zeven-prijsvraag**

18 – 23 **Figuren opknippen en periodieke vlakvullingen**

24 – 25 **Pythagoras Olympiade**

26 – 28 **De wiskunde van Odette De Meulemeester**

29 – 31 **Worteltrekken voor gevorderden, deel 1**

32 – 33 **Journaal**

33 **Oplossingen Kleine nootjes nr. 6**

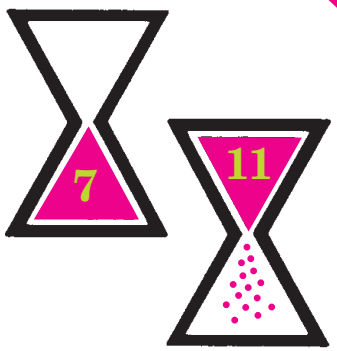
door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die iedereen zonder enige wiskundige voorkennis kan oplossen. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

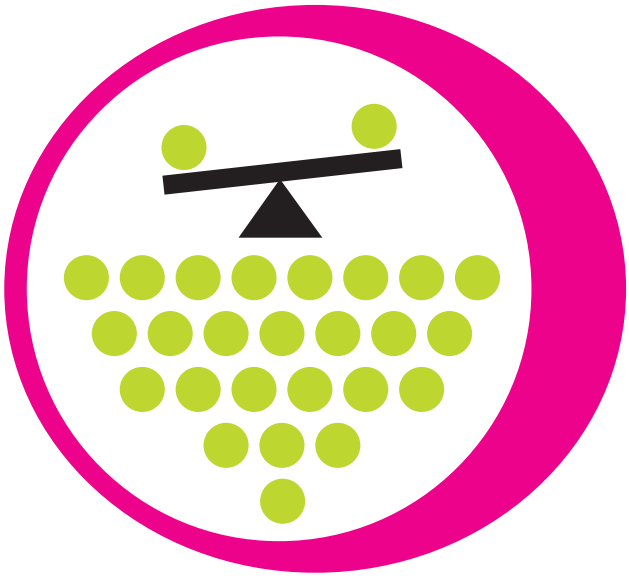
Kleine nootjes

Verjaardag
Marietje was acht jaren oud op haar eerste verjaardag. Hoe kan dat?

Pizza bakken
Mijn pizza moet een kwartier in de oven. De tijdklok van mijn oven werkt echter niet. Ik heb twee zandlopers: één van 11 en één van 7 minuten. Hoe zorg ik ervoor dat mijn pizza precies een kwartier in de oven zit?



Horloge
Max koopt een horloge voor al het geld in zijn portemonnee. Hij heeft spijt en verkoopt het met 10% winst aan Joop. Joop wil het weer kwijt; Max koopt het horloge weer en geeft Joop 80% uit zijn portemonnee. Dan heeft Max een horloge en 44 euro. Hoeveel euro had Max eerst?



De zwaarste knikker
Van 27 knikkers hebben 26 hetzelfde gewicht en 1 is iets zwaarder. Je mag met een balans drie keer wegen. Hoe vind je altijd de zwaarste knikker?

Touwtjes knopen
Neem vier stukjes touw in je hand, zodat aan beide kanten van je vuist vier uiteinden zichtbaar zijn. Verbind aan beide uiteinden de touwtjes twee aan twee met elkaar. Wat is de kans dat bij het openen van de vuist één gesloten ring tevoorschijn komt?

Een miljoen dollar voor een bewijs

Bijna elke wiskundestelling begint zijn leven als een *vermoeden*. De geschiedenis van de wiskunde is een geschiedenis van vermoedens en bewijzen. Een bewijs zet een wiskundige bewering om in een *stelling*, en pas na een bewijs weten we zeker dat die stelling waar is. Wie denkt dat wiskunde een wetenschap is waarin niets nieuws meer te ontdekken is, heeft het mis. Ook vandaag de dag zijn er grote en minder grote wiskundige problemen die nog op een oplossing wachten. *Open problemen* is het thema van deze jaargang van *Pythagoras*. In deze eerste aflevering vertelt Jan van de Craats wat de grootste open problemen uit de wiskunde van dit moment zijn.

door **Jan van de Craats**

Algemeen wordt het *Vermoeden van Riemann* gezien als het belangrijkste open probleem van de moderne wiskunde. Het luidt als volgt:

'Alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie van Riemann liggen op de kritische lijn.'

Wat deze raadselachtige bewering precies betekent, zullen we nu nog niet uitleggen, maar feit is wel dat je de wiskunde een geweldige stap vooruit helpt als je dat vermoeden bewijst (of bewijst dat het *niet* waar is!). Bovendien verdien je dan een prijs van niet minder dan één miljoen dollar! Dat bedrag is uitgeloofd door het Clay Mathematical Institute uit Cambridge, Massachusetts, USA.

Het is niet het enige open probleem waar

dat instituut, dat in 1999 opgericht werd door zakenman en wetenschapsweldoener Landon T. Clay, een miljoen dollar voor uitlooft. Er zijn er nog zes: het *Vermoeden van Poincaré*, het *P versus NP probleem*, het *Vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer*, het *Vermoeden van Hodge*, de *Mass Gap Hypothesis* in de *Yang-Mills theorie*, en de *Oplossing van de Navier-Stokes vergelijkingen*. Een internationaal comité van gerenommeerde wiskundigen heeft die zeven problemen uitgekozen als de zeven belangrijkste open onderzoeksvragen van de huidige wiskunde. Ze werden gelanceerd tijdens een plechtige bijeenkomst in het *Collège de France* in Parijs op 24 mei 2000, en staan sindsdien bekend als de *millennium problems*.

Als je zo'n *millennium problem* oplost, strijk je een mooi bedrag op, maar belangrijker is natuurlijk de eeuwige roem die je ermee verwerft, en het feit dat je bewijs waarschijnlijk een enorme stimulans zal betekenen voor de gehele wiskunde. Die zeven problemen zijn namelijk geen losstaande puzzels, maar centrale vraagstukken die allemaal verbonden zijn met grote onderzoeksgebieden in de wiskunde. De knapste koppen hebben er hun tanden al op stukgebeten. Het Vermoeden van Riemann, bijvoorbeeld, dateert al van 1859 en is daarmee het oudste millennium probleem. De andere zes zijn van latere datum, maar allemaal hebben ze al een lange geschiedenis van vergeefse bewijspogingen achter zich.

Op zoek naar een bewijs

Haast elke wiskundestelling begint als een vermoeden. Een bewijs zet een vermoeden om in een stelling, en pas na een bewijs weten we zeker dat die stelling waar is. Echter, het controleren van een bewijs kan lastig en tijdrovend zijn. Soms wordt daarbij toch nog een fout of een gat in de redenering ontdekt, en dan staat alles weer op losse schroeven: een bewijs met een gat erin is geen bewijs.

Dat ondervond ook Andrew Wiles, die in 1993 aankondigde dat hij het beroemde, meer dan 350 jaar oude *Vermoeden van Fermat* had bewezen. Bij controle werd echter geconstateerd dat er aan zijn bewijs toch nog een belangrijk detail ontbrak, en dat het dus in feite nog geen bewijs was. Een dramatisch jaar volgde waarin Wiles wanhopig probeerde het gat te dichten. Uiteindelijk slaagde hij daar met steun van zijn leerling Richard Taylor in, en in 1995 werd het volledige bewijs in de *Annals of Mathematics* gepubliceerd in de vorm van twee artikelen van samen 129 bladzijden. Het is zeer moeilijke, alleen voor experts leesbare wiskunde.

De stelling van Fermat (want het is nu dus echt een bewezen stelling) zegt dat er geen positieve gehele getallen a, b, en c zijn waarvoor geldt dat $a^n + b^n = c^n$ als n een geheel getal groter dan 2 is. Als vermoeden was het ook weer een voorbeeld van een centraal onderzoeksprobleem. Zouden de *millennium problems* al in 1990 ingesteld zijn, dan had het vermoeden van Fermat er zeker bijgestaan.

Wiles heeft intussen al heel wat andere prijzen voor zijn werk in de wacht gesleept, zoals onlangs de *Shaw Prize*: eveneens een bedrag van een miljoen dollar (lees ook het Journaal op pagina 32). Natuurlijk maakte hij deel uit van het comité dat in 1999 de *millennium problems* gekozen heeft. En het oude vermoeden van Fermat heet inmiddels de Stelling van Fermat-Wiles.

Wat houden die vermoedens eigenlijk in?

We hebben hierboven het vermoeden van Fermat beschreven. Een klein beetje schoolwiskunde is genoeg om de formulering ervan te begrijpen: je hoeft alleen maar te weten wat gehele getallen en machten zijn. Maar voor het vermoeden van Riemann geldt dat niet. Van de twaalf woorden waaruit die bewering bestaat, is zo'n beetje de helft voor een niet-specialist onbegrijpelijk. Wat is 'niet-triviaal'? Wat is een 'nulpunt'? Wat is de 'zetafunctie'? Wat is de 'kritische lijn'? En wie was Riemann?

Helaas geldt zoiets eigenlijk ook voor de andere zes millenniumproblemen. In feite vragen ze allemaal minstens een heel artikel vol geavanceerde wiskunde om uit te leggen waar ze zo ongeveer over gaan. Die artikelen

zijn ook geschreven: je kunt ze vinden op de website van het Clay Mathematical Institute: www.claymath.org. Maar als je daar kijkt, zul je zien dat het niet meevalt om eruit wijs te worden. Dat is het probleem met modern wiskundig onderzoek: het is niet alleen een kwestie van jargon, maar eigenlijk is de gehele ideeënwereld zo abstract dat je de grote onderzoeksvragen meestal alleen maar na een specialistische studie enigszins kunt begrijpen.

Toch gaan we in deze jaargang van *Pythagoras* proberen om bij minstens twee van die *millennium problems* een paar tipjes van de sluier op te lichten. Het ene is het *Vermoeden van Riemann*, omdat de meeste wiskundigen dat beschouwen als het allerbelangrijkste probleem van de wiskunde, en dan kunnen we er in *Pythagoras* natuurlijk niet omheen. Het andere is het *Vermoeden van Poincaré*. Dat laatste om twee redenen. De eerste is dat het een vermoeden is uit de topologie, de 'elastiek-meetkunde' die vorig jaar ons centrale thema was, en de tweede is dat er aanwijzingen zijn dat de Russische wiskundige Grigori Perelman van het Steklov Institute in Sint Petersburg het inmiddels zou hebben opgelost. Zijn werk wordt nu door experts gecontroleerd. De ervaringen met het bewijs van Wiles van het vermoeden van Fermat moeten ons voorzichtig maken, maar als Perelman het bij het rechte eind heeft, zal hij de eerste kunnen zijn die een millennium-miljoen opstrijkt!

Het Vermoeden van Riemann

In 1859 werd Bernhard Riemann, een verlegen, 32-jarige wiskundige van de universiteit van Göttingen, benoemd tot corresponderend lid van de Academie van Berlijn. Zoals gebruikelijk dankte hij de Academie voor zijn benoeming in de vorm van een artikel over recent onderzoek dat hij gedaan had. In dat artikel, dat als titel droeg *Over het aantal priemgetallen beneden een gegeven grens*, is zijn beroemde vermoeden te vinden als een terloopse opmerking op de vierde bladzijde. Hij schrijft daarna (vrij vertaald): *Het ware te wensen dat er hiervoor ook een streng bewijs was. Ik heb daar een tijd naar gezocht, maar heb mijn pogingen voorlopig opgegeven omdat het voor de rest van mijn hier gepresenteerde onderzoek niet nodig scheen te zijn.*

Het vermoeden van Riemann heeft dus te maken met de verdeling van de priemgetallen over de natuurlijke getallen. Hoe vaak komen ze voor, hoe liggen ze verspreid, en soortgelijke kwesties. Maar in de formulering van het vermoeden: *alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie van Riemann liggen op de kritische lijn*, is niets over priemgetallen te vinden. Wel over een functie, de zetafunctie. Dat blijkt een *complexe* functie te zijn, die niet alleen complex (ingewikkeld) is in de gewone zin, maar een functie die *complexe getallen* omzet in *complexe getallen*. De nulpunten van zo'n functie zijn de complexe getallen waar de functiewaarde nul is. Bij de gewone sinusfunctie die we allemaal kennen als functie die reële getallen omzet in reële getallen, zijn de nulpunten de punten $x = k\pi$ (k geheel). De zetafunctie heeft ook nulpunten. Sommige ervan zijn niet moeilijk te vinden, dat zijn de *triviale* nulpunten. Maar er zijn ook nog oneindig veel andere, moeilijker te bepalen nulpunten, en die blijken de geheimen van de priemgetallenverdeling te herbergen. Riemann vermoedde dat ze in het complexe vlak allemaal op de *kritische lijn*, dat wil zeggen de verticale lijn door $\frac{1}{2}$, liggen.

Zo, nu weet je al een beetje meer over het beroemdste vermoeden uit de wiskunde. Maar natuurlijk nog lang niet alles; in de volgende nummers vertellen we er meer over! En wie er nu alvast meer over wil lezen, kan ik verwijzen naar vier recent verschenen boeken in het Engels:

- Keith Devlin, *The Millennium Problems*, ISBN 1-86207-735-5
- Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*, ISBN 1-84115-580-2
- Karl Sabbagh, *Dr. Riemann's Zeros*, ISBN 1-84354-101-7
- John Derbyshire, *Prime Obsession*, ISBN 0-452-28525-9

Achterstevoren

Niet alle open problemen in de wiskunde zijn zo moeilijk te begrijpen als de *millennium problems* waarmee je een miljoen dollar kunt verdienen. Hier is een leuke puzzel waar iedereen plezier aan kan beleven.

