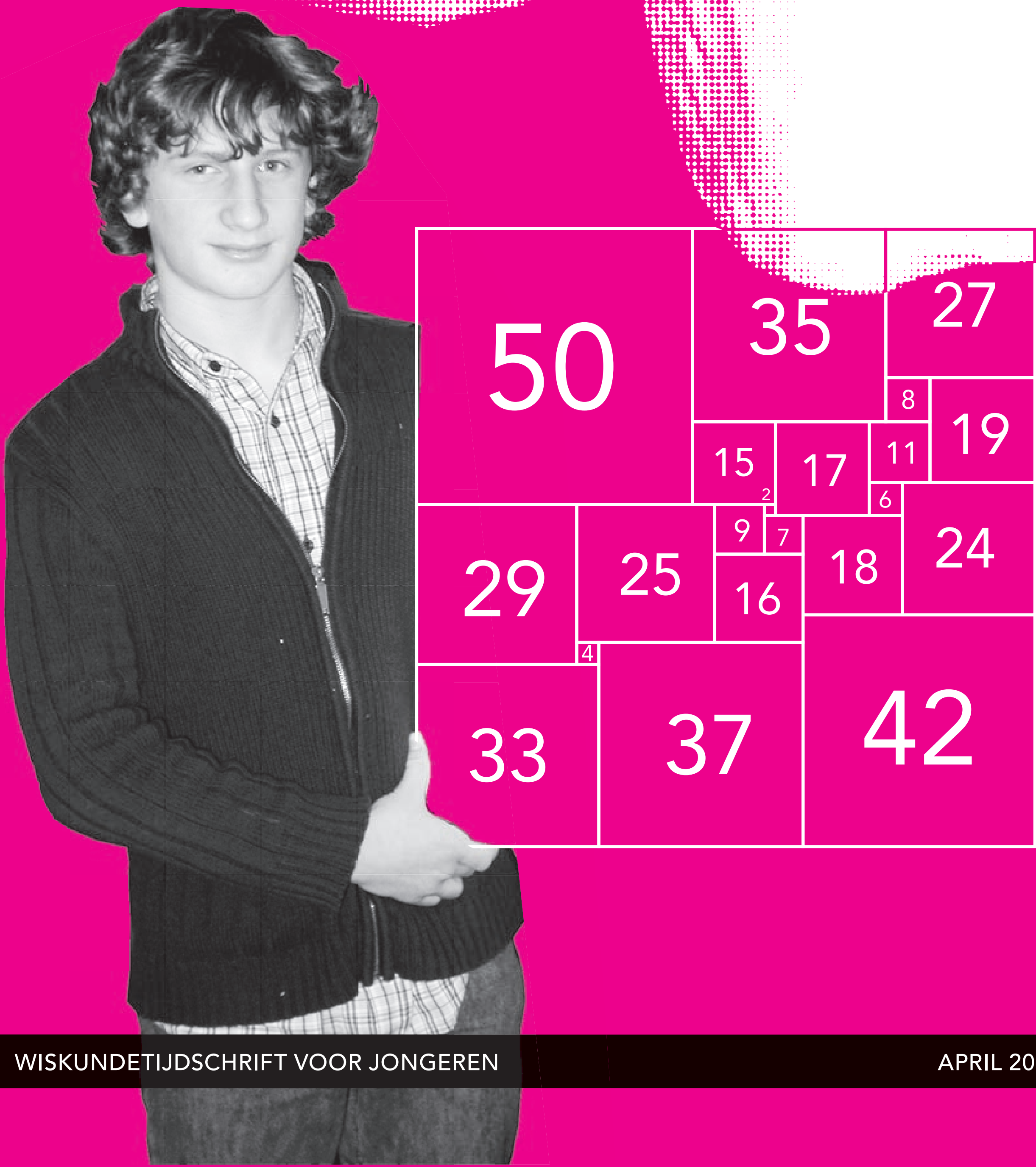
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

APRIL 2006

PYTHAGORAS

45ste jaargang nummer 5
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Arnout Jaspers, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Chris Zaal

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Pythagoras, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Telefoon 071 5277 121, fax 071 5277 101

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. L.A.M. van den Broek, docent wiskunde op de RSG Pantarijn te Wageningen (vdbroek@math.ru.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de Eötvös Universiteit te Boedapest (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector op het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), F. Roos, docent natuurkunde te Tolbert (fd_r@yahoo.com), drs. J. Smit, voormalig docent wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen (smit.windrich@wanadoo.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum en de EHvA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Op het omslag
Het vierkant van Duijvestijn en leerlingen van KSO Glorieux te Ronse (België), die bij zowel de Zeven-prijsvraag als bij Sudoku light in de prijzen vielen.

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ○ zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes ○○ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes ○○○ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

INHOUD

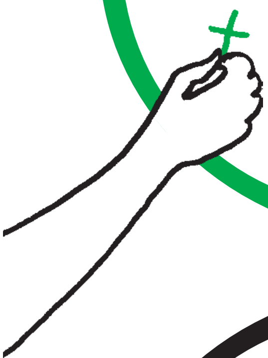
door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

9 8 7 6 5 4 3 2 1 = 100



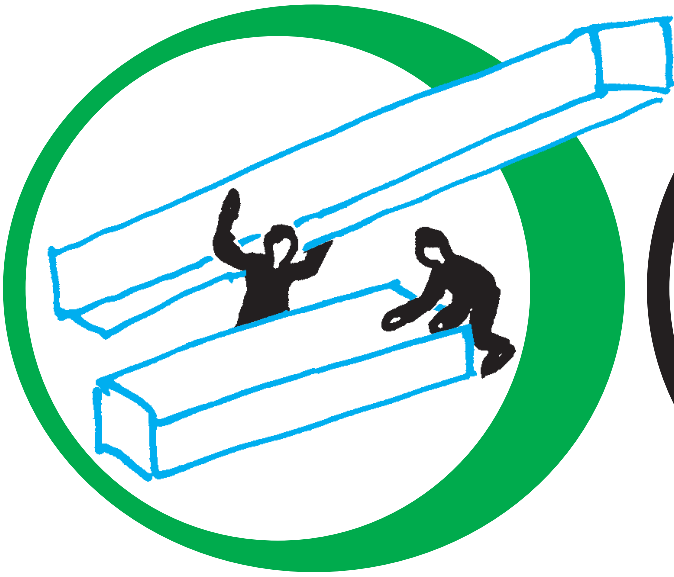
Tekens plaatsen

Tussen twee cijfers mag je een plus of een min plaatsen, maar het hoeft niet (zet je tussen bijvoorbeeld de 4 en de 5 geen teken, dan vormen ze het getal 45). Hoe kun je met zo weinig mogelijk tekens de vergelijkingen die je hier links ziet, kloppend krijgen? (Je mag de volgorde van de cijfers niet wijzigen.)

Spiegel

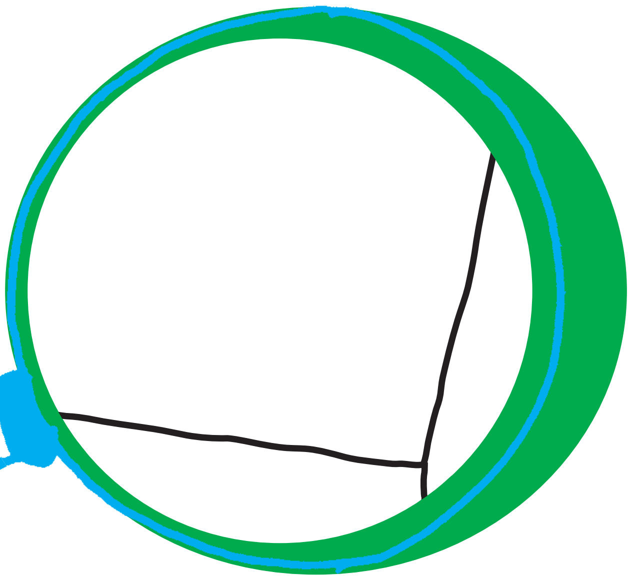
Hoe hoog moet een spiegel zijn om jezelf helemaal te kunnen zien?

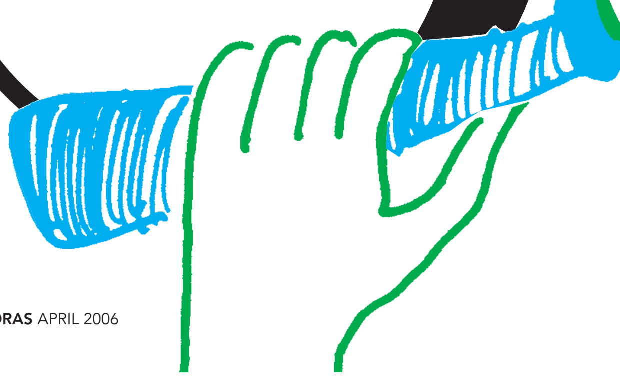
Hoeveel zwaarder?
Per jaar komen er ongeveer 100.000.000 mensen op aarde bij. Maak een schatting hoeveel kilogram per dag de aarde zwaarder wordt.



Vouwen
Pauline en Anton hebben elk een blad papier van a bij b centimeter. Beiden vouwen er een vierkante koker van. De inhoud van Antons koker is twee keer zo groot als die van Pauline. Wat is de verhouding van a en b?

Dobbelsteen
Ik kan van een dobbelsteen alleen één hoekje van één vlak zien. Dat hoekje is leeg. Hoe groot is de kans dat ik de kant van de 2 zie?





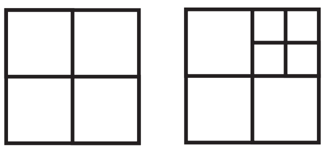
door **Frank Roos**

Nog wat ruitjesblaadjes over? Teken dan eens een vierkant en verdeel dat vierkant in vierkanten. Kan dat in bijvoorbeeld zes, in zeven, in acht? Kan het ook in honderdvijf, en zo ja, op hoeveel manieren? Al tekenend komen er steeds weer nieuwe vragen op en raak je verzeild in een boeiend onderzoek.

Vierkant van vierkanten

In hoeveel vierkanten kun je een vierkant verdelen?

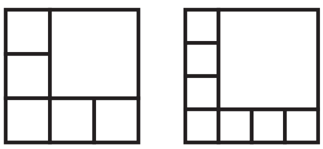
De simpelste manier om het vierkant op te delen, is er een kruis in te zetten zodat je 4 vierkanten krijgt, zie figuur 1 (links).



Figuur 1

Noem n het aantal vierkanten waarin een vierkant verdeeld kan worden. Dan kan n dus 4 zijn. Ga nu uit van het gevierendeelde vierkant. Kies een deelvierkant, en deel dat weer in vieren, zie figuur 1 (rechts). Dan verlies je één vierkant, maar je krijgt er meteen vier voor terug. Dat is een netto winst van drie vierkanten.

Zo voortgaand kun je het vierkant dus verdelen in 7, 10, 13, 16, 19, ..., oftewel in $n = 4 + 3p$ vierkanten, waarbij p een willekeurig natuurlijk getal mag zijn.



Figuur 2

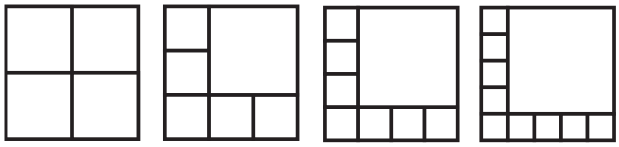
Kun je ook andere waarden voor n krijgen? Ja, neem de verdeling in figuur 2 (links): daar is het vierkant verdeeld in 6 vierkanten. Ook hier kun je weer een kruis in een deelvierkant zetten, zodat je er netto weer drie vierkanten bij krijgt. Dus het vierkant kan ook opgedeeld worden in 6, 9, 12, 15, ..., oftewel in $n = 6 + 3p$ vierkanten, met p een willekeurig natuurlijk getal.

