PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN NOVEMBER 2005

PYTHAGORAS

45ste jaargang nummer 2
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Webmaster
Paulus Klerk

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. L.A.M. van den Broek, docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen (vdbroek@math.ru.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), prof.dr. J. van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit (craats@science.uva.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de Eötvös Universiteit te Boedapest (dion@pythagoras.nu), drs. J.S. Groot, wetenschappelijk medewerker bij TNO-FEL te Den Haag (j.sgroot.member2@freeler.nl), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Scholengemeenschap Amsterdam-Zuid (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), C. Jost, studente wiskunde aan de TU Dresden (jost.christine@web.de), J. Müttel, studente wiskunde aan de Universiteit van Bonn (jmuettel@uni-bonn.de), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde aan de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector op het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), drs. J. Smit, voormalig docent wiskunde op de Radboud Universiteit Nijmegen (smit.windrich@wanadoo.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum en de EFA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr. ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Op het omslag
Houten beelden van Popke Bakker

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

INHOUD

2 – 3 Kleine nootjes

4 – 10 Open priemproblemen

11 – 13 In gesprek

14 – 19 De wiskunde van Popke Bakker

20 – 21 Pythagoras Olympiade

22 – 25 Sodoku light

26 – 27 Haal meer uit je GR

28 – 29 Problemen – Oplossingen

30 – 31 Worteltrekken voor gevorderden, deel 2

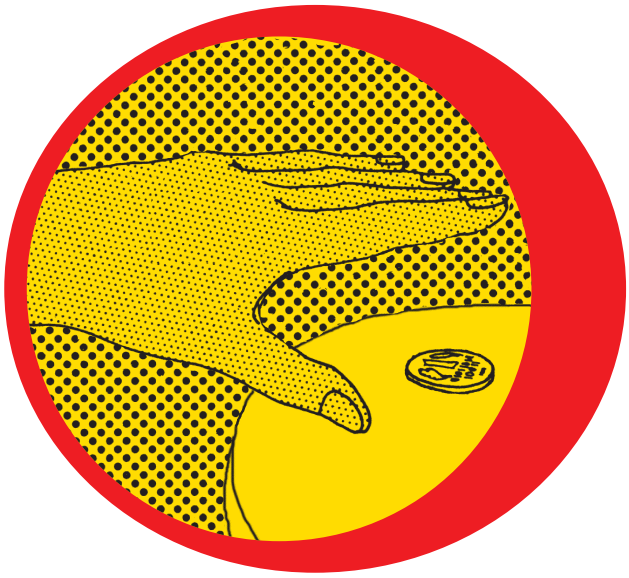
32 – 33 Journaal

33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes



Munten leggen

Berend en Boy leggen om beurten een euro op een ronde tafel (niet op elkaar). Wie de laatste legt, wint. Kan de beginner winnen?

Alle hartens?

Is de kans dat een bridgepaar (elk van de vier spelers krijgt 13 van de 52 kaarten) alle dertien hartens krijgt kleiner dan, gelijk aan of groter dan de kans dat het niet één harten krijgt?

Telefoonnummers
In Huisdorp bestaan de telefoonnummers uit zes cijfers. Een telefoonnummer begint nooit met een nul. Hoeveel telefoonnummers waarin ten minste één 7 voorkomt kan de gemeente Huisdorp maximaal hebben?

Cijfers typen
Een typiste tikt achter elkaar de rij natuurlijke getallen 1234567891011121314..... Welk cijfer ontstaat bij de honderdste aanslag? En bij de duizendste?

Doosje vullen
Je hebt een doosje zonder deksel van 2 x 2 x 2 en vier balkjes van 1 x 1 x 2. Op hoeveel manieren kun je het doosje met deze balkjes vullen?

door **Jan van de Craats**, **Christine Jost** en **Janina Müttel**

Misschien denk je dat over priemgetallen, de bouwstenen van het rekenen, wel zo ongeveer alles bekend is. Dat er op dat terrein geen onopgeloste vraagstukken meer zijn. Vergeet het maar: in de getallentheorie wemelt het van de open priemproblemen: uitdagende vragen over priemgetallen waar wiskundigen nog steeds geen antwoord op weten.

Open priemproblemen

Oneindig veel

Natuurlijk is er ook veel dat wél bekend is. Zo weten we al sinds Euclides (ongeveer 300 voor Christus) dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Het bewijs is simpel, maar toch ook erg mooi. Hier is het.

Een geheel getal n heet een *priemgetal* als het groter dan 1 is en geen delers heeft die groter dan 1 en kleiner dan n zijn. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...
Noem het k-de priemgetal p_k, dus $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, enzovoort. Maak nu een nieuwe rij (q_k) als volgt:

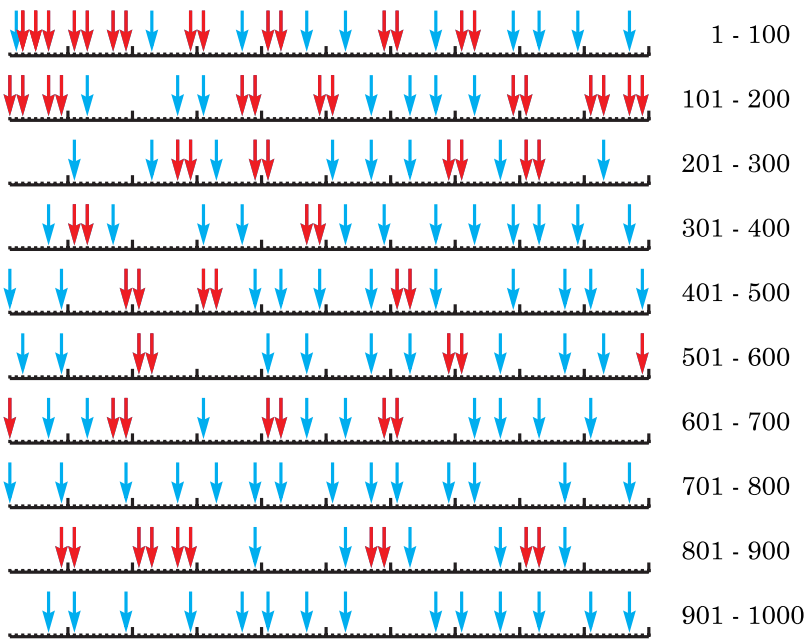
$$q_k = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1,$$

dus $q_1 = 2 + 1 = 3$, $q_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$, $q_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$, ...

Je ziet dat q_k altijd groter dan p_k is en dat q_k rest 1 geeft bij deling door elk priemgetal p_i dat kleiner dan of gelijk aan p_k is. Het getal q_k is dus niet deelbaar door zo'n priemgetal p_i. Daarom is q_k óf zelf een priemgetal, óf het is een getal dat ontbonden kan worden in priemgetallen *die allemaal groter zijn dan* p_k. Hieruit volgt dat er een priemgetal moet zijn dat groter is dan p_k. Maar omdat deze redenering voor elke p_k geldig is, kan de rij van alle priemgetallen nooit ophouden. Er zijn dus inderdaad oneindig veel priemgetallen.

De onderstaande tabel geeft een overzicht van het begin van de rijen (p_k) en (q_k). Je ziet hoe snel die tweede rij groeit, en ook dat sommige q_k priem zijn, terwijl de andere zijn samengesteld uit priemfactoren die inderdaad allemaal groter zijn dan de bijbehorende p_k.

k	p_k	q_k	
1	2	3	(priem)
2	3	7	(priem)
3	5	31	(priem)
4	7	211	(priem)
5	11	2311	(priem)
6	13	30031	$= 59 \times 509$
7	17	510511	$= 19 \times 97 \times 277$
8	19	9699691	$= 347 \times 27953$
9	23	223092871	$= 317 \times 703763$
10	29	6469693231	$= 331 \times 571 \times 34231$
11	31	200560490131	(priem)
...	...	...	



Figuur 1 De priemgetallen kleiner dan duizend. Met rode pijlen zijn de priemtweelingen aangegeven.

Over de rij (q_k) kun je al gelijk twee voor de hand liggende vragen stellen die nog geen van beide beantwoord zijn:

Open probleem 1: Bevat de rij (q_k) oneindig veel priemgetallen?

Open probleem 2: Bevat de rij (q_k) oneindig veel samengestelde getallen (dat wil zeggen getallen die geen priemgetal zijn)?

Priemtweelingen

Maar ook over de rij (p_k) van alle priemgetallen zelf is nog veel onbekend. In figuur 1 zijn de priemgetallen onder de duizend met pijlen in beeld gebracht. Met rode pijlen zijn de *priemtweelingen* aangegeven, dat wil zeggen de paren priemgetallen die een verschil van precies 2 hebben. Omdat alle priemgetallen groter dan 2 oneven zijn, is er behalve het paar $(2, 3)$ geen tweetal met verschil 1. De priemtweelingen zijn dus de 'naaste buren' in de rij van alle priemgetallen.

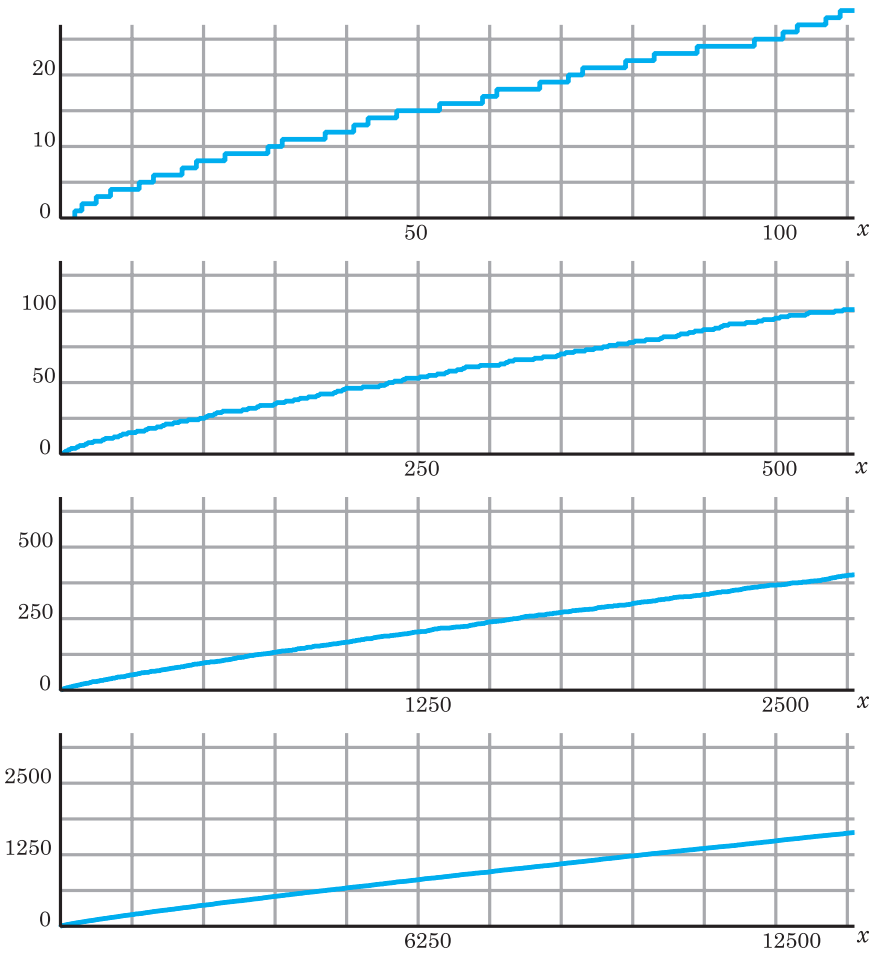
In figuur 1 zie je heel wat priemtweelingen: $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, ..., maar ook bijvoorbeeld $(599, 601)$ en $(881, 883)$. Tussen 700 en 800 zit geen enkele tweeling en evenmin tussen 900 en 1000. Worden de priemtweelingen op den duur steeds zeldzamer? Houdt de rij misschien zelfs op een zeker moment op? We weten het niet. Een heel beroemd open probleem is namelijk:

Open probleem 3: Zijn er oneindig veel priemtweelingen?

En, daaraan verwant:

Open probleem 4: Als er oneindig veel priemtweelingen zijn, hoe liggen die dan verdeeld?

Naar deze problemen is al veel onderzoek gedaan, maar de definitieve antwoorden kennen we nog steeds niet. Bijna alle experts geloven dat er inderdaad oneindig veel priemtweelingen zijn en er zijn ook plausibele vermoedens over hun verdeling, maar bewijzen ontbreken. Wel zijn er veel priemtweelingen bekend. De recordhouder op het moment dat we dit schrijven, is het



Figuur 2 De grafiek van de functie $\pi(x)$ op vier schalen getekend, telkens uitgezoomd met een factor 5.