Begin met een positief geheel getal van ten minste twee cijfers, bijvoorbeeld 64. Tel er het getal bij op dat je krijgt door de cijfers achterstevoren op te schrijven. In dit geval krijg je dus 64 + 46 = 110. Doe hiermee weer hetzelfde, dus 110 + (0)11 = 121. Stop zodra je een *palindroomgetal* hebt, dat wil zeggen een getal dat achterstevoren gelezen hetzelfde is.

Hier hebben we zo'n palindroom in twee stappen bereikt. Soms is nul stappen al voldoende, namelijk als het getal zelf al een palindroom is.

Maar het kan ook langer duren, reken maar mee: 175, 175 + 571 = 746, 746 + 647 = 1393, 1393 + 3931 = 5324, 5324 + 4235 = 9559 STOP.

Het *palindroomprobleem* luidt als volgt:

Bereik je op die manier bij elk startgetal op den duur altijd een palindroomgetal?

Het is een open probleem. De oplossing is onbekend. Een goede raad: begin niet met 196 als startgetal, want volgens het internet (zie http://rec-puzzles.org/sol.pl/arithmetic/digits/palindrome) heb je na 9480000 stappen een getal van 3924257 cijfers bereikt dat nog steeds geen palindroom is. Of het dat ooit wordt, is niet bekend!

Je snapt het al: we willen er meer van weten. Wie van onze lezers helpt? Hier zijn wat uitdagende onderzoeksvragen:

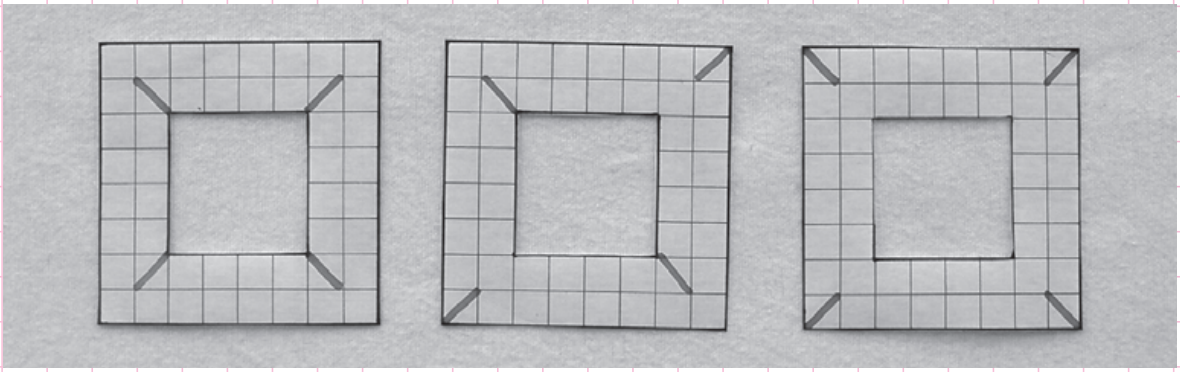
Zijn er behalve 196 nog meer getallen kleiner dan 1000 die net zo weerbarstig zijn? Zo nee, voor welk getal ongelijk aan 196 heb je dan de meeste stappen nodig?

Of, een heel andere vraag, hoe zit het in het tweetallig stelsel?

Verzin zelf verdere onderzoeksvragen, en meld ons je resultaten!

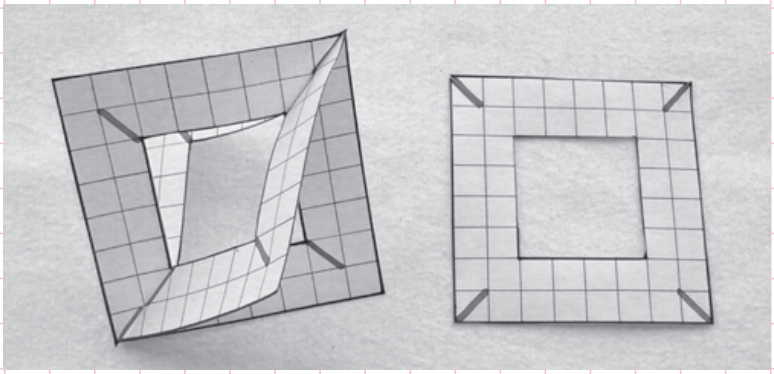
door **Roland van der Veen**

Drie veelvlakken van papier

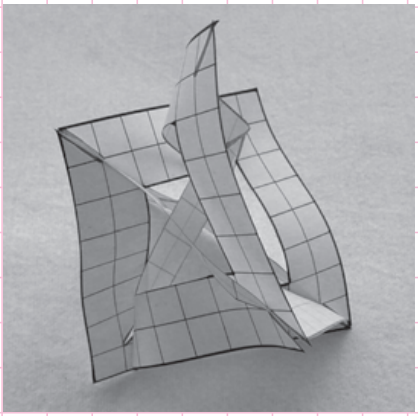


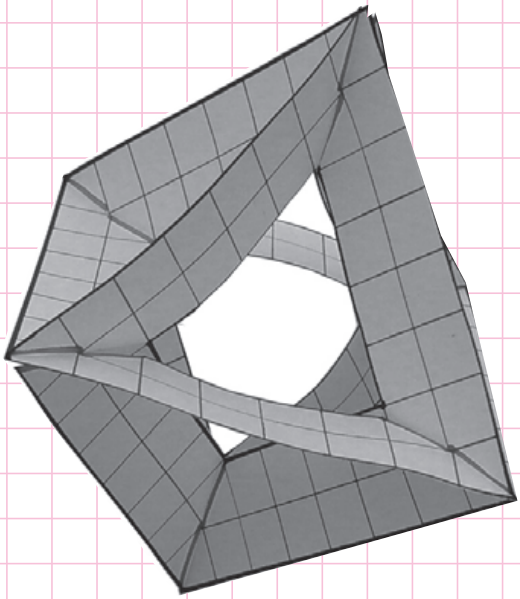
1a Voor het eerste veelvlak heb je alleen maar een vel ruitjespapier nodig en een schaar. Knip drie raampjes van 8 bij 8 hokjes uit en maak inkepingen waar de schuine streepjes staan.

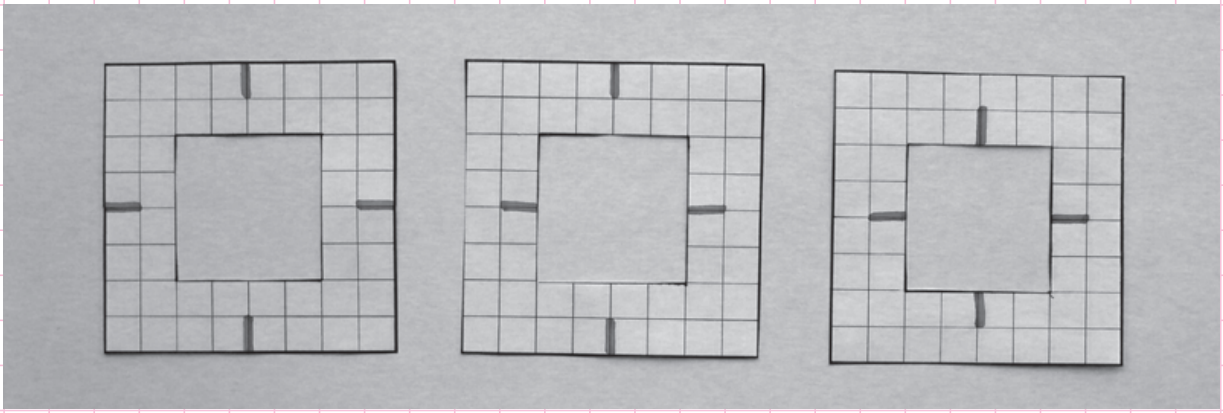
1b Neem de twee linker raampjes en schuif ze voorzichtig in elkaar. De inkepingen aan de hoekpunten moeten in elkaar happen.



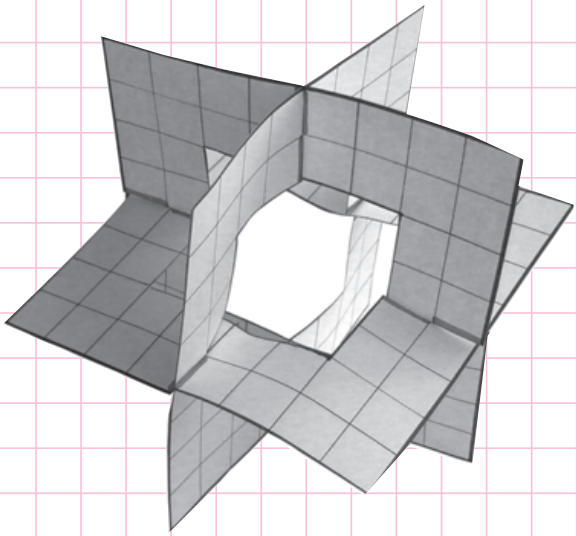
1c Buig het laatste raampje voorzichtig opdat het binnen de andere twee past. Alle hoekpunten moeten een voor een in elkaar geschoven worden. Even lijkt het hopeloos, maar de beloning is groot: een octaëder, zie hiernaast.

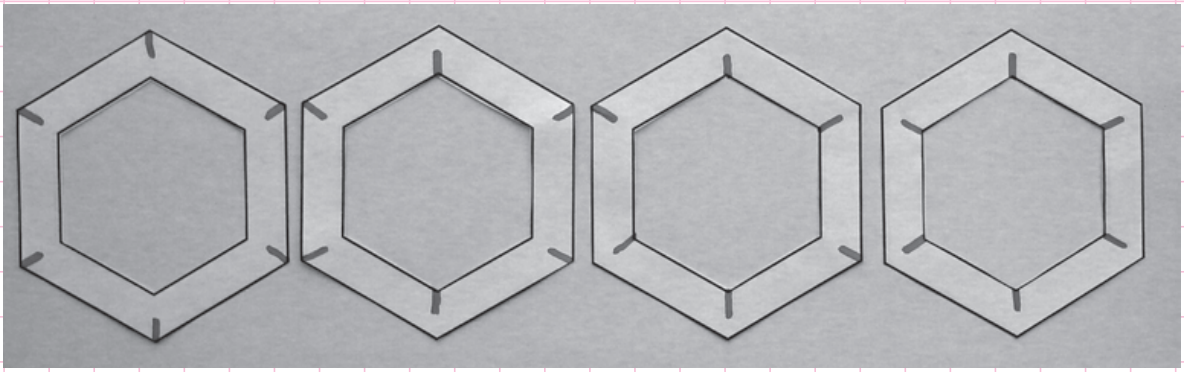






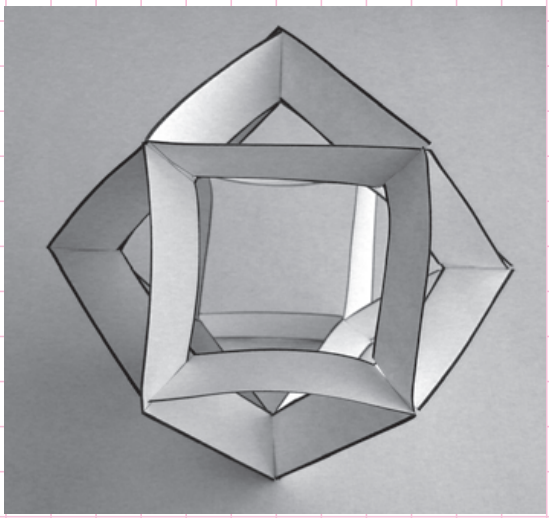
2 Voor het tweede veelvlak kun je weer drie raampjes gebruiken, maar nu zet je de inkepingen in de middens van de zijden. Schuif de raampjes weer in elkaar en je krijgt een kubus, zie hiernaast.





3 Voor het derde veelvlak heb je vier zeshoekige raampjes nodig. Maak de inkepingen zoals op de foto.
Werk bij het inelkaarzetten van links naar rechts: zet eerst het tweede over het eerste raampje (van links), daaroverheen het derde, en dan het laatste. Het resultaat is een kuboctaëder.

Kijk op http://student.science.uva.nl/~riveen/ voor verdere uitleg en nog meer modellen.



door **Henk Pfaltzgraff**

Haal meer uit je ...

Een grafische rekenmachine - voor de ingewijden kortweg 'GR' - is veel meer dan een rekenmachine die grafieken tekent. Zo biedt de GR de mogelijkheid om zelf te programmeren. In de eerste aflevering van deze rubriek geven we daar een paar mooie staaltjes van. Wij maken gebruik van een TI-83. Ondersteuning bij deze rubriek in de vorm van downloadbare programma's en verdere uitleg vind je op www.henkshoekje.com (klik op Pythagoras' Hoekje).

Programmeren op je TI-83 (of -84) is een fluitje van een cent. Je drukt op [PRGM] <NEW> en [ENTER], voert een naam in en kunt beginnen. Druk opnieuw op [PRGM] en je vindt daar de belangrijkste commando's, ondergebracht bij <CTL> en bij <I/O>. Elke programmaregel moet je afsluiten met [ENTER] of een dubbele punt. Via 2nd[QUIT] verlaat je een programma. Met [ON] en 1:Quit onderbreek je een lopend programma.

Dit zul je allemaal snel genoeg door hebben. Meer moeite zul je waarschijnlijk hebben om met de beschikbare commando's een programma te schrijven dat doet wat je ervan verlangt. Die kunst leer je alleen al doende. Om je op gang te helpen, laten we je in deze aflevering drie programma's zien, waarin de belangrijkste commando's voorkomen. Kun je een bepaald commando niet vinden in de GR, dan kun je altijd kijken bij 2nd[CATALOG], daar staan ze in alfabetische volgorde opgesomd. Tik eerst de eerste letter van de instructie in.