Vanuit de verdeling in figuur 2 (rechts) kun je het vierkant ook verdelen in 8, 11, 14, ..., oftewel in $n = 8 + 3p$ vierkanten.

We missen nu alleen nog verdelingen voor $n = 2$, 3 en 5. Al proberend merk je dat zulke verdelingen niet te maken zijn, al is het niet gemakkelijk dat streng te bewijzen. Conclusie: een vierkant kan verdeeld worden in elk gewenst aantal vierkanten, behalve in 2, 3 of 5.

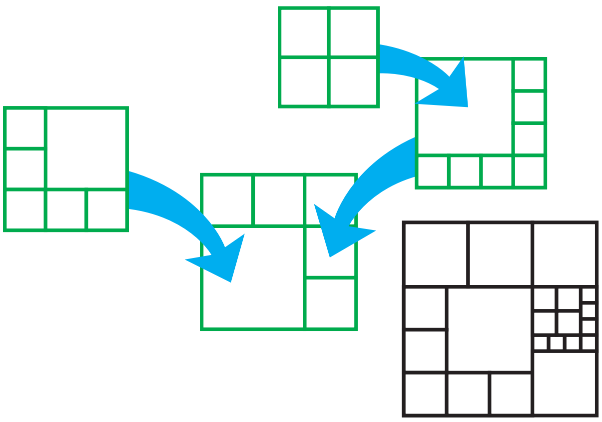
Zijn alle verdelingen herhaald-simpel?

In de vorige paragraaf gingen we uit van verdelingen in 4, 6 en 8. Voortbordurend op die verdelingen kun je een eindeloze rij van verdelingen maken, zie figuur 3.



Figuur 3

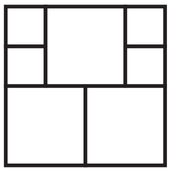
Laten we deze verdelingen de *simpele* verdelingen noemen. Daarnet gebruikten we de eerste drie van deze rij als bouwstenen om ingewikkeldere verdelingen te maken. Het recept dat we daarvoor gebruikten, kunnen we ook wat algemener toepassen: neem een simpele verdeling, vervang daarin een deelvierkant door een simpele verdeling en doe dat met het resultaat nog een aantal keren. Dan kun je heel wat verschillende verdelingen krijgen, zoals die in figuur 4.



Figuur 4

Laten we de verdelingen die we zo kunnen maken *herhaald-simpel* noemen. Dat zijn er zo veel dat je je afvraagt: zijn dit misschien *alle* mogelijke verdelingen?

Het antwoord is: nee. En je hoeft niet zo lang te zoeken tot je een verdeling hebt die je niet uit simpele verdelingen kunt maken. Wij vonden er al een van zeven deelvierkanten, zie figuur 5.



Figuur 5

Zijn er verdelingen met maar één kleinste vierkant?

Zoek eens systematisch alle mogelijkheden af waarin je een vierkant van 5 bij 5 hokjes kunt verdelen. Je komt dan simpele verdelingen tegen, en herhaald-simpele verdelingen, maar ook een heleboel andere. Wat echter wel opvalt, is dat er geen enkele bij is die maar één deelvierkantje van 1 bij 1 heeft. Bestaan er wel verdelingen met maar één kleinste vierkantje?

Het antwoord is: ja. Probeer het zelf. De kleinste die wij vonden, is 13 bij 13. Hij is afgedrukt op pagina 33.

Zijn er verdelingen waarbij alle vierkanten verschillend zijn?

De oplossingen die je bij de vorige vraag vindt, hebben een kleinste vierkant, maar waarschijnlijk wel een heel stel andere vierkanten die onderling gelijk zijn. Onze volgende vraag is: kun je een vierkant opdelen in vierkanten die *allemaal verschillend van grootte* zijn?

Zo'n verdeling heet *perfect*, en de kans dat jij zo'n perfect vierkant van vierkanten vindt, achten wij niet groot. Mocht je het toch willen proberen, dan zul je een blaadje moeten nemen van minstens 112 bij 112 hokjes. Over perfecte vierkanten van vierkanten lees je meer op de volgende bladzijden.

door Marco Swaen

Probleem 59 uit het Schotse boek

Het Schotse café in Lwow, Polen

Terwijl de meeste mensen problemen liever uit de weg gaan, worden wiskundigen er juist onweerstaanbaar door aangetrokken. In het septembernummer schreven we al over de *millennium problems*, zeven vragen die elke wiskundige graag beantwoorden zou.

Lijsten met problemen zijn geen nieuw verschijnsel in de wiskunde. In de Griekse oudheid had men de drie klassieke problemen over constructies met passer en liniaal. Een van deze vraagstukken was volgens de overlevering door de god Apollo aan de mensheid voorgelegd. De klassieke problemen, waarvan de *kwadratuur van de cirkel* het bekendste is, konden pas in de negentiende eeuw opgelost worden.

Befaamd zijn ook de 23 problemen die David Hilbert zijn gehoor voorlegde in 1900 op het tweede Internationaal Wiskundig Congres te Parijs. Hilbert wilde in zijn toespraak aangeven hoe de wiskunde zich in de komende eeuw zou gaan ontwikkelen. Nu, ruim een eeuw verder, zijn de meeste van de 23 problemen van Hilbert opgelost. De prangendste vraag die is overgebleven, is de *Riemannhypothese*. In 2000 kwam dit probleem dan ook opnieuw op een lijst, en wel van de reeds genoemde *millennium problems*. In het juninummer zullen we uitgebreid aandacht besteden aan de Riemannhypothese.

Zo'n lijst met problemen kun je beschouwen als een uitbreidingsplan voor het bouwwerk van de wiskunde. Hilberts lijst was een bouwplan voor een hele eeuw, op wereldschaal. Op kleinere schaal bestaan en bestonden er honderden lijsten. Denk aan de hoofdvragen binnen een bepaald vakgebied, of bijvoorbeeld een lijst met vragen bij een bepaald onderzoeksproject.

Een mooi voorbeeld van zo'n lijst van problemen op een kleinere schaal was de collectie vraagstukken die nu bekend staat als 'de problemen van het Schotse boek'.

Een café in Lwow

Toen Polen na de Eerste Wereldoorlog onafhankelijk werd, stelde de regering van de jonge staat alles in het werk om de ontwikkeling van de exacte wetenschappen te bevorderen. Dat lukte verrassend goed: in de dertiger jaren was er een hele schare vooraanstaande Poolse wiskundigen actief, en wie nu een wiskundeboek openslaat komt daar nog steeds onevenredig veel Poolse namen tegen. Zo bijvoorbeeld de naam van Stefan Banach, die hoogleraar was aan de universiteit van Lwow, een stad die toentertijd in het oosten van Polen lag, maar tegenwoordig in Oekraïne.

Banach was een temperamentvolle man die ervan hield zijn collega-wiskundigen te bestoken met vragen en problemen. Niet alleen in het onderzoeksinstituut, maar ook in het door wiskundigen goedbezochte *Szkocka Café* (Schotse Café). De discussies aldaar moeten heel geanimeerd zijn geweest. Van Banach kwam het idee de besproken problemen en de eventuele oplossingen op te tekenen in een boek, dat in het café bewaard werd. Het opschrijfboek staat nu bekend als het *Schotse boek* en telt zo'n 200 problemen. Het eerste probleem werd er door Banach op 17 juli 1935 in opgetekend. Bij sommige problemen werd de uitgeloofde prijs vermeld, bijvoorbeeld: vijf bier, een kop koffie, of een gans.

De Tweede Wereldoorlog verliep voor Lwow bijzonder ongelukkig. In september 1939 vielen Duitsers en Russen Polen gelijktijdig binnen en kwam Lwow onder Russisch bestuur. Van die tijd dateren nog een aantal notities in het Russisch. De laatste datum in het Schotse boek is 31 mei 1941, kort voordat Duitse troepen zich van de stad meester maakten en er een bloedbad aanrichtten. Het Schotse boek bleef behouden. Inmiddels is het bewerkt, vertaald en uitgegeven, en zijn er diverse congressen aan gewijd.

Probleem 59

Een van de problemen in het Schotse boek gaat over de vierkanten van vierkanten uit het artikel op pagina 4. Probleem nummer 59 werd eind 1935 of begin '36 opgeschreven door Ruziewicz en luidt: 'Kan een vierkant verdeeld worden in vierkanten van onderling verschillende afmetingen?'

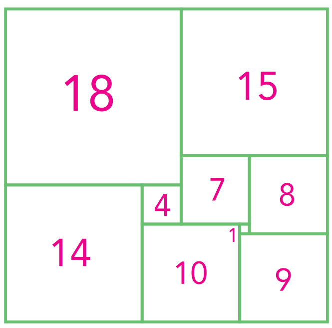
In 1925 had Zbigniew Morón een rechthoek verdeeld in 9 vierkanten die onderling allemaal verschillend van afmeting zijn. De rechthoek van Morón is 32 bij 33 en lijkt bijna een vierkant, zie figuur 1. Misschien dat dit Ruziewicz tot de vraag bracht of het mogelijk zou zijn een echt vierkant van onderling verschillende vierkanten te leggen.

De oplossingen

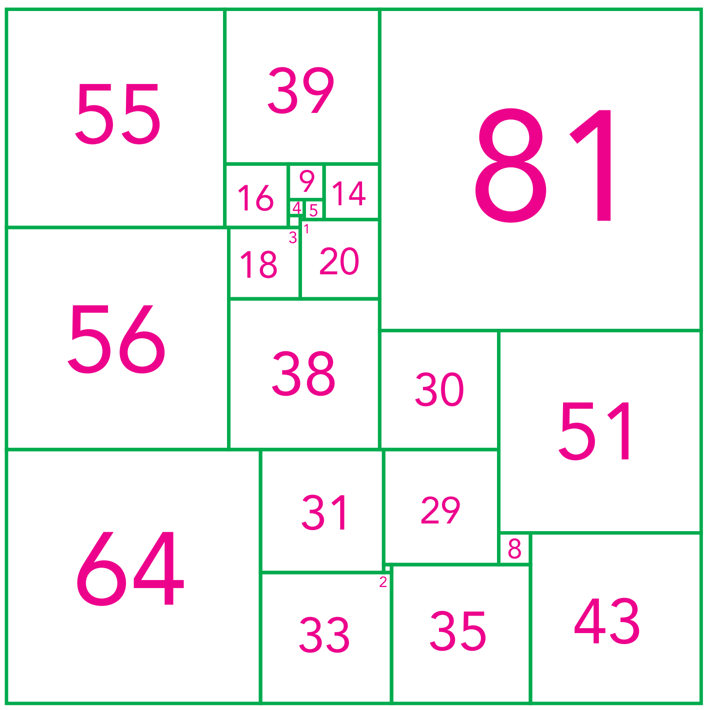
Probleem 59 werd al in 1940 opgelost door Roland Sprague met een vierkant van 55 onderling verschillende vierkanten. De vraag of het misschien met minder deelvierkanten kan. Al in hetzelfde jaar bleek dat inderdaad te kunnen: R.L. Brooks verdeelde een vierkant in 26 vierkanten.

In 1948 kwam T.H. Willcocks met een vierkant van maar 24 vierkanten, zie figuur 2. In 1962 bewees de Nederlander A.J.W. Duijvestijn (e.a.) dat het nooit met minder dan 21 vierkanten zal kunnen. Maar dat het met 21 vierkanten écht mogelijk is, wist hij op dat moment nog niet. Met behulp van de computer rekende Duijvestijn (1927-1988) lang aan dat probleem. In maart 1978 ten slotte vond hij zijn beroemde vierkant van 21 verschillende deelvierkanten, dat de voorkant van deze *Pythagoras* siert.

