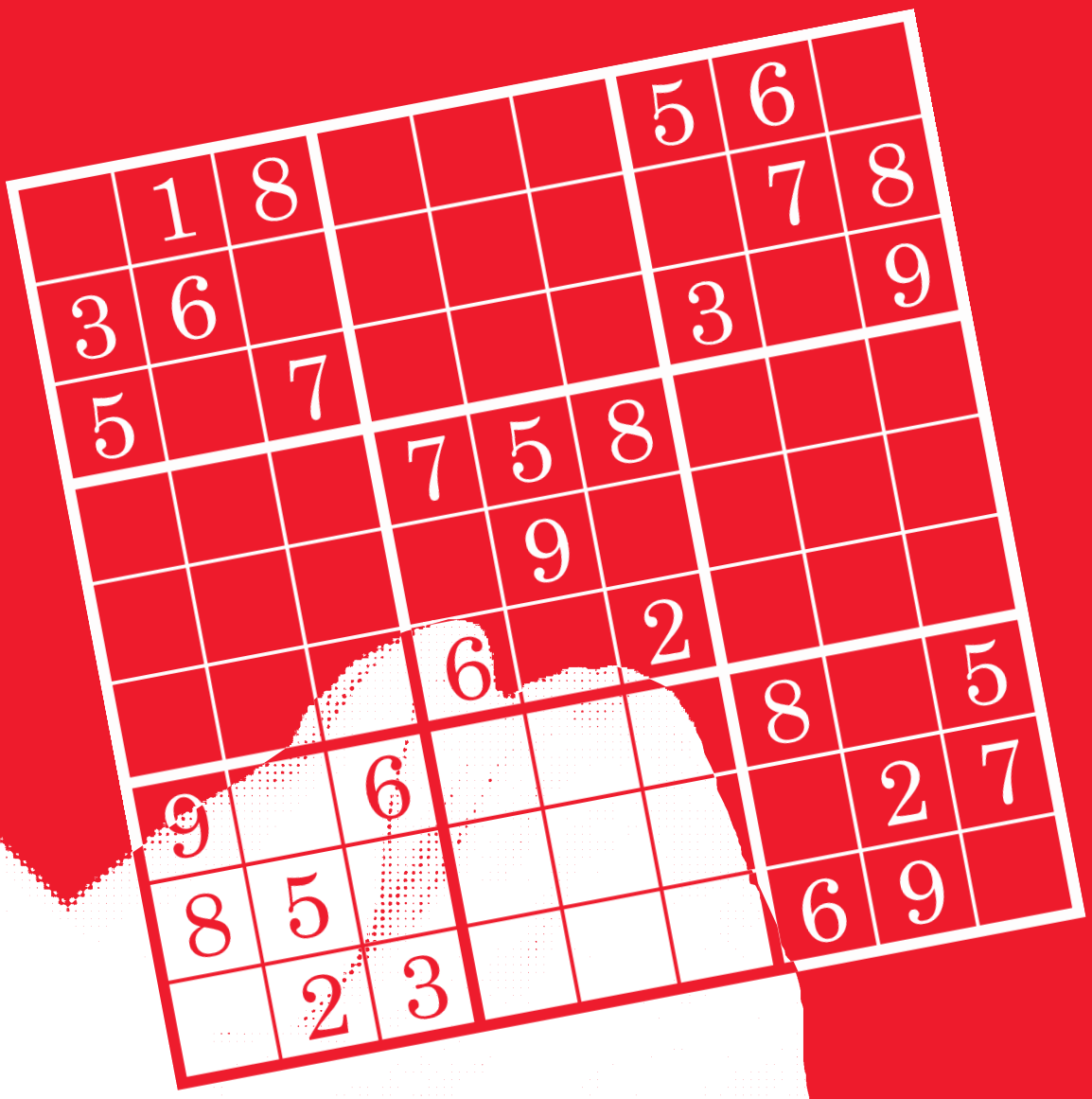
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN JANUARI 2006

45ste jaargang nummer 3
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Reinie Erné

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), E.C. Buissant des Amorie, voormalig docent wiskunde in Amstelveen (ecbuissantdesamorie@ncrvnet.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), prof.dr. J. van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit (craats@science.uva.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de Eötvös Universiteit te Boedapest (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), ing. M. ten Have, electronic engineer aan de Universiteit van Melbourne, Australië (michel.tenhave@bigpond.com), J. Müttel, studente wiskunde aan de Universiteit van Bonn (jmuettel@uni-bonn.de), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), R. Pannekoek, student wiskunde aan de RUG (pytholym@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector op het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum en de EHvA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), A. Veldman, student wiskunde en informatica aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Op het omslag
Sudoku's

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

INHOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 8 **Spookgetallen**

9 **Op de middelste**

10 – 11 **Landjepik**

12 – 15 **Datacompressie, wat is er eigenlijk mogelijk?**

16 – 17 **Pythagoras Olympiade**

18 – 21 **Sudoku wiskundig bekeken**

22 – 23 **Haal meer uit je GR**

24 – 25 **Problemen – Oplossingen**

26 – 28 **Machtsverheffen voor gevorderden**

29 **Journaal**

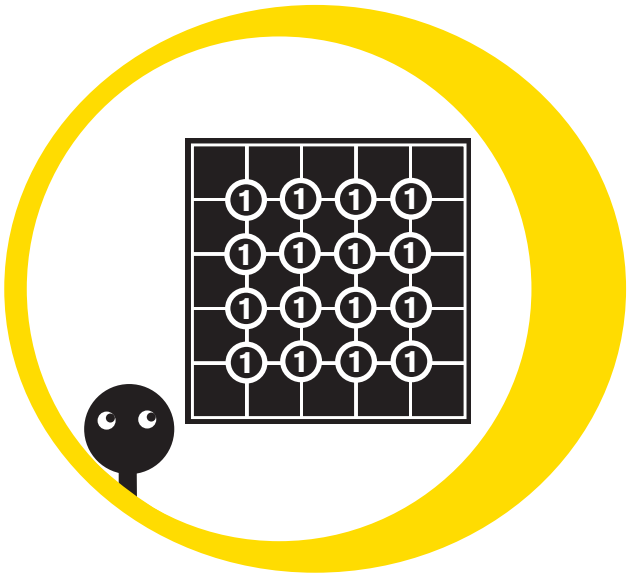
30 – 33 **De wiskunde van Anne de Haan**

33 **Oplossingen Kleine nootjes nr.2**

door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

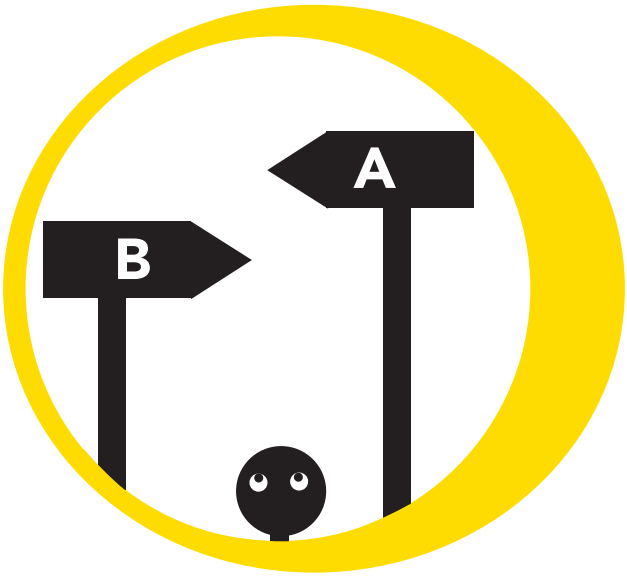


Munten verplaatsen

Je ziet hier op een rooster vier rijtjes van vier munten. Verplaats een aantal munten zo, dat je vier rijtjes van vijf munten krijgt.

Vertraging

Uit B vertrekt een trein naar A en gelijktijdig vertrekt uit A een trein naar B. De snelheden zijn 60 en 90 km/uur. Ze ontmoeten elkaar in C. Als een van de treinen vijf minuten later vertrekt, op welke afstand van C ontmoeten ze elkaar dan?



Deelbaar

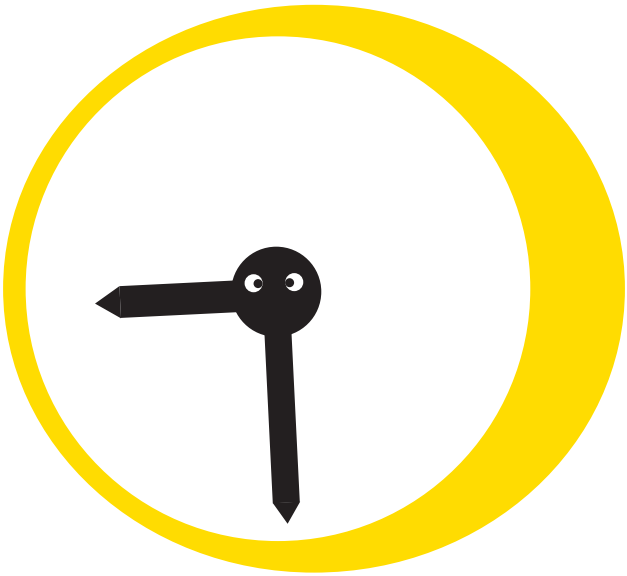
Een getal bestaat uit tien verschillende cijfers (0 tot en met 9). Het eerste cijfer is deelbaar door 1. De eerste twee cijfers vormen een getal dat deelbaar is door 2. Het getal dat bestaat uit de eerste drie cijfers is deelbaar door 3, en zo verder tot en met 10. Wat is dit getal?

Engelse drop

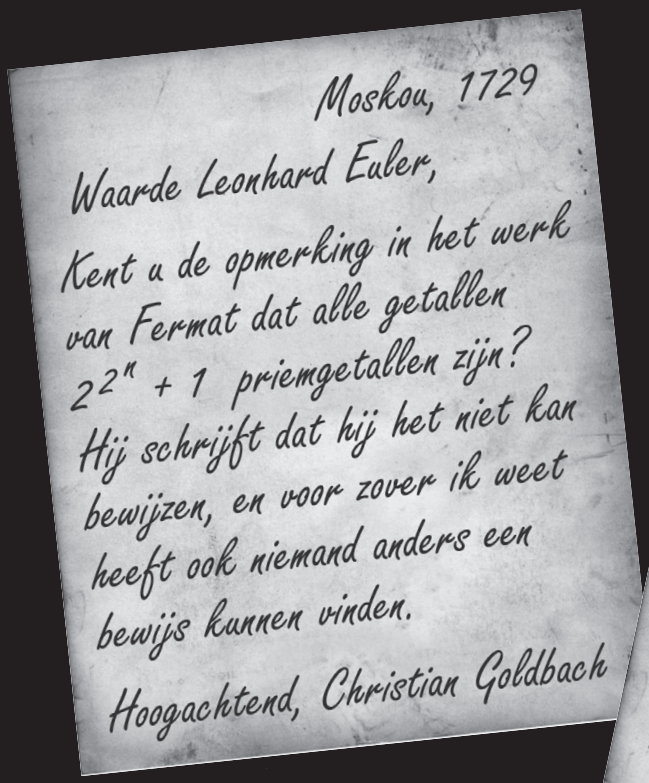
Coen heeft een puntzak met 400 gram Engelse drop. Hij eet er flink van en daarna is de puntzak half zo hoog. Hoeveel gram drop heeft Coen opgegeten?

Hoe laat?

Het is bijna half negen en de wijzers van de klok maken exact een rechte hoek met elkaar. Kun je precies uitrekenen hoe laat het is?



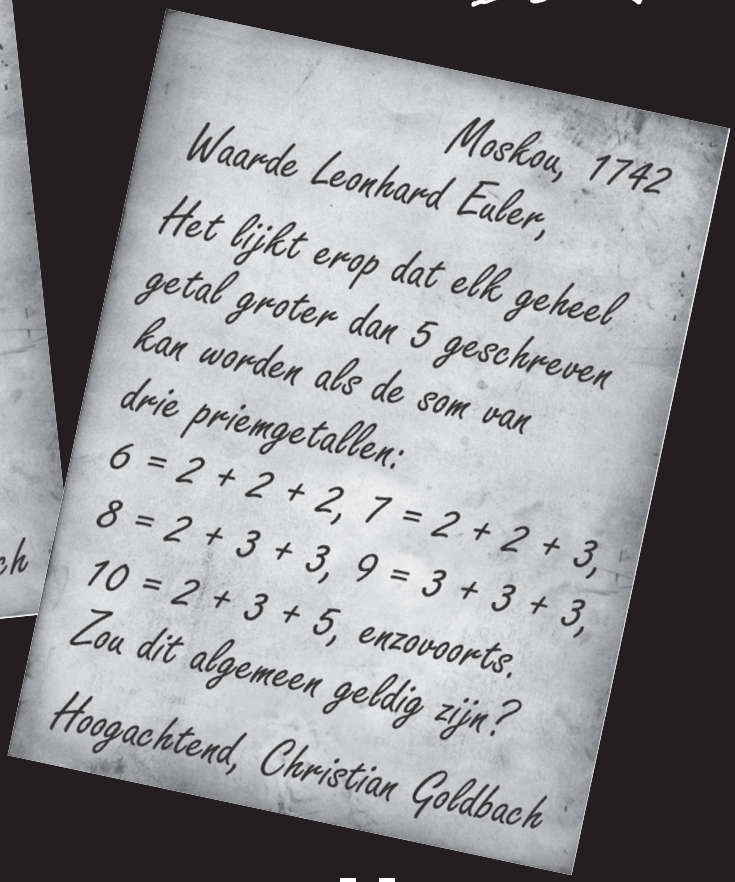
door **Jan van de Craats** en **Janina Müttel**


Moskou, 1729

Waarde Leonhard Euler,

Kent u de opmerking in het werk van Fermat dat alle getallen $2^{2^n} + 1$ priemgetallen zijn? Hij schrijft dat hij het niet kan bewijzen, en voor zover ik weet heeft ook niemand anders een bewijs kunnen vinden.