Een trage rij

Ga uit van het getal 0, kwadrateer dat en tel er $0{,}25$ bij op. Je krijgt dan $0^2 + 0{,}25 = 0{,}25$. Herhaal je dit recept, dan krijg je $0{,}25^2 + 0{,}25 = 0{,}3125$. Nog eens herhalen geeft $0{,}3125^2 + 0{,}25 = 0{,}34765625$.

Ga je zo door, dan krijg je een eindeloze rij getallen u_1, u_2, u_3, ... die aan het volgende voorschrift voldoen:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_n = u_{n-1}^2 + 0{,}25, \text{ voor } n \geq 2. \end{cases}$$

Met de GR zijn de getallen van deze rij op vele manieren te berekenen; wij doen het nu door gebruik te maken van de opslagmogelijkheid via [STO]. Dat gaat als volgt:

Ken eerst de waarde 0 aan X toe via
0[STO] → X
en geef dan de opdracht
X^2 + 0.25 [STO] → X.
Na een paar keer [ENTER] zie je de uitkomsten op het scherm verschijnen.

```
0→X
                0
X²+0.25→X
              .25
            .3125
       .34765625
     .3708648682
```

Wie wil weten waar dit naar toe gaat, moet een onmenselijk aantal keren op [ENTER] drukken, en zo zit een Pythagoraslezer niet in elkaar, lijkt me. Dat werk laten we ons uit handen nemen door een programmaatje (of door een slimme redenering). Druk dus op [PRGM]<NEW> en [ENTER], voer de naam in van dat programmaatje (ik heb het `TRAAG` genoemd) plus [ENTER] en de cursor knippert op de eerste regel. Zie bovenaan de bladzijde rechts. Druk nu weer op [PRGM], daar verschijnt het menu met de karakteristieke TIBASIC instructies.

We willen straks eerst het scherm schoonvegen met `ClrHome`, ga dus naar het submenu <I/O> met de input/output commando's, beweeg je cursor met de pijltjestoets naar 8:ClrHome en druk [ENTER]; je had overigens ook direct op de 8 kunnen drukken. Als je nu nogmaals [ENTER] doet, wordt deze eerste instructie ingevoerd en sta je op de tweede regel van je programma. Daarop komt 0 → X, hetgeen ingevoerd wordt met [ENTER].

Bekijk nu via [PRGM] het programmeermenu met de control <CTL> commando's. Beweeg de cursor naar 9:Lbl en geef de naam `HH` (van herhaal) aan deze label (gevolgd door [ENTER]). We zijn nu op de vierde regel gekomen waarop het voorschrift van de rij komt: X^2 + 0.25 → X. Na [ENTER] moet op regel 5 de printopdracht `Disp` komen (van Display) die je in het [PRGM]<I/O> menu onder nummer 3 terugvindt. Nu eerst `Pause` en een `Goto HH` die onder [PRGM] 8 en 0 te vinden zijn. Met 2nd[QUIT] verlaat je het programma en kom je weer in het gewone rekenscherm terecht.

```
PROGRAM:TRAAG
:ClrHome
:0→X
:Lbl HH
:X²+0.25→X
:Disp X
:Pause
:Goto HH
```

Nu komt de uitvoering: druk weer op [PRGM], ga naar de naam van je programma en druk telkens op [ENTER].

```
              .25
            .3125
       .34765625
     .3708648682
     .3875407504
     .4001878333
     .4101503019
```

Met [ON] 1:Quit onderbreek je dit proces. Er kan een doorlopende ('scrollende') voorstelling gemaakt worden via een kleine ingreep: doe [PRGM]<EDIT> en verwijder met [CLEAR] de pauze instructie op de zesde regel. Blijf na 2nd[QUIT] en weer [PRGM]<TRAAG> een minuutje kijken en onderbreek dan met [ON] en 1:Quit.

Dat scrollen kost nogal veel tijd. Met de <I/O> instructies `Output`(*regel,positie*) en `For`(*variabele,eerste,laatste*)-`End` gaat het sneller. Uiteindelijk staat er dan de volgende broncode:

```
PROGRAM:TRAAG
:ClrHome
:0→X
:For(N,1,1000)
:X²+0.25→X
:Output(1,1,X)
:Goto HH
:
```

Laat je het programma draaien, dan ziet het ernaar uit dat de rij (hoewel uiterst traag) convergeert naar een limiet.

Wie de abc-formule voor kwadratische vergelijkingen beheerst, kan deze limiet exact berekenen. De limiet x is immers het getal dat niet meer verandert als je er het recept $x^2 + 0{,}25$ op toepast. Dus is x een oplossing van $x = x^2 + 0{,}25$.

Priem?

Ons tweede programma test of een getal N een priemgetal is. Zoals je weet, is een priemgetal een getal dat alleen door zichzelf

Veegt vooraf het scherm schoon

Plaatst de vraag op het scherm

Vraagt naar de in te voeren waarde van N

Betekent dat D (van Deler) loopt vanaf 3 tot en met √N met stapgrootte 2 (het bekijkt dus alleen oneven delers)

Telkens wordt nagegaan of het breukdeel (fractionpart) van N/D nul is (dat wil zeggen: of N deelbaar is door D) (het gelijkteken vind je bij 2nd[TEST]1)

Zodra dit het geval is, kan N geen priemgetal zijn en word je met `Goto` *verwezen naar de label NP*

Einde van de `For` *lus*

Conclusie als er geen delers worden gevonden

D is groter dan √N geworden, verder onderzoek heeft geen zin meer

Conclusie als er wel delers zijn gevonden

Vermeldt de gevonden deler

```
PROGRAM:PRIEMTST
:ClrHome
:Disp "VOER EEN ONEVEN"
:Disp "GETAL N IN"
:Prompt N
:For(D,3,√(N),2)
:If fPart(N/D)=0
:Goto NP
:End
:Disp "IS PRIEM"
:Stop
:Lbl NP
:Disp "IS NIET PRIEM,"
:Disp "NL DEELBAAR DOOR",D
```

en door 1 gedeeld kan worden. Het programma moet alle potentiële delers langs gaan. Uiteraard hoeft het daarbij alleen getallen te proberen die kleiner zijn dan het geteste getal N zelf. Sterker nog, je hoeft alleen te kijken naar getallen die kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{N}$ zijn. Want als een getal A deler is van N, dan is N/A een geheel getal, en is er dus een getal B zodat $A \times B = N$. Merk op dat dat getal B dan zelf ook een deler van N is. Nu kunnen A en B niet allebei groter dan $\sqrt{N}$ zijn. Een van beide kom je dus al tegen tussen 1 en $\sqrt{N}$.

Om te testen of een getal A een getal N deelt, gebruiken we op de TI-83 de functie `fPart`(X). De functie `fPart` vind je onder [MATH] bij [NUM]. De `fPart` van een getal is de breukrest van dat getal. Bijvoorbeeld de breukrest van 7/2 is 0,5; de breukrest van 8/2 is 0. Als N deelbaar is door A, dan is `fPart`$(N/A) = 0$.

En dan nu het programma. Uitgaande van een oneven getal N moet het testen of N deelbaar is door 3, 5, 7, 9,... tot N bereikt is (even getallen hoeven we niet te onderzoeken). Hierboven staat het programma met toelichtingen. Kies je voor N bijvoorbeeld 1234577, dan krijg je:

```
VOER EEN ONEVEN
GETAL N IN
N=?1234577
IS PRIEM
                Done
```

Laat je `PRIEMTST` draaien op 1234577, dan blijkt dit deelbaar door 127 te zijn.

```
VOER EEN ONEVEN
GETAL N IN
N=?1234567
IS NIET PRIEM,
NL DEELBAAR DOOR
                127
              Done
```

Probeer zelf eens een programma te componeren dat een doorlopende rij priemgetallen produceert.

En nu zelf: de vreemde conciërge

In een lange gang hangen 100 lampen, genummerd van 1 tot en met 100. Elke lamp heeft een aan/uit-schakelaar; met één keer drukken schakel je de lamp uit als hij aan stond, en aan als hij uit stond.

Aanvankelijk brandt geen van de lampen. In de eerste ronde ($k = 1$) drukt de conciërge op alle knopjes waardoor alle lampen gaan branden. In de tweede ronde ($k = 2$) wordt alleen op de knopjes met een even rangnummer gedrukt; in de derde ronde op de knopjes met een rangnummer deelbaar door 3; in de k-de ronde op alle knopjes waarvan het nummer een k-voud is. Hij gaat hiermee door tot en met de honderdste ronde.

Als 'uit' met een 0 en 'aan' met een 1 wordt weergegeven, krijg je dus:

lampnummer:	**1 2 3 4 5 6 7**
begin:	0 0 0 0 0 0 0
ronde 1:	1 1 1 1 1 1 1
ronde 2:	1 0 1 0 1 0 1
ronde 3:	1 0 0 0 1 1 1
ronde 4:	1 0 0 1 1 1 1
ronde 5:	1 0 0 1 0 1 1

enzovoorts.

De vraag is welke lampen uiteindelijk branden. Welke getallen komen door de mazen van deze zeef? Wie een programmaatje weet te schrijven dat het antwoord op de vraag geeft, is geslaagd voor deze eerste les programmeren met de GR. Het antwoord is trouwens heel verrassend, en de echte Pythagoras-lezer zal zeker geen rust hebben tot het waarom van het antwoord duidelijk is.

Delers

Het programma DELERS maakt een opsomming van alle delers van een ingevoerd getal. In dit programma wordt R gebruikt voor het regelnummer (op het scherm), D voor een eventuele deler. De opdracht R + 1 → R verhoogt het regelnummer met 1. Het scherm heeft plek voor 8 regels met 16 karakters. Dus nadat R de waarde 8 bereikt, komt een pauze en moet R weer op 1 gezet worden. Hier volgt de kern van het programma.

```
ClrHome
Disp "VOER GETAL IN"
Input N
0→R
ClrHome
For(D,1,Int(√(N)))
   If fPart(N/D) = 0
   Then
       R+1→R
       If R = 9
       Then
           Pause
           ClrHome
           1→R
       End
       Output(R,1,D)
       Output(R,8,"*")
       Output(R,11,N/D)
   End
End
```

Kiezen we voor N bijvoorbeeld 60, dan levert het programma de volgende output.

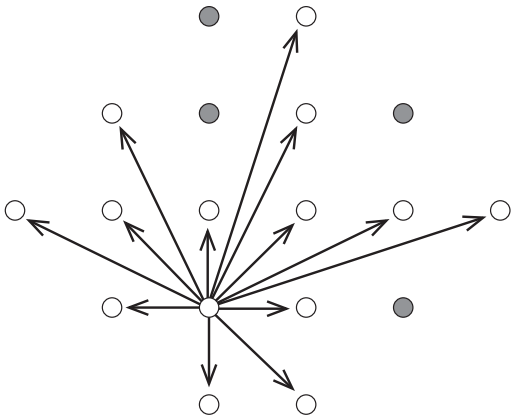
```
     DELERS
----------------
LEVERT IN PAREN
ALLE DELERS VAN
HET GETAL N:

N=?60
```

```
1       *  60
2       *  30
3       *  20
4       *  15
5       *  12
6       *  10
12   DELERS
```

°Problemen

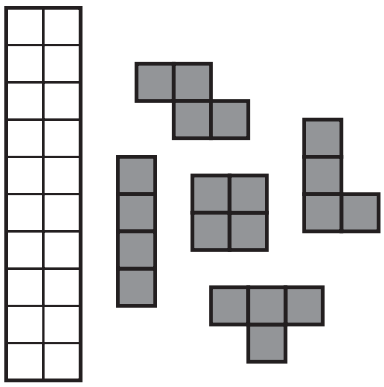
door **Dion Gijswijt**

Roosterpunten
We zeggen dat twee roosterpunten A en B in het vlak elkaar kunnen *zien* als op het lijnstuk AB geen andere roosterpunten liggen. Wat is het grootste aantal roosterpunten dat je in het vlak kunt kiezen, zodat elk tweetal van deze punten elkaar kan zien?

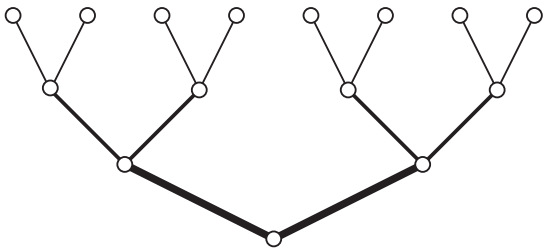


Punten passen
Wat is het grootste aantal punten dat je in een 3 x 4 rechthoek kunt plaatsen, zodat de onderlinge afstanden groter zijn dan $\sqrt{5}$?

Tetris
Op hoeveel manieren kun je een rechthoek van twee bij tien (de witte onderstaande figuur) betegelen met *Tetrisvormen* (de grijze onderstaande figuren)? Je mag de Tetrisstukjes draaien en spiegelen en je mag een vorm meerdere keren gebruiken.