Bronnen
• Jacques Haubrich, *C.J.Bouwkamp en de Squared Squares*, in: Nieuw Archief voor Wiskunde 5/4 nr.4 dec. 2003
• Ian Bambini, *Quant aux carrés carrelés* (proefschrift), 1999, internet: www.lif-sud.univ-mrs.fr/~colmer/texte

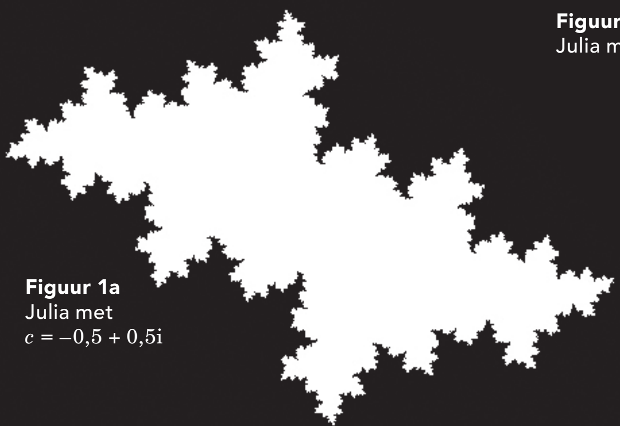


Figuur 1
De rechthoek van Morón

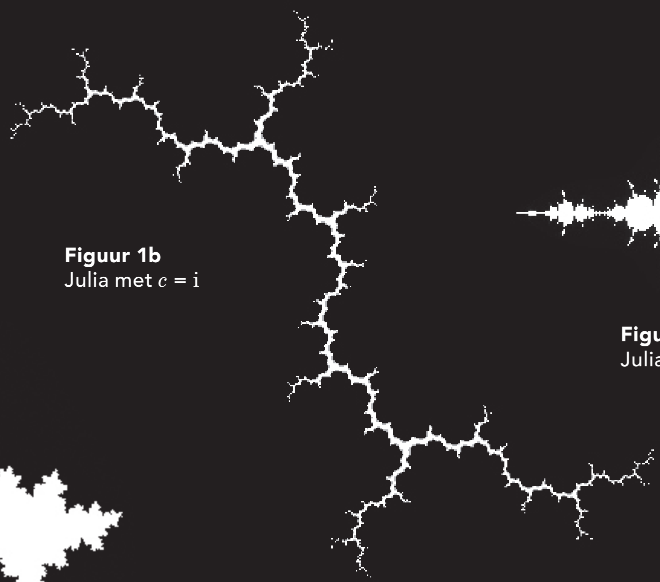


Figuur 2
Het vierkant van Willcocks

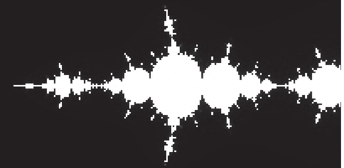
door **Marco Swaen**



Figuur 1a
Julia met
$c = -0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$



Figuur 1b
Julia met $c = \mathrm{i}$



Figuur 1c
Julia met $c = -1{,}25$

REIS DOOR HET FRACTAL-HEELAL

Aan het begin van de twintigste eeuw was er door de Franse wiskundigen P. Fatou en G. Julia al veel onderzoek gedaan naar *chaotisch gedrag* bij bepaalde iteraties. Hun onderzoek had de *Julia-verzamelingen* opgeleverd, grillige figuren met een rand die zich in het klein steeds weer herhaalt. Ongeveer zoals het blad van een koningsvaren, dat uit lobben bestaat waarvan de rand ook weer gelobd is met lobben die weer gelobd zijn enzovoorts. De 'zelfherhaling' was bekend op grond van theoretische inzichten. Plaatjes van de Julia-verzamelingen kon toen nog niemand tekenen, dat vergde te veel rekenwerk.

Computers

Eind jaren zeventig veranderde de situatie: computers waren beschikbaar om het vereiste rekenwerk aan te kunnen. Benoit Mandelbrot, die ooit nog les kreeg van Julia aan de Ecole Polytechnique te Parijs, liet de computer de eerste tekeningen maken van Julia-verzamelingen. Met de plaatjes die uit de computer rolden, was het of hij een nieuw heelal binnentrad.

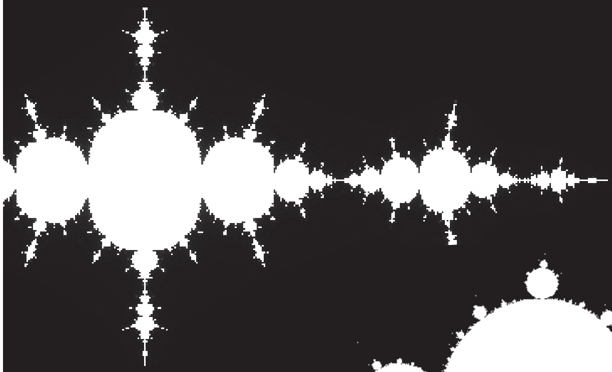
Systematisch onderzoek van de parameter in de Julia-verzameling leverde een nieuwe figuur op, de zogenaamde *Mandelbrot-verzameling*, die ook een zelfherhalende rand heeft, al is daar de zelfherhaling nooit precies.

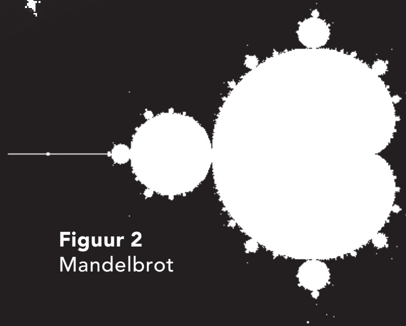
Figuren met een zelfherhalende rand heten *fractals*. Nu computers vele malen sneller zijn, zijn fractals juist handig, omdat betrekkelijk weinig rekenwerk een zeer complex patroon oplevert. Bij computeranimaties worden fractals gebruikt om details in te vullen zoals bergketens, wolkenpartijen, waterreflecties en vogelzwermen.

Internet

Behalve handig zijn de figuren van Julia en Mandelbrot vooral mooi. Verander de parameters een beetje en zoom in, dan is het of je een onbekende hoek van het universum binnengaat.

Op het internet zijn programma's beschikbaar om fractals te tekenen. Er zijn zowel gratis programma's als professionele programma's, die sneller zijn en mooiere effecten opleveren. Een goed nieuw programma is *Ultra Fractal*, dat je gratis kunt uitproberen. Met *Ultra Fractal* kun je niet

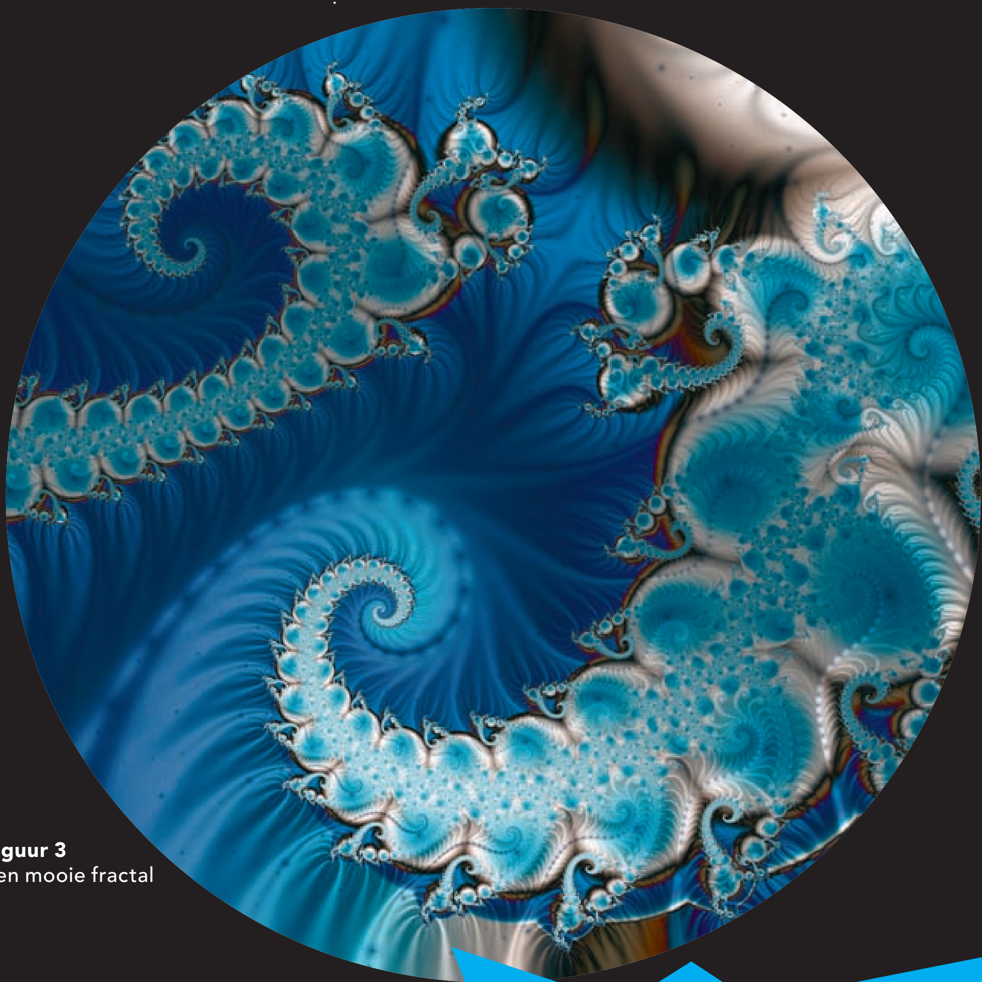




Figuur 2
Mandelbrot

Fractals maken

Kies een getal c, herhaal voor een willekeurig complex getal z de bewerking $z^2 + c$, en bepaal de rand van het gebied waar dit proces leidt tot willekeurig grote waarden. Zo levert elke c een Julia-verzameling. In figuur 1 zie je de Julia-verzamelingen voor $c = -0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$, $c = \mathrm{i}$ en $c = -1{,}25$. Kleur je in het complexe vlak het gebied van de c waarvoor de Julia-verzameling een aaneengesloten gebied is, dan krijg je de Mandelbrot-verzameling, zie figuur 2. Figuur 3 ten slotte toont een van de vele fraaie fractals die te maken zijn.



Figuur 3
Een mooie fractal

alleen fractals met verschillende lagen en animaties maken, maar ook je eigen formules schrijven. *Ultra Fractal* en andere programma's vind je onder meer op

- www.ultrafractal.com
- spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html
- www.eclectasy.com/Fractal-Explorer
- www.ramos.nl/yyfire.html

Maak een reis door het fractal-universum, en stuur jouw ultieme vergezicht vóór 15 juli 2006 naar post@pythagoras.nu. Doe dat digitaal in JPEG-formaat (niet groter dan 1 Mb). Onder de mooiste inzendingen verloten wij twee licenties van *Ultra Fractal 4*.

SUDOKU *light*

acht antwoorden

door **Jan Smit** en **Leon van den Broek**

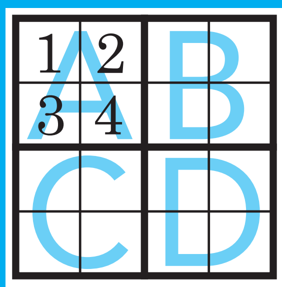
De sudoku-rage gaat ook aan *Pythagoras* niet ongemerkt voorbij. In de afgelopen nummers kwamen interessante vragen over de populaire puzzel ruimschoots aan de orde. Maar we wilden onze lezers ook zelf laten puzzelen aan de wiskunde van sudoku's. De wiskunde van een 9x9-sudoku is behoorlijk zwaar, vandaar dat het bij de prijsvraag *Sudoku light* uit het novembernummer vooral ging om sudoku's van 4x4 en 5x5. Het aantal inzendingen was niet zo groot, maar wel van prima kwaliteit.

4x4-sudoku's

Een 4x4-sudoku heeft slechts zestien vakjes. Zet de cijfers 1 tot en met 4 er zo in, dat elk cijfer precies één keer voorkomt in elke rij, in elke kolom en in elk 2x2-blok.

Vraag 1. Hoeveel verschillende 4x4-sudoku's zijn er?