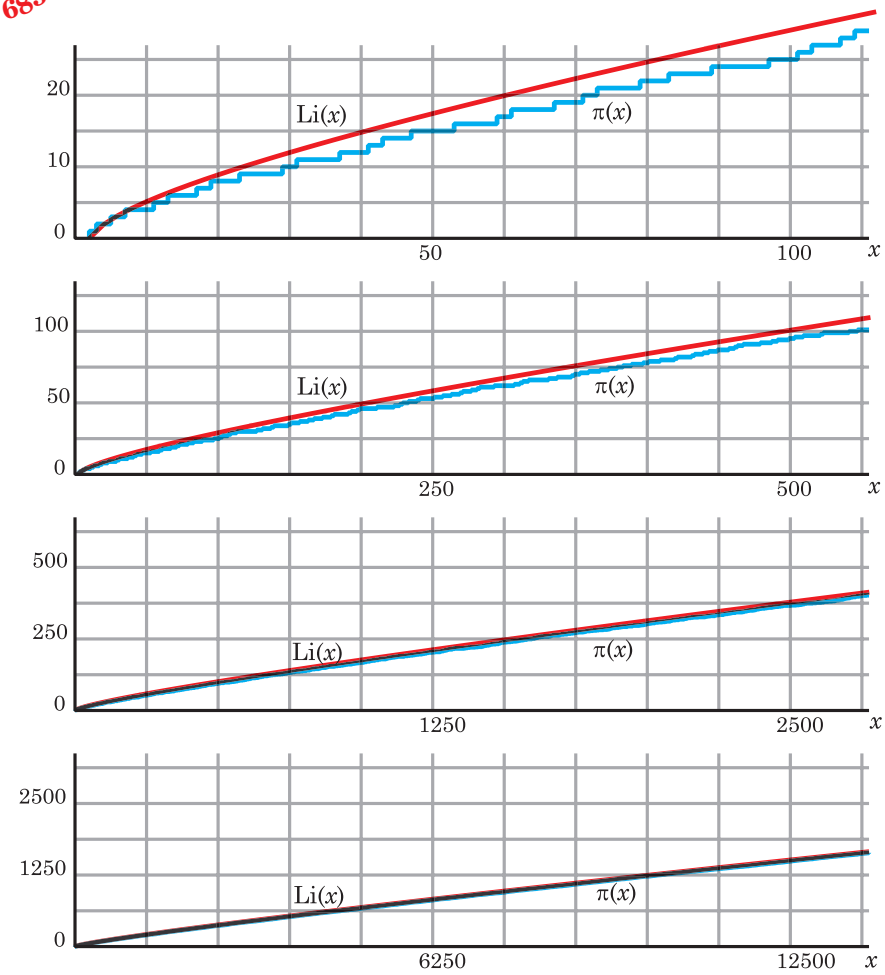
paar $33218925 \times 2^{169690} \pm 1$, bestaande uit twee priemgetallen van elk 51090 cijfers. Dat tweetal is in 2002 ontdekt. Op het internet kun je nakijken of dit record inmiddels gebroken is (googlen met *twin primes*).

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$

Figuur 1 geeft de indruk dat de verdeling van de priemgetallen erg chaotisch is. Er lijkt weinig systeem in te zitten. In zekere zin is dat ook zo: als je bijvoorbeeld het duizendste priemgetal p_{1000} wilt berekenen, zit er weinig anders op dan de hele rij (p_k) af te lopen totdat je p_{1000} hebt. Er is geen eenvoudige formule voor of een snelle sluiproute. (Voor wie het weten wil: $p_{1000} = 7919$.)

Maar toch, een totale chaos kan de verdeling van de priemgetallen ook niet zijn. Dat zie je wanneer je een grafiek maakt van de *priemgetallen-telfunctie* $\pi(x)$ die gedefinieerd is als het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Wiskundigen gebruiken traditioneel de letter π om deze functie aan te geven en wij sluiten ons daarbij aan. Maar let op: dit functiesymbool π heeft dus niets te maken met het beroemde getal $\pi = 3{,}1415926...$!

In figuur 2 zie je vier maal de grafiek van $\pi(x)$, telkens uitgezoomd met een factor vijf. In het bovenste plaatje, dat hoort bij het traject $0 \le x \le 110$, zijn de trapjes van de grafiek duidelijk te zien: bij elk nieuw priemgetal neemt $\pi(x)$ met één toe, en daartussen is $\pi(x)$ constant. Het volgende plaatje laat het traject $0 \le x \le 550$ zien, en de grafiek begint er al gladder uit te zien. Op $0 \le x \le 2750$ zijn er nog nauwelijks trapjes zichtbaar, en op $0 \le x \le 13750$ is er geen enkele oneffenheid meer zichtbaar. De gladheid van deze grafiek is een van de verbluffendste verschijnselen in de wiskunde: op kleine schaal lijken de priemgetallen chaotisch verdeeld te zijn, maar globaal gezien is er sprake van een prachtige glad verlopende grafiek.



Figuur 3 De grafieken van de functies $\pi(x)$ en $\mathrm{Li}(x)$.

°°De logaritmische integraal

Globaal gezien lijkt de grafiek van $\pi(x)$ een gladde kromme, op het eerste gezicht zelfs een rechte lijn. Maar als je beter kijkt, zie je dat de helling ervan geleidelijk afneemt naarmate x toeneemt. De grote wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777-1855) was die regelmaat ook al op het spoor gekomen. Hij probeerde een eenvoudige formule voor een functie te vinden die bij benadering zo'n zelfde grafiek heeft, en ontdekte daarbij op 15-jarige leeftijd dat de globale helling van de grafiek van $\pi(x)$ in het punt x goed benaderd kan worden door $1 / \ln x$. Dat wil zeggen dat

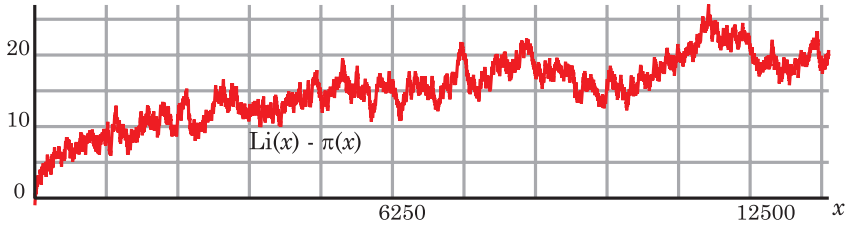
$$\frac{\pi(x+a)-\pi(x)}{a} \approx \frac{1}{\ln x}$$

wanneer a veel kleiner is dan x, maar toch nog groot genoeg om geen last te hebben van de kleine oneffenheden in de grafiek van $\pi(x)$. In figuur 2 kun je in de onderste grafiek bijvoorbeeld $x = 12500$ en $a = 1250$ nemen. Omdat $1 / \ln 12500 \approx 0{,}1060$, zou dan moeten gelden dat $\pi(13750) - \pi(12500) \approx 0{,}1060 \times 1250 = 132{,}5$ en dat klopt uitstekend, want $\pi(13750) = 1625$ en $\pi(12500) = 1492 = 1625 - 133$.

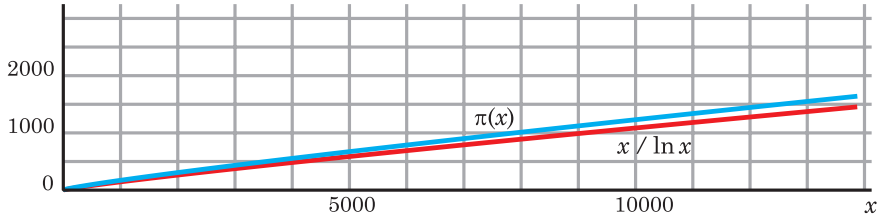
Als $F(x)$ een echt gladde, differentieerbare functie is die de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ goed benadert, zou volgens het vermoeden van Gauss dus voor alle x moeten gelden dat $F'(x) = 1 / \ln x$. Dat wil zeggen dat

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

waarbij de ondergrens 2 zo gekozen is dat $F(2) = 0$. Deze functie wordt de *logaritmische integraal* genoemd, afgekort $\mathrm{Li}(x)$. In figuur 3 zie je de grafieken van de functies $\pi(x)$ en $\mathrm{Li}(x)$ samen getekend. Vooral op



Figuur 4 De grafiek van de verschilfunctie $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$.



Figuur 5 De grafieken van $\pi(x)$ en $x/\ln x$.

grote schaal is de overeenkomst verbazingwekkend goed.

Hoe goed de overeenkomst tussen $\pi(x)$ en $\mathrm{Li}(x)$ ook lijkt, helemaal gelijk zijn ze niet. De grafiek van de verschilfunctie $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ die in figuur 4 getekend is, laat dat duidelijk zien. Je ziet dat het verschil $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ geweldig fluctueert, maar toch relatief klein is. Het lijkt ook (behalve in het allereerste begin) altijd positief te blijven, maar dat is niet zo: de Britse wiskundige Littlewood toonde in 1914 aan dat $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ oneindig vaak van teken wisselt. Toch heeft niemand ooit een grote x gevonden waarvoor $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) < 0$ is. Veel wiskundigen hebben wel bovengrenzen aan kunnen geven waaronder er zeker zo'n x moet zijn. De beste bovengrens op dit moment is $1{,}39822 \times 10^{316}$.

Een verband met Riemanns vermoeden

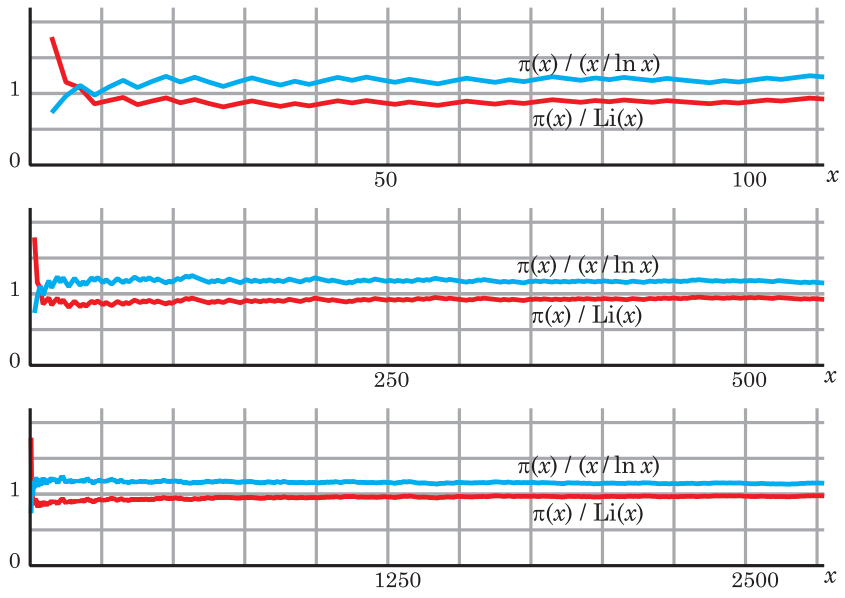
Als we precieze, hanteerbare formules zouden hebben voor het verschil $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, zouden we de verdeling van de priemgetallen helemaal kennen. In feite was dat ook het doel van het onderzoek van Riemann dat uitmondde in zijn artikel uit 1859 waarin ook zijn beroemde, nog steeds onopgeloste vermoeden te vinden is ('alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritische lijn', zie het artikel over de millenniumproblemen in het vorige nummer van *Pythagoras*). Als je dat vermoeden bewijst of weerlegt, verdien je een miljoen dollar. Dat dit vermoeden nauw verbonden is met de verschilfunctie $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, is in 1901 door de Zweedse wiskundige Helge von Koch nog duidelijker gemaakt. Hij liet namelijk zien dat Riemanns vermoeden equivalent is met het bestaan van een positieve constante C waarvoor geldt dat

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| < C\sqrt{x}\ln x$$

voor alle x. Die ongelijkheid houdt in dat de verschilfunctie niet al te snel kan groeien, want zowel de wortelfunctie als de logaritme stijgt maar langzaam.

De priemgetallenstelling

Tot nu toe hebben we over de priemgetal-



Figuur 6 De priemgetallenstelling in beeld gebracht.

len-telfunctie $\pi(x)$ eigenlijk nog niets bewezen behalve dat $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$ (want er zijn oneindig veel priemgetallen). Gauss vermoedde dat $\mathrm{Li}(x)$ een goede benadering van $\pi(x)$ is, maar bewijzen kon hij het niet. Trouwens, wat is een 'goede benadering'? Het Riemann-vermoeden houdt in dat het verschil $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ 'niet te snel stijgt'. Maar het Riemann-vermoeden is nog steeds niet bewezen. Het wordt nu dus tijd om iets positiefs te vermelden. Dat vinden we in de *relatieve fout*

$$\frac{\mathrm{Li}(x) - \pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1 - \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)}.$$

Veel wiskundigen, ook Gauss en Riemann, hadden het idee dat die relatieve fout naar nul gaat voor $x \to \infty$, dus dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

Dit staat bekend als de *priemgetallenstelling*. Dat is ook heel lang een beroemd open probleem geweest. Maar in 1896 werd door twee wiskundigen onafhankelijk van elkaar een bewijs gevonden. Het waren de Fransman Jacques Hadamard en de Belg Charles de la Vallée Poussin, die daarbij voortbouwden op het werk van Riemann.

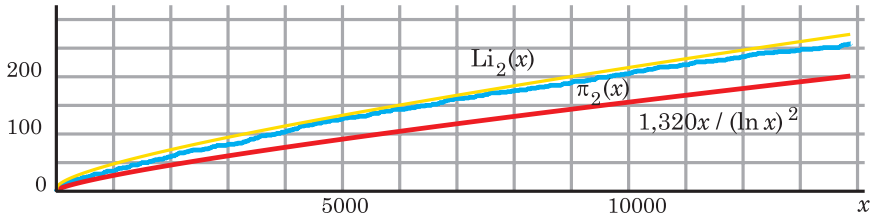
Overigens, het is niet zo heel moeilijk om te bewijzen dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\ln x} = 1,$$

zodat ook de eenvoudige functie $f(x) = x / \ln x$ een benadering van $\pi(x)$ geeft waarvoor de relatieve fout naar nul gaat. De priemgetallenstelling wordt daarom ook wel geformuleerd als

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Deze benaderingsfunctie is echter slechter dan $\mathrm{Li}(x)$ in die zin dat het quotiënt veel langzamer naar 1 gaat, zoals je in figuur 6



Figuur 7 De priemtweelingen-telfunctie $\pi_2(x)$ en twee benaderingsfuncties.

kunt zien. Voor $x \approx 2500$ is $\pi(x) / \mathrm{Li}(x)$ (rode grafiek) al nauwelijks van 1 te onderscheiden, terwijl $\pi(x) / (x/\ln x)$ (blauwe grafiek) er nog een flink eind boven zit.