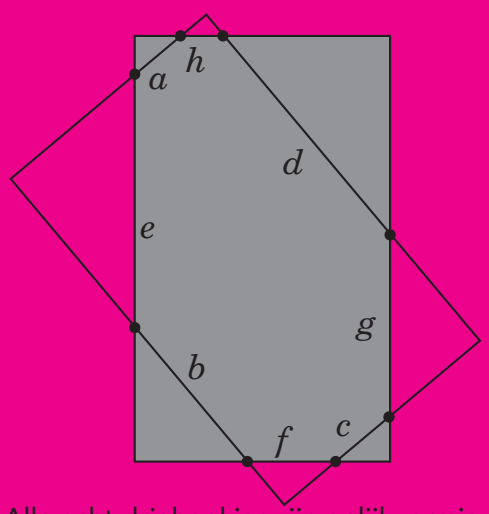
Gracieuze boom
In de figuur zie je een boom met 15 knooppunten en 14 takken (de lijnstukjes). Plaats nu de getallen 1 tot en met 15 op de knooppunten. Doe dit zo, dat elk van de getallen 1 tot en met 14 het verschil is van twee uiteinden van een tak.



°Oplossingen
nr. 6

Machten
Omdat $(x^2 + x^{-2})^2 = x^4 + x^{-4} + 2 = 529$, volgt dat $x^2 + x^{-2} = \sqrt{529} = 23$.
Dezelfde truc geeft $x + x^{-1} = 5$. Zo vinden we twee oplossingen: $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Visitekaartjes
De gevraagde omtrek is gelijk aan de omtrek O van een visitekaartje.



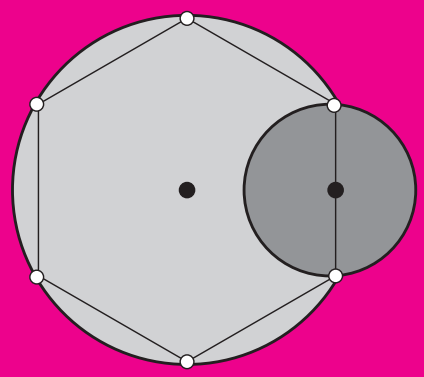
Alle acht driehoekjes zijn gelijkvormig. Noem de verhouding tussen de omtrek en de schuine zijde van zo'n driehoekje α. Dus $\alpha > 2$ en is gelijk voor alle acht driehoekjes. De gevraagde omtrek is nu $\alpha(a + b + c + d)$. Noem $x = a + b + c + d$ en $y = e + f + g + h$. Dan zien we dat

$$(\alpha - 1)x + y = O,$$
$$(\alpha - 1)y + x = O.$$

Aftrekken van deze twee vergelijkingen geeft $(\alpha - 2)(x - y) = 0$. Dus $x = y$ omdat $\alpha \neq 2$. Invullen in de eerste vergelijking geeft $\alpha x = O$.

Coccinella septempunctata
Kleur de 49 velden volgens een schaakbordpatroon, zodat er 25 witte en 24 zwarte velden zijn. Als alle 25 lieveheersbeestjes op een wit veld konden lopen naar verschillende buurvelden, dan stonden ze daarna op 25 zwarte velden, wat onmogelijk is.

Cirkelschijven
Nee, dat kan niet. Als je probeert om enkel de *rand* van de schijf te bedekken met de zes keinere schijven, dan kan dat maar op één manier. Iedere kleine schijf moet een zesde deel van de rand bedekken, wat alleen kan als de rand van de grote schijf de rand van elke kleine schijf in twee diametrale punten snijdt.



Fiches stapelen
Je kunt het spel ook omdraaien: begin met 100 losse fiches en maak één grote stapel van 100 fiches door telkens twee stapels samen te voegen. Er mag geen stapel ontstaan met meer dan tweemaal zoveel fiches als in een andere stapel. Dit kun je doen door telkens twee kleinste stapels samen te voegen.

De zeven-prijsvraag

Dit nieuwe seizoen wil *Pythagoras* de lezers weer massaal aan het rekenen krijgen, zoals vorig jaar met de succesvolle *Priemgetallenprijsvraag*. Dit jaar draait alles om het cijfer 7.

door **Matthijs Coster** en **René Swarttouw**

Spelregels

De bedoeling is getallen te maken, gebruikmakend van alleen het cijfer 7, de bewerkingen + , –, x , : en een nieuwe bewerking 'P': *het product van de cijfers*. Verder mag je ook zevens aan elkaar plakken om bijvoorbeeld 77 of 777 te maken.

Voorbeelden

$1 = 7 : 7$.

$10 = (77 - 7) : 7$.

De bewerking P geeft allerlei interessante mogelijkheden:

$4 = P(7 + 7)$, want $7 + 7 = 14$ en $1 \times 4 = 4$.

$36 = P(P(77))$, want $P(77) = 7 \times 7 = 49$ en $P(49) = 4 \times 9 = 36$.

Je mag P alleen toepassen op getallen met meerdere cijfers. We spreken dus af: $P(0) = P(1) = ... = P(9) = 0$.

Meerdere P's over elkaar heen kun je sneller schrijven als volgt: $P(P(x)) = P^2(x)$, $P(P(P(x))) = P^3(x)$, enzovoorts.

De opdracht

We hebben dit jaar twee opdrachten. Iedereen mag meedoen, aan een van de opdrachten of aan allebei. Individuen mogen insturen, ook hele klassen. De eerste opdracht *Stug 7* leent zich vooral goed voor onderbouwklassen. Daarentegen is *Slim 7* gericht op leerlingen in de bovenbouw en lezers die graag de computer voor zich laten werken.

Opdracht 1: Stug 7

Maak zoveel mogelijk van de getallen 1 tot en met 200, gebruikmakend van maximaal zeven zevens per getal en de bewerkingen +, –, x , : en P.

Opdracht 2: Slim 7

Maak zoveel mogelijk van de getallen 1 tot en met 200 en behaal daarbij zoveel mogelijk punten op de volgende manier: voor elk getal van 1 tot en met 200 dat je maakt, krijg je 70 punten; elke 7 die je gebruikt, kost 10 punten.

Daarnaast verdien je nog punten met bijzondere combinaties:
elke P levert 2 punten,
elke 77 levert 1 punt,
elke 777 levert 5 punten,
elke 7777 levert 10 punten,
elke 77777 levert 20 punten,
elke 777777 levert 30 punten,
elke grotere reeks zevens levert 40 punten.
Uiteraard levert 777 maar 5 punten, hoewel hierin ook nog twee keer de combinatie 77 voorkomt.

Waarschijnlijk ten overvloede waarschuwen wij dat het niet slim is getallen te maken met zo veel zevens dat het een negatief aantal punten oplevert, zoals bijvoorbeeld $25 = 7 + 7 + 7 + (7 + 7 + 7 + 7) : 7$, dat $70 - 8 \times 10 = -10$ punten oplevert.

Belangrijk

Uiteraard moeten de inzendingen helemaal kloppen. (Bij de priemgetallenprijsvraag vorig jaar vonden wij nog heel wat fouten!) We raden je aan om je oplossingen eerst nog eens door iemand anders te laten controleren. Om ons het controleren van de oplossingen te vergemakkelijken, willen wij dat inzendingen op *Slim 7* in de vorm van een tabel worden opgestuurd, zoals weergegeven in figuur 1 (# betekent 'aantal'). In figuur 2 zie je voor de getallen 56 en 100 een voorbeeld van een oplossing met de bijbehorende waarden zoals die in de tabel moeten staan.

Inzenden

Je oplossingen kun je mailen of posten naar:
René Swarttouw, Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
e-mail: rene@pythagoras.nu

Vermeld bij de oplossingen duidelijk de naam van de opdracht: *Stug 7* of *Slim 7*. Vermeld verder je naam en adres, en als je scholier bent, de naam en het adres van de school, je leeftijd en je klas. Bij een klasseninzending moet bovendien de naam van de wiskundedocent opgegeven worden. Inzendingen moeten bij ons binnen zijn vóór **8 januari 2006**.

De prijzen

Ook dit jaar stelt *Texas Instruments* ons in de gelegenheid grafische rekenmachines van het type *TI-84 Plus Silver Edition* als hoofdprijzen uit te loven. Zij zullen gaan naar de beste inzenders. Zijn er meerdere beste inzendingen, dan wordt er onder die inzenders geloot. Bij de klasseninzendingen heeft de winnende school de keuze uit een *SmartView* danwel een *ViewScreen*. De Smartview is de nieuwe pc-versie van de TI-84 om de werking van de TI-83/84 te demonstreren en lesmateriaal te maken; projectie met beamer en pc. Een ViewScreen dient om de werking van TI-83/84 op scherm te tonen, maar dan met een overheadprojector.

getal	oplossing	# punten	# 7	# 77	# 777	# 7777	# 77777	# 777777	# 7777777	# P
1										
2										
3										
⋮										
199										
200										
totaal										

Figuur 1 Inzendingen op *Slim 7* moeten in zo'n tabel gepresenteerd worden

getal	oplossing	# punten	# 7	# 77	# 777	# 7777	# 77777	# 777777	# 7777777	# P
56	$P(77) + 7$	43	3	1	0	0	0	0	0	1
100	$(777 - 77) : 7$	16	6	1	1	0	0	0	0	0

Figuur 2 Twee voorbeelden. Het aantal punten voor de oplossing van het getal 56 is als volgt tot stand gekomen: $70 - 3 \times 10 + 1 + 2 = 43$, en voor het getal 100: $70 - 6 \times 10 + 1 + 5 = 16$.

door **Tom Verhoeff**

In het Duitse stadje Giessen staat sinds 2002 het Mathematikum, het eerste museum in de wereld dat geheel aan wiskunde is gewijd. Het Mathematikum telt drie verdiepingen met prachtige opstellingen die niet alleen wiskunde laten zíén, maar vooral de bezoekers uitnodigen de handen uit de mouwen te steken, en al doende wiskunde te ontdekken. Onlangs bezocht Tom Verhoeff het Mathematikum samen met zijn dochter Iris, en werd daar aangenaam verrast door het enthousiasme bij de veelal jeugdige bezoekers van het museum. Op de begane grond kwam hij bij een serie puzzels een hem zeer bekende puzzel tegen, bestaande uit vier stukken waarmee zowel een vierkant als een driehoek gelegd kan worden, zie figuur 1 en 11. Tom Verhoeff zag de bezoekers driftig in de weer met de vier puzzelstukken, en vroeg zich af in hoeverre zij zich wel realiseerden wat voor interessante wiskunde met die legpuzzel verbonden is. In dit artikel gaat hij op die wiskundige achtergrond in.

°° Figuren opknippen en periodieke vlakvullingen

Figuur 1 Van deze stukken kun je een vierkant maar ook een driehoek maken, zie figuur 11

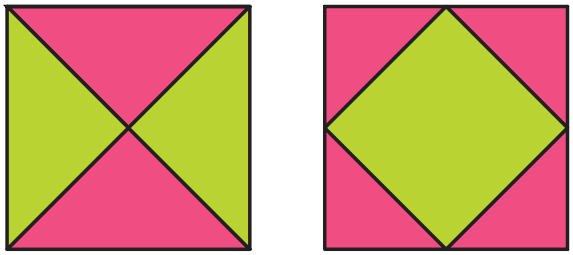
Van één vierkant naar twee (en omgekeerd)

Als je een vierkant langs de diagonalen in vier stukken knipt, krijg je vier gelijkbenige rechthoekige driehoeken, zie links in figuur 2. Hiermee kun je twee even grote kleinere vierkanten maken (één groen en één rood). Je kunt het vierkant ook anders opknippen om er twee even grote kleinere vierkanten van te maken. Dat is rechts in figuur 2 te zien. Wat is de overeenkomst met de vorige manier? Kan het op nog meer manieren?

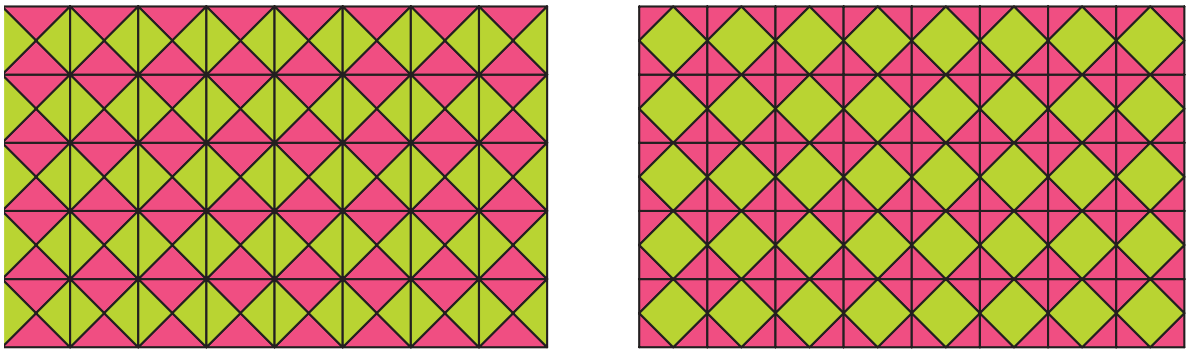
Door de opdelingen in figuur 2 te repeteren krijg je mooie vlakvullingen. Dit heet ook wel een *periodieke voortzetting*, omdat uit het fragment een periodiek (dat wil zeggen: zich herhalend) patroon is gemaakt.

Figuur 3 toont een klein stukje van deze oneindige betegelingen. Het aardige nu is dat je deze betegelingen ook op een andere manier kunt bezien, namelijk als *superpositie* (dat wil zeggen: het over elkaar heen leggen) van twee afzonderlijke periodieke vlakvullingen. De ene is opgebouwd uit de oorspronkelijke figuur en de ander uit de twee 'doel'figuren, zie figuur 4.