Noem de blokken (de 2x2-vierkantjes) A, B, C en D. Vul eerst blok A; dat kan op $4! = 24$ manieren. In figuur 1 staat een voorbeeld. Daarna vullen we blok D; zet 1 op een van de vier mogelijke plaatsen en daarna 4 (het cijfer schuin tegenover de 1 in vak A) op een van de drie overige plaatsen. Daarna is er voor 2 en 3 nog maar één mogelijkheid, want 2 mag niet onder of boven 1 staan (anders kan vak B niet gevuld worden) en 3 mag niet naast 1 staan (anders kan vak C niet gevuld worden). Als A en D zijn ingevuld, kan de sudoku maar op één manier worden afgemaakt. Dus zijn er in totaal $24 \times 4 \times 3 = 288$ mogelijkheden.



Figuur 1 Een 4x4-sudoku met blokken A, B, C en D

Vraag 2. Wat is het kleinste aantal startcijfers dat je nodig hebt, en wat is het grootste aantal?
Dit bleek (ook voor ons) een moeilijke vraag. De meeste inzenders maakten 'goede' sudoku's met vier als minimum en vijf als maximum aantal startcijfers, zie figuur 2. (Een sudoku is 'goed' als hij niet meer dan één oplossing heeft en geen enkel startcijfer gemist kan worden.)

1			
		2	
	3		
			4

	1	2	
		3	
4	2		

Figuur 2 Twee sudoku's: een met vier en een met vijf startcijfers

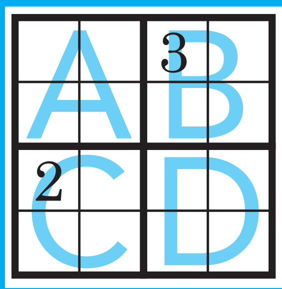
Er zijn echter ook goede sudoku's met *zes* startcijfers, zie figuur 3. Wij weten niet zeker of zes het absolute maximum is.

1	2		
2			3
	3		1

Figuur 3 Een sudoku met zes startcijfers: het absolute maximum?

Dat vier het minimum is, weten wij wel zeker. Stel dat er maar drie startcijfers gegeven zijn. Er zijn dan drie mogelijke gevallen.
Geval 1. Drie startcijfers (1, 2 en 3) in de drie blokken A, B en C. Stel dat de 2 in blok C staat en de 3 in B. Je mag aannemen dat ze beide linksboven in hun blok staan. (Door verwisselen van rijen/kolommen is dat te bereiken.) Je hebt dan de situatie van figuur 4. En waar je nu ook de 1 neerzet in vak A, altijd is de sudoku onbepaald.
Geval 2. Twee van de startcijfers staan in één blok, zeg vak A, en het derde startcijfer staat in een aangrenzend vak, zeg B. Door van een vulling de twee rijen in de vakken C en D te verwisselen, krijg je een tweede vulling.
Geval 3. Twee van de startcijfers staan in één blok, zeg vak A, en het derde startcijfer staat niet in een aangrenzend blok, dus in D. Bij vraag 1 hebben we gezien dat – zelfs als het hele blok A gegeven is – er nog (precies) drie vullingen zijn.

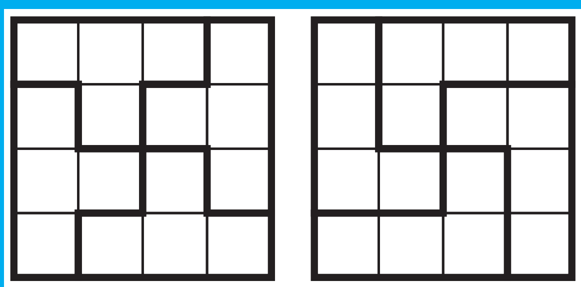
Dus als je maar drie startcijfers gegeven hebt, is er zeker meer dan één vulling en is de sudoku niet goed.



Figuur 4 Met nog één cijfer erbij blijft de sudoku meer dan één oplossing hebben

4x4 met andere stukken

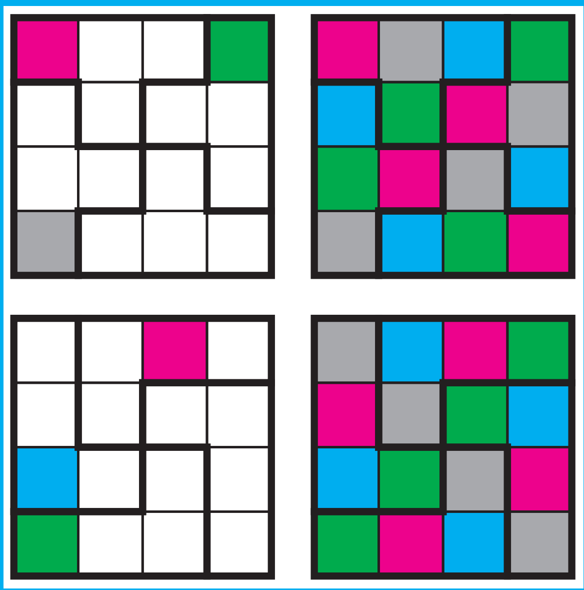
In plaats van de vier 2x2-blokken kunnen we ook sudoku's maken met andere stukken van vier vakjes. Dan moet elk cijfer in elke rij, elke kolom en elk stuk voorkomen. In figuur 5 zie je hoe het 4x4-vierkant opgesplitst wordt in vier T-tetromino's en in vier L-tetromino's.



Figuur 5 T- en L-tetromino-sudoku's (zonder startcijfers)

Vraag 3. Ontwerp voor de vierkanten in figuur 5 een sudoku met zo weinig mogelijk startcijfers.
Anders dan bij de gewone 4x4-sudoku, zijn

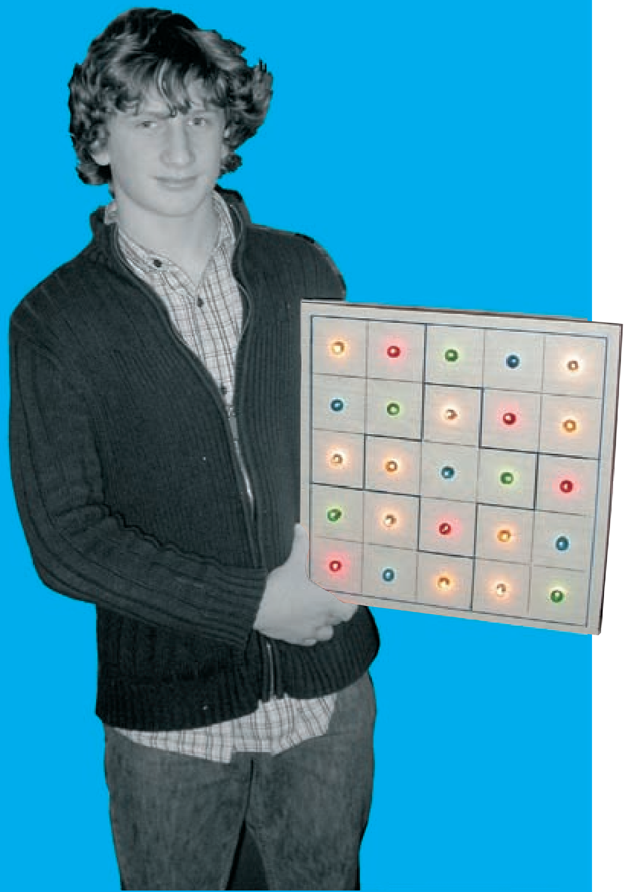
bij de T- en bij de L-sudoku drie startcijfers al genoeg. Figuur 6 toont een inzending van KSO Glorieux te Ronse (België) met kleuren in plaats van cijfers.



Figuur 6 Een T- en een L-tetromino-sudoku: links de beginsituatie en rechts de oplossing

5x5-sudoku's

Bij de 5x5-sudoku's zijn blokken niet eens mogelijk. Wij maakten twee sudoku's met andere stukken en de opdracht was die op te lossen (**vraag 4** en **5**). De oplossingen werden door alle inzenders gevonden. In figuur 7 zie je de oplossingen (de vijf grijze vakjes in de Andreaskruis-sudoku vormen tezamen één 'stuk'). De startcijfers zijn zwartgedrukt, de invulling is blauw.



Figuur 8 Dries is trots op zijn oplossing

De Vlamingen deden bij de Zwitserse-vlag-sudoku weer iets origineels, zie figuur 8. Bovendien merkten ze op dat deze puzzel ook kan met maar vier startcijfers; bravo!

3	2	1	5	4
5	1	4	2	3
4	3	5	1	2
1	4	2	3	5
2	5	3	4	1

2	5	1	4	3
3	1	4	2	5
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1
1	2	3	5	4

Figuur 7 De Zwitserse-vlag-sudoku en de Andreaskruis-sudoku

Vraag 6. Hoeveel vullingen zijn er mogelijk bij een 5x5-sudoku met een Andreaskruis?
Het juiste aantal vullingen (240) werd door de meeste inzenders gevonden. Als je de cijfers 1 tot en met 5 hebt geplaatst in de witte vakken ($5! = 120$ mogelijkheden), dan blijkt dat er nog maar twee mogelijkheden zijn voor de rest. Dat geeft dus $120 \times 2 = 240$ mogelijkheden.

Vraag 7. Maak een vulling voor de 5x5-sudoku met schuine stroken. In figuur 9 zie je de vijf stroken met kleuren aangegeven (vakjes met dezelfde kleur vormen één strook). Elk cijfer moet in elke rij, in elke kolom en in elke strook precies één keer voorkomen.
De eenvoudigste oplossing is: zet steeds hetzelfde cijfer in de vakjes die op een schuine lijn liggen dwars op de gekleurde stroken, zie figuur 9.

Er zijn heel veel andere mogelijkheden. Mooie voorbeelden werden bedacht door klas B1m van het Baudartius College te Zutphen. Deze klas vond bijvoorbeeld een invulling volgens een paardensprongpatroon.

2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5

Figuur 9 Een oplossing van de 5x5-sudoku met schuine stroken

Ten slotte hadden we een vraag over een nxn-sudoku met schuine stroken.

Vraag 8. Bewijs dat voor even n de nxn-sudoku met schuine stroken geen vulling kan hebben.
Deze vraag is echt moeilijk. Geen van de inzenders vond zelf een oplossing. Dat het niet gaat bij even n kan aangetoond worden met behulp van *modulorekenen*. Dat klinkt geleerd, maar is heel eenvoudig. 'Klokrekenen' noemt men het ook wel. Daarom nemen we als voorbeeld $n = 12$. Rekenen modulo 12 gaat zo: $9 + 6 = 3$ (vanaf 9 uur is het 6 uur later 3 uur) en $11 + 2 = 1$, enzovoorts.
We laten zien dat voor $n = 12$ het zelfs niet lukt één cijfer goed te plaatsen. Ieder van de 144 cellen van het 12x12 vierkant geven we een x- en een y-waarde: de x van links naar rechts en de y van beneden naar boven. Cel(1, 1) is dus in de linker benedenhoek. Bovendien krijgt iedere cel een z-waarde volgens $z = x + y$. Bijvoorbeeld cel(9, 6) heeft $z = 3$, want we rekenen modulo 12. Voor alle cellen van dezelfde kleur is de z-waarde hetzelfde.

Stel nu dat we alle 1-en correct hadden geplaatst. Dan hebben ze allemaal verschillende x-waarden, verschillende y-waarden en ook verschillende z-waarden. Alle x-waarden bij elkaar opgeteld geeft $1 + 2 + \cdots + 12 = (1 + 12) + (2 + 11) + (3 + 10) + (4 + 9) + (5 + 8) + (6 + 7)$ en dat is modulo 12 gelijk aan $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$. Ook de som van de y-waarden en van de z-waarden is 6 (modulo 12). Maar $z = x + y$ en dus moet $6 = 6 + 6$ (modulo 12). Dit is een tegenspraak. Dus is het niet mogelijk de 1-en goed te plaatsen. 13

Deze zelfde redenering is te gebruiken bij iedere even n.