Ook in absolute zin is de benadering $x / \ln x$ veel slechter dan $\mathrm{Li}(x)$. Dat is goed te zien in figuur 5, waarin de grafieken van $\pi(x)$ (blauw) en $x / \ln x$ (rood) getekend zijn. Die van $\mathrm{Li}(x)$ valt op deze schaal volledig met $\pi(x)$ samen, terwijl de grafiek van $x / \ln x$ er duidelijk een flink eind onder ligt.

Nogmaals: priemtweelingen

Wat we met de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ gedaan hebben, kunnen we natuurlijk ook voor priemtweelingen doen. Definieer de *priemtweelingen-telfunctie* $\pi_2(x)$ als het aantal priemtweelingen $(p, p+2)$ waarvoor p kleiner dan of gelijk aan x is. Als we van die functie een grafiek maken, zien we weer een stijgende trapfunctie die er op grote schaal bekeken tamelijk glad uitziet. Met de truc van Gauss kun je ook hiervan de helling proberen te schatten als functie van x. Gecombineerd met nog wat theoretische overwegingen die we hier onvermeld moeten laten, is men gekomen tot een schatting voor die helling van de vorm $C/(\ln x)^2$ waarbij C gegeven wordt door een formule die hoort bij een numerieke waarde $C \approx 1{,}320$.

Hiermee kan men als volgt een *logaritmische-tweelingenintegraal* $\mathrm{Li}_2(x)$ definiëren:

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_2^x \frac{C}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$$

die, naar men hoopt, de functie $\pi_2(x)$ goed benadert in de zin dat de relatieve fout naar nul gaat. Een eenvoudiger, maar naar verwachting minder goede benadering is $Cx/(\ln x)^2$. In figuur 7 zie je ter illustratie de grafieken van de functies $\pi_2(x)$, $\mathrm{Li}_2(x)$ en $1{,}320x/(\ln x)^2$.

Helaas, dit zijn allemaal alleen nog maar vermoedens, die overigens wel door veel indrukwekkende numerieke gegevens worden ondersteund (zie het internet), maar die nog geen van alle bewezen zijn!

door **Jos Groot**

°In gesprek

Ben je zo iemand die als hij belt en een ingesprektoon krijgt het meteen weer probeert? Niet doen! Het is beter pas na vier minuten weer te bellen. Weer in gesprek? Probeer het dan nog eens na vier minuten. Enzovoort. Waarom, dat wordt in dit stukje uitgelegd.

Als je iemand belt, bestaat de kans dat die in gesprek is. Als je dan meteen weer belt, is de kans groot dat het gesprek nog in volle gang is en je weer de ingesprektoon krijgt. Als je juist pas veel later probeert, dan is die persoon misschien wel weg, of begonnen aan een volgend gesprek. Kortom, je wilt eigenlijk weer bellen precies op het moment dat het gesprek afgelopen is. Dit moment blijkt met enige nauwkeurigheid te voorspellen. Dat doen we met behulp van het artikel *De wiskunde van het wachten* uit *Pythagoras* van september 2003. Het resultaat daarvan maken we eerst geschikt voor ons probleem.

De wachttijdparadox

De wachttijdparadox wordt in het genoemde artikel geïllustreerd aan de hand van het wachten op een bus. Stel dat die bus om de 10 minuten langs komt, maar de ene keer wat eerder, de andere keer wat later. Op het eerste gezicht verwacht je dat je dan gemiddeld $10 : 2 = 5$ minuten moet wachten. Maar het onverwachte is (en dat verklaart de term paradox: 'schijnbare tegenstelling'), dat het in dit geval 5 minuten en 9 seconden is, dus iets meer. Het gevoel dat je in zulke situaties altijd pech hebt is dus niet ten onrechte, je moet namelijk echt langer wachten dan je zou denken.

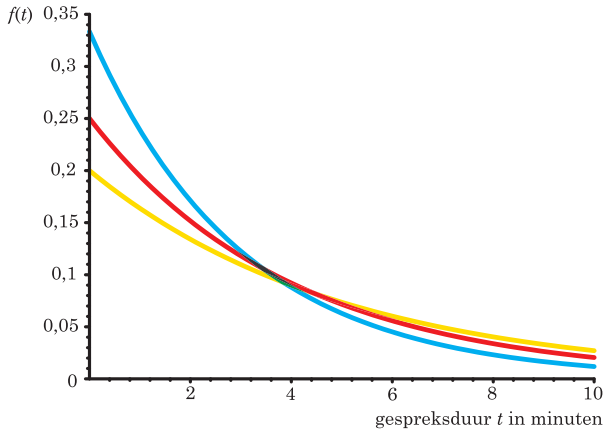
Wat is het verband met ons telefoonprobleem? Vervang 'wachten op een bus die gemiddeld om de zoveel minuten langskomt' door 'wachten op het eind van een telefoongesprek dat gemiddeld zoveel minuten duurt', en je snapt het. Maar om ons probleem op te kunnen lossen, gaan we eerst het resultaat uit het artikel bruikbaar maken door het in formulevorm te gieten. Daarvoor bekijken we het begrip *continue kansverdeling*.

Discrete versus continue kansverdeling

Vele verhandelingen over kansverdelingen beginnen met dobbelstenen, zo ook deze. Stel, je gooit met een dobbelsteen. De kans op elk van de uitkomsten 1, 2, 3, 4, 5 of 6 is $\frac{1}{6}$. Dit is een voorbeeld van een *discrete* kansverdeling. Daarvoor is de *som* van de kansen altijd gelijk aan 1.

Het 'discreet' betekent dat de uitkomsten losse getallen zijn, die geen aaneensluitend, continu geheel vormen.

Bij een *continue* kansverdeling vormen de uitkomsten wel een aansluitend geheel. Neem de lengte van een telefoongesprek. Die kan 3 of 4 minuten zijn, maar ook iedere waarde daartussen, zoals $3{,}12345$, π of $\sqrt{10}$ minuten. Een grafiek van de *exponentiële verdeling* maakt dit duidelijk, zie figuur 1. In tegenstelling tot bij een discrete kansverdeling, kunnen de kansen op alle mogelijke



Figuur 1 Exponentiële verdelingen met gemiddelden van 3 (blauw), 4 (rood) en 5 (geel) minuten

uitkomsten (oneindig veel!) niet gewoon bij elkaar opgeteld worden. In plaats daarvan moet je de verdeling *integreren*, dat wil zeggen, de oppervlakte eronder uitrekenen. De totale oppervlakte onder de grafiek is dan altijd gelijk aan 1.

De exponentiële verdeling

De vergelijking voor de exponentiële verdeling is gebaseerd op de exponentiële functie:

$$f(t) = \frac{1}{\mu} \mathrm{e}^{-t/\mu}.$$

Dit is een dalende functie: korte gesprekken komen vaker voor dan langere. Je kunt aantonen dat als je de telefoonduur volgend uit deze verdeling middelt, het *gemiddelde* μ is. Uit metingen is gebleken dat deze verdeling de duur van echte telefoongesprekken goed beschrijft (alhoewel ook wel andere verdelingen gevonden zijn; die laten we voor wat ze zijn). Het (afgeronde) gemiddelde van 4 minuten dat we hier gaan gebruiken, volgt uit dit halfjaarbericht van KPN uit 2000:

"*De gemiddelde gespreksduur is toegenomen met 13% van 3,58 minuut per gesprek naar 4,05 minuut per gesprek. Deze stijging is grotendeels toe te schrijven aan het intensievere gebruik van het internet.*"

Naast het gemiddelde μ is de *standaardafwijking* σ (in minuten) een belangrijke karakteristiek. De standaardafwijking is een maat voor de breedte van de verdeling. Voor de exponentiële verdeling is hij gelijk aan het gemiddelde. Dit komt overeen met wat we zien in figuur 1: wordt het gemiddelde kleiner, dan wordt de verdeling smaller (de piek bij 0 wordt scherper).

De formule voor de wachttijd W (de tijd die je gemiddeld zult moeten wachten) is in termen van deze karakteristieken

$$W = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

De wachttijd is dus langer dan de helft van het gemiddelde (mits $\sigma \neq 0$), zoals we al zagen in het busvoorbeeld. Nu hebben we genoeg 'gereedschap' voor het vervolg.

Terugbellen

De wachttijd voor de exponentiële verdeling is

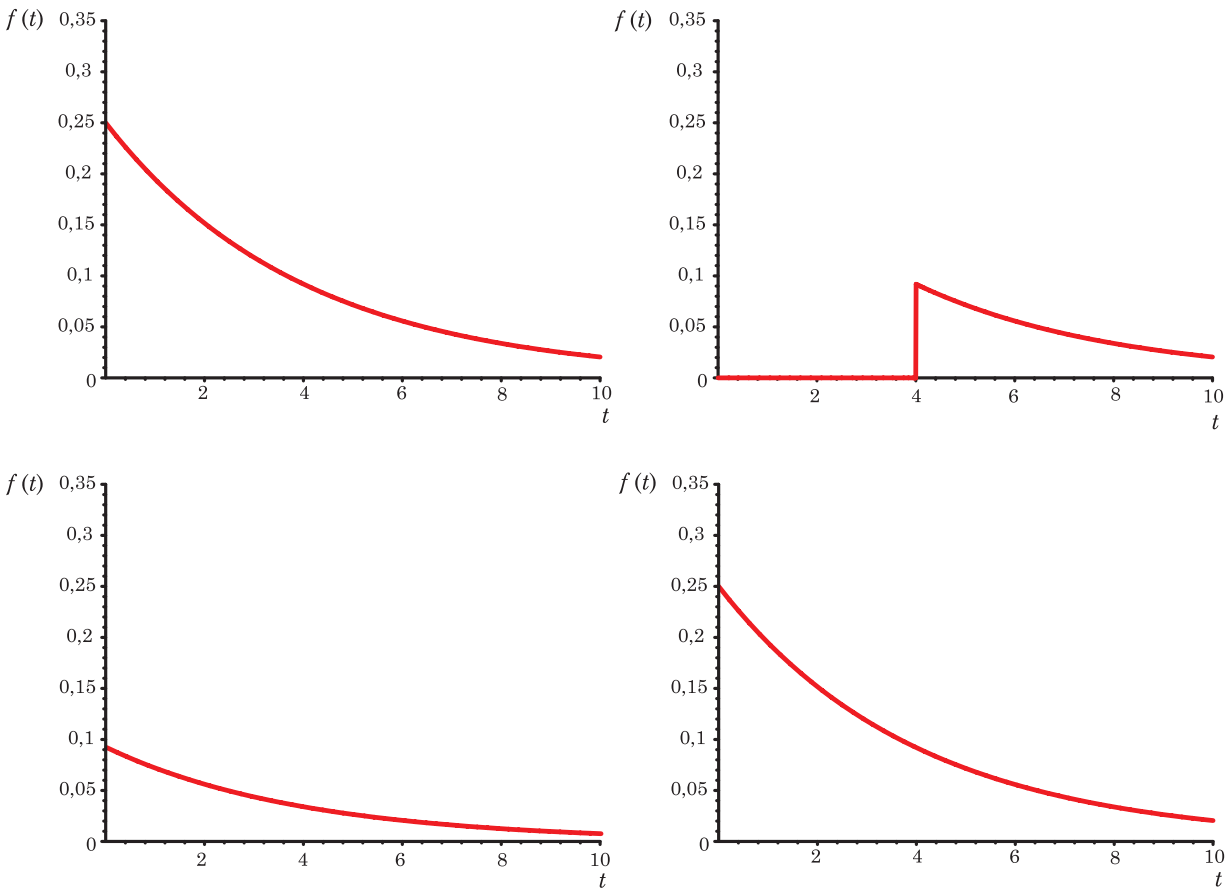
$$W = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{2\mu} = \mu.$$

Dus, krijg je de eerste keer 'in gesprek', dan is het optimaal om het na 4 minuten weer eens te proberen. Maar stel dat je dan weer 'in gesprek' krijgt (en we nemen aan dat het nog hetzelfde gesprek is), wanneer probeer je het dan weer? Bekijk daarvoor figuur 2. Aan de hand daarvan is de kansverdeling van de resterende gespreksduur aannemelijk te maken. In figuur 2 zie je:

1 (linksboven): de exponentiële verdeling uit figuur 1 met gemiddelde 4 minuten.

2 (rechtsboven): we bellen na 4 minuten weer, dus begint de rest van het gesprek vanaf 4 minuten.

3 (linksonder): we schuiven de verdeling terug naar $t = 0$; we willen immers de verdeling van de resterende gespreksduur weten, en die kan elke duur van ten minste 0 minuten zijn.



Figuur 2 Afleiding van de kansverdeling van de resterende gespreksduur

4 (rechtsonder): de oppervlakte onder de curve moet 1 zijn, dus we vermenigvuldigen met de juiste factor.

Het resultaat is heel bijzonder: de verdeling van de resterende gespreksduur (het vierde plaatje) is weer precies dezelfde verdeling als waar je mee begon (het eerste plaatje). Dus: het beste is weer na 4 minuten te bellen. Nog in gesprek? Weer na 4 minuten, enzovoorts.