Hoogachtend, Christian Goldbach


Moskou, 1742

Waarde Leonhard Euler,

Het lijkt erop dat elk geheel getal groter dan 5 geschreven kan worden als de som van drie priemgetallen:

$6 = 2 + 2 + 2$, $7 = 2 + 2 + 3$, $8 = 2 + 3 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 2 + 3 + 5$, enzovoorts.

Zou dit algemeen geldig zijn?

Hoogachtend, Christian Goldbach

°Spookgetallen

In de serie *Open problemen* deze keer drie beroemde onopgeloste raadsels. Je kunt er geen miljoen dollar mee winnen, maar wel onsterfelijke roem. Alledrie gaan ze over getallen die misschien helemaal niet bestaan. Spookgetallen dus. De eerste vraag luidt: *bestaat er een zesde Fermat-priemgetal?* De tweede: *bestaat er een oneven volmaakt getal?* En de derde: *bestaat er een even getal groter dan 2 dat niet de som is van twee priemgetallen?* Al die vragen kun je in verband brengen met de grote wiskundige Euler. Hij correspondeerde met Goldbach over dit soort problemen. Zij zijn uit de achttiende eeuw, maar sindsdien zijn we op dit gebied nog niet zo veel wijzer geworden.

Fermatgetallen

Toen de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) in 1727 als twintigjarige in dienst trad van de Academie van Sint Petersburg, trof hij daar een oudere Duitse collega aan, Christian Goldbach (1690-1764), met wie hij al snel bevriend raakte. Goldbach vertrok korte tijd later naar Moskou, maar ze bleven geregeld brieven wisselen, vaak over wiskundige onderwerpen. Goldbach was geïnteresseerd in getallentheorie en hij wist Euler in zijn enthousiasme mee te slepen. In 1729 schreef hij: *Kent u de opmerking in het werk van Fermat dat alle getallen* $2^{2^n} + 1$ *priemgetallen zijn? Hij schrijft dat hij het niet kan bewijzen, en voor zover ik weet heeft ook niemand anders een bewijs kunnen vinden.* Euler liet het probleem een tijdje liggen, maar begon er toen toch aan te werken. Fermat had al opgemerkt dat de getallen $F_n = 2^{2^n} + 1$ voor $n = 0, 1, 2, 3, 4$ priemgetallen zijn: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ en $F_4 = 65.537$, vandaar zijn vermoeden. Maar $F_5 = 4.294.967.297$ ging zijn krachten te boven. Euler liet zich niet afschrikken en begon slim te rekenen, overigens met middelen die Fermat zelf had aangedragen. Hij kwam tot het verrassende resultaat dat F_5 *geen* priemgetal is omdat het deelbaar is door 641. Controleren is makkelijk, maar het vinden van zo'n ontbinding is andere koek, zeker als je geen rekenmachine hebt. Hoe dan ook, dit vermoeden van Fermat bleek dus niet waar te zijn – een van de zeldzame keren dat Fermat een vermoeden uitsprak dat onjuist is gebleken!

Waar komt trouwens die vreemde vorm $2^{2^n} + 1$ vandaan? Waarom niet gewoon $2^m + 1$ genomen? Wel, het is eenvoudig om te bewijzen dat $2^m + 1$ alleen maar een priemgetal kan zijn als m van de vorm $m = 2^n$ is. Algemeen gesproken is $a^q + 1$ namelijk nooit een priemgetal als q oneven is en groter is dan 1, want

$$a^q + 1 = (a + 1)(a^{q-1} - a^{q-2} + a^{q-3} - \ldots - a^1 + 1).$$

Zo is bijvoorbeeld $18^5 + 1 = (18 + 1)(18^4 - 18^3 + 18^2 - 18 + 1)$, oftewel $1889569 = 19 \times 99451$. Zou nu $2^m + 1$ een priemgetal zijn, en zou m een oneven deler $q > 1$ hebben, dus $m = kq$ met k geheel, dan zou $2^m + 1 = 2^{kq} + 1 = (2^k)^q + 1 = a^q + 1$ met $a = 2^k$. Maar we hebben net gezien dat $a^q + 1$ geen priemgetal is – tegenspraak. Het getal m kan dus alleen maar priemfactoren 2 hebben, met andere woorden, het is een gehele macht van 2.

Hoe zit het met $F_6 = 18.446.744.073.709.551.617$? Daar lijkt zonder computer geen beginnen aan. Toch lukte het Landry en Le Lasseur in 1880 een volledige ontbinding te vinden: $F_6 = 274.177 \times 67.280.421.310.721$. Ook van F_7, een getal van 39 cijfers, F_8 (78 cijfers), F_9 (155 cijfers) en F_{11} (617 cijfers) zijn inmiddels volledige ontbindingen gevonden. Geen van alle zijn het priemgetallen. Ook F_{10} is geen priemgetal, maar daarvan is alleen maar bekend dat het deelbaar is door $455.925.777$ en $6.487.031.809$. Van de resterende factor, een getal van 291 cijfers, weten we dat het geen priemgetal is, maar we kennen de ontbinding ervan niet. Van nog veel meer Fermatgetallen is bewezen dat ze geen priemgetallen zijn. In feite is er nog steeds geen enkele grotere priem dan F_4 bekend.

Open probleem 1: Bestaat er een zesde Fermat-priemgetal?

Het kleinste Fermatgetal waarvan we niet weten of het priem is, is F_{22}, een getal van 1.262.612 cijfers.

Volmaakte getallen volgens Euclides

Reeds de oude Grieken waren gefascineerd door *volmaakte getallen*, dat wil zeggen natuurlijke getallen N die gelijk zijn aan de som van hun delers, waarbij ze N zelf niet als deler meetelden. Doe je dat wel, dan is de som van de delers dus $2N$. Het kleinste volmaakte getal is 6, want de delers van 6 zijn $1, 2, 3$ en 6 met som $12 = 2 \times 6$. Het volgende volmaakte getal is 28, want de delers daarvan zijn $1, 2, 4, 7, 14$ en 28. Ook 496 en 8128 zijn volmaakte getallen, en er zijn er nog veel meer.

De Griekse wiskundige Euclides (ca. 300 voor Christus) gaf een recept om volmaakte

getallen te vinden. Hij bewees namelijk: als $2^m - 1$ een priemgetal is, dan is $2^{m-1}(2^m - 1)$ een volmaakt getal. Neem bijvoorbeeld $m = 2$, dan is $2^m - 1 = 3$ een priemgetal, en $2^{m-1}(2^m - 1) = 3 \times 2 = 6$ is inderdaad volmaakt. Voor $m = 3$ krijg je $2^3 - 1 = 7$ en $2^2(2^3 - 1) = 28$. De waarde $m = 5$ geeft 496 en $m = 7$ geeft 8128.

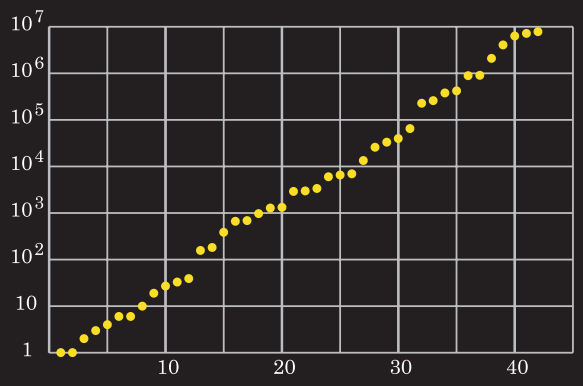
Het bewijs van Euclides is niet moeilijk. We illustreren het aan de hand van een voorbeeld. Een algemeen bewijs kun je dan zelf wel verzinnen. Neem $m = 7$ en noem $p = 2^m - 1 = 2^7 - 1 = 127$. Inderdaad is $p = 127$ een priemgetal, en dus zou $V = 2^6 \times 127 = 8128$ een volmaakt getal moeten zijn. Schrijf alle delers van V (inclusief V zelf) op. In zo'n deler kunnen alleen maar priemfactoren 2 (maximaal zes) en p (maximaal één) zitten, dus de delers zijn: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 en p, $2p$, 2^2p, 2^3p, 2^4p, 2^5p, 2^6p ($= V$). Bedenk nu dat $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1$ en dat $2^7 - 1 = p$. De som van alle delers is dus $p + (p \times p) = p(1 + p) = (2^m - 1)2^m = 2 \times 2^{m-1}(2^m - 1) = 2V$. Conclusie: $V = 8128$ is inderdaad een volmaakt getal.

Mersenne-priemgetallen

Priemgetallen van de vorm $2^m - 1$ heten *Mersenne-priemgetallen* naar de Franse monnik en amateurwiskundige *Marin Mersenne* (1588-1648). Elk Mersenne-priemgetal levert volgens Euclides dus een volmaakt getal op. Maar hoeveel Mersenne-priemgetallen zijn er? We weten het niet. Op het moment dat we dit schrijven, zijn er 42 bekend. De grootste is $2^{25.964.951} - 1$, een getal van $7.816.230$ cijfers, gevonden op 18 februari 2005 door Martin Novak uit Duitsland. Op het internet kun je meedoen met de jacht naar Mersenne-priemgetallen. Daar kun je ook vinden of dit record inmiddels al weer gebroken is, zie www.mersenne.org/prime.htm.

Er zijn dus heel wat meer Mersenne-priemgetallen dan Fermat-priemgetallen bekend. Bij de Fermat-priemgetallen zou het vinden van één nieuwe Fermat-priem al een sensatie betekenen. Maar bijna elk jaar wordt er wel een nieuwe Mersenne-priem ontdekt, en dat komt dan ook steeds weer in de krant (en in *Pythagoras*). Toch is 42 (het aantal bekende Mersenne-priemgetallen) nog niet zo'n groot getal. Wiskundigen willen natuurlijk meer weten. Komt er ooit een eind aan die rij? Er zijn redenen om aan te nemen dat dit niet zo is, maar een bewijs ontbreekt.

Dat er oneindig veel Mersenne-priemgetallen bestaan, wordt aannemelijk gemaakt door de onderstaande illustratie, waarin het aantal cijfers van het n-de Mersenne-priemgetal uitgezet is tegen n. De gegevens hiervoor hebben we van het internet. De verticale schaal is zelf ook logaritmisch, zoals je aan de schaalverdeling kunt zien. Maar je ziet ook dat de 42 punten vrijwel op een rechte lijn lijken te liggen. Er zijn wel wat argumenten te bedenken waarom dat ook zo zou moeten zijn, maar een bewijs is er nog niet!



De logaritme van het aantal cijfers van het n-de Mersenne-priemgetal, uitgezet tegen n.

Oneven volmaakte getallen

Hebben we met het recept van Euclides ook alle volmaakte getallen beschreven? We weten het niet. In zekere zin weten we het maar voor de helft. Om dat uit te leggen, merken we eerst op dat $2^{m-1}(2^m - 1)$ even is als $m \geq 2$. Alle volmaakte getallen die volgens het recept van Euclides uit Mersenne-priemgetallen zijn gemaakt, zijn dus even. Ongeveer tweeduizend jaar na Euclides bewees Euler dat het omgekeerde ook waar is: elk *even* volmaakt getal is van deze vorm. Een bewijs hiervan vind je in het kader op pagina 8. Daarmee is dus bewezen dat bij elk Mersenne-priemgetal een even volmaakt getal hoort en omgekeerd.

Maar dat laat nog één vraag onbeantwoord: is elk volmaakt getal even?

Open probleem 2: Bestaan er oneven volmaakte getallen?

Misschien bestaan ze niet. Dan zijn het dus *spookgetallen*. Maar toch is er wel het een en ander over zulke spoken bewezen. Als er een oneven volmaakt getal N bestaat, dan moet N de volgende eigenschappen hebben.
1. N kan niet deelbaar zijn door 105.
2. N bevat minstens 47 priemfactoren (die overigens niet verschillend hoeven te zijn).
3. N bevat minstens 8 verschillende priemfactoren.
4. N is een getal van minstens 300 cijfers.
5. N heeft een priemfactor die groter is dan 10^{20}.
6. De op één na grootste priemfactor van N is groter dan 1000.
Maak dus je borst maar nat als je op zoek gaat naar zo'n spookgetal!