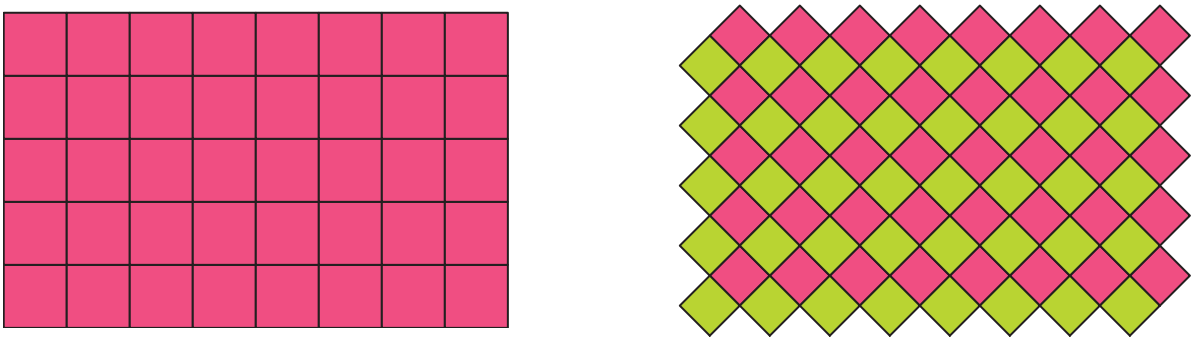
Foto links:
Het Mathematikum in Giessen. Giessen ligt in de deelstaat Hessen, zo'n 200 km ten oosten van Maastricht, en is dus voor de meeste Nederlanders en Belgen op één dag te bezoeken. De toelichtingen in het museum zijn in het Duits en het Engels.



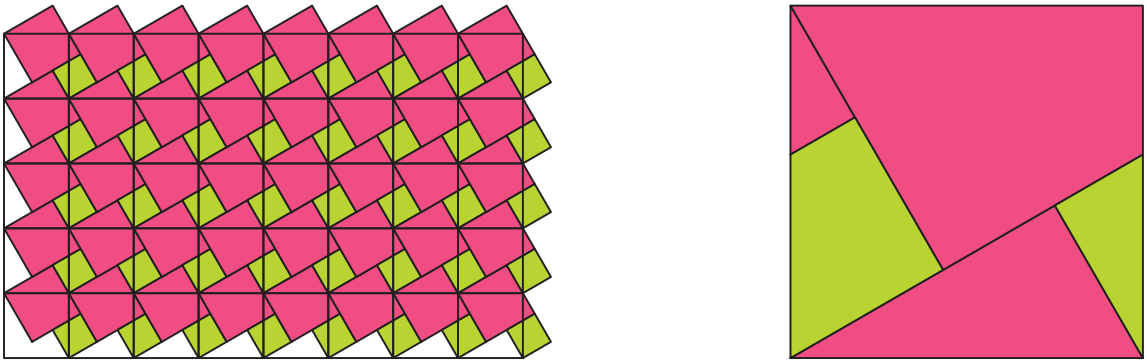
Figuur 2 Twee manieren om een vierkant zo op te knippen dat er twee even grote kleinere vierkanten van te maken zijn



Figuur 3 Vlakvullingen met twee verschillende opgeknipte vierkanten



Figuur 4 De twee vlakvullingen die op elkaar gelegd de twee vlakvullingen van figuur 3 geven



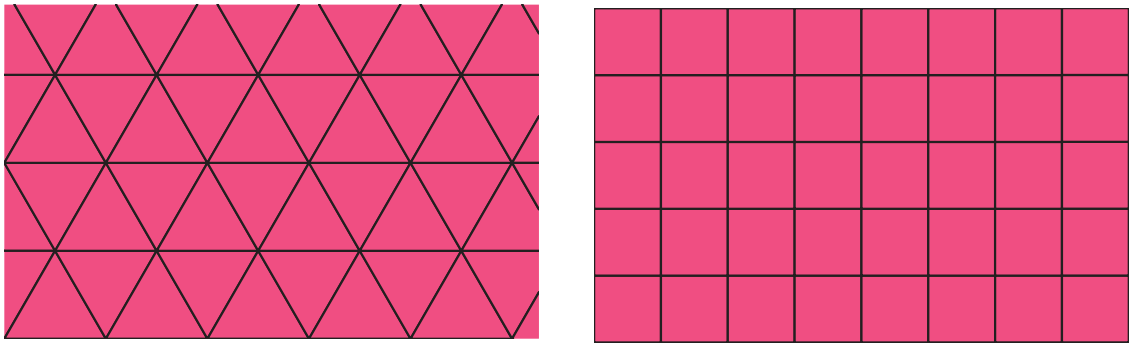
Figuur 5 De Pythagorasbetegeling

Van belang is dat de twee vlakvullingen dezelfde *periodiciteit* hebben, dat wil zeggen, dezelfde richtingen en afstanden waarover ze verschoven kunnen worden om er weer hetzelfde uit te zien.

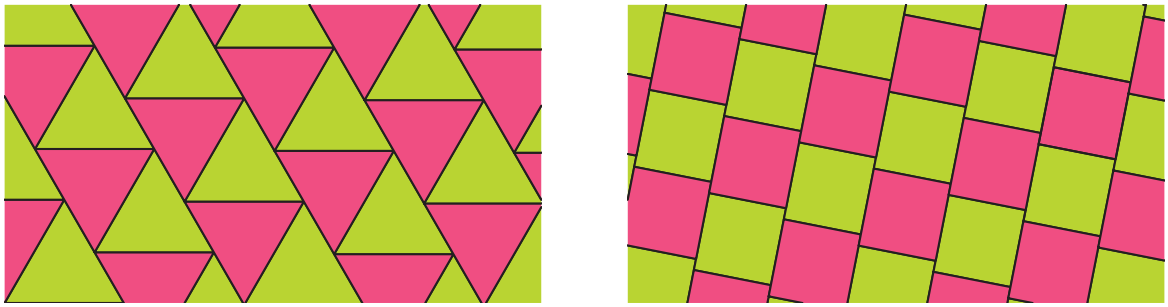
De twee vlakvullingen kunnen willekeurig ten opzichte van elkaar verschoven worden (zonder draaien). Dit leidt dan altijd tot een manier om het grote vierkant op te knippen in stukken waarmee je twee even grote kleinere vierkanten kunt leggen. Het kan dus op oneindig veel manieren, al zijn de opdelingen in figuur 3 wel de 'mooiste'.

Je kunt overigens een vierkant ook opknippen tot twee vierkanten die niet even groot zijn, zie de zogenaamde *Pythagorasbetegeling* in figuur 5 (zie ook www.cut-the-knot.com/pythagoras/PythLattice.shtml: Java-applet om met Pythagorasbetegeling te experimenteren; ook de moeite waard is www.cut-the-knot.org/ctk/Droodle.shtml#pyth; vergeet niet 'Hint' aan te vinken).

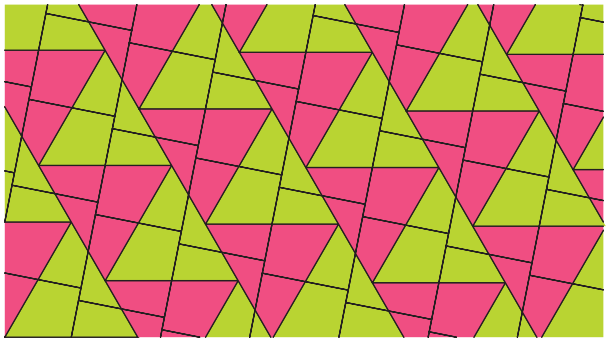
Deze is in iets andere vorm als muurschildering in het Mathematikum te bewonderen. Zie je het verband met de stelling van Pythagoras? Het is niet moeilijk om hier zelf op te variëren met andere figuren en bijpassende vlakvullingen.



Figuur 6 De 'gewone' vlakvullingen met vierkanten en gelijkzijdige driehoeken



Figuur 7 Vlakvullingen met gelijkzijdige driehoeken en vierkanten met dezelfde periodiciteit



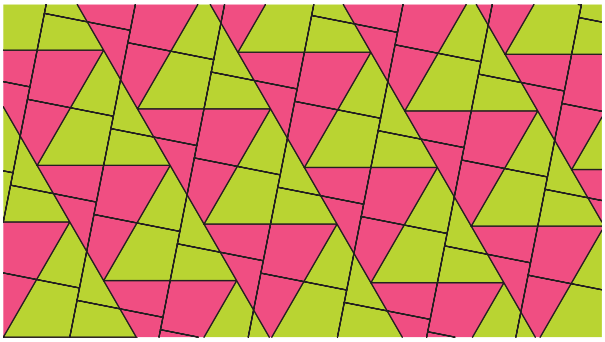
Figuur 8 Superpositie van vlakvullingen met vierkanten en gelijkzijdige driehoeken met dezelfde periodiciteit

Van driehoek naar vierkant

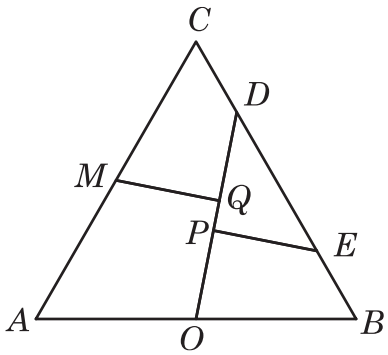
De verdeling van een gelijkzijdige driehoek in vier stukken waarmee je een vierkant kunt leggen, is ook te verkrijgen uit handige vlakvullingen. Het probleem werd voor het eerst door Dudeney gesteld in een krant in 1902 en verscheen later in zijn eerste boek *Canterbury Puzzles and Other Curious Problems* als puzzel 26 onder de naam *The Haberdasher's Problem*. Dudeney vraagt daar specifiek naar een verdeling in vier stukken; met vijf stukken is het makkelijker.

De 'gewone' vlakvullingen met gelijkzijdige driehoeken en vierkanten met hetzelfde oppervlak hebben niet dezelfde periodiciteit, zie figuur 6. Als we voor het gemak even aannemen dat de basis van de driehoek lengte 2 heeft, dan is de hoogte $\sqrt{3}$ en dus ook de oppervlakte $\sqrt{3}$. Het vierkant met gelijke oppervlakte heeft dan zijde $\sqrt[4]{3} \approx 1{,}31607$.

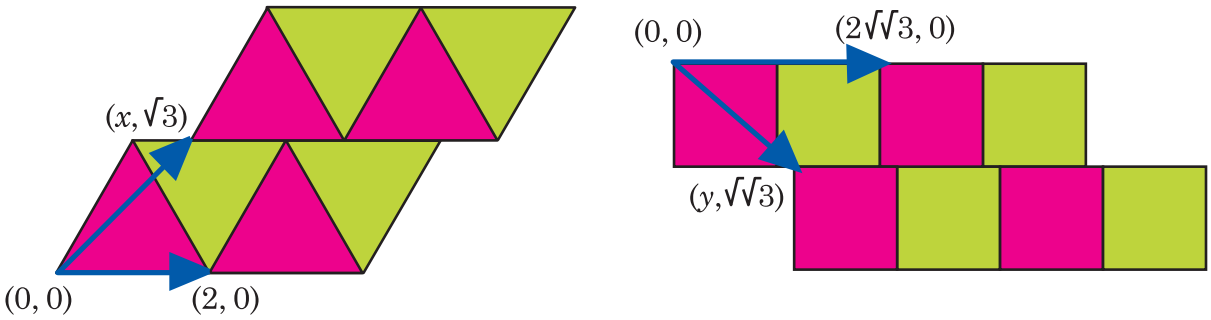
Er zijn echter ook andere periodieke vlakvullingen met vierkanten en driehoeken. Zo kun je de stroken ten opzichte van elkaar wat verschuiven en de vlakvullingen ten opzichte van elkaar verdraaien (zie ook Lindgren (1972) en Frederickson (1997) in de literatuurlijst, maar daarin staan geen berekeningen). Dit verschuiven en draaien kun je maar op één manier doen om de periodiciteiten passend te maken, zie figuur 10.



Figuur 8



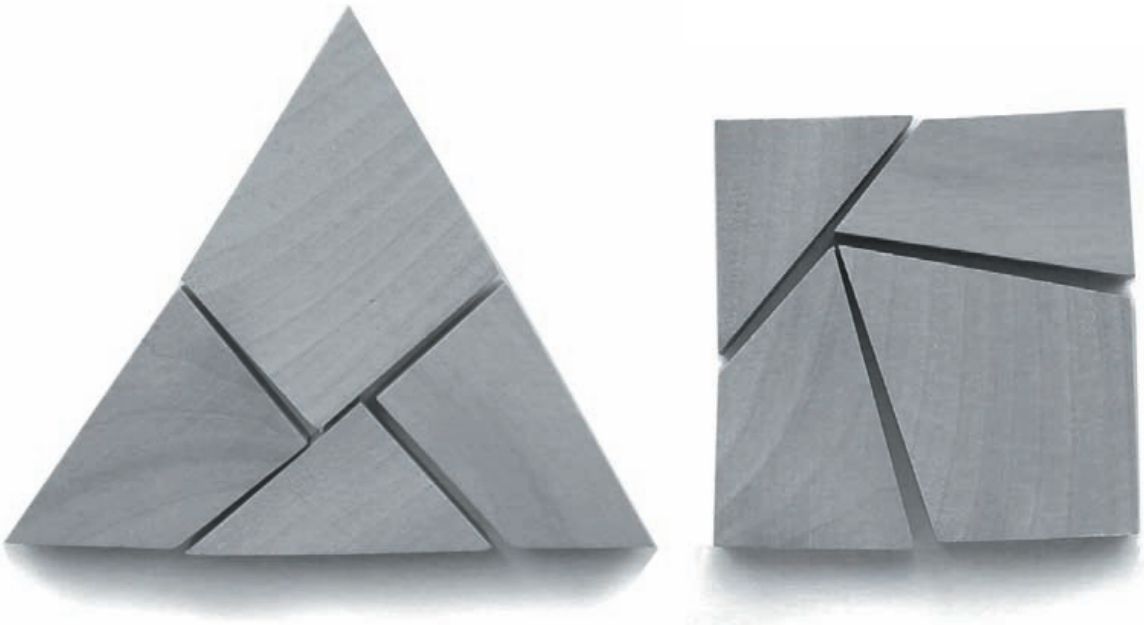
Figuur 9
Gelijkzijdige driehoek zodanig verknipt, dat er een vierkant van gemaakt kan worden



Figuur 10
De pijlen geven de basis van periodiciteit aan. De lengtes van de horizontale pijlen ligt vast; de lengtes van de schuine pijlen variëren met de verschuiving. Je kunt als volgt de verschuivingen x en y bepalen om de periodiciteit passend te maken. De schuine pijl links is even lang als de horizontale pijl rechts indien $x^2 + 3 = 4\sqrt{3}$ (stelling van Pythagoras). De schuine pijl rechts is even lang als de horizontale pijl links indien $y^2 + \sqrt{3} = 4$. Dus $x = \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$ en $y = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$. Je hoeft de vlakvullingen alleen nog te draaien.