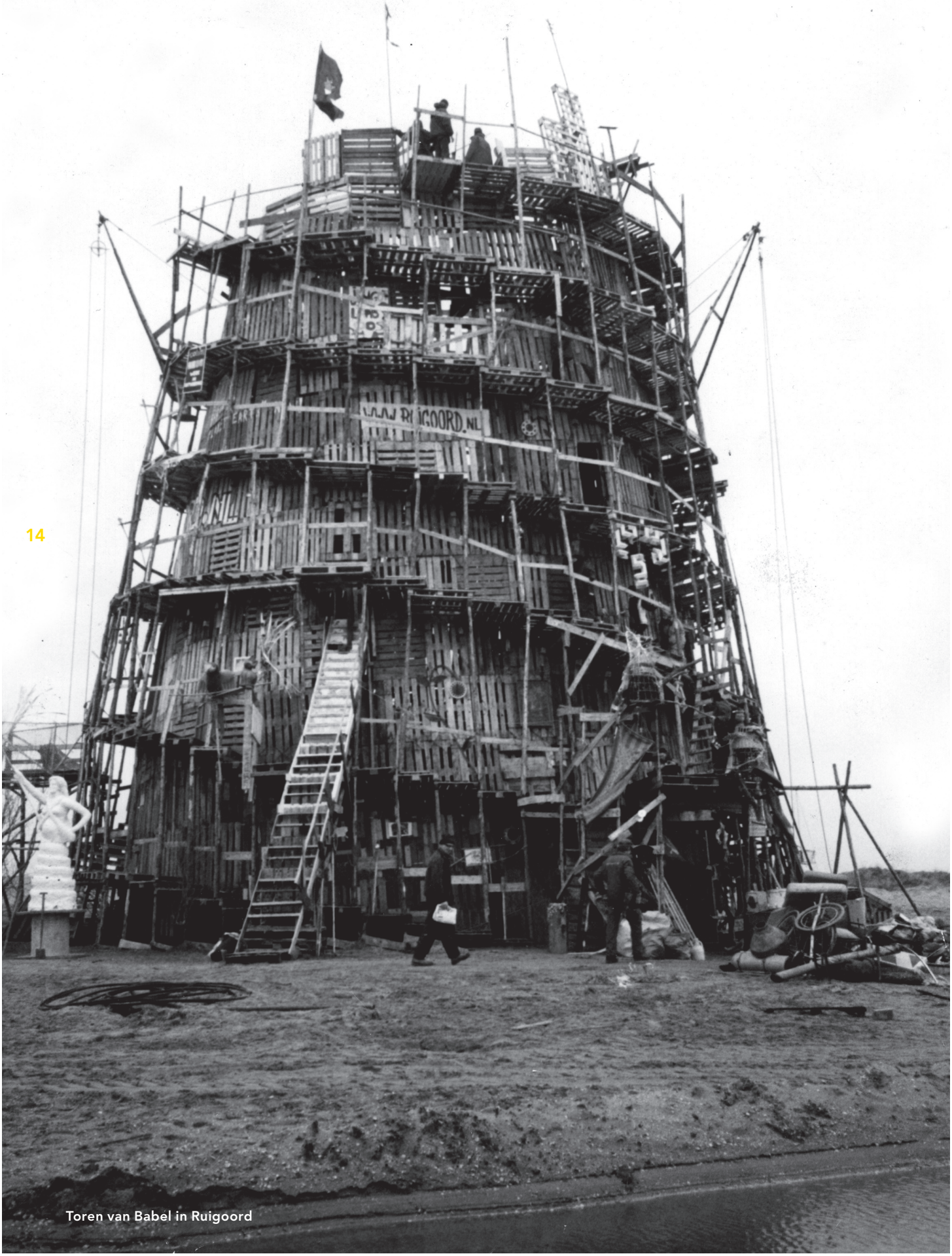
Conclusie

Veel mensen hebben de gedachte dat als iemand lang in gesprek is, het gesprek dan nog wel lang zal duren. Ze hebben dus de neiging om de eerste keer snel terug te bellen, dan met een langere tussentijd, nog langer, enzovoorts. Zo verzamelen ze informatie op grond waarvan ze de resterende gespreksduur denken te kunnen schatten. We hebben nu gezien dat dat in werkelijkheid niet lukt, met als voordeel dat je niet moeilijk hoeft te doen: bel gewoon elke vier minuten terug. Maar nog handiger is het om je automatisch terug te laten bellen na het gesprek, natuurlijk...

Gesprekken van precies 4 minuten

De exponentiële verdeling is de enige continue verdeling waarvoor je zo'n constante reeks als 4, 4, 4, ... krijgt.

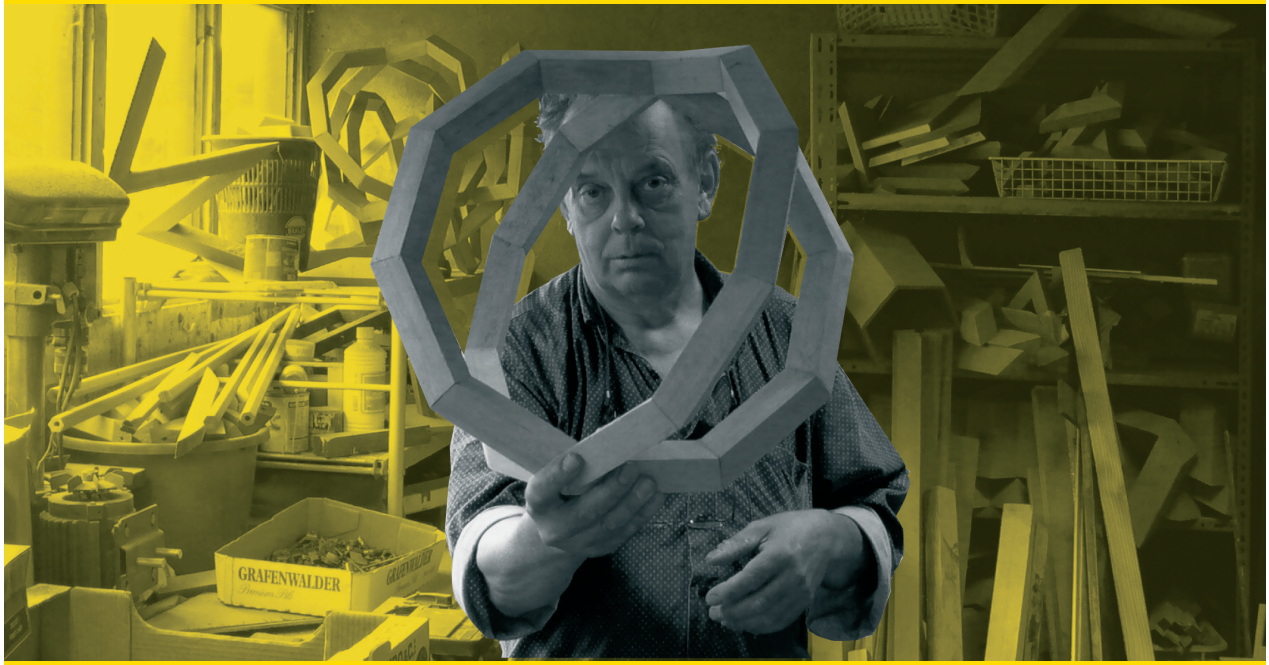
Stel dat alle gesprekken *precies* 4 minuten zouden duren ($W = 2$ minuten in dit geval), dan krijg je een heel andere reeks: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ Dit is een *meetkundige reeks*, waarvan de som 4 minuten is. Een speciaal geval is wanneer je *vlak* nadat het gesprek begint, belt. Dan ga je de regel netjes toepassen: je belt na 2 minuten, in gesprek. Na 1 minuut weer, nog steeds in gesprek, enzovoorts. Na 4 minuten en (in theorie) oneindig veel keren bellen heb je eindelijk contact. Dit is het geval waarin je maximale pech hebt. Maar gemiddeld genomen is dit wel de beste strategie voor gesprekken die allemaal even lang duren.



Toren van Babel in Ruigoord

door **Marco Swaen**

Wiskunde en kunst hebben meer gemeen dan menigeen beseft. Beide eisen van de beoefenaar creativiteit, oefening en doorzettingsvermogen. Nog dichter komen kunst en wiskunde bij elkaar als wiskunde het onderwerp van kunst wordt. Zoals in het werk van de Bergense kunstenaar Popke Bakker.

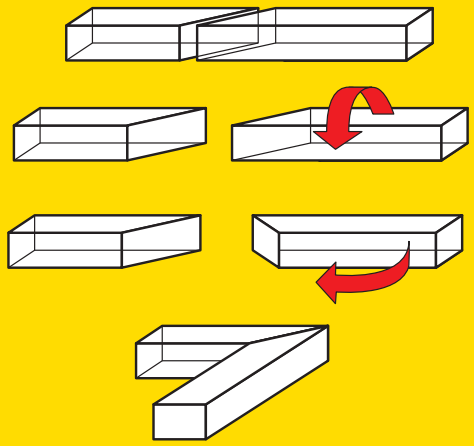


De wiskunde van Popke Bakker

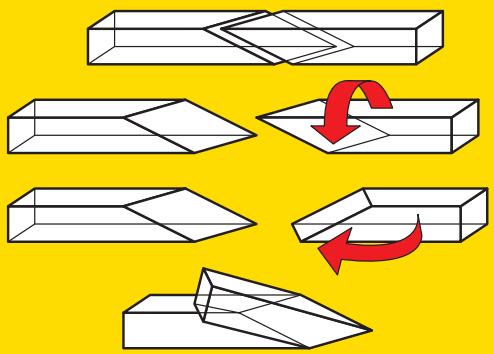
Tref je Popke Bakker in zijn werkplaats aan de zaagmachine, dan is hij timmerman. Even zo vaak zul je hem echter vinden in zijn studeerkamer als een kamergeleerde omringd door boeken over stereometrie, perspectief, veelvlakken, techniek, bouwkunst, politiek en wat al niet meer. Met op planken langs de muren een veelheid aan voorwerpen van wijd uiteenlopende aard: een spiraalvormig torentje van hout, veelvlakjes van ijzerdraad, de maquette van een ziggoerat, Boeddhabeeldjes, schelpen van het Noordzeestrand; een caleidoscoop aan vormen en objecten als de stukjes van een grote legpuzzel waarvan nog niemand de uitkomst kent.

Popke Bakker verenigt in zich de werelden van werkplaats en studeerkamer. Zijn houten kunstwerken ogen speels geometrisch. Anders dan bij veel hedendaagse beeldhouwers is de meetkunde in zijn werk niet slechts vormentaal, maar vooral de inhoud. De beelden tonen ons hoe eenvoudige principes verrassende vormen opleveren en tasten af wat mogelijk is in onze driedimensionale wereld en wat niet.

Figuur 1 Verstek



Figuur 2 Dubbelverstek



Dubbelverstek

Voor Popke begon het allemaal toen hij ergens eind jaren zeventig op het idee kwam van *dubbelverstek*. Om van een balk een lijst te maken, zaagt de timmerman de balk schuin door, bijvoorbeeld onder een hoek van 45 graden. Dit heet verstek. Vervolgens zet de timmerman de twee stukken weer aan elkaar na ze eerst ten opzichte van elkaar een slag gedraaid te hebben. Zo ontstaat in de balk een knik, zie figuur 1. Bij verstekzagen zet je de zaag schuin op de balk, met het zaagblad in verticale stand. Zogezegd zaag je bij verstek dus wel scheef op de staande kant van de balk, maar loodrecht op de liggende kant. Wat zou er gebeuren als je schuin op beide kanten van de balk zaagt, zo vroeg Popke zich af, zeg maar in *dubbel*-verstek.

Zaag je de rechthoekige balk onder een willekeurige hoek door, dan is de doorsnijding een parallellogram, zie figuur 2. Draai je de ene helft 180 graden ten opzichte van de andere, dan passen die twee weer op elkaar, parallellogrammen zijn immers puntsymmetrisch. Dus ook in dubbelverstek kun je lijsten maken, al blijven de delen dan niet meer in één vlak.

In eerste instantie was Popke benieuwd naar wat er zou gebeuren als je dit dubbelverstek herhaald zou toepassen op een balk. Hij zaagde de balk onder willekeurige hoeken en paste de stukken weer aan elkaar. Het resultaat was een wonderlijk schots en scheef bouwsel (zie figuur 3), zo intrigerend dat het dubbelverstek Popke niet meer los zou laten.

Figuur 3 Wild dubbelverstek

In de weken daarna onderzocht hij het dubbelverstek systematischer. Met de stereometrie uit zijn middelbare-school-tijd kreeg hij al rekenend en tekenend greep op het zigzagpad van de dubbelverstekgezaagde balk. Tegelijkertijd ontwikkelde hij de techniek om nauwkeurig onder elke gewenste hoek te zagen.

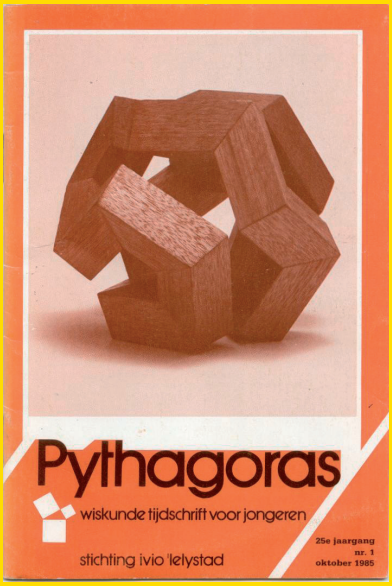
In zijn Quintessens uit 1985 (beschreven in *Pythagoras* van oktober 1985) volgt de balk al keurig een Hamilton-pad over het regelmatig twaalfvlak, zie figuur 4.

In de daaropvolgende twintig jaar bouwt Popke Bakker al scheefzagend gestaag aan een indrukwekkend oeuvre. Een deel daarvan bestaat uit degelijk afgewerkte houten objecten, zoals de Pythagorasbomen (zie omslag) die in 2004 in het Escher-museum werden geëxposeerd. Bij de Pythagorasbomen splitst de balk zich in vier kleinere die in dubbelverstek uitkragen om zich op hun beurt ook weer te splitsen in vier nog kleinere. Naast handzame beelden maakt Popke Bakker ook graag levensgrote constructies. Een van de bekendste is de Toren van Babel uit Ruigoord, zie de foto op pagina 14.