Het vermoeden van Goldbach

Op 7 juni 1742 schreef Goldbach een brief aan Euler met daarin een zin die in modernere taal geformuleerd neerkomt op: *het lijkt erop dat elk geheel getal groter dan 5 geschreven kan worden als de som van drie priemgetallen* en hij vraagt Euler of deze weet of die uitspraak inderdaad in het algemeen geldig is. Hier is het begin van een lijstje dat Goldbach ongetwijfeld zelf ook gemaakt heeft om te controleren of het klopt:

$$\begin{aligned} 6 &= 2+2+2 \\ 7 &= 2+2+3 \\ 8 &= 2+3+3 \\ 9 &= 3+3+3 \\ 10 &= 2+3+5 \\ 11 &= 3+3+5 \\ 12 &= 2+3+7 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Je kunt het zelf net zo lang maken als je wilt. Of het door de computer laten controleren. We willen best wedden dat het je niet lukt een tegenvoorbeeld te vinden; zo dadelijk vertellen we waarom. Maar een weddenschap is geen bewijs. Hoe zit het? Is het echt waar?

Euler antwoordde dat hij ook geen bewijs had, maar dat je het probleem ook op de volgende manier kunt formuleren: *elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen*. Daar hoort ook een lijstje bij. Dat begint zo:

$$\begin{aligned} 4 &= 2+2 \\ 6 &= 3+3 \\ 8 &= 3+5 \\ 10 &= 3+7 \\ 12 &= 5+7 \\ 14 &= 7+7 \\ 16 &= 5+11 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Eulers formulering lijkt wat overzichtelijker. Het is echter nog steeds een open probleem. Als het *niet* waar is, zou er dus een even getal zijn dat *niet* te schrijven is als som van twee priemgetallen.

Open probleem 3: Bestaat er een even getal groter dan 2 dat niet te schrijven is als som van twee priemgetallen?

De twee versies zijn equivalent

We geven nu Eulers bewijs dat die twee formuleringen equivalent zijn. Neem eerst aan dat Goldbachs bewering waar is dat elk getal groter dan 5 de som is van drie priemgetallen, en stel dat N een even getal groter dan 2 is. Dan is $N + 2 = p_1 + p_2 + p_3$ voor zekere priemgetallen p_1, p_2 en p_3 met $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Die kunnen niet allemaal oneven zijn, want dan zou $N + 2$ ook oneven zijn en dat is niet zo. Maar 2 is het enige even priemgetal, dus $p_1 = 2$ en $N = p_2 + p_3$.

Omgekeerd, als de formulering van Euler waar is, en als N een willekeurig getal groter dan 5 is, dan zijn er twee mogelijkheden.
1. N is even. Dan is ook $N - 2$ even en groter dan 2, en dus de som van twee priemgetallen: $N - 2 = p_1 + p_2$.

Dit betekent dat $N = 2 + p_1 + p_2$, zoals bewezen moest worden.
2. N is oneven. Dan is $N - 3$ even en groter dan 2, en dus de som van twee priemgetallen $N - 3 = p_1 + p_2$, dat wil zeggen $N = 3 + p_1 + p_2$.

Oom Petros

Het is een vreemde draai van de geschiedenis dat Eulers formulering, en niet die van Goldbach, bekend is geworden als het *vermoeden van Goldbach*. Het luidt dus: *elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen*. Je kunt het direct aan iedereen uitleggen. Er is zelfs een spannende en ontroerende roman over geschreven: *Oom Petros en het vermoeden van Goldbach* van de Griekse auteur Apostolos Doxiadis (Nederlandse vertaling: De Bezige Bij, 2000, ISBN 90-234-3953-8). Van harte aanbevolen!

Maar hoe ver zijn we inmiddels gevorderd met de oplossing? Dat valt wat tegen, of mee, het is maar hoe je het bekijkt. We noemen hier een paar resultaten. Het vermoeden is geverifieerd voor alle even getallen kleiner dan 4×10^{14} (zie http://primes.utm.edu/notes/conjectures). Het beste resultaat dat in de buurt komt van een algemeen bewijs, stamt uit 1978, toen de Chinese wiskundige Chen-Jing Run bewees dat er een groot (maar onbekend) getal N_0 bestaat zo, dat elk even getal groter dan N_0 geschreven kan worden als $p + m$ waarbij p een priemgetal, en m óf een priemgetal, óf het product van twee priemgetallen is.

We zijn lang niet volledig in onze opsomming. Op het internet en in de literatuur kun je nog veel meer over het vermoeden van Goldbach vinden. Maar wat we eigenlijk willen, is gewoon een bewijs of een tegenvoorbeeld. Kortom, we willen weten of er een even getal bestaat dat *niet* de som is van twee priemgetallen. Zou er zo'n *Goldbach-spookgetal* bestaan?

Stelling (Euler). *Bij elk even volmaakt getal V is er een Mersenne-priemgetal $2^k - 1$ zó dat $V = 2^{k-1}(2^k - 1)$.*

Bewijs. Omdat V even is, kun je V schrijven als $V = 2^{k-1}m$ met $k \geq 2$ en m oneven. De som van alle delers van een willekeurig getal N noemen we $\sigma(N)$, daarbij tellen we N zelf ook als deler mee. Voor het volmaakte getal V geldt dus $\sigma(V) = 2V = 2^k m$.
Omdat m oneven is, hebben 2^{k-1} en m geen delers gemeen. Elke deler van V is dus het product van een deler van 2^{k-1} en een deler van m. Dat betekent dat $\sigma(V) = \sigma(2^{k-1})\sigma(m)$. De delers van 2^{k-1} zijn $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$, dus $\sigma(2^{k-1}) = 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.

Combinatie van deze resultaten geeft

$$2^k m = (2^k - 1)\sigma(m).$$

Schrijf het linkerlid als $(2^k - 1)m + m$. De getallen $2^k - 1$ en 2^k verschillen 1, en dus hebben ze geen delers gemeen. Dat betekent dat m deelbaar moet zijn door $2^k - 1$, oftewel $m = n(2^k - 1)$ voor zekere deler n van m. We kunnen de bovenstaande vergelijking dus delen door $2^k - 1$, met als resultaat $m + n = \sigma(m)$. Behalve m en n zijn er blijkbaar geen andere delers van m. Dat kan alleen als m een priemgetal is, en dan is n dus 1. Hiermee is bewezen dat $m = 2^k - 1$ inderdaad een Mersenne-priemgetal is.

Plak vijf speelkaarten overlappend aan elkaar. Laat je slachtoffer de kaarten eerst van voren zien en geef de opdracht: "zet de wasknijper op de middelste kaart."

Op de middelste

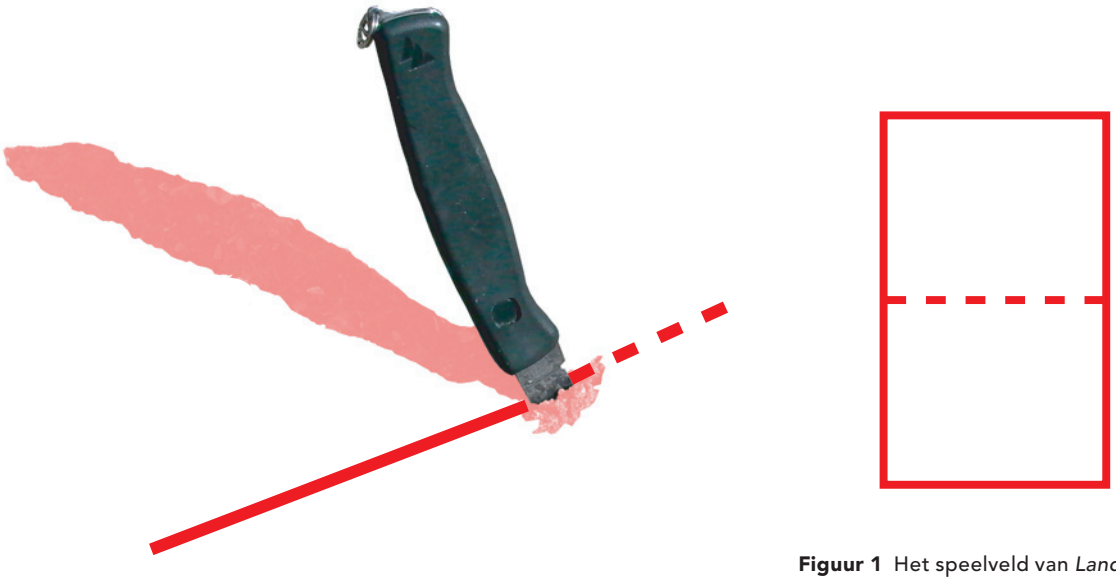
Geef het slachtoffer de wasknijper, en draai de kaarten om

... en gegarandeerd staat de wasknijper op de verkeerde kaart.

door **Elias Buissant des Amorie** en **Marco Swaen**

Op het strand en een zakmes bij je? Dan is het tijd voor het ouderwetse spelletje *Landjepik*. Hoe verover je zoveel mogelijk land op je tegenstander?

Landjepik



Figuur 1 Het speelveld van *Landjepik*

Voor wie *Landjepik* niet kent, nog even de spelregels. Teken in het zand een rechthoek en verdeel die in twee gelijke stukken, zie figuur 1. Ieder neemt plaats aan een van de korte zijden van de rechthoek en om de beurt gooi je het mes in het gebied van de tegenstander. Blijft het mes met de punt in het zand staan, dan mag je in de richting van het lemmet een lijn trekken, waarmee je het gebied van de tegenstander in twee stukken splitst. Voeg vervolgens naar keuze een van de twee stukken aan jouw gebied toe, tenminste als het stuk grenst aan het gebied dat al van jou was. Daarna is je tegenstander aan de beurt.

Hoe moet je gooien om zoveel mogelijk gebied op je vijand te veroveren? Het zou voordelig kunnen zijn het mes zo ver mogelijk in het gebied van de vijand te gooien. Mooi zou zijn op de achterrand, maar zo precies kun je waarschijnlijk niet werpen, en ga je over de achterrand heen, dan is je beurt verspeeld.

Belangrijker is echter de richting die het lemmet aangeeft als het mes in het zand staat. Onder welke hoek moet het lemmet staan om zoveel mogelijk land te veroveren?

Een meetkundige analyse

Bekijk eerst eens de eenvoudige situatie die in figuur 2 is geschetst. Gegeven zijn een rechte hoek met hoekpunt O en benen k en l, en een punt P binnen die hoek. Trek door P een lijn m, noem het snijpunt van k met m punt A en het snijpunt van l met m punt B. Uiteraard hangt de oppervlakte van OAB af van de richting van lijn m.

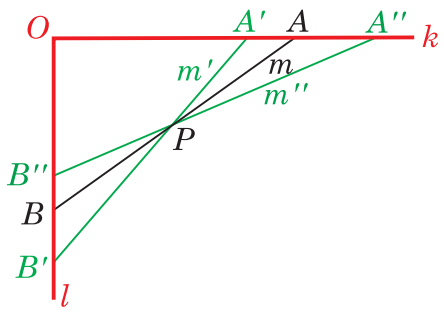
De driehoek OAB met de kleinste oppervlakte krijg je als je m op de volgende manier trekt. Puntspiegel O in P, dat levert O' op. Aldus komt P in het midden van een rechthoek te liggen waarvan OO' de ene diagonaal is. De andere diagonaal van de rechthoek is nu de m die de kleinste oppervlakte geeft, zie figuur 3.

Om dit te bewijzen, trekken we een andere lijn door P die k in C, l in D en l' in E snijdt, waarbij l' het beeld is van l bij puntspiegeling in P. Zie figuur 4. Als we aannemen dat C tussen O en A ligt en P tussen C en D, dan is vrij duidelijk dat

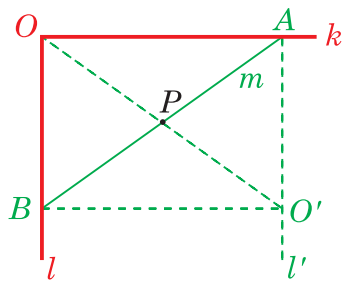
$$\text{opp}\triangle PBD = \text{opp } \triangle PAE > \text{opp } \triangle PCA,$$

$$\text{dus opp}\triangle OCD > \text{opp } \triangle OAB.$$

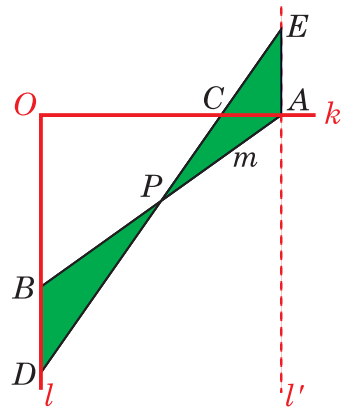
De overstap naar de rechthoek van het landje verdelen is nu eenvoudig gemaakt. Gooi je mes zover mogelijk in het vijandelijk gebied. Zeg O is het hoekpunt van het rechthoekige vijandige gebied dat het dichtste bij is. Zorg dan dat het lemmet in de richting AB staat volgens de methode die we hierboven beschreven. Laat de driehoek OAB dan over aan de vijand, dan heb je zoveel mogelijk land van hem ingepikt.



Figuur 2 De beginsituatie



Figuur 3 De beste worp



Figuur 4 Een bewijs dat de situatie van figuur 3 de beste worp is

door **Michel ten Have**

Datacompressie, wat is er eigenlijk mogelijk?

Door bestanden handiger op te slaan, nemen ze minder ruimte in, dat is het principe van datacompressie. Vrijwel elk bestand is zo te verkleinen, soms zelfs aanzienlijk. Maar aan de mogelijkheden zijn wel een aantal harde grenzen, daar over gaat het in dit artikel.