De twee vlakvullingen zijn vervolgens op één manier op elkaar te leggen om tot een wederzijdse opdeling komen, want de rode en groene driehoeken moeten op dezelfde manier verdeeld worden.

Nu de eisen aan de verdeling duidelijk zijn, kun je de precieze maten uitrekenen. Beschouw daartoe figuur 10. We zien dat O het midden moet zijn van AB, en M het midden van AC. Verder is OD even lang als een zijde van het vierkant, dat wil zeggen $\frac{1}{2}\sqrt[4]{3}|AB|$. Daarmee ligt punt D ook vast. De lengte van DE is hetzelfde als de lengte van AO (halve basis), waarmee E bepaald is. De hoeken bij P en Q zijn recht. Bovendien hebben MQ en PE dezelfde lengte, namelijk de helft van OD. Overigens zijn ook OP en QD even lang. Opmerkelijk genoeg zijn CD en EB juist *niet* even lang (al wordt dit wel beweerd in Steinhaus (1969), zie de literatuurlijst; het scheelt echter bijna 4%).



Figuur 11
Driehoek en vierkant gelegd van de puzzelstukjes uit figuur 1

Generaliseren

Volgens de stelling van *Wallace-Bolyai-Gerwien* zijn twee willekeurige veelhoeken met dezelfde oppervlakte zo te verknippen in een eindig aantal stukken, dat de een in de ander is om te bouwen (zie ook http://mathworld.wolfram.com/Dissection.html). De constructie is relatief eenvoudig. Je knipt de veelhoeken op in driehoeken, waar je dan rechthoeken van maakt, die je verknipt tot vierkanten. Daarna verknip je herhaald twee vierkanten telkens tot één vierkant, zie figuur 5. Als je beide veelhoeken tot één vierkant hebt omgebouwd, neem je de superpositie van die verdelingen. Het is in het algemeen echter lastiger om opdelingen met een minimaal aantal stukken te vinden. Daarbij kunnen periodieke vlakvullingen helpen, maar lang niet altijd.

Onverwachter is de stelling, die *Laczkovich* in 1988 bewees, dat ook een cirkelschijf in een eindig aantal stukken is te verdelen waarmee een vierkant met dezelfde oppervlakte kan worden gelegd. Sterker nog, de verdeling kan zo gemaakt worden dat je de stukken alleen maar hoeft te verschuiven en niet te draaien. Het aantal stukken dat hij daarvoor nodig had ligt in de orde van 10^{50}.

Met ruimtelijke figuren lukt het meestal niet. Zo kun je zelfs een regelmatig viervlak niet zo ophakken in een eindig aantal stukken, dat er een kubus van gebouwd kan worden. De voorwaarden waaronder het wel kan, zijn ondertussen bekend. Twee veelvlakken zijn wederzijds 'versnijdbaar' dan en slechts dan als ze hetzelfde volume hebben en dezelfde *Dehn invariant* (Dehn, 1902 en Sydler, 1965). Wat een Dehn invariant is, voert te ver voor dit artikel.

Al met al biedt de puzzel uit figuur 1 aanknopingspunten voor heel wat wiskunde.

Literatuur

- Bill Casselman, *On the dissecting table.*
- Interactieve pagina om met Pythagorasbetegeling te experimenteren: http://plus.maths.org/issue16/features/perigal
- Henry E. Dudeney, *Canterbury Puzzles and Other Curious Problems.* London: Nelson, 1907. (Heruitgave bij Dover).
- H. Lindgren, *Recreational Problems in Geometric Dissection and How to Solve Them.* Dover, 1972.
- Greg N. Frederickson, *Dissections: Plane & Fancy.* Cambridge University Press, 1997 (zie voor meer informatie en correcties: www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book.html)
- Steinhaus, *Mathematical Snapshots.* Oxford University Press, 1969.

°Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman** en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 oktober 2005.

OPGAVE 122

Achilles en de schildpad hebben elk n briefjes. Beiden schrijven ze de getallen 1 tot en met $2n$ in een willekeurige volgorde op de briefjes: op beide zijden van elk briefje één getal. Bewijs dat je de briefjes van Achilles en de schildpad zo kunt uitleggen, dat alle getallen 1 tot en met $2n$ te zien zijn zonder dat je een briefje om moet draaien.

OPGAVE 123

Vind alle gehele getallen m en n waarvoor geldt

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n.$$

OPLOSSING 118

Vind alle vijftallen positieve gehele getallen (ze hoeven niet allemaal verschillend te zijn) waarvoor het product van de vijf getallen gelijk is aan de som.

Oplossing. Stel dat we een oplossing hebben. Noem de getallen van de oplossing dan in opklimmende volgorde a, b, c, d en e. We hebben dan

$$a + b + c + d + e = abcde.$$

Er geldt $a + b + c + d + e \leq 5e$ en $abcde \geq a^4e$, dus $a^4 \leq 5$ en daarmee volgt $a = 1$. Dit vullen we in: $abcde = bcde \geq b^3e$, dus $b^3 \leq 5$, en dus $b = 1$. Weer vullen we in: $abcde = cde \geq c^2e$, dus $c^2 \leq 5$, en dus $c = 1$ of $c = 2$.
Als we $c = 2$ invullen, krijgen we $a + b + c + d + e = 2 + 2 + d + e \leq 4e$ en $abcde = 2de \geq 4e$, dus $2d = 4$ en $d = 2$ en dan ook $e = 2$.
Als we $c = 1$ invullen, krijgen we $3 + d + e = de$, oftewel $de - d - e + 1 = 4$ en dus $(d - 1)(e - 1) = 4$. Dat geeft $d - 1 = e - 1 = 2$ of $d - 1 = 1$ en $e - 1 = 4$.
In totaal hebben we dus drie oplossingen: $(1, 1, 2, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 3, 3)$ en $(1, 1, 1, 2, 5)$.

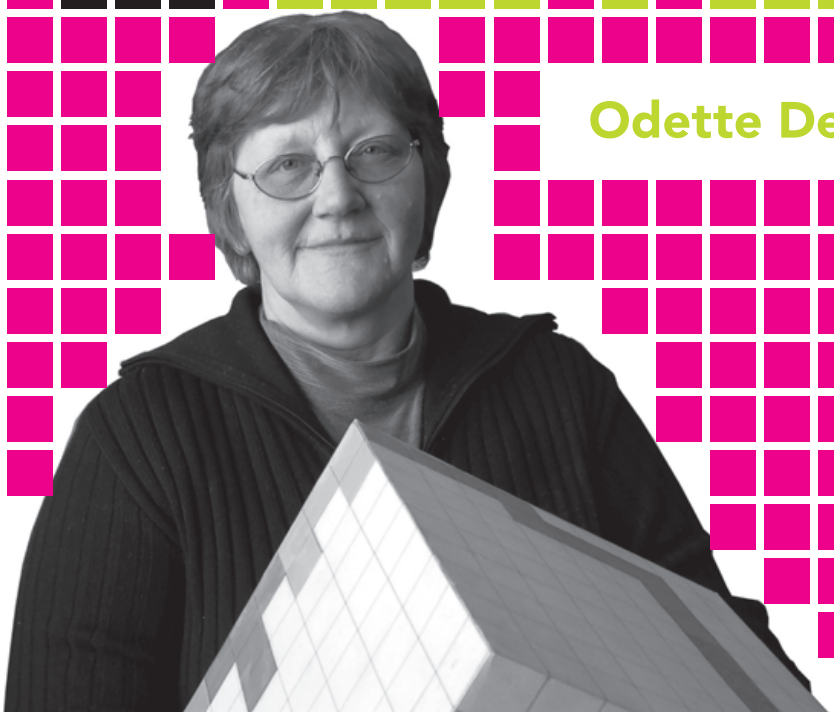
Deze opgave werd goed opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Anne de Haan van het **Gymnasium Felisenum** te Velsen-Zuid, Jan Haenen van het **Porta Mosana College** te Maastricht, Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), Judith Mulder van het **Christelijk Lyceum** Delft, Sanjay Ramawadh van het **St. Maartenscollege** te Voorburg. Mirjam Stienstra van het **Oranje Nassau College** te Zoetermeer, Francine Valk van het **Corderius College** te Amersfoort, Jens Vande Cavey van het **Heilige-drievuldigheidscollege** Leuven (België), Wim Vanrie van het **Onze-Lieve-Vrouwe College** te Assebroek (België) en Suyan Zhang van het **Dr. Aletta Jacobscollege** te Hoogezand. De boekenbon gaat naar Sanjay Ramawadh.

OPLOSSING 119

Alex, Bart, Carla en Dirk moeten in 8 weken elk 2 keer een spreekbeurt houden. Elke week is één van hen aan de beurt. Niemand wil in 2 achtereenvolgende weken spreken. Hoeveel indelingen zijn er?

Oplossing. Noem de leerlingen A, B, C en D. We nemen even aan dat de eerste spreekbeurt van A voor de eerste van B komt, de eerste van C weer later en de eerste van D als laatste. Eerst bekijken we op hoeveel manieren de eerste 4 spreekbeurten ingedeeld kunnen worden (dit zijn er 5), en dan bekijken we per geval op hoeveel manieren je het rijtje kunt afmaken. De mogelijke beginsituaties zijn: **(1)**. $ABCD$. Je mag de D niet onmiddellijk herhalen, dus dit levert $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ mogelijkheden op. **(2)**. $ABCA$. De twee D's kun je op 3 manieren kwijt in de overige vier plekken, en de B en de C vervolgens op 2 manieren. Dit levert dus $3 \cdot 2 = 6$ rijtjes. **(3)**. $ABCB$. Analoog aan het vorige geval, dus ook 6 rijtjes. **(4)**. $ABAC$. Wederom analoog, maar omdat $CDBD$ nu niet mag, levert dit 5 rijtjes. **(5)**. $ABAB$. Je kunt dit alleen afmaken met $CDCD$. In totaal brengt ons dit op 36 mogelijkheden. We kunnen A, B, C en D ook nog onderling verwisselen, en wel op $4! = 24$ manieren. Het totaal aantal mogelijke rijtjes is dus $24 \cdot 36 = 864$.

Deze opgave werd goed opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, Jens Vande Cavey van het **Heilige-drievuldigheidscollege** Leuven (België), P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Anne de Haan van het **Gymnasium Felisenum** te Velsen-Zuid, Jan Haenen van het **Porta Mosana College** te Maastricht, Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België), Judith Mulder van het **Christelijk Lyceum** Delft, Wim Vanrie van het **Onze-Lieve-Vrouwe College** te Assebroek (België) en Suyan Zhang van het **Dr. Aletta Jacobscollege** te Hoogezand. De boekenbon gaat naar Jens Vande Cavey.



Odette De Meulemeester

Voor sommigen is wiskunde méér dan een leuk vak op school, méér dan een hobby en ook meer dan hun broodwinning. Wiskunde kan uitgroeien tot een grote passie, waar iemand ziel en zaligheid in legt. Zo zijn er onderzoekers die zich de tanden stuk bijten op beroemde open problemen, eerder in dit nummer beschreven. Maar ook buiten onderzoeksinstituten tref je mensen met ontembare enthousiasme voor het vak. Hier richten wij de schijnwerper op één van hen.

door **Marco Swaen**

Gertjan: meester-animator

Sinds jaar en dag geeft Odette De Meulemeester les aan de leerlingen van de afdelingen houtbewerking en electro van het KSO Glorieux in Ronse (Vlaanderen). Wie, zoals ik onlangs, een kijkje mag nemen in haar klas waant zich in de zevende hemel van het wiskundeonderwijs.

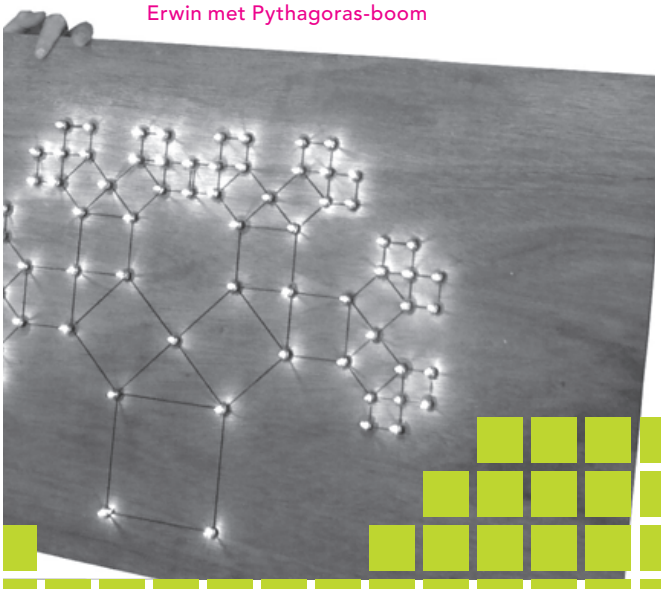
Bij binnenkomst vallen direct de kleurige werkstukken op, waarmee dit lokaal tot de nok gevuld is. Alle denkbare onderwerpen van de schoolwiskunde zijn hier de afgelopen jaren aan de orde gekomen. Niet alleen hebben de leerlingen hun ontluikend vakmanschap in de werkstukken gelegd, er is geknipt en geschilderd, gesoldeerd, gelast, gebeiteld en gezaagd. Elk werkstuk is ook voorzien van een degelijke toelichting, waarin de wiskundige achtergrond uit de doeken wordt gedaan.