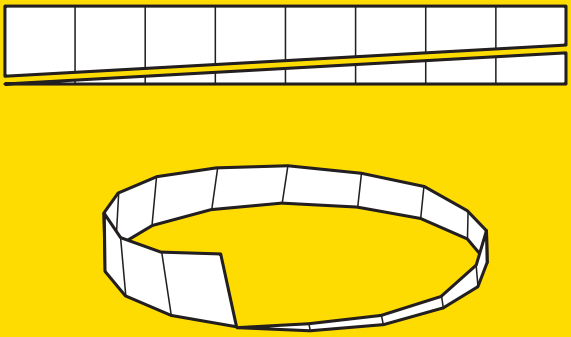
Toren in Ruigoord

In het kunstenaarsdorpje Ruigoord ten westen van Amsterdam werd het jaar 2000 ingeluid door een grote houten toren in brand te steken. De toren, zo'n 16 meter hoog, was de voorgaande maanden gebouwd van pallets (houten laadborden), volgens het plan van Popke Bakker.

Het idee was net zo eenvoudig als effectief. Bekijk figuur 5. Leg een stel pallets op een rij. Zaag schuin door de rij van de ene hoek naar het midden van de andere zijde. Aldus krijg je de bouwstenen voor de onderste winding. Zet die rechtop met hun schuin afgezaagde zijde naar beneden, in een sluitende cirkel. De toren groeit dan verder door hele pallets aan deze eerste winding vast te zetten in een oplopende spiraal. Tijdens de feitelijke bouw is dit principe niet consequent doorgezet: veel pallets verspringen als in een trap, dit is op de foto (pagina 14) te zien. Ook bij de bouw van deze toren van Babel was de spreekwoordelijke verwarring niet van de lucht. Bij het bouwprincipe van Popke is het niet mogelijk de rechthoekige pallets precies aan te laten sluiten, er moet steeds een beetje gesmokkeld worden. Als gevolg daarvan komen de volgende windingen steeds iets verder naar binnen te staan, zodat de toren een kegelvorm krijgt. In torens waarin het principe strikt werd toegepast, bleek de versmalling naar boven toe zelfs steeds sneller te gaan, hetgeen een afgeronde kegel opleverde.

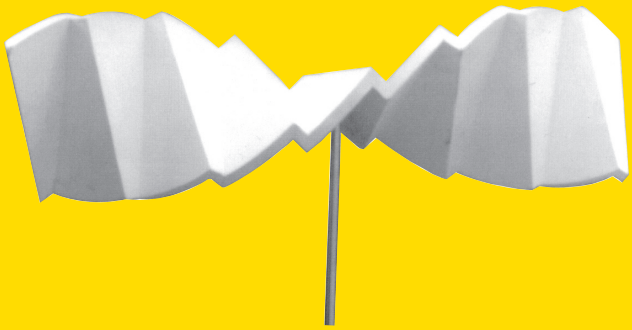


Figuur 4 Dodecaëder in dubbelverstek op het omslag van *Pythagoras* uit oktober 1985



Figuur 5 Het bouwprincipe van de toren

Figuur 6 Het nieuwe millennium ingeluid te Ruigoord



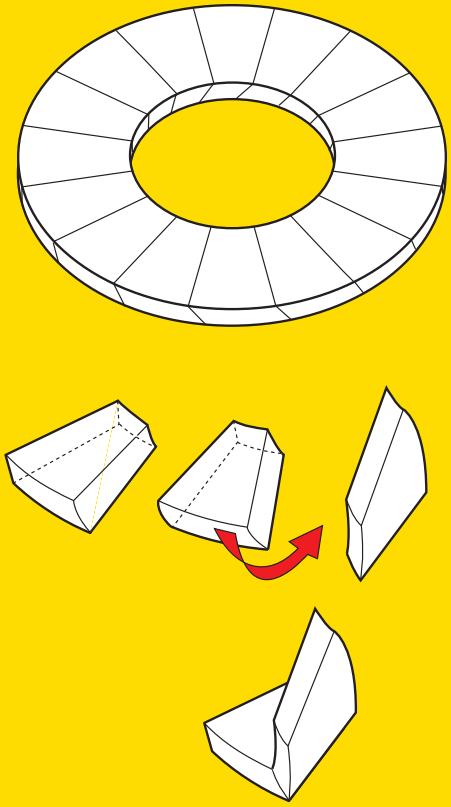
Figuur 7 Helix

Helix

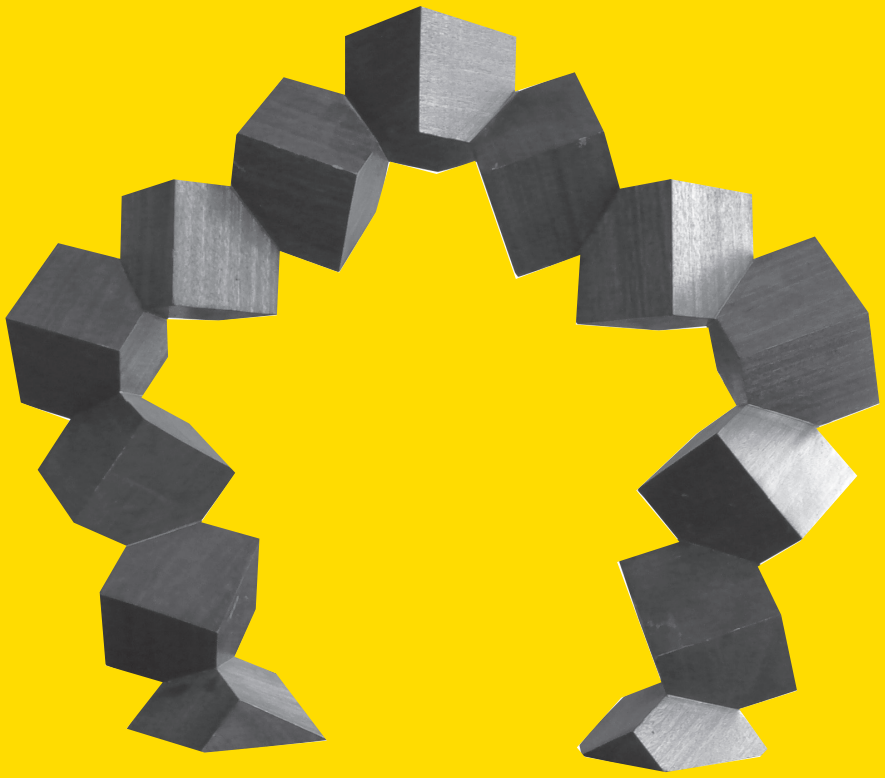
Uit een platte cirkelschijf toverde Popke Bakker door verstek de prachtige schroefvorm van figuur 7. Het recept is weer eenvoudig. Bekijk figuur 8. Neem een houten cirkelschijf. Zaag uit het midden een cirkeltje weg. Verdeel de overgebleven ring in zestien segmenten. Zaag die los onder een hoek van 45 graden. Zet de segmenten vervolgens weer aan elkaar, waarbij je ze wel 180 graden draait. De schroef, Helix genaamd, roept veel vragen voor nader onderzoek op. Wat is de windingshoek van de Helix, wat gebeurt daarmee als je het aantal segmenten verandert, en de zaaghoek?

Kubuspoort

Als voorbeeld van het handzamere werk bekijken we de Kubuspoort, zie figuur 9. Het object ziet eruit als een kubus die voor een camera met open sluiter een olijke buiteling maakt. Kijk je langer, dan ontdek je veel symmetrie in de keten, die met het ontbrekende deel een vijfhoekige ster lijkt te kunnen vormen.



Figuur 8 Deel een cirkelschijf op in 16 segmenten, in verstek, en zet ze om-en-om weer vast



Figuur 9 Kubuspoort

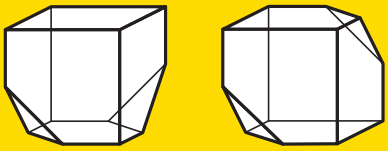
Ten grondslag aan de boog ligt weer het scheefzagen. De kubussen waar de poort uit is opgebouwd, zijn alle twee keer schuin afgezaagd waarbij twee hoekpunten zijn afgeknot. Daarbij is ingezaagd op de middens van de ribben. De kubussen zijn vervolgens aan elkaar gezet bij hun afgeknotte hoekpunten.

In de poort zijn twee verschillende soorten kubussen te herkennen. Bij de kubussen die het verst naar buiten steken ('hoekkubussen') zijn twee hoekpunten afgeknot die oorspronkelijk met een zijvlaksdiagonaal te verbinden waren, zie figuur 10 (links). Bij de tussenliggende kubussen was dat een lichaamsdiagonaal, zie figuur 10 (rechts).

Met het nodige ruimtelijke inzicht en wat meetkunde kun je vaststellen dat opeenvolgende hoekkubussen in de ketting ten opzichte van elkaar over een hoek van 106 graden gedraaid zijn. Zou het precies 108 graden zijn geweest, dan had je de ketting kunnen sluiten tot een vijfhoekige ring van 15 kubussen. Maar zo 'mooi' zit onze driedimensionale ruimte nou eenmaal niet in elkaar.

Literatuur

Popke Bakker, *Dubbelverstek*, in: *Pythagoras*, oktober 1985
Bennie Mols, *Wiskunst*, in: *Natuurwetenschap en techniek*, maart 2004



Figuur 10 Hoekkubus (links) en verbindingskubus (rechts)

°Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman** en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

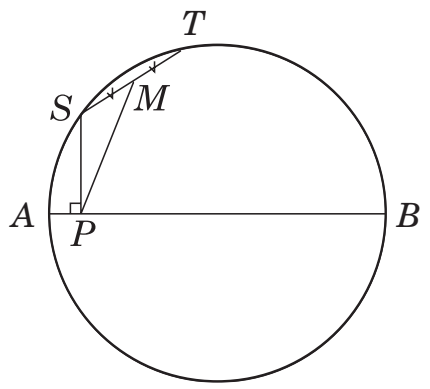
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 december 2005.

OPGAVE 124

Laat zien dat voor alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat $n+1$ deelbaar is door 3, de som van de delers van n ook deelbaar is door 3.

OPGAVE 125

Gegeven zijn een cirkel met middellijn AB en een *koorde* (lijnstuk tussen twee punten op de cirkel) ST met vaste lengte, die over de cirkel beweegt. Als M het midden is van de koorde en P de projectie van S op AB (M en P bewegen met de koorde mee), bewijs dan dat $\angle SPM$ niet afhankelijk is van de positie van de koorde ST.



OPLOSSING

120

In het platte vlak worden $1.000.000$ punten gemarkeerd. Bewijs dat er een cirkel is waarbinnen precies 2005 gemarkeerde punten liggen.

Oplossing. Stel dat we een punt P hebben waarvoor de afstanden tot alle $1.000.000$ gemarkeerde punten verschillend zijn.
Dan nemen we de straal van de cirkel met middelpunt P zodanig, dat alleen de 2005 dichtstbijzijnde punten binnen de cirkel vallen.
Maar bestaat zo'n punt wel? Een punt dat een gelijke afstand heeft tot twee van de gemarkeerde punten, moet op de middelloodlijn van die twee punten liggen. Aangezien er maar eindig veel punten gemarkeerd zijn en deze punten dus ook maar eindig veel middelloodlijnen hebben, kunnen deze lijnen nooit het hele vlak bedekken. Het punt P bestaat dus, en de gevraagde cirkel ook.

Deze opgave werd opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam en Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België). De boekenbon gaat naar Clara Mertens.

OPLOSSING

121

Bepaal de waarde van het volgende oneindige product:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdots$$

Oplossing. We proberen eerst een handige schrijfwijze te vinden voor het *eindige* product $\prod_{n=2}^{k} \frac{n^3-1}{n^3+1}$:

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \prod_{n=2}^{k} \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n-1}{n+1} \cdot \prod_{n=2}^{k} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}.$$

Het eerste product is een zogenaamd *teleskoopproduct*: in teller en noemer komen nagenoeg dezelfde factoren voor. Als je deze gelijke factoren tegen elkaar wegstreept, houd je $\frac{1 \cdot 2}{k(k+1)} = \frac{2}{k^2+k}$ over.
Omdat $n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + (n-1) + 1$, heeft het tweede product ook een teleskoopvorm; hier blijft na wegstrepen $\frac{k^2+k+1}{3}$ over. Voor het oneindige product levert dit:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k^2+k} \cdot \frac{k^2+k+1}{3} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2+k+1}{k^2+k} = \frac{2}{3}.$$

Deze opgave werd opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, P. Dekker te Krimpen a/d Iek, Anne de Haan van het **Gymnasium Felisenum** te Velsen-Zuid, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffer College** te Castricum, Clara Mertens van het **Sint-Jozefscollege** te Aarschot (België) en Suyan Zhang van het **Dr. Aletta Jacobscollege** te Hoogezand.
De boekenbon gaat naar Suyan Zhang.

SUDOKU *light*

door **Jan Smit** en **Leon van den Broek**

Sudoku is de nieuwe puzzelverslaving. In Engeland is het al een tijdje een echte rage en ook Nederland is nu geïnfecteerd. Verschillende dagbladen hebben een dagelijkse sudoku (o.a. _Trouw, De Telegraaf, Spits_). _NRC Handelsblad_ publiceert sinds 8 oktober wekelijks een speciale NRC-variant van de populaire puzzel. _Denksport_ en _Puzzelsport_ hebben speciale sudoku-tijdschriften in diverse moeilijkheidsgraden, voorzien van een waarschuwing voor de verslavende invloed van deze puzzel: 'huishoudens die in de soep lopen, echtgenoten die aandacht te kort komen, treinen die gemist worden, ...' In dit artikel leggen Jan Smit en Leon van den Broek je een aantal Sudoku-vragen voor. Met je oplossingen kun je meedingen naar prijzen.