Wat is datacompressie?

Van datacompressie hebben we allemaal wel eens gehoord, maar wat is dat nu? Met datacompressie is het mogelijk om een groot bestand wat kleiner te maken. Het bestand wordt dan zodanig bewerkt dat het minder bytes vergt om het op te slaan. Er is dan een programma nodig om het in-, en weer uit te pakken. Een bekend programma hiervoor is ZIP. Als je hiermee een tekstbestand inpakt, krijg je een 'zip'-bestand dat al gauw 50% kleiner is. Je hebt ook ZIP weer nodig om het oorspronkelijke tekstbestand terug te krijgen. Andere voorbeelden van compressie zijn JPEG (voor plaatjes), MP3 (voor audio) en MPEG (voor video). Bij deze laatste vormen van datacompressie is er geen apart programma nodig om het bestand in en uit te pakken, dit zit al in het programma dat deze bestanden gebruikt.

Belang van compressie

Het belang van datacompressie is natuurlijk dat er minder capaciteit nodig is om deze bestanden te verzenden en op te slaan. Dankzij deze techniek passen er veel meer plaatjes op een cd, en gaat communicatie veel sneller. Stel je eens voor dat je een bestand niet met een factor 2, zoals bij ZIP, maar met een factor 2.000.000 kunt verkleinen. Dit zou wereldnieuws zijn! Cd's en dvd's zouden overbodig zijn, want een diskette zou voldoende zijn. De inhoud van een cd zou je op een blaadje kunnen uitschrijven in pakweg 400 tekens! Modems zouden meer dan een miljoen keer sneller werken. Als je zo'n methode gevonden hebt, vraag dan eerst patent aan voordat je het publiceert, je kunt hier makkelijk honderden miljoenen aan verdienen. Jan Sloot claimde zoiets te kunnen. Eric Smit beschrijft in zijn boek *De Broncode* (ISBN 90 5759 156 1) het drama en de zakelijke verwikkelingen hier omheen.

Overigens is Jan Sloot overleden voordat hij *De Broncode* (het programma dat die compressie doet) heeft onthuld. Maar..., kan het wel? Laten we eerst twee soorten van compressie onderscheiden.

De exacte (lossless = zonder dataverlies) methode die bijvoorbeeld ZIP toepast, en de benadering (lossy = met enig dataverlies) methode zoals toegepast door bijvoorbeeld de JPEG opslag voor plaatjes.

Met dataverlies

Dat de laatste methode de informatie vervormt kun je makkelijk aantonen. Start in Windows het programma *Paint*, zet er wat tekst in, sla het op in JPEG format, open het weer en zoom in. Je ziet dat er rond de tekst wat punten zijn bijgekomen. Dit is een bekende handicap van deze opslagmethode. Wie hier niet tegen aan wil lopen, moet het plaatje opslaan in bijvoorbeeld bitmap format (BMP). Het plaatje neemt dan wel meteen veel meer ruimte in beslag. Het is de prijs die je betaalt voor nauwkeurigheid. Op het gladde terrein van wat voldoende kwaliteit voor opslag is wil ik me nu niet begeven.

Zonder dataverlies

Ik wil het hebben over de eerder genoemde exacte opslag. Hoe is het in principe mogelijk om met wat data en een algoritme een groot bestand te beschrijven? Heel eenvoudig, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. Zeg dat je twee bytes ter beschikking staan (een byte bestaat uit acht tekens 0 of 1). Het eerste bepaalt het algoritme, het tweede de parameter die je hieraan toevoegt. Zeg 'byte 1 = 0' betekent: 'herhaal het volgende byte (byte 2 dus) oneindig vaak'. Nu heb ik met twee bytes een oneindig lang bestand beschreven! Door byte 2 te veranderen, kan ik 256 (= 2^8) oneindig lange bestanden genereren.

Beschrijving van reeksen

Dit is leuk natuurlijk, maar ik kan nog veel meer bestanden niet op deze manier beschrijven. Geen nood! We hebben byte 1 nog. Hiermee kunnen we de procedure kiezen. 'Byte $1 = 0$' betekende 'herhaal', stel nu dat 'byte $1 = 1$' betekent: '1 gedeeld door byte 2'. Hiermee kunnen we herhaling van een bepaald patroon van bytes beschrijven. En bijvoorbeeld 'byte $1 = 2$' betekent: 'trek de wortel uit byte 2'.

Hiermee kunnen patronen beschreven worden die zich niet herhalen. Maar wat voor functies we ook toekennen, met één byte zullen het er nooit meer dan 256 zijn. Zo kunnen dus met twee bytes 256^2 verschillende bestanden beschreven worden. Een bestand van drie bytes heeft al meer mogelijkheden (256^3). Ik hoop dat het systeem duidelijk wordt: met enkele bytes kun je wel veel meer bytes beschrijven, maar je hebt toch maar keuze uit een beperkt aantal reeksen. Uit hoeveel reeksen je de keuze hebt, wordt bepaald door het aantal bytes dat je ter beschikking staat. En je hebt bij dit systeem in het algemeen steeds evenveel bytes nodig als het bestand dat die je beschrijven wilt (nog afgezien van de extra informatie die nodig is om te vertellen hoe groot het bestand moet worden). Ook het na elkaar toepassen van deze techniek verhoogt het aantal mogelijkheden niet.

Links een fragment van een BMP-bestand met tekst en rechts hetzelfde fragment in de JPEG-versie

Een ontsnappingsmogelijkheid?

Is een *fractal* of een ander ingewikkeld patroon misschien een ontsnappingsmogelijkheid? Bij een fractal is het mogelijk om met een paar parameters een ingewikkeld, en vaak mooi, patroon te beschrijven. Maar is het omgekeerde ook mogelijk? Kan een willekeurig patroon met fractalparameters beschreven worden? Denk je het volgende in: een algoritme dat schijnbaar willekeurig bytes genereert. In dit geval zou het mogelijk moeten zijn om te schatten na hoeveel stappen het patroon optreedt dat we willen opslaan. Stel, we hebben de bescheiden wens om een bestand van drie bytes op te slaan. Het bestand bestaat uit de karakters 'ABC'. Daar het algoritme min of meer willekeurig bytes genereert, kunnen we ruwweg uitrekenen na hoeveel bytes het patroon 'ABC' optreedt. De kans dat 'A' optreedt, is $1/256$, de kans dat direct daarna 'B' optreedt, is weer $1/256$, enzovoorts. Dus na ruwweg 256^3 stappen kunnen we verwachten het patroon 'ABC' gezien te hebben. (Voor het patroon 'AAA' of 'ABA' gaat deze redenering niet op; hierover gaat een artikel in een later nummer van *Pythagoras* deze jaargang.) Om zo veel stappen op te slaan, hebben we drie bytes nodig. Dus los van de tijd om dit te vinden, en weer te reproduceren: het levert geen reductie op.

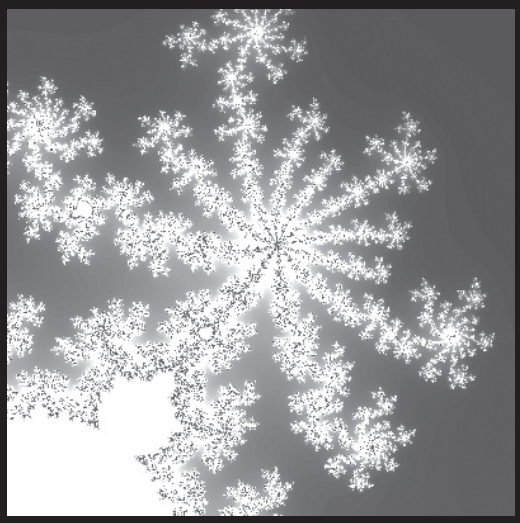
Beperkt

Werkt een programma als ZIP dan wel? Ja zeker. Gewoonlijk bevat een tekstbestand of een uitvoerbaar bestand geen willekeurige reeks van bytes, maar komen bepaalde karakters (of patronen) vaker voor dan andere, en deze vaak voorkomende patronen worden dan korter omschreven. In het Nederlands komt de 'e' veel vaker voor dan de 'q'. Dus bij het comprimeren van een tekstbestand kun je de 'e' beschrijven met maar een paar bits, in plaats van de gebruikelijke acht. Een slim compressieprogramma herkent dit en maakt hier gebruik van. De herhaling van een patroon wordt ook herkend en korter omschreven.

De Mandelbrot-fractal

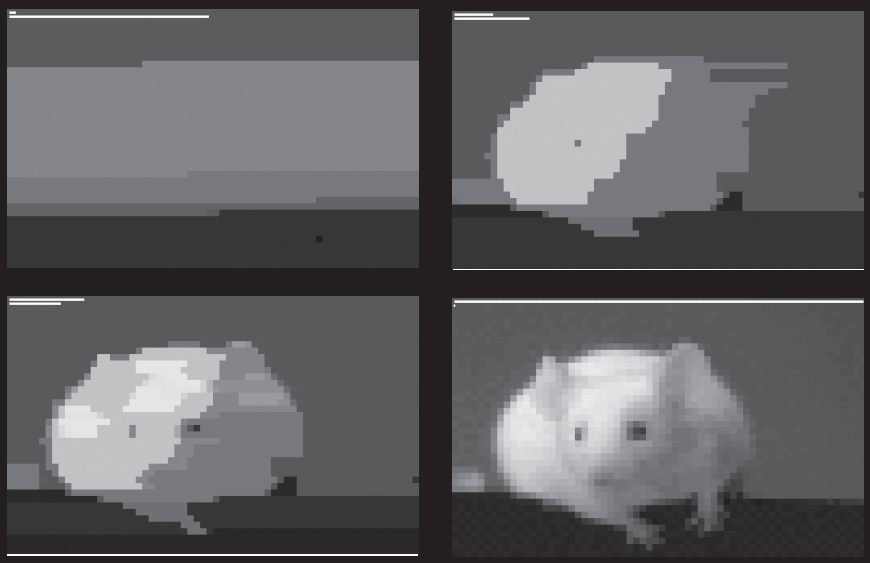
Onderstaand programma geeft een algoritme voor de Mandelbrot-fractal. Het is geschreven in Modula 2 (een soort Pascal). De hele figuur is op te slaan als een zeer klein bestand, namelijk de zes parameters van de procedure. Het onderstaande programmatje is dan nodig om de tekening te maken. Dit moet dan wel met complexe variabelen kunnen rekenen.

```
PROCEDURE Mandelbrot(x0, x_stap, y0,
y_stap : REAL; MaxX, MaxY : INTEGER);
VAR Yt, Xt : INTEGER;
BEGIN
  FOR Yt : = 0 TO MaxY-1 DO
    FOR Xt : = 0 TO MaxX-1 DO
      Punt(Xt, Yt, Kleur(x0 +
      x_stap*Xt, y0 + y_stap*Yt));
    END;
  END;
END Mandelbrot;
```



De muis

Hier zie je vier versies van een plaatje van een muis. Elk plaatje is de beste benadering die de computer kon vinden als er een bepaald maximum gesteld werd aan de grootte van het bestand na datacompressie. Dat maximum was bij plaatje 1 het laagst en bij 4 het hoogst. De plaatjes van de muis zijn afkomstig van de site van Steven de Rooij, die op het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam deelneemt aan onderzoek naar datacompressie. Op zijn site laat hij met een filmpje zien hoe de foto van de muis verscherpt bij toenemende toegestane bestandsgrootte. In een grafiek die met het beeld meeloopt, is de vervormingsgraad bijgehouden: een maat die uitgaat van het verschil in grijswaarde tussen pixels in het origineel en in het gecomprimeerde beeld. De grafiek verloopt niet helemaal vloeiend, soms gaat veel dataverlies blijkbaar gepaard met relatief weinig vervorming. Bekijk zelf het filmpje op homepages.cwi.nl/ rooij/ structure_function.



Daarna zijn de mogelijkheden al snel uitgeput. Probeer het maar: neem een groot tekstbestand. Comprimeer dit met ZIP (klik in Windows met de rechter muisknop op het bestand en kies 'Add to ZIP'). Een compressiefactor 2 lukt al snel. En daarna? Hernoem het zip-bestand eens, en verander de extensie van ZIP naar bijvoorbeeld TXT. En probeer het nog maar eens te comprimeren. Dat valt tegen. Vrijwel geen compressie meer. De mogelijkheden voor ZIP zijn blijkbaar uitgeput.

Dit kun je ook beredeneren: als een programma in staat zou zijn om letterlijk ieder bestand met minimaal een factor 2 te verkleinen, dan zou je in staat zijn om ieder bestand met maar een paar bytes te beschrijven, door een paar keer achter elkaar deze compressie toe te passen. Scherper geformuleerd: als er een algoritme zou bestaan dat ieder bestand met minimaal een factor groter dan 1 zou verkleinen, dan is er, door het herhaald toepassen ervan, geen grens aan de datacompressie. En dat is uitgesloten.

°Pythagoras Olympiade

door **Thijs Notenboom**, **Allard Veldman** en **René Pannekoek**

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro. De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 februari 2006.