Prijswinnaars

1e prijs (€ 100): KSG Glorieux, tso 3e jaar elektriciteit (docent O. De Meulemeester), Ronse (België).
2e prijs (€ 75): Baudartius College, klas B1m (docent J. Schipper), Zutphen.
3e prijs (€ 50): Jan Willem van den Bosch (vwo4, 16 jaar), Woerden.
4e prijs (€ 25): Jeroen Busz (havo4, 16 jaar), Leiderdorp.
Het prijzengeld is beschikbaar gesteld door *De Wageningse Methode*.

de Wageningse Methode

door **René Swarttouw** en **Matthijs Coster**

De zeven-prijsvraag uitslag

De zeven-prijsvraag die we in het septembernummer uitschreven, was niet gemakkelijk. Dat bleek uit het aantal inzendingen: 51 in totaal, waaronder ook nog diverse inzendingen met heel wat rekenfouten. Maar afgaande op het enthousiasme van de inzenders was de prijsvraag ontegenzeggelijk een succes.

Waar vorig jaar de mogelijkheid bestond om op internet programma's te vinden die het rekenwerk uitvoerden, was het dit jaar een stuk lastiger, omdat de P-functie een ongebruikelijke bewerking is. Een van de inzenders vroeg ons dan ook: 'Waar zit de P-functie op de zakrekenmachine?' Dit keer moest men dus op eigen (hoofd)rekenkracht varen, of zelf een computerprogramma schrijven. Het is allebei uitgebreid gebeurd.

Enkele resultaten

De P-functie komt goed van pas voor het maken van $49 = P(77)$, $36 = P^2(77)$, $18 = P^3(77)$ en $8 = P^4(77)$. Elke P die wordt gebruikt, levert 2 punten op. Het getal 60 kan worden gemaakt met 16 P's: $60 = P(P^4(77) \times P^2(7 \times P(P^4(77) \times P^4(77))))$.

Diverse inzenders merkten op dat de rijtjes zevens, zoals 7777, nauwelijks bijdragen aan een hogere score. Dit komt onder meer door het feit dat $P^2(777) = P^2(77) = 36$, maar $P^2(77)$ levert wél 6 punten extra op. Rampzaliger is de situatie voor $P^2(7777) = P^2(77777) = 0$. Desondanks kan zelfs 777 worden toegepast in bijvoorbeeld $189 = P(P^2(77) + P(777))$.

Het hoogste aantal punten voor een getal is 60 (voor 7) gevolgd door 59 (voor $8 = P^4(77)$). Het getal 179 levert maximaal 20 punten op. Dit is het laagste maximum dat bereikt kan worden. $179 = P^3(77) \times P^4(77) + P(P(77) + P^4(77))$. Het getal 159 blijkt het enige getal te zijn dat niet met minder dan 7 zevens te maken is (voor andere getallen krijg je dan niet altijd het maximale aantal punten, maar die zijn wel te maken met minder dan 7 zevens).

Boven de 200

De opdracht was zoveel mogelijk van de getallen 1 tot en met 200 te maken. Diverse inzenders hebben ook gekeken naar wat er bóven de 200 gebeurt. Zo ontvingen we een inzending van klas B1B van het St. Willibrordcollege te Goes: de leerlingen rekenden door tot en met 500 (Stug 7).

Heel fraai is ook de inzending van Sjoerd Visscher, die een javascript schreef, waarbij je zelf kunt aangeven tot hoever je de oplossingen wilt hebben. Op onze website www.pythagoras.nu vind je zijn oplossingen tot en met 2000, en tevens zijn programma. Elke oplossing tot en met 2000 levert een positief aantal punten op. Het kleinste aantal punten dat zijn programma toekent is 4 punten, dat is bij de getallen 1689, 1803, 1839, 1851, 1957 en 1999.

Een erg mooie inzending ontvingen we ook dit jaar van KSO Glorieux in Ronse.

Overzicht aantal inzendingen

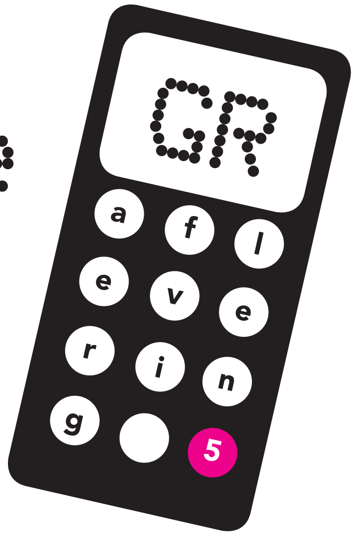
Aantal inzendingen: 51
Aantal inzendingen *Stug 7*: 28
Aantal correcte inzendingen *Stug 7*: 8
Aantal inzendingen *Slim 7*: 25
Aantal inzendingen *Slim 7* met 7135 punten: 8
Aantal klasseninzendingen: 16

De winnaars

Stug 7 individueel: Koen van Asseldonk, Ede
Slim 7 individueel: John Val, Oegstgeest
Stug 7 schoolprijs: klas B1B, St. Willibrordcollege, Goes
Slim 7 schoolprijs: KSO Glorieux, Ronse (België)

door **Henk Pfaltzgraff**

°Haal meer uit je



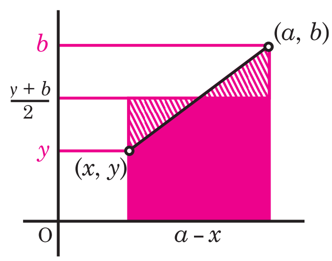
In deze aflevering over programmeren in TIBASIC bespreken we een programma dat de oppervlakte van een gesloten veelhoek berekent. Meer informatie en downloadbare programma's kun je vinden op www.henkshoekje.com (Klik op Pythagoras' Hoekje).

Op de site van Dick Klingens (www.pandd.demon.nl) is een fantastisch overzicht gegeven van onderwerpen uit de meetkunde, inclusief bewijzen, geschiedenis, werkbladen en animaties. *Dick in Wonderland* zou je dit digitale meesterwerk kunnen noemen. Daar wil en kan deze schrijver niet aan tippen. Grafische rekenmachines zijn niet geschikt voor fraaie meetkundige plaatjes: daarvoor zijn 96 x 64 pixels eigenlijk te weinig. Maar meetkundige berekeningen kunnen er prima mee gemaakt worden. Een meetkundige figuur kan vastgelegd worden door coördinaten of vectoren die aan rekenregels onderworpen zijn. En rekenen kunnen onze TIBASIC-programma's als de beste.

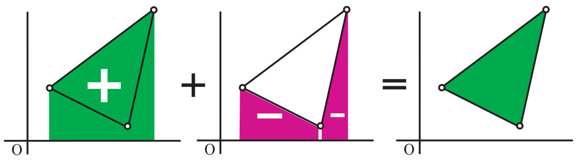
De oppervlakte van een veelhoek

Het meetkundeprogramma OPPVEELH berekent de oppervlakte van een gesloten veelhoek. We gaan uit van een veelhoek waarvan de hoekpunten door coördinaten gegeven zijn.

De oppervlakte van de veelhoek kun je handig berekenen door het optellen en aftrekken van rechthoekige trapezia. Neem een zijde van de veelhoek, zeg dat die hoekpunten (x, y) en (a, b) verbindt, zie de illustratie links.



De oppervlakte van het trapezium tussen deze zijde en zijn projectie op de x-as is dan gelijk aan 'basis maal gemiddelde hoogte', oftewel $(a-x)\times\frac{1}{2}(y+b)$. Daarbij zijn we ervan uitgegaan dat (x, y) links van (a, b) ligt, anders levert $(a-x)\times\frac{1}{2}(y+b)$ een negatief getal op. Toch nemen we niet de absolute waarde, want juist door negatieve waarden toe te staan, wordt de som voor alle afzonderlijke trapezia (+ en – gerekend) precies de oppervlakte van de veelhoek. Voor een driehoek ziet dat er zo uit:

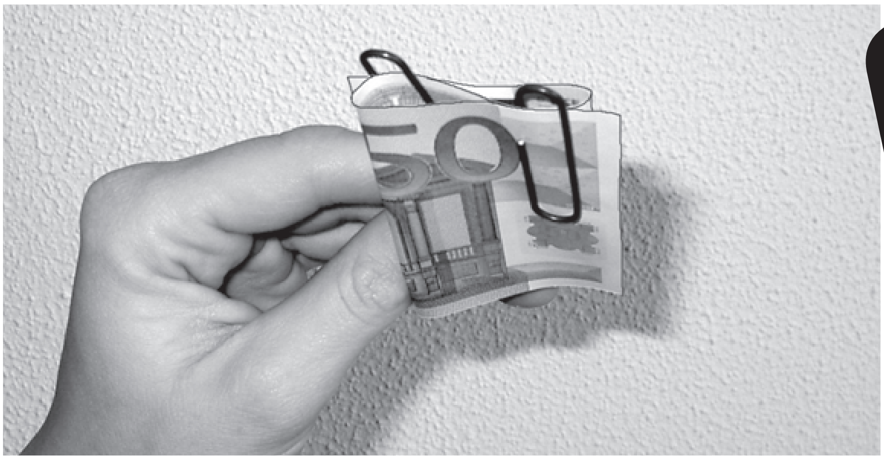


Het programma dat wij geschreven hebben, berekent de oppervlakte van een veelhoek volgens de bovenstaande aanpak. Het programma vraagt je de hoekpunten met coördinaten in te voeren. Druk op Enter als je van het assenstelsel weer terug wilt naar het invoerscherm.

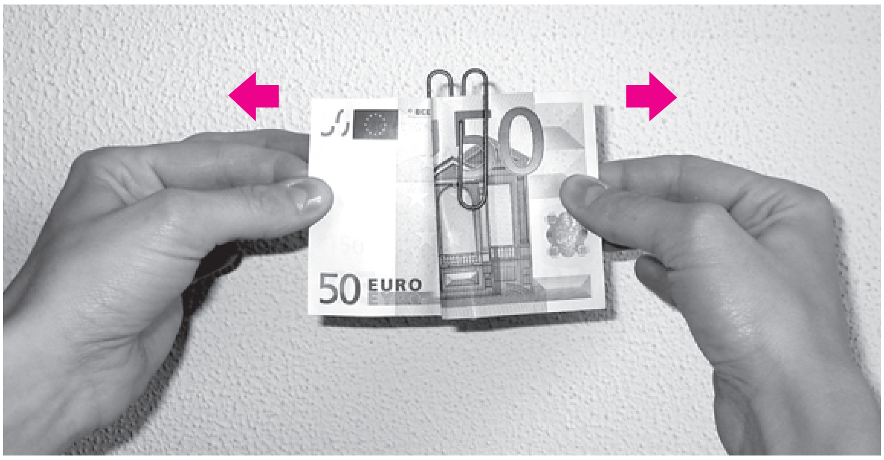
De teken-instructies Pt-On(x, y) en Line() zijn te vinden onder 2nd[DRAW]. Hiernaast zie je de kern van het programma, de uitgebreide versie vind je op Henks Hoekje.

```
PROGRAM:OPPVEELH
:ClrDraw
:ClrHome
:FnOff
:PlotsOff
:Disp "EERSTE HOEKPT:"
:Prompt X,Y
:X→P:Y→Q
:X→A:Y→B:0→S
:Pt-On(A,B,2)
:Pause
:Lbl 0
:Disp "VOLGEND HOEKPT:"
:Prompt X,Y
:.5(X-A)(Y+B)+S→S
:If X=P and Y=Q
:Goto 1
:Line(A,B,X,Y)
:X→A:Y→B
:Pt-On(A,B,2)
:Pause
:Goto 0
:Lbl 1
:abs(S)→S
:Line(A,B,X,Y)
:Text(0,0,"OPP =",S)
:Pause :ClrHome
:ClrDraw
```

Geschakelde paperclips



Vouw een bankbiljet in drieën en plaats twee paperclips zoals op de foto hiernaast.