Spelregels

Het uitgangspunt van een sudoku is een diagram van 9x9 vakjes, verdeeld in negen blokken van 3x3 vakjes. In een aantal van de vakjes is een cijfer (van 1 tot en met 9) gegeven: de startcijfers. Om de puzzel op te lossen, moet het diagram zo ingevuld worden dat in elke rij, in elke kolom en in elk van de negen blokken de cijfers allemaal één keer voorkomen. Vandaar ook dat de puzzel sudoku heet: sudoku betekent 'enkelvoudig cijfer'.

Om een mooi ogende puzzel te krijgen, zet de ontwerper de startcijfers soms in een symmetrisch patroon.

Een goede sudoku:
- kan maar op één manier afgemaakt worden,
- kan op meer dan één manier afgemaakt worden als je een van de gegeven cijfers weglaat. (Bij de gemakkelijke sudoku's worden wel wat extra startcijfers gegeven om de puzzelaar op weg te helpen.)

In figuur 1 zie je twee sudoku's: een eenvoudige en een moeilijke.

Geschiedenis

Het begon in de jaren zeventig van de vorige eeuw in New York. Daar gaf in 1979 Dell Puzzle Magazines de *Number Place puzzle* uit. Een paar jaar later werd de puzzel overgenomen door de Japanse uitgever Nikoli, die hem *Sudoku* doopte. Dat werd een geweldig succes. Het was vooral de Nieuw-Zeelandse ondernemer Gould die voor de verdere verspreiding verantwoordelijk was. Via Groot-Brittanië is nu ook Nederland bereikt.

Het idee van de sudoku is al oud. In 1783 publiceerde de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler een artikel over *latijnse vierkanten*. Dat zijn vierkante roosters die zo gevuld zijn dat in elke rij en elke kolom elk symbool

8		4	6	7	1	2	5	3
					5		7	1
5			9	1			8	4
3	7						9	6
4	1			6	8			5
9	6		7					
1	8	3	4	9	2	5		7

		2	9	7	4			
							5	7
		4		5				2
		9		1		6		
8				3		4		
1	3							
			6	8	2	9		

Figuur 1 Een makkelijke (links) en een moeilijke (rechts) sudoku

precies één keer voorkomt. Euler gebruikte voor die symbolen de Latijnse letters, vandaar dat hij het 'latijnse vierkanten' noemde. Ze worden toegepast in allerlei programmeringsproblemen, lesroosters, proefvelden, statistiek, enzovoorts.

Sudoku-problemen

De (ingevulde/opgeloste) sudoku is dus een 9x9 latijns vierkant met de extra eis dat in ieder van de negen 3x3-blokken de cijfers 1 tot en met 9 voorkomen. Dat zou je dus een 'sudoku-vierkant' kunnen noemen. Een aantal vragen komt nu meteen op:

- Hoeveel van die vierkanten zijn er mogelijk?
- Hoeveel cijfers moeten minimaal/maximaal ingevuld worden om een goede sudoku te krijgen?
- Hoe worden de sudoku-puzzels in de krant gemaakt?
- Hoe kun je de computer inschakelen om een sudoku op te stellen en hoe om hem op te lossen?

Heel interessante vragen, die we graag zouden beantwoorden. Maar dat kunnen we niet (misschien hebben anderen dat wel al gedaan) en omdat 81 vakjes wel erg veel is, gaan we met kleinere vierkanten aan de slag. (In de hoop inzichten te krijgen die ook bij het grote probleem kunnen helpen.)

We bedachten dus een achttal lichtere vragen en leggen die nu als *Sudoku light* aan de lezers voor. Ze staan op de volgende twee pagina's. Ook als je maar een paar van de acht problemen weet op te lossen, zijn we toch in je resultaten geïnteresseerd.

Prijsvraag

Stuur je oplossingen in vóór **8 januari 2006** onder vermelding van je leeftijd en (voor leerlingen) leerjaar en schooltype naar:

SUDOKU-Pythagoras
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

Een deskundige jury beoordeelt de inzendingen en verdeelt het prijzengeld van 250 euro. Het prijzengeld is beschikbaar gesteld door *De Wageningse Methode*.

De uitslag verschijnt in *Pythagoras* later dit seizoen.

Internet

Ook op talloze internetsites is veel over Sudoku te vinden, bekijk bijvoorbeeld:

- www.sudoku.com
- www.saidwhat.co.uk/sudokus/index.php
- www.puzzle.jp/letsplay/applet/sd_sample_003-e.html

SUDOKU *light*

acht vragen

4x4-sudoku's

In figuur 2 staat een 4x4-vierkant gevuld met de cijfers 1, 2, 3 en 4 zodat in elke rij, in elke kolom en in elk 2x2-blok elk cijfer één keer voorkomt.

Vraag 1. Hoeveel vullingen van het 4x4-vierkant zijn er die aan deze eisen voldoen?

Vraag 2. Ontwerp een 4x4-sudoku met zo weinig mogelijk startcijfers. Ontwerp ook een 4x4-sudoku met zo veel mogelijk startcijfers.

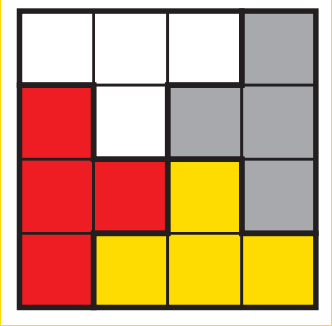
3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
4	3	2	1

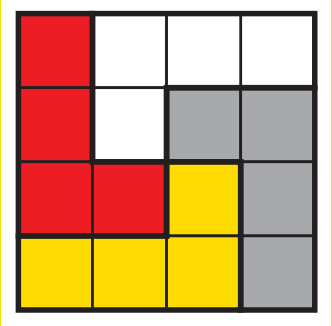
Figuur 2

Andere verdelingen

In plaats van vier 2x2-blokken kunnen we ook andere stukken van vier vakjes kiezen. We eisen dan dat in elk van de stukken de cijfers 1 tot en met 4 voorkomen, en nog steeds dat die cijfers in elke rij en in elke kolom staan. Stukken van vier vakjes heten *tetromino's*. In figuur 3 is het 4x4-vierkant opgesplitst in vier T-tetromino's en in vier L-tetromino's.

Vraag 3. Ontwerp voor beide een sudoku met zo weinig mogelijk startcijfers.





Figuur 3

nxn-sudoku's

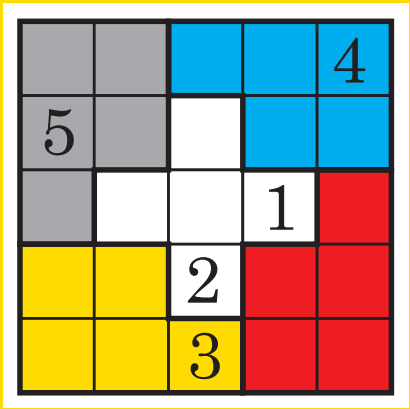
Als n geen kwadraat is, kunnen we het nxn-vierkant niet verdelen in n vierkante blokken. Gelukkig zijn er andere mooie verdelingen in n stukken van n vakjes. De (aangepaste) spelregel eist dan natuurlijk dat in ieder van die stukken alle n cijfers voorkomen.

Het 5x5 geval

Figuur 4 laat een verdeling zien in vier P-pentomino's met een Zwitsers kruis in het midden (het X-pentomino). Er zijn vijf start-cijfers gegeven.

Vraag 4. Los de sudoku in figuur 4 op.

Figuur 4

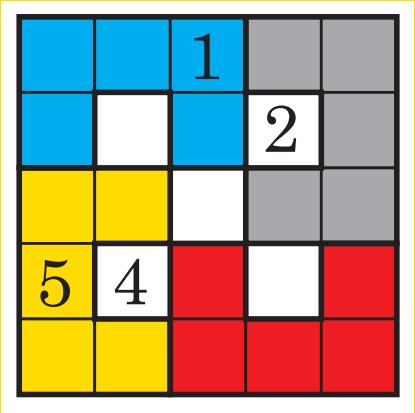


Figuur 5 is het 5x5-vierkant met vier U-pentomino's. In ieder van die U's moeten nu weer alle cijfers 1 tot en met 5 geplaatst worden en ook in de vijf witte vakjes (die vormen samen het vijfde stuk). Denk ook nog aan de rijen en kolommen. Er zijn slechts vier startcijfers gegeven.

Vraag 5. Los de sudoku in figuur 5 op.

Vraag 6. Hoeveel vullingen zijn er mogelijk bij dit model?

Figuur 5



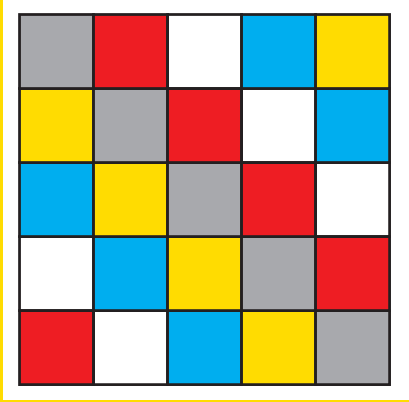
Met schuine stroken

Er is een type verdeling van het nxn-vierkant in n delen van n vakjes die altijd mogelijk is. Hoe dat gaat, zie je voor het 5x5-vierkant in figuur 6. Begin linksonder en kleur de vakjes volgens schuine lijnen: rood - wit - blauw - geel - grijs - rood - wit - blauw - geel. Van iedere kleur zijn er nu vijf vakjes en in die vijf vakjes moeten dan alle cijfers voorkomen. De volgende vragen gaan over sudoku's met zulke schuine stroken.

Vraag 7. Maak een vulling van het 5x5-vierkant. Toon aan dat, als n oneven is, er een vulling bestaat van het nxn-vierkant.

Vraag 8. Bewijs dat, als n even is, er geen vulling bestaat van het nxn-vierkant.

Figuur 6



door **Henk Pfaltzgraff**

Haal meer uit je GR

In de tweede aflevering van onze GR-rubriek bekijken we programma's die gebruik maken van lijsten. Downloadbare programma's en meer uitleg vind je op www.henkshoekje.com (klik op Pythagoras' Hoekje).

De vreemde conciërge

In de vorige aflevering maakten we kennis met de vreemde conciërge, die wachtrondes loopt langs een rij lampen genummerd van 1 tot en met 100, alle voorzien van een aan/uit-knopje.

Aanvankelijk brandt geen van de lampen. In de eerste ronde ($d = 1$) drukt de conciërge op alle knopjes waardoor alle lampen gaan branden. In de tweede ronde ($d = 2$) wordt alleen op de knopjes met een even rangnummer gedrukt; in de derde ronde op de knopjes met een rangnummer deelbaar door 3; in de d-de ronde op alle knopjes waarvan het nummer een d-voud is. Hij gaat hiermee door tot en met de honderdste ronde. De vraag die wij stelden was: welke lampen zullen uiteindelijk branden?

De oplossing

Lamp N wordt even vaak aan/uit geschakeld als er delers zijn van N. In het algemeen heeft een getal een even aantal delers. Alleen kwadraten hebben een oneven aantal delers, dus de kwadraten blijven over.

We zetten nu het programma `AANUIT` in elkaar waarmee het werk van de conciërge kan worden nagebootst.

De status (0 of 1) van de lampen zetten we in lijst L1 (linksonder, boven het cijfer 1). Is het k-de getal in de lijst een 1, dan betekent dat: lamp k staat aan.

We gaan uit van 100 lampen, die allemaal uit staan, en zorgen dus dat lijst L1 bestaat uit 100 nullen. Dat doe je als volgt: maak eerst lijst L1 leeg met `ClrList L1` (via [STAT]4:) en zorg dat de lijst 100 getallen lang is door 100 op te slaan als de dimensie van L1: `100 → dim(L1)` (via 2nd[LIST]).

Wil je de lijst bekijken, druk dan L1[ENTER] of doe [STAT1]:Edit.

Als het knopje van een lamp omgezet wordt, moet in de lijst het betreffende getal van een 1 in een 0, danwel van 0 in 1 veranderd worden. Oftewel: x wordt $1 - x$.

Een opdracht om de vijfde lamp om te zetten is dus:

```
1 - L1(5) → L1(5)
```

In het programma kun je dit met een `For`-lus voor vele lampen tegelijk doen. Is de conciërge bijvoorbeeld bezig met ronde 3, dan moet hij alle lampen 3, 6, 9, ... omzetten, oftewel: voor K van 3 tot en met 100, met stappen van 3, doet hij

```
1 - L1(K) → L1(K)
```

Dat gedeelte van het programma ziet er dan zo uit:

```
For(K,3,100,3)
1 - L1(K) → L1(K)
```

Een lus daaroverheen zorgt dat de conciërge niet alleen ronde 3, maar alle ronden loopt:

```
For(D,1,N)
For(K,D,N,D)
1 - L1(K) → L1(K)
```

Hieronder zie je het hele programma. Het aantal lampen N is variabel gemaakt. Als uitvoer toont AANUIT niet de hele lijst L1 , maar somt alleen de lampen op die uiteindelijk AAN staan.

```
PROGRAM:AANUIT
:ClrHome
:Disp "     AANUIT"
:Disp "----------------"
:Disp "HOEVEEL LAMPEN:"
:Input N
:ClrHome
:ClrList L1
:N→dim(L1)
:For(D,1,N)
:For(K,D,N,D)
:1-L1(K)→L1(K)
:End
:End
:For(X,1,N)
:If L1(X)≠0:Disp X
:End
:Pause
```

Gezond verstand?

De kansrekening kent veel verrassende uitkomsten. Het lijkt soms wel of je te maken hebt met natuurkunde in plaats van wiskunde. Of erger: je gaat twijfelen aan 'het gezonde verstand'. De meest fundamentele controverse tussen theorie en praktijk is wellicht het experiment van de twee geldstukken.