OPGAVE 126

Een geheel getal heet *gaaf* als het geschreven kan worden als de som van twee kwadraten van gehele getallen (waarbij die getallen eventueel ook nul mogen zijn).
Bewijs:
a. Als n gaaf is, dan is $2n$ ook gaaf.
b. Als n gaaf is, dan is $3n$ niet gaaf.

OPGAVE 127

Gegeven zijn drie cirkels met straal 1.
Wat is de zijde van het kleinste vierkant waarin deze drie cirkels passen zonder elkaar te overlappen?

OPLOSSING 122

Achilles en de schildpad hebben elk n briefjes. Beiden schrijven ze de getallen 1 tot en met $2n$ in een willekeurige volgorde op de briefjes: op beide zijden van elk briefje één getal. Bewijs dat je de briefjes van Achilles en de schildpad zo kunt uitleggen, dat alle getallen 1 tot en met $2n$ te zien zijn zonder dat je een briefje om moet draaien.

Oplossing. Pak het briefje van Achilles waar een 1 op staat. Leg dit met de 1 naar beneden op tafel. Kijk dan wat er op de andere kant staat en pak het briefje van de schildpad met dit getal. Leg dit briefje ook weer met dat getal naar beneden neer, kijk wat er op de bovenkant staat en zoek het bijbehorende briefje van Achilles. Omdat je elk getal zo precies twee keer tegenkomt, kun je op deze manier doorgaan tot de 1 opduikt op een briefje van de schildpad. Alle getallen die je nu bent tegengekomen, heb je twee keer gezien en liggen één keer zichtbaar op de tafel. Misschien heb je echter niet alle getallen gehad. Dit is niet erg: kies dan een getal dat je nog niet verwerkt hebt en begin met dit getal opnieuw, zoals je net met 1 begonnen bent. Op een gegeven moment zul je dan alle kaartjes neergelegd hebben en ligt elk getal precies één keer bovenop.

Deze opgave werd goed opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Jan-Willem van den Bosch van het **Driestar College** te Gouda, Jana De Cuyper van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel (België), P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Romke Egbers te Meppel, Caspar Gevaerts van het **Erasmiaans Gymnasium** te Rotterdam, Camille Rondelez van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel (België) en Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven. De boekenbon gaat naar Caspar Gevaerts.

OPLOSSING 123

Vind alle gehele getallen m en n waarvoor geldt

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n.$$

Oplossing. We geven hier de oplossing van Nick Schmidts. We schrijven de vergelijking om naar een handige vorm:

$$\begin{aligned}
&2m^2 + n^2 = 2mn + 3n\\
&2m^2 - 2mn + n^2 - 3n = 0\\
&4m^2 - 4mn + 2n^2 - 6n = 0\\
&4m^2 - 4mn + n^2 + n^2 - 6n + 9 = 9\\
&(2m - n)^2 + (n - 3)^2 = 9
\end{aligned}$$

Als je 9 als som van twee kwadraten wilt schrijven, kan dit op vier manieren:

$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 = (\pm\, 3)^2 + 0^2.$$

Elk van deze manieren levert een oplossing voor m en n, te weten:

$$\begin{aligned}
&m = 0, n = 0\\
&m = 0, n = 3\\
&m = 3, n = 3\\
&m = 3, n = 6
\end{aligned}$$

Deze opgave werd goed opgelost door: Wouter Berkelmans van het **Barlaeusgymnasium** te Amsterdam, Elias C. Buissant des Amorie te Castricum, P. Dekker te Krimpen a/d Lek, Caspar Gevaerts van het **Erasmiaans Gymnasium** te Rotterdam, Milo van Holsteijn van de **RSG Pantarijn** te Wageningen, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffer College** te Castricum, Camille Rondelez van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel (België), Nick Schmidts van het **Onze-Lieve-Vrouwe College** te Assebroek (België), Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven en Wim Vanrie van het **Onze-Lieve-Vrouwe College** te Assebroek (België). De boekenbon gaat naar Nick Schmidts.

SUDOKU

wiskundig bekeken

door **Matthijs Coster**

Een ware sudoku-rage woedt in Nederland tot kampioenschappen aan toe. Tijd om eens te zien wat wiskundigen te melden hebben over de sudoku. Hoeveel sudoku's zijn er? Hoe los je ze op? Hoeveel startgetallen heeft een sudoku minimaal? En hoe moeten die startgetallen over het veld staan?

Een 9x9 Latijns vierkant is een vierkant van 9 bij 9 vakjes waarin de cijfers 1 tot en met 9 zo staan ingevuld dat geen kolom of rij dubbele cijfers bevat. Dat betekent dat alle cijfers precies negen maal voorkomen in dit Latijnse vierkant. Er zijn 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600 verschillende Latijnse vierkanten, zoals S.E. Bammel en J. Rothstein in 1975 vaststelden.

Hoeveel sudoku-vierkanten bestaan er?

Een ingevulde sudoku-puzzel is een Latijns vierkant. Maar bij de sudoku is er nog een extra eis: in de negen 3x3 deelvierkanten (de 'blokken') moeten ook steeds precies de cijfers 1 tot en met 9 staan. Je kunt dus verwachten dat er veel minder sudoku-vierkanten (d.w.z.: ingevulde sudoku-puzzels) zijn. Door Bertram Felgenhauer is met behulp van een computerprogramma berekend dat er 6.670.903.752.021.072.936.960 sudoku-vierkanten zijn. Dat is ongeveer een miljoenste deel van het aantal Latijnse vierkanten.

Een eigen sudoku-vierkant construeren

Is het gemakkelijk om zelf zo'n sudoku-vierkant te construeren? Ja zeker, kijk maar in figuur 1. Van dit ene sudoku-vierkant kun je nu vele andere maken door draaien en spiegelen, en door rijen, kolommen en cijfers te verwisselen. Je kunt de bovenste drie rijen onderling verwisselen, of de middelste drie, dan wel de onderste drie. Je kunt de bovenste drie rijen tezamen verwisselen met de middelste drie of de onderste drie. En dit alles kan ook met de kolommen. Het is verder duidelijk dat je ook de cijfers afzonderlijk kunt verwisselen. Ook kan het vierkant worden gespiegeld over één van zijn diagonalen. Let op dat na het verwisselen van de cijfers soms precies hetzelfde sudoku-vierkant ontstaat als na het uitvoeren van kolom-wisselingen.

Een eigen sudoku-puzzel construeren

Heb je een sudoku-vierkant, dan kun je daar een sudoku-puzzel van maken door vakjes leeg te maken. Dat wegvegen kun je niet willekeurig doen, want uit de overgebleven cijfers moeten alle weggelaten cijfers weer terug te vinden zijn. De puzzel mag immers maar één oplossing hebben! Daarom kun je bijvoorbeeld niet alle 8-en en 9-s weghalen, omdat de 8 en 9 dan op elkaars plaats gezet kunnen worden. Ook moet er steeds in twee rijen van een drietal rijen die één blok overdekken minimaal één cijfer staan, omdat anders deze rijen probleemloos zouden mogen worden verwisseld.

Van het sudoku-vierkant in figuur 1 heb ik

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	1	2	3	4	5	6	7	8
6	7	8	9	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	8	9	1	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	8	9	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	8	9	1

Figuur 1 Sudoku-vierkant met 123456789-patroon

1		3		5		7		9
	8		1		3		5	
4								3
	1		3		5		7	
6								5
	4		6		8		1	
8								7
	6		8		1		3	
2		4		6		8		1

Figuur 2 Sudoku-puzzel met 123456789-vierkant als unieke oplossing

1	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	1	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×		×	×
×	1	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×		×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	1	×
×	×		×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	1	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	1

Figuur 3 Het bezet-diagram van de sudoku-puzzel in figuur 2

							1	
					1			
						1		
1								
			2	3				

Figuur 4 Waar zouden de overige 1-en kunnen staan?

met behulp van een computerprogramma de puzzel in figuur 2 gemaakt.

Het oplossen van een sudoku-puzzel

Ik geef een aantal richtlijnen voor het oplossen van sudoku's.

Letten op één cijfer. In de puzzel van figuur 2 zijn zes 1-en geplaatst. We kijken of we de resterende drie 1-en kunnen plaatsen. In elk vakje waar geen 1 kan komen te staan, zetten we een kruisje. Dat is dus overal waar al een ander cijfer staat, in alle rijen, kolommen en in alle blokken waarin al een 1 voorkomt. Het vierkant met de kruisjes noemen we het *bezet-diagram*. In dit geval vertelt het bezetdiagram meteen waar de overige 1-en moeten staan, zie figuur 3.

Soms moet je er iets meer moeite voor doen. Bijvoorbeeld in de situatie in figuur 4.

					×	×	×	×
					×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	1	×
					×	×	×	×
×	×	×	×	×	1	×	×	×
×	×	×	×	×	×	1	×	×
1	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	
×	×	×			×	×	×	

Figuur 5 Het bezet-diagram bij de situatie in figuur 4

In figuur 5 zie je het bijbehorende bezet-diagram. Let op de onderste rij, de 1 op de onderste rij zou nog kunnen komen op de vierde, vijfde of negende plaats. Als we hem op de negende plaats zetten, zal in het mid-

	7	5	6	4				8
9		4						7
				3		4		
			5	7	4		8	2
		7		?			1	
	5	2	8			7		3
7		9		5				
5				2				
2	1		4	9				6

Figuur 6 Wat is het overgebleven cijfer in het middelste vakje?

	8	6	7	1	3	2		
2	1		9	8	6		7	3
3	7	9	5	2	4	8	6	1
	3	8	1		2			6
6	9	7	4	3	5	1	2	8
1	2		6		8		3	
7	5	1	8	6	9	3	4	2
9	4	2	3	5	1	6	8	7
8	6	3	2	4	7	9	1	5

Figuur 7 Bij deze sudoku-puzzel moet gebruik worden gemaakt van mogelijkheden uitproberen

delste blok onder geen enkele 1 verschijnen. Dus blijven alleen de vierde en vijfde kolom over. Maar in het rechter blok onder moet toch ergens ook een 1 komen, dat kan dan blijkbaar alleen maar zijn op de achtste rij, negende plaats.

Het overgebleven cijfer. Een belangrijke andere oplossingsmethode is het plaatsen van het overgebleven cijfer. Als in een rij al acht van de negen cijfers zijn ingevuld, dan moet in het open vakje het cijfer komen dat nog niet in de andere acht vakjes staat. Staan al die cijfers in één rij, kolom of blok, dan is het overgebleven getal snel gevonden. Maar vaak moet je letten op zowel de rij, als de kolom en het blok waartoe het vakje behoort. Probeer het maar eens uit met het middelste vakje in de puzzel van figuur 6.

Overgebleven cijfercombinaties. Neem een rij van de puzzel en schrijf per vakje op welke cijfers er nog in zouden kunnen komen gelet op de kolommen en blokken. Dat levert bijvoorbeeld op:

16	23	234	26	16	45	1579	1689	789

Merk op dat de combinatie 1-6 tweemaal voorkomt. Dat betekent dat in het ene vak uiteindelijk een 1 terechtkomt, en in het andere vak een 6. En dus komen de 1 en 6 in geen van de andere vakken terecht. Zo weten we zeker dat in het vierde vak een 2 moet staan, want 6, de andere kandidaat, moet naar de eerste of de vijfde plaats. Vervolgens kunnen nog diverse andere cijfers worden geplaatst.

Maar het kan ook voorkomen dat een drietal cijfers in drie vakken staat, zoals hieronder de 2, 3 en 7:

16	237	234	23	15689	45	1579	1689	37

Dit betekent dat in die drie vakken de 2, 3 en 7 zullen moeten worden ingevuld, die dus niet meer elders kunnen staan. Op dezelfde manier kan het voorkomen dat een viertal of zelfs vijftal cijfers in vier respectievelijk vijf vakken staan. Dit zijn echter uitzonderlijke situaties.

Uitproberen

Als je al de voorgaande methodes hebt toegepast, terwijl de puzzel nog steeds niet af is, rest je nog één mogelijkheid, namelijk een hokje *voorlopig* in te vullen. Als er in een bepaald vakje bijvoorbeeld alleen nog een 2 of een 5 kan komen, bekijk dan eerst wat er gebeurt als je er een 2 in zet, en ga vervolgens na wat er gebeurt als je er een 5 invult. Omdat de puzzel moet leiden tot een uniek sudoku-vierkant, zal een van deze twee veronderstellingen leiden tot een tegenspraak. Vaak wordt gedacht dat dit uitproberen vooral nodig is halverwege het spel. Dat het ook nog veel later nodig kan zijn, blijkt uit de vergevorderde puzzel in figuur 7, waar alle andere genoemde strategieën zijn uitgeput.

Andere methoden

Er zijn andere methodes, die ik hier verder

			1	5				
			7					
	4	3						
5	1							
							9	
					8		2	
				6	3	2	4	
					2	3		
1								

Figuur 8 Sudoku-puzzel met 17 startwaarden

		7		8		6		
	5		4	2			1	
4			3					
2	1		7					5
				9			4	
	4	3			1			
			9		5	3	8	
	3						7	
								2

Figuur 9 Sudoku-puzzel met 25 startwaarden. Geen van de startwaarden kan worden weggelaten

niet behandel. De geïnteresseerde lezer kan ze vinden op het internet, aan het einde van het artikel staan enkele interessante sites. Er wordt wel beweerd dat als je al deze methodes gebruikt, het bovengenoemde 'uitproberen' overbodig is. Hoe dan ook, ik ben van mening dat het in de praktijk vaak handiger is om toch maar uit te proberen in plaats van te zoeken naar cijfercombinaties die voldoen aan precies die voorwaarde, waardoor een trucje kan worden uitgevoerd.