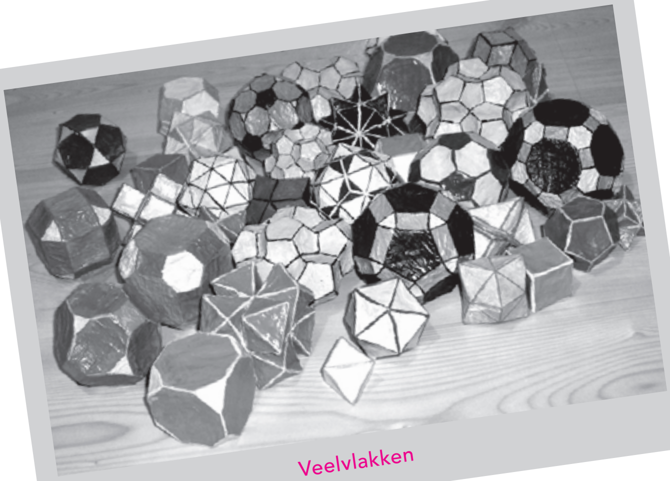
Neem de uiteinden van het bankbiljet in je handen en trek de uiteinden rustig naar buiten.

Als het bankbiljet helemaal is uitgevouwen, vliegen de paperclips van het biljet af en... de paperclips zitten aan elkaar vast!

Voer je de truc langzaam uit, dan zie je hoe de paperclips in elkaar schuiven terwijl je het biljet glad trekt. De bedenker van de truc is Bill Bowman uit Seattle (VS). In het boekje *Mathematical Magic* (1964) van William Simon wordt de truc beschreven.
Er zijn ook variaties. Probeer maar eens twee paar paperclips tegelijk aan elkaar te zetten (breng aan beide zijden van het biljet een paar paperclips aan), of rijg drie paperclips tot een kettinkje (vouw het biljet in vieren in plaats van in drieën).

door **Marco Swaen**

De wiskunde van Marleen Kooiman



Veelvlakken

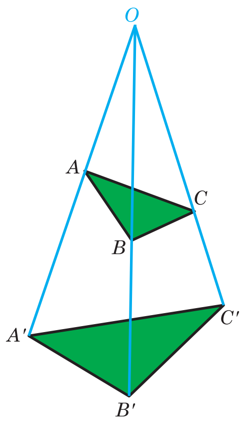
Marleen bij de presentatie van haar werkstuk

Op veel scholen is het een jaarlijks terugkerend evenement geworden: leerlingen presenteren hun profielwerkstukken voor algemeen publiek. Zo ook op het Bonhoeffercollege in Castricum, waar dit jaar Marleen Kooiman indruk maakte met haar scriptie *De stelling van Desargues in breder perspectief*. De onderwerpkeuze was ongebruikelijk, de stelling van Desargues zul je vergeefs in schoolboeken zoeken. Indrukwekkend was vooral wat Marleen met het onderwerp deed. In plaats van te bewerken wat zij in boeken en op websites vond, stelde Marleen zich ten doel de meer dan driehonderd jaar oude stelling aanzienlijk algemener te maken.

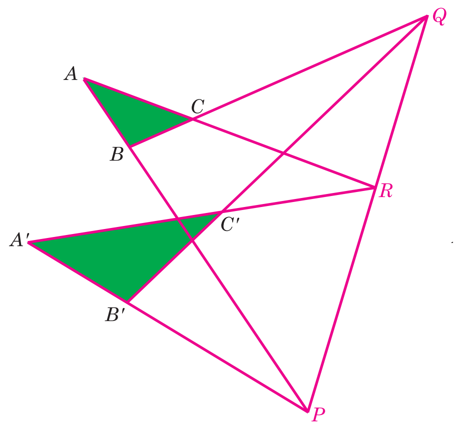
Het was niet de eerste keer dat Marleen zelf aan het onderzoeken sloeg. Oplettende lezers kennen haar naam nog van het artikel *Nieuwe platonische lichamen*, dat vorig jaar (juni 2005) in *Pythagoras* verscheen. De geschiedenis achter dat artikel vertelt zij zelf: 'Met veelvlakken was ik al eerder bezig. Al op de basisschool en in de brugklas sneed ik in gedachten stukken van een kubus af en maakte daar uitslagen van. Later ben ik wat meer gaan ordenen en gaan bewaren wat ik maakte.'

In de zomer van 2004 las Marleen in *Pythagoras* (juninummer 2004) hoe Popke Bakker de regelmatige veelvlakken in een tabel zette waarin echter nog een aantal intrigerende open gaten prijkten. 'Ik verwachtte dat ik met mijn methode gemakkelijk zou kunnen aantonen dat de gaten in zijn tabel ook daadwerkelijk leeg waren. Maar tot mijn verrassing waren ze *niet* leeg.'

Na de vondst van twee nieuwe regelmatige veelvlakken greep Marleen het profielwerkstuk aan om zich te verdiepen in een ander onderwerp uit de meetkunde. Ze kwam terecht bij de stelling van Desargues, die gaat over driehoeken in het platte vlak, zoals we op de volgende bladzijden zullen uitleggen. Marleen bedacht hoe je de stelling kunt uitbreiden naar figuren met meer hoekpunten en in hogere dimensies. Om haar bewijzen sluitend te krijgen, leerde zij zichzelf de methode van volledige inductie aan. En aldus plaatste zij de stelling van Desargues in een veel breder perspectief.



Figuur 1a



Figuur 1b

De stelling van Desargues

In de figuren 1a en 1b zie je twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ die op een bijzondere manier ten opzichte van elkaar liggen. Links is het zo dat de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden (dus AA', BB' en CC') door één punt gaan. Rechts daarentegen is het zo dat de snijpunten van overeenkomstige zijden (verlengd) op één lijn liggen.

De stelling van Desargues zegt: als twee driehoeken liggen zoals in figuur 1a, dan liggen ze meteen ook zoals in figuur 1b. Oftewel: als van twee driehoeken de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, liggen de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn.

Het omgekeerde van de stelling is ook waar: liggen driehoeken zoals in figuur 1b, dan liggen ze ook zoals in figuur 1a.

Projectieve meetkunde

In de stelling van Desargues spelen afmetingen van hoeken, lijnstukken, of vlakdelen geen rol. Het is een stelling uit een gebied van de meetkunde waarin het alleen gaat om rechte lijnen en hun snijpunten: de *projectieve meetkunde*.

Op school heb je geleerd dat in het platte vlak twee lijnen elkaar snijden óf evenwijdig zijn. Lopen twee lijnen bijna evenwijdig dan is hun snijpunt heel ver weg, je zou daarom kunnen stellen: evenwijdige lijnen hebben wel een snijpunt, maar dat ligt oneindig ver weg. Dat klinkt als een woordspelletje, maar in een perspectieftekening zie je die snijpunten van evenwijdige lijnen gewoon liggen op de horizon.

Dualiteit

Accepteer je eenmaal dat ook evenwijdige lijnen een snijpunt hebben, dan ontstaat er een wonderlijke symmetrie tussen punten en lijnen:

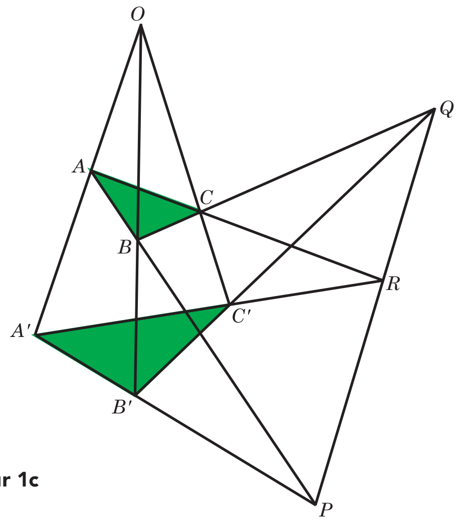
- twee lijnen hebben altijd één punt gemeen (hun snijpunt);
- twee punten hebben altijd één lijn gemeen (de lijn waar zij samen op liggen).

Deze symmetrie van punten en lijnen heet *dualiteit*. Elke figuur in de projectieve meetkunde heeft een duale figuur. De duale figuur van een punt is een lijn. De duale figuur van 'drie punten op een lijn' is 'drie lijnen door een punt'.

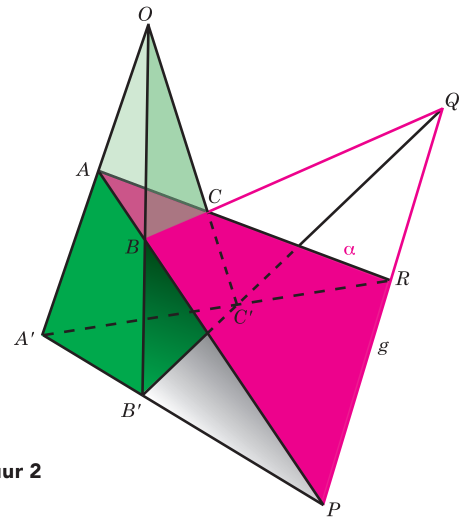
Een driehoek is een figuur die bestaat uit drie punten en de drie lijnen die die punten paarsgewijs verbinden. De duale figuur van een driehoek zou je een *driezijde* kunnen noemen: drie lijnen abc en de drie snijpunten die ontstaan als je steeds twee zijden snijdt.

Bij elke uitspraak hoort een duale uitspraak, waarin de rol van punten en lijnen omgewisseld is. Laten we eens kijken wat de duale stelling van Desargues is.

'Als van twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden door één punt gaan, dan liggen de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn' wordt 'als van driezijden abc en $a'b'c'$ de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn liggen, dan gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt.' Bekijk je dit goed, dan zie je dat dit niets anders is dan de omgekeerde stelling.



Figuur 1c



Figuur 2

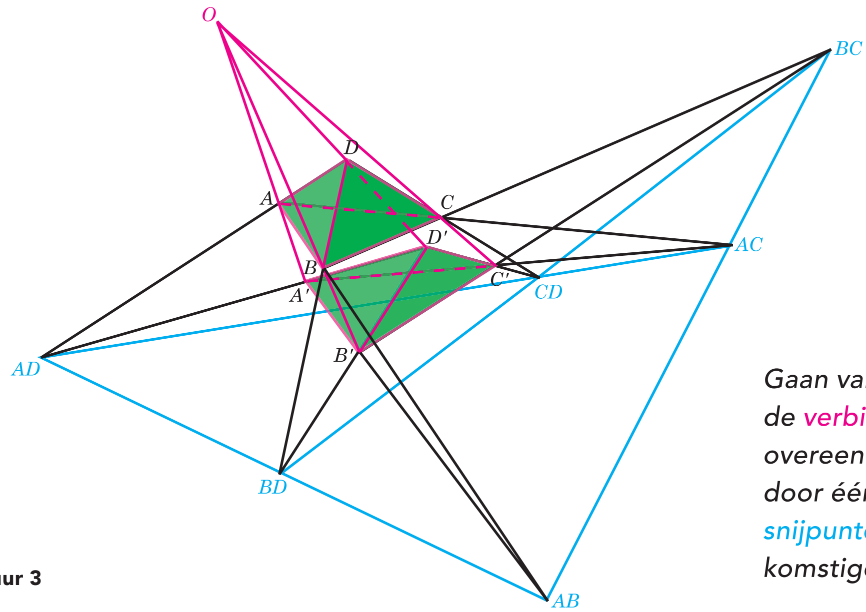
Zien is bewijzen

Een andere verrassing aan de stelling van Desargues is dat je hem kunt bewijzen door er alleen maar op een andere manier naar te kijken. Vat de tekening van de driehoeken niet op als een platte tekening, maar als een ruimtelijke, zie figuur 2. Beschouw $ABC\ O$ als een piramide. Dan is $A'B'C'$ een doorsnede van die piramide met een vlak α. De lijnen AB en $A'B'$ liggen beide in het zijvlak OAB, dus ze snijden. Omdat AB in het grondvlak ligt, en $A'B'$ in α, ligt hun snijpunt dus op de snijlijn van α en de grond, dus op de grondlijn g. Idem voor Q en R. Dus P, Q en R liggen op één lijn.