Drie leerlingen laten mij werkstukken zien over de stelling van Pythagoras, zie de foto's hieronder. Erwin heeft een schakeling gemaakt in de vorm van een Pythagoras-boom. Raf heeft van metaaldraad een tijdschriftenstandaard gesoldeerd in de vorm van een spiraal, waarvan de stralen oplopen volgens $\sqrt{n}$. Gertjan laat op de computer een animatie zien van de bedekking van een $2 \times 2 \times 2$-kubus met vierkanten van zijde $\sqrt{5}$, gebaseerd op zogenaamde pentomino's, waarover verderop meer.

Niet te missen in het lokaal is een levensgroot bord met daarop:

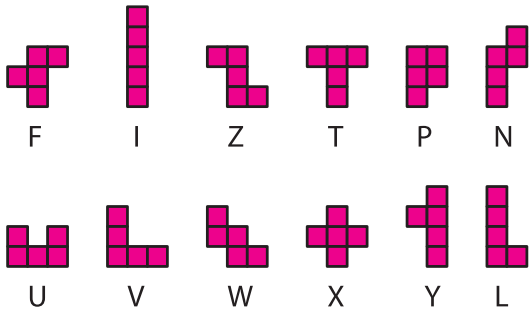
$2 \times 3!! : 5 \times 7 - 11$,

dat getuigt van de geestdrift waarmee de priemgetallenprijsvraag (*Pythagoras* september 2004) hier is aangepakt. De Meulemeester moedigt haar leerlingen aan mee te doen aan nationale en internationale prijsvragen, en op haar website is te zien dat hun inspanningen regelmatig met succes worden beloond. Net als haar eigen inspanningen trouwens, afgelopen april nog werd haar uit handen van het Belgisch koninklijk paar de Koningin Paola Prijs uitgereikt voor haar vernieuwende wiskundeonderwijs.

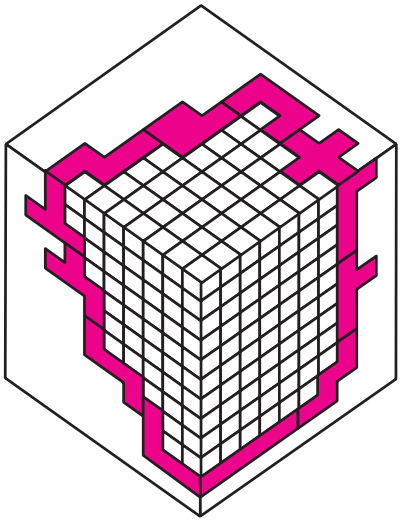


Erwin met Pythagoras-boom

Raf met Pythagoras-slak



Figuur 1 De twaalf vlakke pentomino's



Figuur 2 Wat is de grootste oppervlakte die je kunt omsluiten op de hoek van een kubus, met de twaalf pentomino's?

De ware schat in dit lokaal wordt echter niet gevormd door de spullen die er staan, of de behaalde prijzen, maar in de eerste plaats door de leerlingen zelf, en wat De Meulemeester bij hen teweeg heeft gebracht. Op de punt van hun stoel zitten zij in gespannen afwachting om zich te storten op wat mevrouw De Meulemeester deze keer voor hen in petto heeft. Heel vaak is dat iets dat verband houdt met De Meulemeesters grote passie: de *pentomino's*.

Pentomino's zijn figuren die je kunt maken door vijf onderling gelijke vierkanten langs zijden aan elkaar te leggen. In 1953 introduceerde Solomon W. Golomb ze als varianten op domino's, figuren opgebouwd uit twee vierkanten. Afgezien van draaiing en spiegeling zijn er maar twaalf verschillende pentomino's. In figuur 1 zie je ze met de letters die Golomb ze als namen meegaf.

In de eerste plaats gebruikt De Meulemeester de pentomino's om de lessen te verlevendigen. Aan de hand van pentomino's legt zij onderwerpen uit, variërend van oppervlaktevergroting, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, tot het herschrijven van wortels, en het oplossen van stelsels vergelijkingen. Voorts zijn de pentomino's het materiaal waarmee zij haar leerlingen aan het puzzelen krijgt. De leerlingen pijnigen zich de hersenen over vragen als: wat is de grootste oppervlakte die je met de twaalf pentomino's kunt omsluiten (zie figuur 2), op welke manieren kun je een bepaalde rechthoek vullen met de twaalf pentomino's, hoe maak je een balk van pentomino's?

Het enthousiasme van De Meulemeester heeft ook andere leraren op de KSO Glorieux aangestoken. In de werkplaats staat een moderne CNC-machine waarop de heer Selos, oud-leerling van mevrouw De Meulemeester, samen met de leerlingen pentomino-puzzels van MDF maakt. In het computerlokaal staat een piepschuimsnijder die computergestuurd elke zeven minuten een complete serie pentomino's produceert. Als kiemen waarmee vanuit Ronse de pentominogekte over de wereld verspreid gaat worden. Wil je er een ontvangen: stuur snel een mailtje naar o.d.m@scarlet.be. De eerste vijftig ontvangen de puzzel thuis.

Website

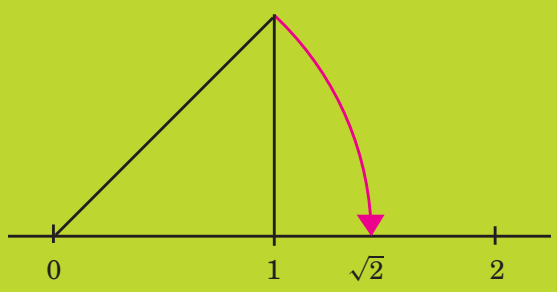
Bezoek de website:
http://home.scarlet.be/~demeod die door haar leerlingen onderhouden wordt. Je vindt er materiaal over de pentomino-projecten, een lange lijst puzzelvragen, en – niet te vergeten – een prijsvraag waarbij een grafische rekenmachine te winnen valt. De site wordt bezocht door pentoministen van over de hele wereld.

Wat is $\sqrt[3]{2}$ eigenlijk? Wat is daarover afgesproken? Hoe weet je eigenlijk dat dat getal bestaat? Op deze vragen geeft Klaas Pieter Hart antwoord in deel 1 van *Worteltrekken voor gevorderden*.

°°Worteltrekken voor gevorderden

door **Klaas Pieter Hart**

Als iemand je vraagt wat $\sqrt{2}$ is, wat zeg je dan? Niet 'de wortel uit 2', want dat is hetzelfde zeggen maar dan in woorden. Het juiste antwoord is: het is een afkorting voor 'dat positieve getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 2'. De volgende vraag kan zijn wat de waarde van $\sqrt{2}$ dan wel is. Dan moet je uitleggen dat $\sqrt{2}$ niet als een breuk te schrijven is (zie inzet op de volgende pagina) en dat $\sqrt{2}$ inderdaad niet meer is dan een afkorting. Dan komt een lastige vraag: hoe weet je dat dat getal bestaat? Gelukkig kun je met een beetje meetkunde de plaats van $\sqrt{2}$ op de getallenlijn aanwijzen, zie onderstaande figuur.



Je maakt een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden lengte 1 hebben; de hypothenusa heeft dan lengte $\sqrt{2}$.

Wat is $\sqrt[3]{2}$?

De vraag naar $\sqrt[3]{2}$ heeft nu een duidelijk antwoord: 'dat positieve getal waarvan de derde macht gelijk is aan 2'. Bestaat dat getal ook? Kunnen we het op de getallenlijn aanwijzen? Dat hangt natuurlijk af van wat je met 'aanwijzen' bedoelt, maar zo makkelijk als met $\sqrt{2}$ gaat het niet. Net als $\sqrt{2}$ is $\sqrt[3]{2}$ niet als een breuk te schrijven (zie wederom de inzet), er is zelfs geen constructie met passer en liniaal waarmee je een lijnstukje ter lengte $\sqrt[3]{2}$ kunt maken (zie *Pythagoras* jaargang 36, nummer 2, december 1996).

We kunnen natuurlijk proberen $\sqrt[3]{2}$ bij benadering aan te wijzen. Als je met je rekenmachientje aan de slag gaat, zie je al gauw dat $1{,}2^3 < 2 < 1{,}3^3$, dus $\sqrt[3]{2}$ ligt in het interval $\langle 1{,}2;\ 1{,}3\rangle$. Als je doorgaat, vind je $1{,}25^3 < 2 < 1{,}26^3$, ..., $1{,}255992104^3 < 2 < 1{,}255992105^3$,

dus $\sqrt[3]{2}$ ligt in het interval $\langle 1{,}255992104;\ 1{,}255992105\rangle$. Zo voortgaand kunnen we steeds kleinere intervalletjes maken waar $\sqrt[3]{2}$ in zou moeten liggen. We vinden zo ook steeds meer decimalen van $\sqrt[3]{2}$, maar op geen enkel moment hebben we $\sqrt[3]{2}$ zelf echt te pakken en eigenlijk weten we nog steeds niet *zeker* of $\sqrt[3]{2}$ echt bestaat. Het zou immers kunnen zijn dat er tussen al die benaderingen nou net een gat in de getallenlijn zit en dat we al die jaren met iets hebben gerekend dat er niet is.

Gelukkig is dat niet zo. De getallenlijn heeft geen gaten en dat is een eigenschap waar in feite de hele analyse om draait. Dankzij die eigenschap kunnen we *bewijzen* dat $\sqrt[3]{2}$ bestaat. Het mooie van de eigenschap en het bewijs is dat op dezelfde manier kan worden aangetoond dat *alle* n-demachtswortels van 2 bestaan. Dat maakt die eigenschap zo belangrijk: je kunt er in één keer het bestaan van een heleboel getallen uit afleiden.

Een fundamentele eigenschap

De wiskundig precieze formulering van 'de getallenlijn heeft geen gaten' is 'de getallenlijn is volledig'.

Om te formuleren wat *volledigheid* is, hebben we het begrip *bovengrens* nodig.

Stel A is een verzameling getallen; een punt x is een bovengrens van A als $a \leq x$ geldt voor alle $a \in A$. Zo is 1000 een bovengrens van het interval $[0, 1\rangle$ en is 2 een bovengrens van de verzameling $\{x : x^3 < 2\}$. Nu is 1000 wel een erg grove bovengrens van $[0, 1\rangle$, het kan veel zuiniger: ook 10 is een bovengrens en 1 is ook een bovengrens. Kleiner dan 1 kan het natuurlijk niet: 1 is de kleinste bovengrens van $[0, 1\rangle$.

Als je nog meer voorbeelden van verzamelingen tekent, zul je zien dat je altijd een *kleinste* bovengrens kunt aanwijzen. Die eigenschap geldt voor *alle* verzamelingen (ook als die niet zo makkelijk te tekenen zijn).

$\sqrt{2}$ is geen breuk

Stel dat $\sqrt{2}$ *wel* is te schrijven als een breuk. Doe dat en schrijf $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$; vereenvoudig de breuk totdat m en n geen gemeenschappelijke factoren meer hebben. Kwadrateer de breuk en vermenigvuldig met n^2, er komt $m^2 = 2n^2$. Deel m en n door 3, met rest, dus $m = 3k + i$ en $n = 3l + j$ met $0 \leq i, j \leq 2$. Kwadrateer: $m^2 = 9k^2 + 6ki + i^2$; als je dit door 3 deelt, dan is de rest gelijk aan 0 (als $i = 0$) of 1 (want $1^1 = 1$ en $2^2 = 4 = 3 + 1$). Als je $2n^2$ door 3 deelt, is de rest 0 of 2. Omdat i en j niet tegelijk 0 zijn (want 3 is geen gemeenschappelijke factor van m en n), hebben we drie mogelijkheden voor de paren resten: $(0, 2)$, $(1, 0)$ en $(1, 2)$; elk van die drie gevallen laat zien dat $m^2 \neq 2n^2$.

$\sqrt[3]{2}$ is ook geen breuk

Het bewijs is net als bij $\sqrt{2}$, maar na wat proberen zul je zien dat je door 7 moet delen. De rest van m^3 bij deling door 7 is altijd 0, 1 en 6 en de rest van $2n^3$ is altijd 0, 2 en 5. De mogelijke paren resten van m^3 en $2n^3$ zijn dan $(0, 2)$, $(0, 5)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(6, 0)$, $(6, 2)$ en $(6, 5)$; in alle gevallen vinden we weer dat $m^3 \neq 2n^3$.

Stelling: de getallenlijn is volledig. *Elke niet-lege verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.*

Een bewijs van deze fundamentele eigenschap is niet zo eenvoudig; dat kun je eigenlijk alleen geven als je precies weet hoe de reële getallen gemaakt zijn. We bewaren het daarom tot een later stukje in *Pythagoras*.

We laten nu zien hoe je de volledigheid gebruikt om te bewijzen dat $\sqrt[3]{2}$ bestaat.