Het aantal sudoku-puzzels

Het aantal sudoku-vierkanten is bekend zoals ik eerder vermeldde. Dan rijst natuurlijk de vraag: hoeveel sudoku-puzzels zijn er? Die vraag zal wellicht nooit beantwoord worden. Je kunt je afvragen wat een sudoku-puzzel is, want als ik uitga van een sudoku-vierkant en ik laat één cijfer weg, dan heb ik al een volwaardige sudoku-puzzel, maar ik kan zonder probleem twee of drie willekeurig gekozen cijfers weglaten. Bij vier of hoger moet ik uitkijken dat de gecreëerde sudoku-puzzel leidt tot een uniek sudoku-vierkant. Met een voorzichtige schatting (aan de lage kant) kom ik uit op 10^{50} sudoku-puzzels.

Startwaarden

Hoeveel getallen kun je weglaten uit het sudoku-vierkant terwijl het nog steeds een sudoku-puzzel blijft? In figuur 8 zie je een sudoku-puzzel met zeventien startgetallen. Dit is op het ogenblik het kleinste aantal startwaarden dat bekend is. Je kunt de vraag ook omkeren. Wat is het *grootste* aantal startwaarden, zodanig dat als één van de startwaarden van de puzzel wordt weggelaten, deze puzzel niet meer uniek kan worden opgelost? Deze vraag laat ik graag aan jou over. Zelf kwam ik uit op een ondergrens van 25, zie figuur 9.

In de puzzel met zeventien startwaarden komen de cijfers 6, 7, 8 en 9 precies eenmaal voor. Ik zou graag willen weten of er ook puzzels mogelijk zijn waarbij één van de cijfers niet voorkomt, en drie andere cijfers slechts eenmaal. Wel vond ik een puzzel waarbij het cijfer 9 niet voorkomt, terwijl de cijfers 7 en 8 slechts eenmaal voorkomen, zie de puzzel op de achterkant van het omslag (boven).

Al eerder zagen we dat er per drietal rijen/kolommen in minimaal twee rijen/kolommen een cijfer moet staan. Op de achterkant (onder) staat een voorbeeld waarbij drie rijen en drie kolommen ontbreken, en waarbij tevens een blok helemaal leeg is. Op de voorkant hebben we een wonderlijke sudoku-puzzel geplaatst, waarin vier blokken helemaal leeg zijn.

Internet

- Informatie over het aantal sudoku-vierkanten: www.shef.ac.uk/~pm1afj/sudoku
- Een pagina over het oplossen van sudoku-puzzels: www.angusj.com/sudoku/hints.php
- Een pagina waarmee je onbeperkt sudoku-puzzels kunt creëren: www.phon.ucl.ac.uk/home/mark/sudoku/workpad.html
- De Engelstalige open source encyclopedie Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku

door **Henk Pfaltzgraff**

Haal meer uit je GR

Programmeren op je TI-83 (of -84) is een fluitje van een cent. Je drukt op [PRGM]<NEW> en [ENTER], voert een naam in en begint te programmeren. Onder 2nd[CATALOG] vind je alle commando's. Op www.henkshoekje.com (klik op Pythagoras' HoekJe) kun je terecht voor aanvullende uitleg van de hier beschreven programmaatjes.

Werpen met drie munten

De vorige aflevering werd afgesloten met de vraag hoe je met de GR het werpen met drie munten kunt simuleren. De (theoretische) kans op bijvoorbeeld twee keer 'kop' met drie munten is $\frac{3}{8}$, er zijn namelijk acht mogelijke uitkomsten, waarvan drie gunstig. Op de GR zou je dat rechtstreeks 800 keer kunnen simuleren met de afgrijselijke instructie

```
sum((randInt(0,1,800)+
randInt(0,1,800)+
randInt(0,1,800))=2)
```

en na 34 seconden verschijnt een antwoord op het scherm. Ik kies liever voor een programmaatje dat weliswaar wat langer doet over de 800 simulaties, maar veel flexibeler is. Het heet KOPMUNT3 en is een doorlopende simulatie. Als je er genoeg van hebt, stop je met [ON]1:Quit. De intro is weggelaten. De fractie T/N wordt afgerond op 4 decimalen; round is te vinden onder [MATH]<NUM>2.

```
0→T: 0→N
ClrHome
Lbl A
  N+1→N
  randInt(0,1)+randInt(0,1)+
                randInt(0,1)→K
  If K=2: T+1→T
  Output(2,1,round(T/N,4))
  Output(8,11,N)
Goto A
```

Vooraf worden de teller T en de noemer N van de fractie op nul gezet. Na Lbl A wordt N met 1 opgehoogd en het aantal kop (K) geteld. Als $\mathrm{K} = 2$, wordt de teller verhoogd. De fractie T/N wordt voortdurend op de tweede regel van het scherm geprojecteerd. Onderaan komt het aantal simulaties (N). Je ziet dus doorlopend hoe het met de fractie gaat. En je ziet ook meteen hoeveel moeite (beter: 'tijd') het kost om in de buurt van het verwachte antwoord $\frac{3}{8}$ te komen en te blijven. Een interessante vraag voor degenen die wat van statistiek afweten: na hoeveel worpsimulaties heeft de tweede decimaal van de fractie (de 7) een betrouwbaarheid van 95%? En de derde decimaal?

Verwachtingswaarde

Een ander experiment: je gooit een groot aantal keren met twee dobbelstenen en noteert elke keer de waarde van de hoogste worp van de twee. Wat verwacht je, gemiddeld genomen, dat die maximumwaarde zal zijn? Van de 6x6 mogelijke uitkomsten van de worp met twee dobbelstenen zijn er zeven die het maximum 4 opleveren, namelijk: $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$ en $(4, 1)$. De kans dat het maximum 4 is, is dus gelijk aan $\frac{7}{36}$. De bijdrage van deze waarde aan de verwachtingswaarde is dus $4 \times \frac{7}{36}$.

Voor de verwachtingswaarde van het gemiddelde moet je elke uitkomst x_i vermenigvuldigen met 'zijn' kans p_i en dat sommeren: $1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36}$,

wat afgerond de uitkomst 4,4722 oplevert.

Draai het onderstaande programma MAX2UIT6 en kijk naar de verspringende decimalen. Het duurt minstens een half uur voor de tweede decimaal (7) een beetje tot rust is gekomen. Voor een betrouwbare derde decimaal (2) zal je 100 keer zo lang moeten wachten. De instructie max staat onder [MATH]<NUM>7.

```
PROGRAM:MAX2UIT6
:ClrHome
:Output(1,1,"WORPNR:")
:Output(2,1,"FRACTIE:")
:0→T:0→M
:Lbl HH
:T+1→T
:randInt(1,6)→A
:randInt(1,6)→B
:M+max(A,B)→M
:Output(2,10,round(M/T,4))
:Output(1,10,T)
:Goto HH
:
```

Opgave. Verander in het programma max door min, draai het programma en bereken de theoretische verwachtingswaarde van de laagste uitkomst van twee dobbelstenen.

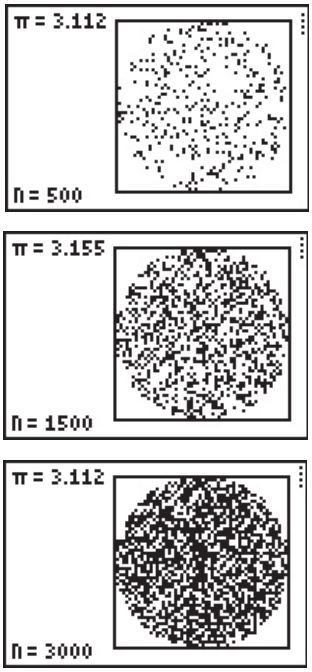
Een meting van π

En ander leuk experiment is de bepaling van π met behulp van randomgetallen. We gaan uit van de eenheidscirkel, dat is de cirkel om $O(0, 0)$ met straal 1 (de oppervlakte van deze cirkel is π). Om die eenheidscirkel tekenen we een vierkant met zijde 2 (de oppervlakte van dit vierkant is dus 4). We werpen met een denkbeeldig pijltje een groot aantal malen lukraak naar een punt binnen dit vierkant. De kans om dan binnen de cirkel uit te komen, is gelijk aan π/4.

De functie rand (onder [MATH]<PRB>) levert randomgetallen tussen 0 en 1; de uitdrukking 2rand-1 levert dus randomwaarden tussen –1 en 1. We spreken van een *treffer* als de afstand tot de oorsprong kleiner is dan 1, dus als $x^2 + y^2 < 1$. Om dit aanschouwelijk te maken, stellen we in het programma eerst het venster in; de venstervariabelen zijn te vinden onder [VARS]<Window>; de tussenstand van de meting wordt linksboven en linksonder op het scherm weergegeven met de twee Text-commando's aan het eind. De opdrachten ClrDraw, Line (van,naar) en Pt-On(x,y) staan onder 2nd[DRAW].

Als je het geduld ontbeert om onderstaande programmaregels allemaal in te typen, kun je het groengedrukte gedeelte van het programma weglaten en de Text-commando's vervangen door Output-instructies. Of je kunt, nog makkelijker, het programma SIMULPI binnenhalen vanaf henkshoekje.com (klik op Pythagoras' Hoekje) en via een kabeltje in je GR zetten.

```
PROGRAM:SIMULPI
:ClrHome
:Disp "     SIMULPI"
:Disp "----------------"
:Disp "WERP PIJLTJES OP"
:Disp "DE EENHEIDS-"
:Disp "CIRKEL EN MEET π"
:Output(8,10,"[ENTER]")
:Pause :ClrDraw
:-1.9→Xmin
:1.9→Xmax
:-1.3→Ymin
:1.3→Ymax
:0→Xscl:0→Yscl
:Line(1,1,1,-1)
:Line(1,-1,-1,-1)
:0→T:0→N
:Lbl A
:2rand-1→X
:2rand-1→Y
:N+1→N
:If √(X²+Y²)<1
:Then
:T+1→T
:round(4T/N,4)→P
:Pt-On(X,Y)
:Text(0,0,"π=",P)
:Text(57,0,"N=",N)
:End
:Goto A
:
```



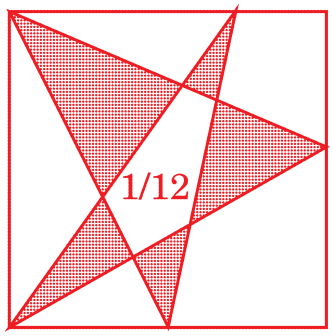
Drie benaderingen van π door middel van het werpen van pijltjes richting de eenheidscirkel met omhullend vierkant

°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Pinpassen
Na het openen van een bankrekening wordt Dion een pinpas en een pincode toegestuurd. Er gaat echter iets fout. Hij krijgt niet één, maar drie pinpassen en pincodes toegestuurd. Om van elke pas uit te zoeken welke code erbij hoort, zit er niets anders op dan combinaties te proberen. Wanneer echter bij een pas tweemaal een verkeerde code wordt gebruikt, wordt de bankrekening geblokkeerd. Kan Dion van elke pas de code vinden zonder dat de rekening wordt geblokkeerd?

Pentagram
In de figuur zie je een pentagram, waarvan de hoekpunten op een eenheidsvierkant liggen. Wat is de oppervlakte van het gekleurde gebied als de oppervlakte van het middelste vijfhoekje gelijk is aan $\frac{1}{12}$?



Rekenmachine
Joris heeft een kapotte rekenmachine. De enige knoppen die nog functioneren zijn π, $1/x$, –, √, = en de haakjes. Voor de grap probeert hij hiermee getallen te maken. Zo kan hij bijvoorbeeld π^3 maken, want

$$\pi^3 = \frac{1}{\frac{1}{\pi-\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi}} - (\pi - \pi - \pi).$$

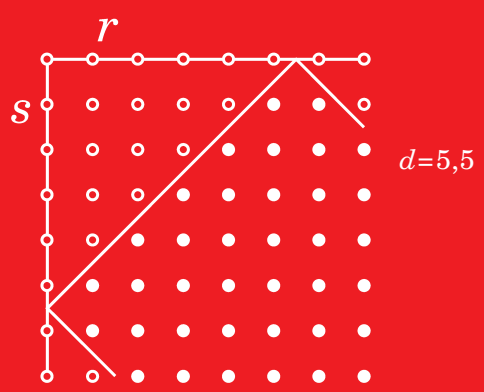
Kan hij ook het getal 1 maken?

Cijfers
Hoeveel getallen zijn er met de eigenschap dat ieder cijfer groter is dan alle voorgaande cijfers of kleiner is dan alle voorgaande cijfers?

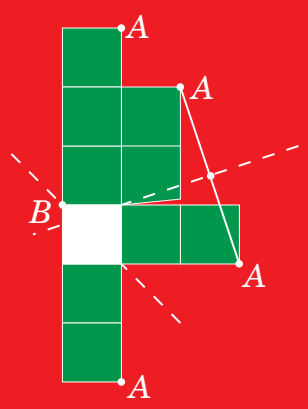
Zes op een rij
Edina gooit met een dobbelsteen, net zolang tot zij zes verschillende uitkomsten op rij heeft. Wat is de verwachting van het aantal keer dat zij moet gooien?