Desargues algemener

Marleen Kooiman heeft de stelling van Desargues op twee manieren algemener gemaakt. Ze heeft gekeken of de stelling ook geldt als je met meer dimensies werkt. Dat leverde haar een versie op voor *n-simplices*, dat wil zeggen: voor de leden van een familie die begint met lijnstukken, driehoeken en viervlakken. In haar scriptie luidt het: *Als van twee n-simplices A en A' de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige zijden in eenzelfde $(n-1)$-dimensionale ruimte.*

In figuur 3 zie je de driedimensionale versie van de stelling. Ook hield ze zich bezig met de vraag of de stelling geldt voor vierhoeken, vijfhoeken, enzovoorts. De voorwaarde die zij voor n-hoeken vond, laten wij hier achterwege. Voor vierhoeken is het: de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten én van de snijpunten van de diagonalen gaan alle door één punt.



Gaan van twee viervlakken de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige ribben in één vlak

Figuur 3

°Pythagoras Olympiade

door Arno Kret en Thijs Notenboom

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.
De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juni 2006.

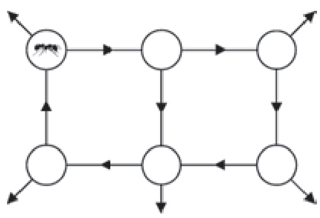
OPGAVE 130

Stel n is een positief geheel getal. Bewijs dat er oneindig veel gehele, positieve getallen a, b en c met $a \neq b$ bestaan zó dat

$$a^n + b^n = c^{n+1}.$$

OPGAVE 131

Een mier wandelt over het hieronder getekende bord (hij begint linksboven). Vanuit iedere cirkel loopt hij met kans $\frac{1}{2}$ in de richting van een van de twee uitgaande pijlen. Zodra de mier van het bord valt, stopt hij met wandelen. Bereken de kans dat de mier bij de cirkel waar hij begonnen is van het bord valt.



OPLOSSING 126

Een geheel getal heet *gaaf* als het geschreven kan worden als de som van twee kwadraten van gehele getallen (waarbij die getallen eventueel ook nul mogen zijn).
Bewijs:

a. Als n gaaf is, dan is $2n$ ook gaaf.
b. Als n gaaf is, dan is $3n$ niet gaaf.

Oplossing. a. Stel n is een gaaf getal. Dan is n te schrijven als $n = a^2 + b^2$ voor zekere a en b. Voor $2n$ geldt nu: $2n = (a + b)^2 + (a - b)^2$, en dus is $2n$ ook gaaf.
b. We tonen de bewering aan met behulp van een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat er wél gehele getallen n zijn waarvoor geldt dat zowel n als $3n$ gaaf zijn.
Laat m het kleinste positieve getal zijn met die eigenschappen. Dus $3m = a^2 + b^2$ voor zekere a en b. Kwadraten zijn 0 of 1 modulo 3. Omdat $3m \equiv 0 \mod 3$, zijn a^2 en b^2 dus beide deelbaar door 3. En omdat het kwadraten zijn, zijn ze zelfs deelbaar door 9, en dan is ook hun som $3m$ deelbaar door 9. Er volgt:

$$\frac{m}{3} = \frac{a^2}{3^2} + \frac{b^2}{3^2}.$$

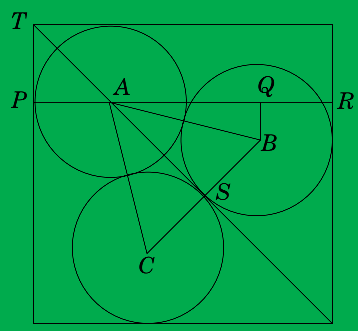
Stel $k = \frac{m}{3}$. Er geldt dus dat k gaaf is, en dat $3k = m$ ook gaaf is. Omdat $k < m$, volgt dat m niet het kleinste getal is met de genoemde eigenschap, een tegenspraak.

Deze opgave werd goed opgelost door: Elias C. Buissant des Amorie uit Castricum, P. Dekker uit Krimpen aan de Lek, Milo van Holsteijn van **RSG Pantarijn** te Wageningen, Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven en Ramses Verachtert van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel.
De boekenbon gaat naar Ramses Verachtert.

OPLOSSING 127

Gegeven zijn drie cirkels met straal 1. Wat is de zijde van het kleinste vierkant waarin deze drie cirkels passen zonder te overlappen?

Oplossing. De drie cirkels moeten elkaar raken en een van de cirkels (in de figuur de cirkel met midden A) moet in een hoek T van het vierkant liggen. De zijde van het vierkant is minimaal wanneer het raakpunt S van de cirkels met midden B en C precies ligt op de lijn door A en T. Laat P de loodrechte projectie van A op de aangegeven zijde zijn, Q de loodrechte projectie van B op de lijn PA, en R het aangegeven snijpunt. Dan is $|PR| = |PA| + |AQ| + |QR| = |AQ| + 2$.
Driehoek ABC is gelijkzijdig en dus geldt $\angle CAB = 60°$. De lijn TA gaat door S, dus TA is een bissectrice van $\angle CAB$, en $\angle SAB = 30°$. Er geldt $45° = \angle PAT = \angle SAQ$, dus $\angle BAQ = 15°$. We vinden $|AQ| = 2 \cos 15°$ en dus $|PR| = 2 + 2 \cos 15°$.

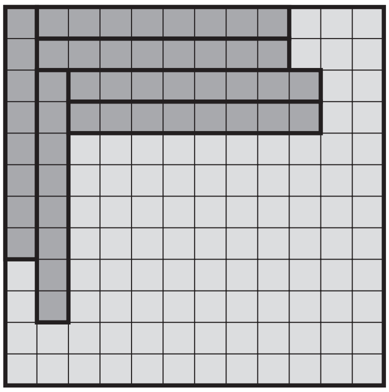


Deze opgave werd goed opgelost door: P. Dekker uit Krimpen aan de Lek, Milo van Holsteijn van **RSG Pantarijn** te Wageningen, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffercollege** te Castricum, Roeland Juchtmans van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel, John Val uit Leiden, Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven en Ramses Verachtert van het **Sint-Norbertusinstituut** te Duffel.
De boekenbon gaat naar Roeland Juchtmans.

Problemen

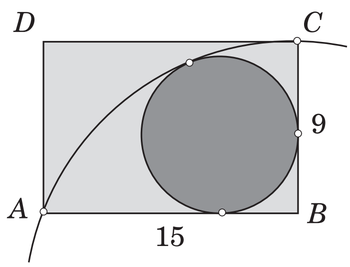
door **Dion Gijswijt**

Inpakprobleem
Gegeven is een vierkant van 12 bij 12 eenheidsvierkantjes. Wat is het grootste aantal strips van acht eenheidsvierkantjes, dat je in dit vierkant kunt passen? Alle strips moeten evenwijdig aan een van de zijden van het vierkant liggen.



Sneeuwwitje
Op de vlucht voor de Boze Koningin, wil Sneeuwwitje in het huisje van de zeven dwergen overnachten. De dwergen (die met hun edelstenenmijn vrij vlot met pensioen konden) hebben intussen een wiskundestudie opgepakt en willen dat Sneeuwwitje éérst een kleine puzzel oplost. Haar taak is om de dwergen elk een blauwe of een rode muts te geven, en wel zo dat Dopey en Grumpy verschillende kleuren krijgen. Helaas kan ze de namen van de dwergen niet raden. Door alle $2^7 = 128$ muts-verdelingen te proberen moet het haar zeker lukken. Maar hoeveel pogingen heeft ze minimaal nodig?

Twee cirkels
Gegeven is een rechthoek $ABCD$ met $AB = 15$ en $BC = 9$. Een grote cirkel gaat door punt A en raakt in punt C aan zijde CD. Een kleine cirkel raakt aan AB, BC en aan de grote cirkel. Wat is de straal van de kleine cirkel?



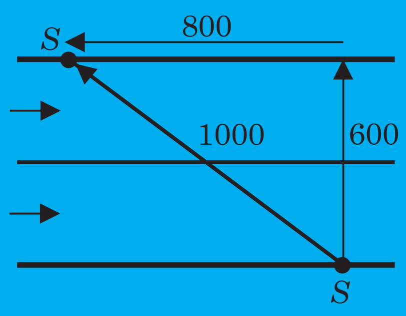
Drie breuken
Gegeven is een willekeurig positief geheel getal k. Is het waar dat

$$\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{k}{7}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{2k}{7}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{4k}{7}\right\rfloor$$

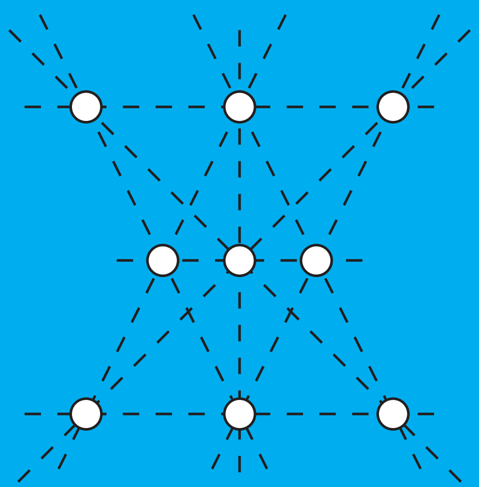
altijd gelijk is aan k?
Hier is $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x.

Oplossingen nr. 4

Schuitje varen
Stel dat Annelies x seconden nodig heeft om heen en weer te varen. Dan moet ze ten opzichte van het water in de Donau in die tijd $4x$ meter tegen de stroomrichting in varen. Ten opzichte van het water vaart ze dan een afstand van $\sqrt{(4x)^2 + 600^2}$ meter. Maar ze legt een afstand af van $5x$ meter, dus $25x^2 = 16x^2 + 600^2$ en dus $3x = 600$.
Ze doet er dus 200 seconden over.



Drie op een rij
De architect heeft geen gelijk. Hieronder zie je een oplossing met tien rijen van drie bomen. Meer dan tien rijen van drie is niet mogelijk.



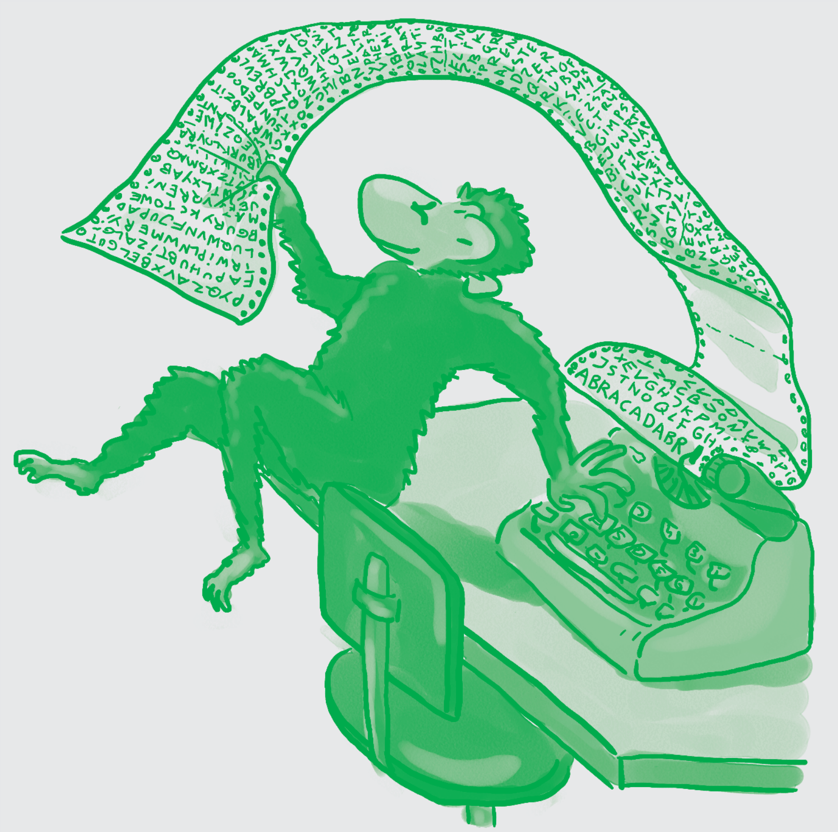
Parelsnoer
Geef elk van de zeven lijnstukjes een waarde: het maximum van de twee uiteinden. Elk van de lijnstukjes moet vroeg of laat worden doorgeknipt. De prijs voor het knippen van dat lijnstukje is dan minstens de waarde van het lijnstukje. De totale kosten zijn dus minstens $5 + 8 + 8 + 7 + 7 + 3 + 6 = 44$. Dit is ook haalbaar: knip altijd een lijnstukje door met de hoogste waarde. In dat geval betaal je precies de prijs van het geknipte lijnstukje.