Het bestaan van $\sqrt[3]{2}$

Bekijk de verzameling $A = \{x : x \geq 0$ en $x^3 < 2\}$. Die verzameling is niet leeg, want $0 \in A$; de verzameling heeft een bovengrens, namelijk 2. Nu mogen we concluderen dat er een getal α bestaat dat de kleinste bovengrens van A is, dus $x \leq \alpha$ voor alle $x \in A$ (α is een bovengrens), *en* als $\beta < \alpha$, dan is er een $x \in A$ met $x > \beta$ (α is de kleinste). We gaan bewijzen dat $\alpha^3 = 2$ en dus dat we het *bestaan* van $\sqrt[3]{2}$ hebben aangetoond.

We hebben een formule nodig: voor elke x en y geldt $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2)$ (schrijf de rechterkant maar uit). Met behulp van deze formule vinden we alles wat we nodig hebben.

Ten eerste: als $0 \leq x < y$, dan geldt $x^3 < y^3$. Dit volgt omdat $y^2 + yx + x^2$ groter dan 0 is. Hieruit volgt dat als inderdaad $\alpha^3 = 2$, er geen ander getal met die eigenschap is.

Ten tweede: als $0 < x < y < 2$, dan geldt $y^3 - x^3 < (y - x)(4 + 4 + 4) = 12(y - x)$.

In het bijzonder: als $x \in A$ dan

$$\alpha^3 < x^3 + 12(\alpha - x) < 2 + 12(\alpha - x).$$

Omdat we $\alpha - x$ net zo klein kunnen maken als we willen, volgt nu dat $\alpha^3 \leq 2$.
Aan de andere kant, als $y > \alpha$, dan geldt

$$\alpha^3 > y^3 - 12(y - \alpha) \geq 2 - 12(y - \alpha)$$

(omdat $y \notin A$, geldt $y^3 \geq 2$). Weer kunnen we $y - \alpha$ zo klein krijgen als we willen en dus volgt $\alpha^3 \geq 2$.
Conclusie: $\alpha^3 = 2$.

Opmerkingen

Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat $\sqrt[n]{2}$ bestaat, voor elke n, als de kleinste bovengrens van de verzameling $A_n = \{x : x \geq 0$ en $x^n < 2\}$.

Er is natuurlijk niets speciaals aan 2; voor elk positief reëel getal a en elk natuurlijk getal n kan op deze manier het *bestaan* van $\sqrt[n]{a}$ aangetoond worden.

In het volgende nummer van *Pythagoras* verschijnt deel 2 van *Worteltrekken voor gevorderden*, waarin je kunt lezen hoe je op een efficiënte manier benaderingen van die n-demachtswortels kunt maken.

Pythagoras
September 2005 **Journaal** Nummer 1

door **Alex van den Brandhof**

Wiles ontvangt Shaw Prize

De Shaw Prize - een bedrag van één miljoen dollar - is een internationale prijs (voor wiskunde, astronomie en geneeskunde) die wordt uitgeloofd door de Shaw Prize Foundation uit Hong Kong. De prijs voor wiskunde werd op 2 september jl. uitgereikt en wel aan Andrew Wiles, voor zijn bewijs van de laatste stelling van Fermat. In 2004 werd de Shaw Prize voor de eerste keer uitgereikt.

Bron: www.shawprize.org

Priemtweelingen

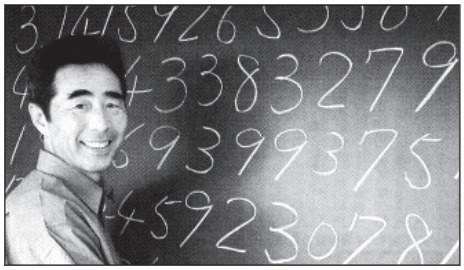
Een paar priemgetallen waarvan het verschil precies 2 is, zoals (3, 5), (11, 13) en (1997, 1999) heet een *priemtweeling*. Al eeuwenlang bestaat het vermoeden dat er oneindig veel priemtweelingen bestaan en af en toe zijn er wiskundigen die menen het probleem opgelost te hebben. Vorig jaar meldden we in het Journaal van het septembernummer dat er een fout 'bewijs' was geleverd en ook nu hebben we nieuws over het priemtweelingvermoeden.
Twee jaar geleden werd een fout 'bewijs' gegeven van het vermoeden dat het 'gat' tussen twee opvolgende priemgetallen soms veel kleiner is dan de gemiddelde 'ruimte' tussen twee opvolgende priemen. Met behulp van Janos Pintz is het 'bewijs' afgelopen zomer verbeterd; hopelijk zitten er nu geen fouten meer in. Als dit bewijs correct blijkt te zijn, is dat een grote stap voorwaarts in de richting van een bewijs van het bestaan van oneindig veel priemtweelingen.

Bron: www.aimath.org

Deelbaar door 7

Aan een getal is makkelijk te zien of het deelbaar is door 2: kijk of het laatste cijfer even of oneven is. Ook zijn er betrekkelijk eenvoudige manieren om te bepalen of een getal deelbaar is door 3, 4, 5, 6, 8, 9 of 10. Een uitzondering is het getal 7.
Er bestaat wel een methode om te checken of een getal deelbaar is door 7, bekijk het volgende voorbeeld maar. Neem het getal 623. Verdubbel het laatste cijfer: $3 \cdot 2 = 6$. Trek dit af van het gegeven getal minus het laatste cijfer: $62 - 6 = 56$. Omdat 56 deelbaar is door 7, is het gegeven getal (623) het ook. Deze methode is behoorlijk inefficënt bij grote getallen. Voor bijvoorbeeld het getal 6049351 moet je erg vaak herhaald het recept toepassen, om je conclusie te kunnen trekken.
Enkele maanden geleden heeft Gustavo Gerald Toja Frachia van de Universiteit van São Paulo een handiger algoritme ontwikkeld. Aan de hand van het getal 6049351 laten we zien hoe zijn methode werkt.
Verdeel de cijfers van het getal in groepjes van twee (begin rechts): 6, 04, 93, 51. Neem voor het meest rechtse getal van dit rijtje het grootste veelvoud van 7 dat kleiner is dan dit getal, neem voor het volgende getal uit dit rijtje het kleinste veelvoud van 7 dat groter is dan dit getal, voor het derde getal weer het grootste veelvoud van 7 kleiner dan dat getal, enzovoorts. Dan ontstaat het volgende rijtje: 7, 0, 98, 49. Neem dan de niet-negatieve verschillen van de twee rijtjes die je nu hebt: $7 - 6 = 1$, $4 - 0 = 4$, $98 - 93 = 5$, $51 - 49 = 2$. Schrijf deze uitkomsten achter elkaar op (begin met de meest rechtse uitkomst): 2541. Herhaal het recept, toegepast op dit getal: eerst krijg je dus het rijtje 25, 41, daarna 28, 35. Neem de niet-negatieve verschillen: 3, 6. Achter elkaar opgeschreven, rechts beginnend, geeft het getal 63. Dat is deelbaar door 7 en daarom is het oorspronkelijke getal (6049351) dat ook.
Op www.divisibilitybyseven.mat.br geeft Toja Frachia een bewijs van de juistheid van zijn algoritme. Alexander Bogomolny ontdekte dat hetzelfde algoritme ook werkt bij deelbaarheid door 11 en 13.

Ruim 80.000 decimalen van π



De 59-jarige Japanner Akira Haraguchi heeft afgelopen zomer het record voor het onthouden en voordragen van π verbroken. De man heeft – uiteraard uit zijn hoofd – in dertien uur tijd de eerste 83.431 cijfers achter de komma opgenoemd. De Japanner verdient met deze prestatie waarschijnlijk een vermelding in het *Guinness Book of Records*. Het vorige offciële record stond op 42.195 cijfers achter de komma. Dit record werd in 1995 gehaald, eveneens door een Japanner.

Internationale Wiskunde Olympiade

Op 13 en 14 juli vond voor de 46ste keer de Internationale Wiskunde Olympiade plaats, dit jaar in Mexico. De deelnemers, afkomstig uit 93 landen, verbleven in totaal negen dagen in Mexico. Naast het doen van wiskunde was er een sociaal en cultureel programma. Het winnende land was – zoals gebruikelijk – China. Het Chinese team haalde 235 van de 252 punten. De VS werd tweede met 213 punten en Rusland werd derde met 212 punten. Nederland haalde 62 punten, goed voor twee bronzen medailles. De Belgen deden het met 74 punten iets beter. In het kader zie je twee opgaven uit de internationale olympiade.

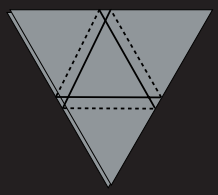
1.
Een competitie bestaat uit zes opgaven. Elk paar opgaven werd opgelost door meer dan $\frac{2}{5}$ van alle deelnemers. Niemand loste alle opgaven op. Bewijs dat er ten minste twee deelnemers waren die precies vijf opgaven oplosten.

2.
x, y en z zijn positieve reële getallen waarvoor geldt $xyz \geq 1$. Bewijs dat

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + x^2 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

Elastiekje
Ja, dat kan:

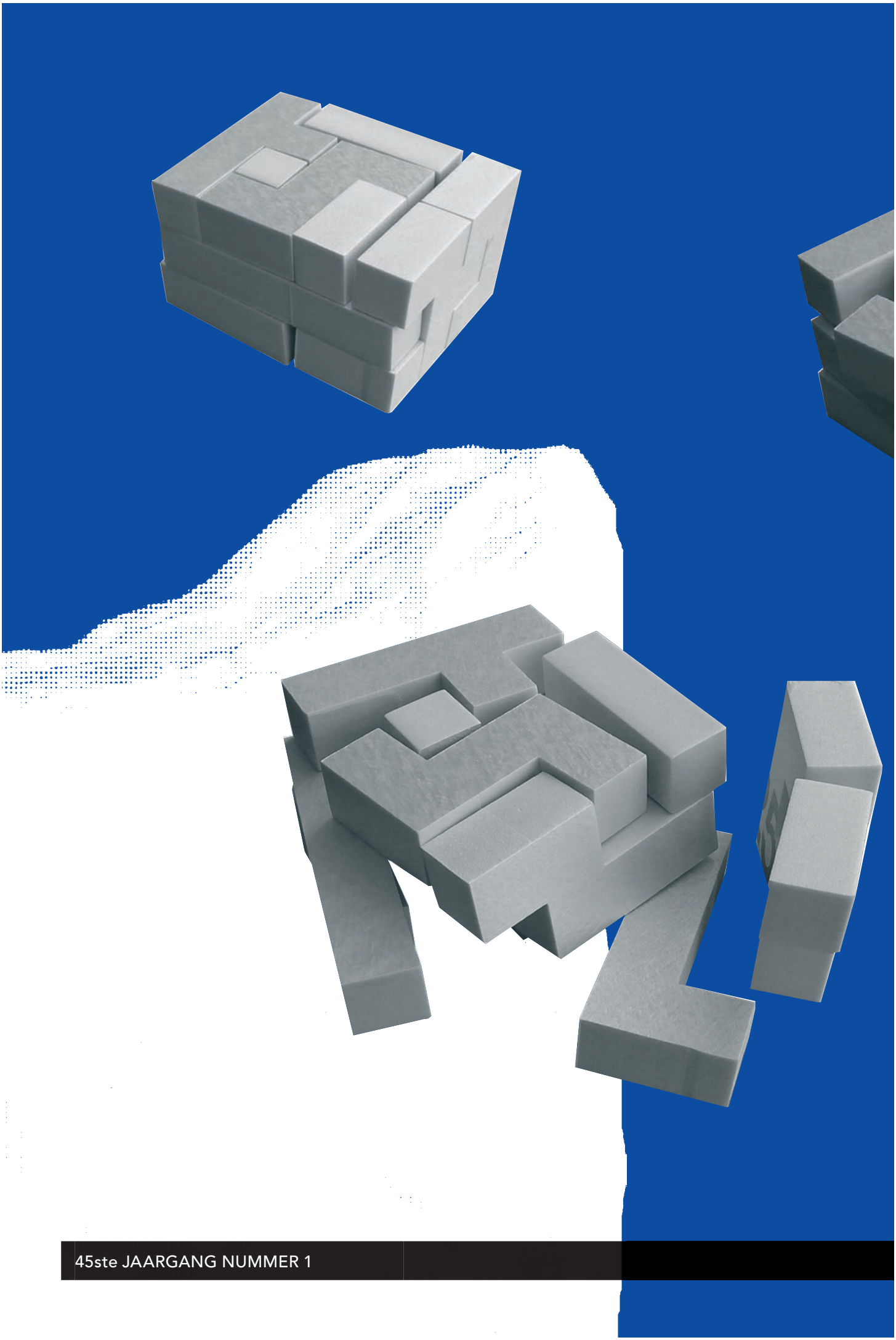


Handen schudden
Als er n personen zijn, wordt er $n(n-1)/2$ keer handen geschud. De vergelijking $n(n-1)/2 = 55$ heeft als oplossing $n = 11$.

Waterpeil
In de boot: het gewicht van de extra hoeveelheid verplaatst water is even groot als het gewicht van de munt. In het water: het volume van de extra hoeveelheid verplaatst water is even groot als het volume van de munt. De munt weegt meer dan een hoeveelheid water van dezelfde omvang (gewoonlijk). De munt zal dus in de boot worden gegooid.

Welke is van wie?
Peter fietst op Barts fiets en draagt Jos zijn pet. Dan moet Jos op Peters fiets rijden en Barts pet dragen.

100 km fietsen
Op de eerste dag fietsten zij 8 kilometer; immers $8 + 14 + 20 + 26 + 32 = 100$.



45ste JAARGANG NUMMER 1