°Oplossingen
nr. 2

Cirkels
De afstand tussen de middelpunten M en N van de twee zeventallen cirkels noemen we d. De cirkels om M en N met stralen r en s ($0 \le r, s \le 7$) snijden elkaar in twee punten, tenzij $r + s \le d$, $r \ge d + s$ of $s \ge d + r$ (raakpunten tellen we niet mee). Het maximale aantal snijpunten is 74, zie de figuur.



Antipoden
Kortste afstanden tot punt A over het oppervlak kun je vinden door uitslagen te maken. In de figuur zie je een paar uitslagen gecombineerd. De afstand van A tot het gezochte punt is $\sqrt{(2\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2}$, oftewel $\frac{\sqrt{130}}{4}$.



Quiz
Annet, Brian en Celsi kunnen met 75 procent kans de jackpot winnen. Annet geeft de kleur die Brian *niet* heeft, Brian geeft de kleur die Celsi *niet* heeft en Celsi geeft de kleur die Annet *niet* heeft. Als iedereen dezelfde kleur muts heeft gekregen, geeft iedereen het verkeerde antwoord en verliezen ze. In elk van de andere gevallen geven precies twee van de drie het juiste antwoord en winnen ze dus de jackpot. In zes van de acht gevallen (oftewel een kans van 75 procent) winnen ze.

Stijgende getallen
Voor iedere keuze van cijfers is er een uniek stijgend getal. Echter, het getal kan niet beginnen met een 0 en het aantal cijfers moet ten minste één zijn. Het antwoord is dus $2^9 - 1 = 511$.

Valse munten
Verdeel de munten in vijf paren. We houden paar 1 vast en wegen de andere paren tegen paar 1, totdat we een paar met een ander gewicht vinden, of tot we alle paren hebben gehad. In het laatste geval zijn er 5 of 10 valse munten en vinden we het antwoord door de twee munten van paar 1 tegen elkaar te wegen (5 wegingen in totaal). Als we een paar vinden met een ander gewicht kunnen we via 2 wegingen uit deze 4 munten een echte en een valse munt kiezen. We wegen nu de resterende paren tegen dit tweetal munten. Zo vinden we in $4 + 2 = 6$ wegingen welke paren respectievelijk 0, 1 en 2 munten hebben.

door **Klaas Pieter Hart**

Wat is $2^{\sqrt{3}}$? In dit artikel gaan we precies afspreken wat 2^x is, voor alle reële getallen x. Ook bekijken we hoe het bij andere grondtallen gaat.

ooo Machtsverheffen voor gevorderden

In de vorige twee nummers van *Pythagoras* hebben we gezien *waarom* n-demachtswortels bestaan en hoe je die efficiënt kunt benaderen. Nu gaan we ons bezig houden met machtsverheffen; daar zitten ook nog een paar haken en ogen aan. Voor elk getal x op de getallenlijn zullen we netjes definiëren wat 2^x betekent.

Om te beginnen voor natuurlijke getallen, daar is de betekenis duidelijk: voor een natuurlijk getal n is 2^n een handige afkorting voor

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ maal}}$$

Voor willekeurige gehele getallen moeten we oppassen: we kunnen niet zonder meer afspreken dat

$$2^0 = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{0 \text{ maal}}$$

en

$$2^{-10} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{-10 \text{ maal}}$$

want die twee dingen betekenen natuurlijk niks.

De juiste afspraak voor 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-10}, ... komt voort uit de wens een mooie eigenschap van de notatie 2^n in stand te houden, namelijk $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$. Voor $m = 0$ zou hier $2^0 \times 2^n = 2^n$ staan en dat betekent dat $2^0 = 1$ de enig juiste afspraak is. Omdat $1 - 1 = 0$ volgt nu dat 2^{-1} zó gekozen moet worden dat $2 \times 2^{-1} = 1$ en dus $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Evenzo volgt $2^{-2} = \frac{1}{4}$, ..., $2^{-10} = \frac{1}{1024}$, ...

Opgave 1. Ga na dat de eigenschap $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$ inderdaad bewaard blijft voor negatieve en positieve m en n.

Gebroken exponenten

Wat te doen met 2^q als q een rationaal getal is, dat wil zeggen te schrijven als $\frac{t}{n}$ met gehele getallen t en n ($n \neq 0$)? Als $q = \frac{1}{2}$, dan dicteert de eigenschap via $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ dat $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Evenzo moet $2^{\frac{1}{3}}$ wel $\sqrt[3]{2}$ zijn, $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$, enzovoort. Voor andere breuken $\frac{t}{n}$ vinden we tenslotte $2^{\frac{t}{n}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^t$.

1. Breuken vind je overal
Neem twee getallen x en y met $x < y$. Het verschil $y - x$ is positief, er is dus een natuurlijk getal n met $\frac{1}{n} < y - x$. Dan geldt ook dat $1 < ny - nx$; er moet dus een *geheel* getal m tussen nx en ny zitten. Maar dan geldt ook $x < \frac{m}{n} < y$; we hebben een rationaal getal tussen x en y gevonden.

Opgave 2. Een rationaal getal kan op meer dan één manier als breuk geschreven worden, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. De waarden $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{2}{4}}$ en $2^{\frac{3}{6}}$ zijn echter allemaal apart afgesproken. Toon aan dat toch geldt $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{3}{6}}$.

Opgave 3. Toon aan: als $\frac{t}{n} = \frac{k}{l}$, dan $\left(\sqrt[n]{2}\right)^t = \left(\sqrt[l]{2}\right)^k$.

Opgave 4. Toon aan: als p en q twee rationale getallen zijn, dan geldt $2^p \times 2^q = 2^{p+q}$.

Andere exponenten

We weten nu al wat 2^q is voor alle rationale getallen q; hoe zit het nu met $2^{\sqrt{3}}$? Omdat $\sqrt{3}$ niet als een breuk te schrijven is, moeten we voor die macht echt iets nieuws verzinnen.

We laten de algebra even liggen en proberen de volgende eigenschap van $q \mapsto 2^q$ in stand te houden: *als $p < q$, dan geldt $2^p < 2^q$*; we zeggen dat machtsverheffen *monotoon* is.

Die monotonie volgt uit de opteleigenschap: er geldt $q = p + (q - p)$ en dus $2^q = 2^p \cdot 2^{q-p}$. Omdat $2^{q-p} > 1$ volgt nu $2^q > 2^p$.

Opgave 5. Toon aan dat inderdaad $2^r > 1$ als r een positief rationaal getal is.

De bedoeling is nu te zorgen dat de functie $x \mapsto 2^x$ monotoon wordt. Voor $\sqrt{3}$ betekent dit dat we twee dingen moeten eisen: als $p < \sqrt{3}$, dan moet $2^p < 2^{\sqrt{3}}$ en als $\sqrt{3} < q$, dan moet $2^{\sqrt{3}} < 2^q$. De vraag is dus of er een getal is dat aan die eisen voldoet, of nog liever: één zo'n getal, want dan hoeven we niet meer te kiezen: we spreken af dat dat ene getal dan de waarde van $2^{\sqrt{3}}$ is.

Ten minste één

We gaan bewijzen dat er een getal x is met de eigenschap dat $2^p < x < 2^q$ voor alle rationale getallen met $p < \sqrt{3} < q$. Dat doen we met behulp van de fundamentele eigenschap van de verzameling van alle reële getallen die in het septembernummer van *Pythagoras* al gebruikt is om voor elke n het *bestaan* van $\sqrt[n]{2}$ aan te tonen.

De getallenlijn is volledig. *Elke niet-lege verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.*

Dat wil zeggen: als A een deelverzameling van $\mathbf{R}$ is waarvoor een x bestaat zó dat $a \leq x$ voor alle $a \in A$ (x is een bovengrens), dan is er een bovengrens α voor A die kleiner is dan alle andere bovengrenzen.

Dit passen we toe op de verzameling $A = \{2^p : p < \sqrt{3}\}$ – deze heeft $2^2 = 4$ als bovengrens. In $\mathbf{R}$ bestaat dus een bovengrens α kleiner dan of gelijk aan alle bovengrenzen van A. Voor deze α geldt dus $2^p \leq \alpha$ als $p < \sqrt{3}$, want α is een bovengrens van A; ook geldt $\alpha \leq 2^q$ als $\sqrt{3} < q$, want in dat geval is 2^q een bovengrens van A (en α is de *kleinste* bovengrens). Om de $\leq$ te verbeteren tot $<$ (want dat willen we), gebruiken we een belangrijke eigenschap van $\mathbf{R}$: tussen elk tweetal reële getallen ligt een rationaal getal; dat bewijzen we in inzet 1.

We gebruiken die eigenschap als volgt: als $p < \sqrt{3}$, dan is er een rationaal getal r met $p < r < \sqrt{3}$. Voor die r geldt $2^p < 2^r$ en $2^r \leq \alpha$, en dus volgt $2^p < \alpha$. Op precies dezelfde manier volgt dat $\alpha < 2^q$ als $\sqrt{3} < q$.

Ten hoogste één

Nu moeten we nog laten zien dat alléén α aan de gestelde eisen voldoet. Dat doen we door te laten zien dat de verzameling van de geschikte getallen diameter nul heeft; dat betekent dat er maar één getal in past.

Neem twee rationale getallen p en q in het interval $\langle 1, 2\rangle$ met $p < \sqrt{3} < q$. Het verschil $2^q - 2^p$ is gelijk aan $2^p(2^{q-p} - 1)$. Op het interval $\langle 0, 1\rangle$ geldt voor elk rationaal getal r dat $2^r \leq 1 + r$, zie inzet 2. Dit kunnen we gebruiken om $2^q - 2^p$ af te schatten:

$$2^q - 2^p \leq 2^p(q - p) < 4(q - p).$$

De laatste ongelijkheid geldt omdat $p < 2$. Hiermee kunnen we aantonen dat de diameter van de verzameling der geschikte getallen inderdaad nul is.

Om, bijvoorbeeld, te laten zien dat de diameter kleiner dan 10^{-6} is, passen we de methode uit *Pythagoras* van juni 2004 toe om de eerste zeven cijfers van $\sqrt{3}$ achter de komma te vinden. We vinden dat $p < \sqrt{3} < q$, waarbij $p = 1{,}7320508$ en $q = 1{,}7320509$. Ook geldt $q - p = 10^{-7}$ en dus

$$2^q - 2^p < 4(q - p) < 4/10^7 < 10^{-6}.$$

Door dit voor steeds betere benaderingen van $\sqrt{3}$ te herhalen, vinden we dat de diameter kleiner is dan elke positieve grens die we maar stellen; de diameter is dus nul.

Eigenschappen van 2^x

Op precies dezelfde manier als voor $\sqrt{3}$ kunnen we 2^x afspreken voor elk reëel getal dat niet als een breuk te schrijven is: 2^x is het unieke getal y met de eigenschap dat $2^p < y < 2^q$ voor alle rationale getallen p en q met $p < x < q$.

De zo verkregen functie heeft alle eigenschappen die we van een exponentiële functie verwachten.

2. De ongelijkheid

De ongelijkheid $2^r < 1 + r$ voor rationale getallen r in het interval $\langle 0, 1\rangle$ volgt regelrecht uit een ongelijkheid die al eerder in *Pythagoras* aan bod is geweest: de *ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde*: als $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een n-tal positieve getallen is, dan geldt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Neem nu natuurlijke getallen k en n met $1 \leq k < n$ en pas bovenstaande toe met $x_1 = \cdots = x_k = 2$ en $x_{k+1} = \cdots = x_n = 1$; er komt $\sqrt[n]{2^k} \leq \frac{1}{n}(n + k)$, ofwel $2^{\frac{k}{n}} \leq 1 + \frac{k}{n}$.

Opgave 6. Voor alle reële getallen x en y geldt $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$.

We kunnen ook bewijzen dat $2^x < 2^y$ als $x < y$ (tot nu toe wisten we dat alleen als één van de twee getallen een rationaal getal is). Met behulp van de eigenschap uit inzet 1 vinden we een rationaal getal p met $x < p < y$. Dan volgt $2^x < 2^p < 2^y$.

Andere grondtallen

Voor elk getal $a > 1$ kunnen we op dezelfde manier als voor 2 de functie $x \mapsto a^x$ definiëren. Wel verloopt het bewijs dat er precies één geschikte waarde voor a^x is als x geen rationaal getal is wat anders.

Als je in inzet 2 overal 2 door a vervangt, krijg je $\sqrt[n]{a^k} \leq \frac{1}{n}(ka + n - k)$; na vereenvoudiging van de rechterkant kun je concluderen dat $a^{\frac{k}{n}} \leq 1 + \frac{k}{n}(a - 1)$.

Bij het bepalen van $a^{\sqrt{3}}$ neem je weer $p < q$ in het interval $\langle 1, 2\rangle$. Dan volgt dat $a^q - a^p = a^p(a^{q-p} - 1) \leq a^p(a - 1)(q - p) < (a^3 - a)(q - p)$. Hiermee kan worden aangetoond dat er maar één getal geschikt is om $a^{\sqrt{3}}$ te zijn.