Werp met een euro. De kansen op kop of munt zijn $\frac{1}{2}$, daarover kan geen twijfel bestaan. Werp tegelijk met twee identieke euro's en daar begint de eerste aarzeling. Wat is de kans op twee keer kop of twee keer munt? En wat is de kans op één kop en één munt? Wie niets van kansrekening weet, zal zich hier afvragen hoeveel mogelijkheden met gelijke kansen hier zijn, 3 of 4.
Welk model is juist:

Model 1	Model 2
K en K	K en K
K en M	K en M
M en M	M en K
	M en M

Ongetwijfeld zul jij hier de juiste keuze wel kunnen maken. Maar laten we eens kijken wat de GR met een simulatie hierover te melden heeft.

Voor simulaties heeft de TI-83 een randomgenerator die aselecte toevalsgetallen oplevert. Het werpen met een dobbelsteen bijvoorbeeld kan gesimuleerd worden met [MATH]<PRB>5: randInt(1,6); doe dat maar eens en druk daarna telkens op [ENTER]. Voor de som der ogen van twee dobbelstenen doe je randInt(1,6) + randInt(1,6).

We gaan experimenteel een keuze maken tussen de modellen en dat doen we met behulp van randInt(0,1). Een uitkomst 1 staat voor kop, 0 staat voor munt. Het aantal keren kop wordt geteld in L1 , via 1+L1(K+1) → L1(K+1). Ga maar na.

Hieronder zie je het programma (op de dertiende regel staan acht spaties). Daarin is K het aantal keren kop.

In L1(1) wordt het aantal keren 0 kop geteld (K = 0); in L1(2) het aantal keren 1 kop (K = 1) en in L1(3) het aantal keren 2 kop (K = 2). K keer kop wordt dus geteld in L1(K+1).

Probeer KOPMUNT2 uit met bijvoorbeeld 10.000 worpen en na negen minuten is je onzekerheid voorgoed verdwenen: model 2 is het ware model!

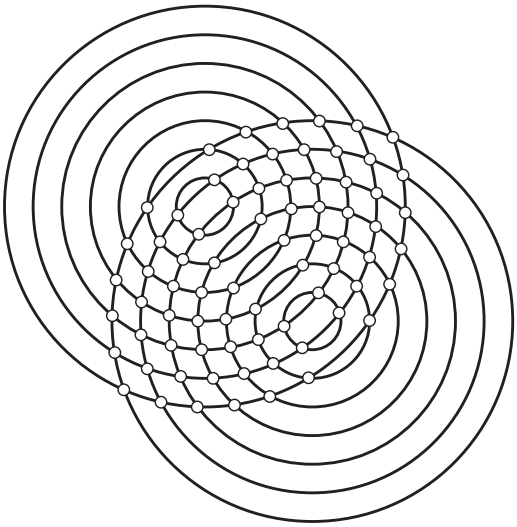
```
PROGRAM:KOPMUNT2
:ClrHome
:Disp "     KOPMUNT2"
:Disp "----------------"
:Disp "HOEVEEL WORPEN:"
:Input S
:ClrHome
:ClrList L1
:3→dim(L1)
:Output(1,1,"{K,K}:")
:Output(2,1,"{K,M}:")
:Output(3,1,"{M,M}:")
:Output(8,1,"NA     WORPEN")
:For(X,1,S)
:randInt(0,1)+randInt(0,1)→K
:1+L1(K+1)→L1(K+1)
:Output(8,4,X)
:Output(1,8,L1(1))
:Output(2,8,L1(2))
:Output(3,8,L1(3))
:End
```

Welk model krijg je voor het werpen met *drie* munten? Onderzoek experimenteel met een simulatieprogramma of de praktijk in overeenstemming is met de theorie.

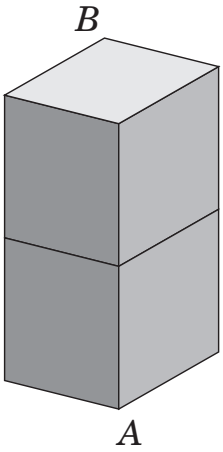
°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Cirkels
Op een doorzichtig plastic vel staan zeven cirkels met hetzelfde middelpunt en stralen 1 tot en met 7. Hoeveel snijpunten kun je maximaal creëren door twee kopieën van dit velletje over elkaar te leggen?



Antipoden
In de figuur zie je een balk met afmetingen 1 x 1 x 2. Welk punt ligt het verst van punt A gemeten over het oppervlak van de balk?
Hint: het is niet punt B!



Quiz
Annet, Brian en Celsi doen mee aan een spelshow. De quizmaster geeft elk van hen een kleurige muts op. Elke muts is of rood of blauw, elk met kans $\frac{1}{2}$, onafhankelijk van elkaar. De drie deelnemers kunnen de mutsen van de andere twee deelnemers zien, maar hun eigen muts niet. Door een druk op de knop geven ze vervolgens aan welke kleur ze zelf denken te hebben (ze zien niet wat de andere kandidaten antwoorden). Als ten minste twee van hen het juiste antwoord geven, winnen ze de jackpot. Kunnen ze vantevoren een strategie afspreken waarmee ze meer dan vijftig procent kans hebben om te winnen?

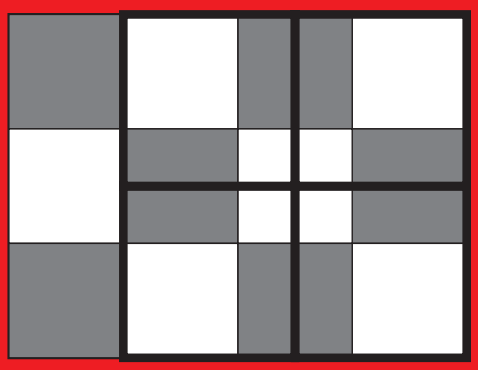
Stijgende getallen
Hoeveel getallen zijn er, waarvan de cijfers verschillend zijn en in opklimmende volgorde staan?

Valse munten
Van tien gouden munten is er een aantal (minimaal één) vals. De echte munten zijn allemaal even zwaar. De valse munten zijn ook even zwaar, maar wegen minder dan de echte munten. Kun je met een balans in slechts zesmaal wegen het aantal valse munten achterhalen?

°Oplossingen
nr. 1

Roosterpunten
Splits de verzameling roosterpunten in vier groepen, naar gelang de x-coördinaat en de y-coördinaat even of oneven zijn. Als twee punten P en Q in dezelfde groep liggen, dan is het midden van lijnstuk PQ ook een roosterpunt, en dus kunnen P en Q elkaar niet zien. Uit iedere groep kunnen we dus ten hoogste één punt kiezen.

Punten passen
Verdeel de rechthoek in 3×4 eenheidsvierkantjes en kleur ze volgens een schaakbordpatroon. In iedere domino (en algemener in iedere rechthoek met diagonaal $\leq \sqrt{5}$) kan ten hoogste één gekozen punt liggen. Het aantal punten is dus maximaal 6 en in dat geval ligt er precies één punt in ieder wit vierkant en geen in een zwart vierkant (of omgekeerd). Maar dan liggen er twee punten in een vierkant met zijde $\frac{3}{2}$ (zie de figuur). Het aantal punten is dus maximaal 5, en dit aantal wordt gerealiseerd door de vier hoekpunten en het middelpunt te nemen.

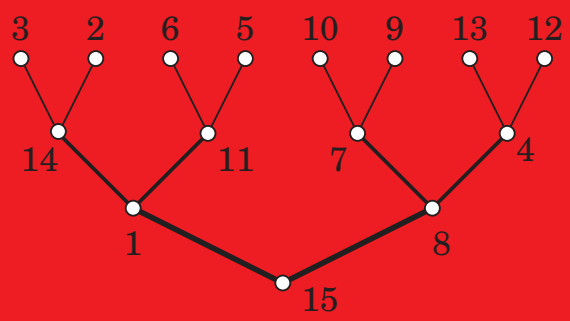


Tetris
Geef een 'onderkant' van de rechthoek bestaande uit twee kolommen van hoogte n en m aan met $R(n, m)$. Noem het aantal manieren om $R(n, n)$ respectievelijk $R(n, n-2)$ te vullen a_n en b_n. Door het bovenste vierkantje van de figuur in te vullen, zie je makkelijk in dat

$$a_n = a_{n-4} + a_{n-2} + 2b_{n-1}$$
$$b_n = a_{n-3} + b_{n-2}$$

Met $a_0 = a_2 = 1$ en $b_1 = 0$, $b_3 = 1$ kun je de andere waarden uitrekenen en vind je $a_{10} = 56$.

Gracieuze boom



Zo kun je voor iedere *binaire* boom een *gracieuze* nummering van de punten vinden. Een beroemd onopgelost vermoeden ('Graceful tree conjecture') is dat *iedere* boom zo'n nummering heeft.

door **Klaas Pieter Hart**

In de vorige *Pythagoras* hebben we uitgelegd *waarom* n-demachtswortels bestaan. Nu gaan we bekijken hoe we op een efficiënte manier benaderingen van die n-demachtswortels kunnen maken.

°°Worteltrekken voor gevorderden

Een rij voor $\sqrt{2}$

In *Pythagoras* van juni 2004 staat een methode beschreven waarmee je, met pen en papier, stap voor stap steeds nieuwe decimalen van $\sqrt{2}$ kunt bepalen, net zo veel als je maar wilt. De methode is makkelijk te programmeren maar heeft een nadeel: elke rekenstap lever maar één decimaal. De hieronder beschreven methode is een stuk efficiënter en variaties er op zijn ook in rekenmachientjes geprogrammeerd.

Je maakt een rij benaderingen van $\sqrt{2}$ als volgt: begin met $x_0 = 2$ en maak uit x_i telkens een nieuwe benadering

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right).$$

Dus $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$, enzovoort. De rij die je zo krijgt is dalend en elke term is groter dan $\sqrt{2}$, zie inzet 2. De benaderingen convergeren heel snel naar $\sqrt{2}$: als je $x_{i+1} - \sqrt{2}$ uitwerkt, krijg je $\frac{1}{2}(x_i - 2\sqrt{2} + \frac{2}{x_i})$ en omdat $2x_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{x_i} = 2\sqrt{2}$ staat hier eigenlijk $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{\frac{2}{x_i}}\right)^2$. Haal $\sqrt{x_i}$ (uit de noemer) buiten de haakjes: er komt $\frac{1}{2x_i}(x_i - \sqrt{2})^2$ en dat kunnen we afschatten met $\frac{1}{2}(x_i - \sqrt{2})^2$. De ongelijkheid $x_{i+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_i - \sqrt{2})^2$ laat zien dat het aantal correcte decimalen bij elke iteratie verdubbelt. Immers $x_0 - \sqrt{2} < 0{,}6$ en daaruit volgt $x_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}0{,}6^2 = 0{,}18$, vervolgens $x_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}0{,}18^2 = 0{,}0162$, dan $x_3 - \sqrt{2} < 0{,}00013122$, enzovoort. Dit gaat dus veel sneller dan de pen-en-papier-methode.

In het algemeen, om $\sqrt{a}$ te benaderen, begin je met $x_0 = a$ en doe je op elke stap $x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{a}{x_i})$.

Een rij voor $\sqrt[3]{2}$

Op dezelfde manier als boven maken we een rij benaderingen voor $\sqrt[3]{2}$. We beginnen weer met $x_0 = 2$ en maken telkens uit x_i een nieuwe benadering:

$$x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2x_i + \frac{2}{x_i^2}\right).$$

Weer geldt dat de rij dalend is en nu geldt dat $x_i^3 > 2$ voor alle i. Dit volgt uit de ongelijkheid in inzet 3 met $a = b = x_i$ en $c = \frac{2}{x_i^2}$: het product van de getallen is 2 en het gemiddelde x_{i+1} is kleiner dan de grootste van de drie en dat is x_i.

Net als bij $\sqrt{2}$ convergeert deze rij heel snel naar $\sqrt[3]{2}$. Het kost wat moeite, maar je kunt uitrekenen dat

$$x_{i+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2x_i + \sqrt[3]{2}}{3x_i^2}(x_i - \sqrt[3]{2})^2.$$

Omdat elke x_i tussen 1 en 2 ligt, geeft dit de afschatting $x_{i+1} - \sqrt[3]{2} < 2(x_i - \sqrt[3]{2})^2$. Dit betekent dat na verloop van tijd het aantal correcte decimalen telkens verdubbelt.

Een rij voor $\sqrt[n]{2}$

Voor andere n kun je dergelijke rijen maken. Zet weer $x_0 = 2$ en zet telkens

$$x_{i+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_i + \frac{2}{x_i^{n-1}}\right).$$

Je krijgt zo een rij die naar $\sqrt[n]{2}$ convergeert.

1. Een ongelijkheid

Voor elk tweetal positieve getallen a en b geldt $ab \leq \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$, met gelijkheid alleen als $a = b$.

Om dit te bewijzen kun je het verschil $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - ab$ uitschrijven: je krijgt dan $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$ en dat is gelijk aan $\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2$. Daaruit volgt $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - ab \geq 0$ en gelijkheid geldt inderdaad alleen als $a = b$.

2. De benaderingen van $\sqrt{2}$

We kunnen de ongelijkheid uit inzet 1 gebruiken om successievelijk te laten zien dat $x_i > x_{i+1}$ en $x_i^2 > 2$ voor alle i. In het begin geldt $x_0^2 > 2$. Als we eenmaal weten dat $x_i^2 > 2$, dan volgt $x_i > \frac{2}{x_i}$ en met de ongelijkheid volgt daaruit dat $x_{i+1}^2 > x_i \cdot \frac{2}{x_i} = 2$ en $x_i > x_{i+1}$ (het gemiddelde van twee getallen is kleiner dan het grootste).

3. Nog een ongelijkheid

Voor drie positieve getallen a, b en c geldt $abc \leq R^3$, waarbij $R = \frac{1}{3}(a+b+c)$ het *rekenkundig gemiddelde* is. Hoe je dat bewijst laten we eerst aan een voorbeeld zien: neem de getallen 1, 3 en 8, dan geldt $R = 4$. Vervang 1 door 4 en 8 door 5; dan blijft R gelijk en $1 \cdot 3 \cdot 8 < 4 \cdot 3 \cdot 5$ en met de ongelijkheid in inzet 2 volgt dan $4 \cdot 3 \cdot 5 < 4^3$.