Als $0 < a < 1$, gebruiken we $1/a$ om a^x te definiëren: we zetten $a^x = 1/(1/a)^x$.

Pythagoras

Januari 2006 **Journaal** Nummer 3

door **Alex van den Brandhof**

Bouwplaattentoonstelling

Bouwplaten en wiskunde zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Tot en met 26 februari is in Museum Willem van Haren in Heerenveen de tentoonstelling *Karton op schaal, de wereld van de bouwplaat* te zien. Hier zie je een bouwplaat van de Basiliuskerk in Moskou. Kijk voor informatie op www.willemvanharen.nl.

Wiskunde-film

In 2001 verscheen *A Beautiful Mind*, een film over een schizofrene, maar geniale wiskundige. De film kreeg acht Oscarnominaties. In november 2005 kwam opnieuw een wiskundefilm in de Nederlandse bioscopen: *Proof*, een film die draait om het bewijs van een eeuwenoud vermoeden dat een student vindt in de nagelaten schriften van een onlangs overleden wereldberoemde, maar geestelijk zieke wiskundige, wiens dochter eveneens briljant is maar zijn ziekte mogelijk geërfd heeft. Wie de film in de bioscoop gemist heeft, doet er verstandig aan de dvd te huren!

Lorenz bezoekt KNMI

Op 16 december 2005 bezocht de beroemde Amerikaanse meteoroloog Edward Norton Lorenz, de grondlegger van de chaostheorie (bekend als de 'vlinder van Lorenz'), een bezoek aan het KNMI in De Bilt. De inmiddels 88-jarige Lorenz vertelde over de betekenis van zijn ontdekking voor de meteorologie. Lorenz ontving vorig jaar in het kader van het 150-jarig bestaan van het KNMI de prestigieuze Buys Ballotmedaille, die voor de twaalfde maal sinds 1888 werd uitgereikt. Door ziekte kon Lorenz toen niet persoonlijk hierbij aanwezig zijn.

RSA-getal

Hetzelfde Duitse team dat op 9 mei 2005 de twee priemfactoren van RSA-200 (een getal van 200 cijfers) vond, heeft op 8 november 2005 de twee priemfactoren van RSA-640 (193 cijfers) gevonden. Getallen met precies twee priemfactoren heten RSA-getallen. Ze spelen een belangrijke rol in de cryptografie.

Opgelost!

Sinds kort mogen twee 'open problemen' de naam 'stelling' dragen. We kunnen deze problemen hier niet uitleggen, maar om aan te geven dat de ontwikkelingen in de wiskunde niet stil staan, vermelden we wel om welke vermoedens het gaat.

Steve Hofmann van de Universiteit van Missouri-Columbia heeft het *Vermoeden van Kato* bewezen. Tosio Kato, beschreef het probleem in twee artikelen die in 1953 en 1961 verschenen. In de jaren '80 werd de ééndimensionale versie van het probleem opgelost. Steve Hofmann bewees het tweedimensionale geval en onlangs bewees hij samen met enkele collega's het Vermoeden van Kato voor alle dimensies.

Daniel Horsley van de Universiteit van Queensland heeft het *Vermoeden van Lindner* bewezen. Dit probleem, afkomstig uit de combinatoriek, werd in de jaren '70 van de vorige eeuw opgesteld door Curt Lindner.

door **Marco Swaen**

De wisku Anne de

Met de uitstapjes bezochten we onder andere de Mayastad Chichén Itzá, waar deze tempel staat

Gaan de standaardsommen uit het boek je vervelen, dan krijg je als leerling misschien de verkeerde indruk dat wiskunde een saai vak is. Dat had ook Anne de Haan kunnen overkomen, maar gelukkig trof zij een leraar die enthousiast was voor zijn vak en haar vraagstukken gaf die een echte uitdaging zijn. Die leraar, Jaap de Jonge van het Gymnasium Felisenum te Velsen-Zuid, organiseerde bijvoorbeeld voor de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade een training, waarin Anne en andere fanatiekelingen zich de tanden stukbeten op pittige opgaven. Uiteraard deden deze leerlingen vervolgens ook mee aan de wiskunde olympiade. In de derde klas nam Anne voor het eerst deel, in de vierde behaalde zij de tweede ronde, en het jaar erop werd zij opgenomen in de selectie voor de internationale olympiade. De afgelopen zomer vertegenwoordigde zij Nederland op de Internationale Wiskunde Olympiade in Mexico. Voor Anne is wiskundevraagstukken maken een ware sport geworden. Het verbaast dan ook niet dat zij inmiddels wiskunde studeert. Over haar reis naar Mexico schreef zij het volgende verslag.

nde van Haan

De internationale Wiskunde Olympiade 2005 in Mexico

Maandag 11 juli 2005 vertrokken we, zes Nederlandse middelbare scholieren (Johan Konter, Sjoerd Boersma, Jinbi Jin, Johannes Steenstra, Sietske Tacoma en Anne de Haan), onder leiding van Fokko van de Bult naar Mérida in Mexico om daar deel te nemen aan de 46ste Internationale Wiskunde Olympiade.

Net als ruim tweeduizend andere Nederlandse scholieren hadden we op 16 januari 2004 meegedaan aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De beste 130 mochten door naar de tweede ronde in Eindhoven, waarna er zeventien deel mochten nemen aan de training voor de internationale ronde. Sietske, Johan en Sjoerd hadden vorig jaar ook al deelgenomen aan de training en die eerste twee waren zelfs al mee geweest naar de internationale ronde, die toen in Griekenland werd gehouden. Voor de andere drie was dit het eerste jaar training. Tijdens de training leerden we veel over wiskunde. Sommige onderwerpen waren bekend van de middelbare school, zoals meetkunde, maar er waren ook veel nieuwe onderwerpen bij. Door het jaar heen werkten we hier thuis aan en waren er enkele trainingsdagen in Eindhoven, die altijd af werden gesloten met een gezellig etentje. Daarnaast waren er een trainingsweekend en een trainingsweek in de jeugdherberg van Valkenswaard. Hier deden we iedere dag veel leuke wiskunde, maar er was ook voldoende tijd voor ontspanning. Zo hebben we bijvoorbeeld veel gevolleybald en boswandelingen en een kanotocht gemaakt. Het jaar werd afgesloten met een laatste toets, waarmee werd bepaald welke zes er door zouden mogen naar de internationale ronde. Dit was nog erg spannend, omdat de toets veel moeilijker was dan verwacht en er veel erg goed waren, maar uiteindelijk waren de bovenstaande zes de besten.

Op 11 juli was het dan eindelijk zo ver en vertrokken we naar Mexico. De vliegreis was lang, maar erg gezellig en Fokko wist ons goed te vermaken met, natuurlijk, wiskundesommen. In Mexico aangekomen werden we opgehaald door onze gids, Alicia, die ons overal zou begeleiden en dat ook uitstekend heeft gedaan. Ze bracht ons naar een schitterend vijfsterrenhotel, waar we direct zijn gaan slapen. De volgende dag konden we gelukkig uitslapen en hebben we ons verder goed vermaakt met wat wiskundesommen en een duik in het zwembad. 's Avonds had-

V.l.n.r. Johannes, Fokko, Anne, Sjoerd, Sietske, Johan, Jinbi, Alicia (onze Mexicaanse gids)

Een eetzaal vol met jonge wiskundigen, wachtend op de orkaan

den we bovendien nog de openingsceremonie, waar alle landen werden voorgesteld. De volgende twee dagen waren de wedstrijddagen. Van negen tot half twee kregen we de tijd om drie opgaven op te lossen. De opgaven waren erg lastig, maar ook al kwam je er niet uit, het was fantastisch om eraan te werken. Bovendien was het een heel speciale ervaring om met ruim vijfhonderd leeftijdgenoten om je heen aan wiskunde te werken, waarbij je er zeker van kon zijn dat iedereen het net zo leuk vond om te doen als jij.

Na de wedstrijd moest al het werk natuurlijk nagekeken worden, voor ons deden Fokko van de Bult en Jan Donkers (de Nederlandse leider, die al eerder naar Mexico vertrokken was) dit. Ondertussen begeleidde Alicia, onze gids, ons naar vele bezienswaardigheden. We maakten een tocht met paardentreintjes naar een ondergrondse grot, waar we hebben gezwommen. Ook zijn we naar de beroemde Mayasteden Chichén Itzá en Dzibilchaltún geweest en Progreso, een mooi strand waar het water heerlijk warm was. Daarnaast hebben we veel spelletjes gedaan met teams uit andere landen, waar we veel contacten aan over hebben gehouden. Bovendien kregen we bezoek van de orkaan Emily. Dit had tot gevolg dat we met het hele hotel moesten overnachten in de eetzaal, waar we weer veel spelletjes hebben gedaan en waar ook een groot kussengevecht natuurlijk niet ontbrak. Uiteindelijk bleek de orkaan om onze stad, Mérida, heen te zijn gegaan.

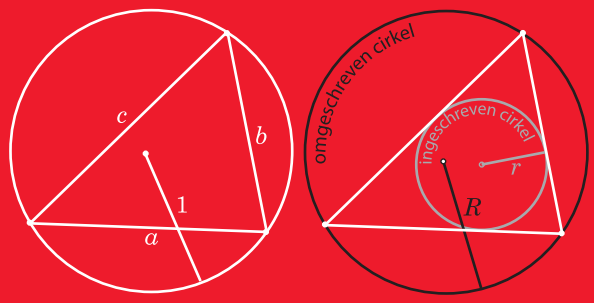
Inmiddels was al het werk nagekeken en bleek dat Nederland het erg goed had gedaan: dit jaar zijn we 47ste geworden (er waren 91 deelnemende landen). Bovendien krijgt ieder jaar de helft van het aantal deelnemers een medaille (hiervan krijgt dan de helft brons, een derde zilver en een zesde goud). Bij ons wisten Jinbi en Johan brons te veroveren en voor Sietske en Sjoerd was er een eervolle vermelding, omdat zij een opgave helemaal goed hadden opgelost.

Na de medaille-uitreiking en het eindfeest was het helaas al weer tijd om afscheid te nemen van alle buitenlandse vrienden diewe hadden gemaakt. Op de terugreis zijn we

naar Cancún gegaan, ongeveer vier uur rijden vanaf Mérida. Daar sliepen we de laatste nacht nog in een jeugdherberg, weer eens iets heel anders, maar toch ook erg gezellig. Vanuit Cancún zijn we teruggevlogen via Houston naar Amsterdam, waar we door familie en vrienden weer op werden gehaald. Kortom een onvergetelijke reis, waar we Jan, Fokko en de Nederlandse Wiskunde Olympiade heel erg voor willen bedanken.

Meer informatie over de reis naar Mexico, inclusief de opgaven van de internationale olympiade, is te vinden op www.imo2005.org.

In de voorbereiding op deze olympiade maakte Anne vele vraagstukken. Hier staan twee opgaven die haar bijzonder aanspraken. De eerste is een meetkundevraagstuk, waarvan zij de oplossing vond aan het ontbijt de laatste dag waarop ze de uitwerkingen mocht insturen. Aan andere vraagstukken, zoals het tweede hieronder, werkte zij een veel langere tijd.



Opgave 1. Een driehoek, waarvan de lengten van de zijden respectievelijk a, b en c zijn, heeft een omgeschreven cirkel met straal 1. Bewijs dat $a + b + c \geq abc$.
Aanwijzing: gebruik de ongelijkheid van Euler: $R \geq 2r$, met R de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek en r de straal van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Opgave 2. Vind alle priemgetallen p, zó dat er gehele x en y bestaan die voldoen aan $p + 1 = 2x^2$ en $p^2 + 1 = 2y^2$.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 2

Munten leggen
Ja, de beginner kan altijd winnen door zijn eerste munt precies in het midden van de tafel te leggen. Elke volgende munt legt hij steeds recht tegenover de munt van zijn tegenstander, waar altijd ruimte is.

Alle hartens?
Op grond van symmetrie zijn de kansen gelijk. Geen hartens bij de ene partij is hetzelfde als alle hartens bij de andere partij.

Telefoonnummers
Er zijn 9 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 900.000 mogelijke telefoonnummers (het eerste cijfer mag geen 0 zijn). Daarvan zijn er 8 x 9 x 9 x 9 x 9 x 9 = 472.392 zonder 7. Dus het aantal nummers met minstens één 7 is 427.608.

Cijfers typen
Bij de 9de aanslag krijg je een 9. Tot en met de 99ste aanslag zijn er nog 90/2 = 45 getallen van twee cijfers: dat is tot en met het getal 54. Dus de 100ste aanslag wordt een 5 (het eerste cijfer van 55). De 1000ste aanslag is een 9 (het eerste cijfer van 910).

Doosje vullen
Allevier in één richting: drie mogelijkheden. Twee naast elkaar en twee dwars erop: zes mogelijkheden (pas op voor dubbel tellen). In totaal zijn er dus negen mogelijkheden.

		6			2	4		
				3				
5		1	4					2
		5	1			7		
	1			4		2		6
4					6	3		
2			8	5	1	6		
								3
		4		6			5	

	1	9	3		4	6	5	
	3	4	5		1	8	7	
	7	5				2	3	
	2	3				9	6	
	6	8	9		5	7	2	
	5	7	2		6	3	1	