In het algemeen neem je aan dat $a \leq b \leq c$ en reduceer je het tot het geval van twee getallen. Maak een nieuw drietal $a' = R$, $b' = b$ en $c' = c - (R - a)$; dan geldt $a' + b' + c' = a + b + c$, dus het rekenkundig gemiddelde blijft gelijk. Het product $a'b'c'$ is groter geworden, reken maar na: $a' = a + (R - a)$ en dus $a'c' = (a + (R - a))$ x $(c - (R - a)) = ac + (R - a)(c - R) \geq ac$ (schrijf zorgvuldig uit). Dus $abc \leq a'b'c'$. Ook geldt $b' + c' = 2R$ en dus volgt uit inzet 1 dat $b'c' \leq R^2$. Nu zijn we klaar: $abc \leq a'b'c' = Rb'c' \leq R^3$.

Pythagoras

November 2005 **Journaal** Nummer 2

door **Alex van den Brandhof**

De constante van Mills

In 1947 werd bewezen dat er een constante A bestaat zó dat $\lfloor A^{3^n} \rfloor$ priem is voor elk natuurlijk getal n; deze uitspraak staat bekend als de *stelling van Mills*. Later werd bewezen dat er oneindig veel van die constanten bestaan. Ondanks dat het bestaan ervan was aangetoond, kon niemand een concrete waarde van A aangeven. Afgelopen zomer kwam hier verandering in.

De kleinste waarde van A heet de *constante van Mills* en wordt met θ genoteerd. Onder aanname van de Riemannhypothese (waarover je hebt kunnen lezen in het thema-artikel van het vorige nummer) bewezen Chris Caldwell en Yuanyou Cheng (beiden verbonden aan Amerikaanse universiteiten) dat θ als volgt begint: 1,306377883863. In totaal berekenden zij meer dan 6850 decimalen. Het is onbekend of θ irrationaal is.

Bron: *Journal of Integer Sequences*, 24 augustus 2005. Zie ook het internet: www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Caldwell/caldwell78.html.

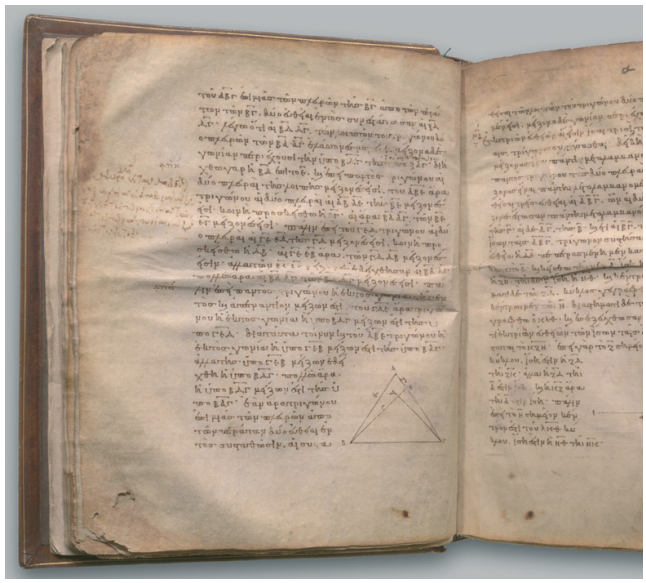
Wereldkampioenschap exact rekenen

Op de Radboud Universiteit werd in oktober een internationale competitie gehouden voor het uitrekenen van wiskundige grootheden, zoals π, e of θ (de constante van Mills). Een getal als π heeft oneindig veel decimalen zonder periodiek patroon. Door de eeuwen heen werd het als een sport beschouwd om voor dit soort getallen steeds meer decimalen te berekenen. Rond het jaar 1600 berekende Ludolph van Ceulen π in 31 decimalen. Omstreeks 1670 kwam Newton met meer decimalen. In de twintigste eeuw konden met computers miljarden decimalen berekend worden. Ook in de 21-ste eeuw wordt de sport nog steeds bedreven, waarbij het natuurlijk niet alleen om π gaat. In Nijmegen ging het bijvoorbeeld om het berekenen van een miljoen decimalen van sin(tan(cos 1)). De winnaars van het wereldkampioenschap waren een team van het bedrijf Wolfram Research (USA) en een team werkend aan het instituut LORIA (Frankrijk).

Bron: Wiskunde Persdienst

Elementen van Euclides digitaal

Omstreek 300 voor Christus schreef Euclides van Alexandrië *De Elementen*, waarin hij de logische opbouw van de meetkunde beschrijft. Het oudst bewaard gebleven manuscript van *De Elementen*, handgeschreven in 888 na Christus op perkament, ligt sinds 1804 in de Bodleian Library (de bibliotheek van de Universiteit van Oxford). Dit manuscript is op initiatief van het Clay Mathematics Institute gedigitaliseerd. Deze digitale editie wordt te koop aangeboden op de website van Octavo Corporation (www.octavo.com/researchfacsimiles/eucmsd), de firma die het digitaliseren mogelijk heeft gemaakt.



Wiskunde-wedstrijden

De *Nederlandse Wiskunde Olympiade* is een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren, die al sinds 1962 bestaat. Er zijn twee rondes. De eerste ronde, die op middelbare scholen wordt gehouden, vindt plaats op **vrijdag 20 januari 2006**. Na een tweede ronde gaan de besten door naar de Internationale Wiskunde Olympiade. Afgelopen zomer won het Nederlandse team twee bronzen medailles bij de internationale olympiade, die in Mexico werd gehouden. Meer informatie is te vinden op http://olympiads.win.tue.nl/nwo.

Op **vrijdag 17 maart 2006** is het weer tijd voor de *Europese Kangoeroe Wiskunde Wedstrijd*. Hieraan kunnen veel leerlingen meedoen: groep 7 en 8 van de basisschool en alle klassen van het voortgezet onderwijs, van vmbo tot en met vwo. Bekijk voor meer informatie www.math.ru.nl/kangoeroe.

Zeven-prijsvraag: verduidelijking

Deelnemers aan de zeven-prijsvraag (beschreven in het vorige nummer) opgelet! De operatie P mag alleen worden toegepast op getallen met meer dan één cijfer. Dat betekent dat $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(9)$ niet gebruikt mogen worden!

Treindienstregelingen

Een statistische analyse van wiskundige Rob Goverde wees uit dat kleine structurele gebreken in de treindienstregeling grote gevolgen kunnen hebben. Kleine vertragingen op één punt kunnen zich voortplanten in het gehele net: het zogenaamde domino-effect. Het dienstregelingsontwerp is nog steeds gebaseerd op oude vuistregels die inmiddels achterhaald zijn. Volgens Goverde komt het met de punctualiteit van de NS nooit goed, als de NS het basisontwerp niet aanpast.

Bron: *NRC Handelsblad*, 4 oktober 2005

Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

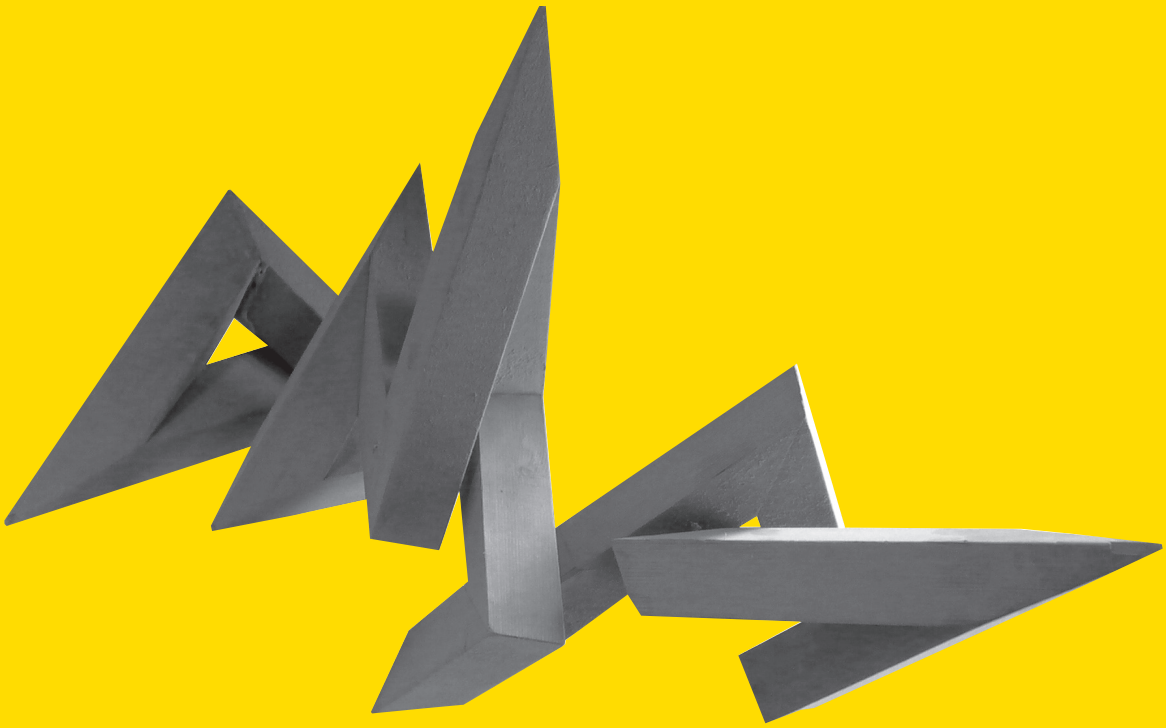
Verjaardag
Marietje werd geboren op 29 februari 1896. Het jaar 1900 was geen schrikkeljaar en haar eerste verjaardag viel dus op 29 februari 1904.

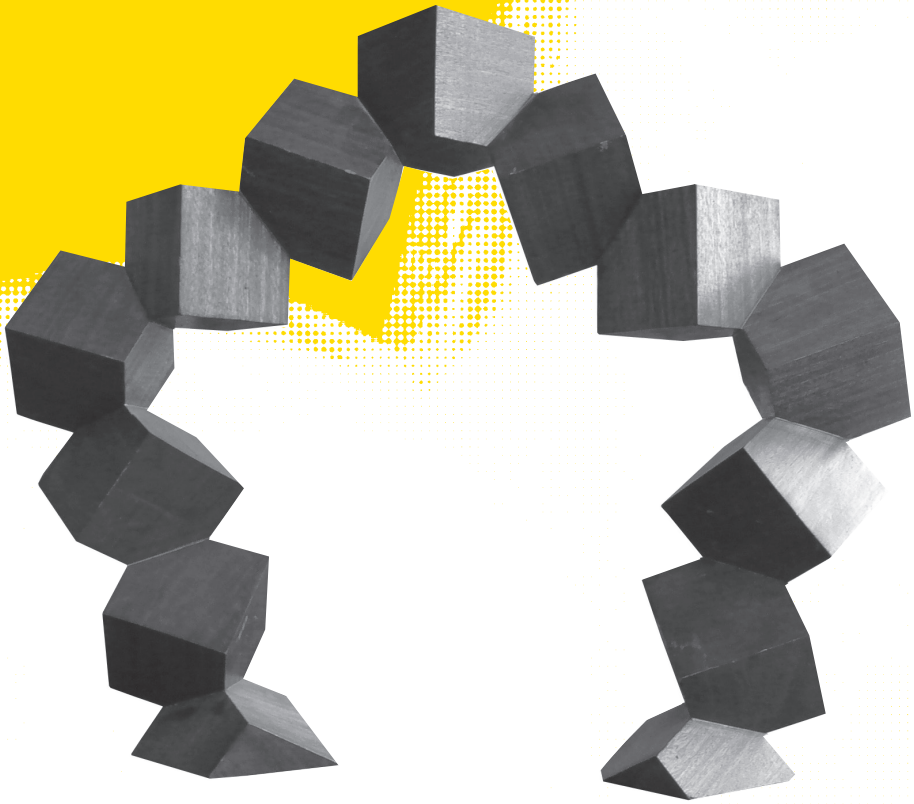
Pizza bakken
Doe de pizza in de oven en start beide zandlopers. Als de 7 klaar is, draai je die om. Als de 11 klaar is, draai je de 7 wéér om en wacht je tot die leeg is.

Horloge
Max had x euro. Na de koop heeft hij 0 euro en een horloge. Hij verkoopt het en heeft dan $1{,}1x$ euro. Hij koopt het weer voor $0{,}8 \cdot 1{,}1x = 0{,}88x$ euro. Dan heeft hij nog $1{,}1x - 0{,}88x = 0{,}22x$ euro over. Max startte dus met $44/0{,}22 = 200$ euro.

De zwaarste knikker
Leg op beide schalen 9 knikkers. Als hij doorslaat, zit de knikker bij de 9 op de zwaarste kant. Bij evenwicht zit de knikker bij de overblijvende 9. Van die 9 neem je op beide schalen 3 knikkers. Op dezelfde manier vind je het drietal met de zware knikker. Tot slot leg je van die 3 knikkers op beide schalen één knikker om de zwaarste te bepalen.

Touwtjes knopen
Noem de touwtjes a, b, c en d. Verbind de touwtjes aan beide uiteinden twee aan twee; dat kan per kant op drie manieren: ab-cd, ac-bd, ad-bc (ab-cd betekent: a zit vast aan b en c aan d). Stel, aan uiteinde 1 heb je ab-cd. Aan uiteinde 2 heb je ab-cd (dan krijg je twee lussen), ac-bd (dan krijg je één lus) of ad-bc (dan krijg je ook één lus). De kans is dus $\frac{2}{3}$.





45ste JAARGANG NUMMER 2