Leugenaars
Stel dat er n leugenaars zijn. Dan spreken leerling 1 tot en met n de waarheid en zijn leerling $n + 1$ tot en met 21 leugenaars. Er zijn dan dus $21 - n$ leerling-leugenaars. Maar $n = 21 - n$ heeft geen gehele oplossing. Dus de meester moet ook een leugenaar zijn! Er is dus 1 meester-leugenaar en er zijn 10 leerling-leugenaars.

door **Jan Guichelaar** en **Alex van den Brandhof**

We zetten een aap achter een typemachine, die lukraak op de toetsen begint te slaan. Lezen of begrijpen wat hij schrijft, kan de aap niet. Hoe lang moet de aap gemiddeld typen tot het woord ABRACADABRA verschijnt?

Onverwachte verwachtingen



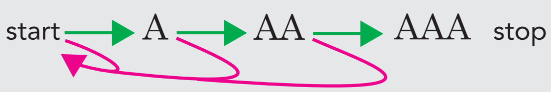
illustratie **Suus van den Akker**

deel 2

In het vorige nummer van *Pythagoras* zetten we de aap achter een typemachine met slechts twee toetsen. In dit tweede deel gaan we uit van een typemachine met een willekeurig aantal toetsen z. Bij elke aanslag op het toetsenbord heeft elke toets kans $\frac{1}{z}$ om geraakt te worden, onafhankelijk van elkaar. We gaan uitrekenen hoe lang de aap gemiddeld moet typen totdat een gegeven 'woord' (dat niet per se in de Van Dale hoeft te staan) voor het eerst verschijnt. We gebruiken de terminologie en notaties die in deel 1 zijn uitgelegd.

Drieletterwoorden

Eerst rekenen we aan woorden van drie letters. We beginnen met $\mathbf{t}(\mathrm{AAA})$, de verwachte stoptijd voor AAA (drie *dezelfde* letters). In figuur 1 zie je een diagram dat de structuur in kaart brengt. De groene pijlen betekenen dat een A wordt getypt, de rode pijlen betekenen 'geen A'.



Figuur 1 De aap stopt als hij AAA heeft getypt

Tot zover niets nieuws vergeleken met de tweeletter-typemachine uit deel 1. De kans dat een A wordt getypt is nu echter niet $\frac{1}{2}$, maar $\frac{1}{z}$. De kans op 'geen A' is $\frac{z-1}{z}$.

De drie vergelijkingen zijn

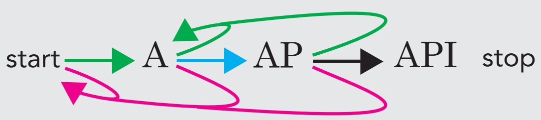
$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_1 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_2) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_2 &= \tfrac{1}{z}\cdot 1 + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)
\end{aligned}
$$

Deze drie vergelijkingen zijn te herleiden tot

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1 \qquad &= z\\
-(z-1)\mathbf{t}_0 + z\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 &= z\\
-(z-1)\mathbf{t}_0 \qquad + z\mathbf{t}_2 &= z
\end{aligned}
$$

Dit stelsel kun je oplossen met bijvoorbeeld de *Regel van Cramer*, zie pagina 28. Na wat rekenwerk vind je $\mathbf{t}(\mathrm{AAA}) = \mathbf{t}_0 = z^3 + z^2 + z$.

Een andere vraag: hoe lang moet de aap gemiddeld typen tot hij een gegeven woord van drie *verschillende* letters, zoals API, op papier heeft staan? Ofwel, wat is $\mathbf{t}(\mathrm{API})$, de verwachte stoptijd voor het woord API? In figuur 2 zie je het bijbehorende diagram. Een groene pijl betekent dat de aap een A typt, de blauwe pijl betekent een P en de zwarte pijl een I. De rode pijl van 'start' naar 'start' betekent 'geen A', de rode pijl van A naar 'start' betekent 'geen A of P' en de rode pijl van AP naar 'start' betekent 'geen A of I'.



Figuur 2 De aap stopt als hij API heeft getypt

De kans op een bepaalde letter is $\frac{1}{z}$ en op een letter uit een groep van k letters dus $\frac{k}{z}$. De drie benodigde vergelijkingen zijn

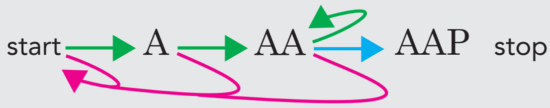
$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_1 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_2) + \tfrac{z-2}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_2 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{1}{z}\cdot 1 + \tfrac{z-2}{z}(1+\mathbf{t}_0)
\end{aligned}
$$

Herleiden geeft

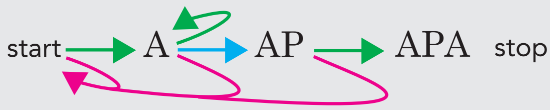
$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 - \qquad \mathbf{t}_1 \qquad &= z\\
-(z-2)\mathbf{t}_0 + (z-1)\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 &= z\\
-(z-2)\mathbf{t}_0 - \qquad \mathbf{t}_1 + z\mathbf{t}_2 &= z
\end{aligned}
$$

Even rekenen levert $\mathbf{t}(\mathrm{API}) = \mathbf{t}_0 = z^3$.

Je kunt nu zelf rekenen aan andere drieletterwoorden die met een A beginnen. Voor de woorden AAP en APA krijg je de diagrammen in de figuren 3 en 4.



Figuur 3 De aap stopt als hij AAP heeft getypt



Figuur 4 De aap stopt als hij APA heeft getypt

Je krijgt $\mathbf{t}(\mathrm{AAP}) = z^3$ en $\mathbf{t}(\mathrm{APA}) = z^3 + z$. Dat $\mathbf{t}(\mathrm{APA})$ gelijk is aan $z^3 + z$, lijkt te 'kloppen' met $\mathbf{t}(\mathrm{AAA})$ en $\mathbf{t}(\mathrm{API})$, die respectievelijk gelijk zijn aan $z^3 + z^2 + z$ en z^3 (de k-de A in het woord, geteld van achteren, levert een term z^k). Maar waarom is $\mathbf{t}(\mathrm{AAP})$ dan niet gelijk aan $z^3 + z^2$? Dat volgt wel uit de vergelijkingen, maar je zou iets meer van de structuur willen zien. We zullen daar meer inzicht in krijgen bij het volledig uitgewerkte voorbeeld ABACABA in de laatste paragraaf van dit artikel.

De algemene regel die je kunt toepassen om bij een gegeven woord vlot de verwachte stoptijd te bepalen, staat in het kader op de volgende pagina. Deze algemene regel bewijzen we hier niet, maar wordt wel aannemelijk gemaakt in het uitgewerkte ABACABA-voorbeeld.

Algemene regel

Gegeven een woord van n letters. Als de eerste k letters van dit woord gelijk zijn aan de laatste k letters van dit woord, levert dat een term z^k op voor de verwachte stoptijd van dat woord, voor $k = 1, \ldots, n$.

Merk op dat voor $k = n$ zowel de eerste k letters als de laatste k letters gewoon het hele woord is; de verwachte stoptijd van élk n-letterwoord bevat derhalve een term z^n.

De algemene regel toepassen

Bij het woord AAA is de eerste letter gelijk aan de laatste letter (A), dat levert een term z. De eerste twee letters zijn gelijk aan de laatste twee letters (AA), dat levert een term z^2. De eerste drie letters zijn gelijk aan de laatste drie letters (AAA), dat levert een term z^3. Volgens de algemene regel geldt dus $\mathbf{t}(\mathrm{AAA}) = z^3 + z^2 + z$.

Bij het woord API zijn alleen de eerste drie letters gelijk aan de laatste drie letters (API), dus $\mathbf{t}(\mathrm{API}) = z^3$.

Het feit dat $\mathbf{t}(\mathrm{AAA})$ groter is dan $\mathbf{t}(\mathrm{API})$ komt doordat in AAA een gekozen letter goed is of 'helemaal fout' (opnieuw beginnen), terwijl in API een A als tweede of derde letter weliswaar fout is, maar alweer een eerste stapje op de goede weg is.

Bij het woord AAP zijn – net als bij API – alléén voor $k = 3$ de eerste k letters gelijk aan de laatste k letters (AAP), dus $\mathbf{t}(\mathrm{AAP}) = z^3$. Deze verwachtingswaarde bevat dus géén term z^2, wat je op het eerste gezicht misschien wel zou denken.

Bij het vierletterwoord ABBA is de eerste letter gelijk aan de laatste letter (A), dat levert een term z. Verder zijn (uiteraard) de eerste vier letters gelijk aan de laatste vier letters (ABBA), dus $\mathbf{t}(\mathrm{ABBA}) = z^4 + z$. Merk op dat het niets uitmaakt dat de tweede letter (B) herhaald wordt. Voor de verwachte stoptijd van een woord doen alléén herhalingen van de *eerste* letter er eventueel toe!

Abracadabra

Ga uit van een toetsenbord met alle 26 letters van ons alfabet, en laat cijfers, leestekens en overige toetsen (zoals de spatiebalk) buiten beschouwing. Hoe lang moet de aap dan gemiddeld typen tot het woord ABRACADABRA verschijnt? De eerste letter is gelijk aan de laatste letter én de eerste vier letters zijn gelijk aan de laatste vier letters, zie ook figuur 5. Dus

$$\mathbf{t}(\mathrm{ABRACADABRA}) = 26^{11} + 26^4 + 26 \approx \approx 3{,}67 \times 10^{15}.$$

Veranderen we de laatste letter in een O, dan zijn de herhalingspatronen weg en geldt:

$$\mathbf{t}(\mathrm{ABRACADABRO}) = 26^{11};$$

dat zijn $26^4 + 26 = 457.002$ aanslagen minder. Op een getal van zestien cijfers is dat een summier verschil, maar dat de twee verwachtingen niet *precies* gelijk zijn, is voor velen een onverwachte uitkomst.

ABRACADABRA

Figuur 5 ABRACADABRA begint en eindigt met zowel 'A' als 'ABRA'

°°°Oplossen met determinanten

In deze paragraaf rekenen we de verwachte stoptijd van ABACABA uit. Bij dit woord wordt de eerste letter drie keer herhaald. In het bijzonder tonen we aan dat de tweede A in het woord *niet* leidt tot een term z^5. Zonder verdere uitleg geven we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_1 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_2) + \tfrac{z-2}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_2 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_3) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_3 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_2) + \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_4) +\\
&\quad + \tfrac{z-3}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_4 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_5) + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_5 &= \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_1) + \tfrac{1}{z}(1+\mathbf{t}_6) + \tfrac{z-2}{z}(1+\mathbf{t}_0)\\
\mathbf{t}_6 &= \tfrac{1}{z}\cdot 1 + \tfrac{z-1}{z}(1+\mathbf{t}_0)
\end{aligned}$$

We gaan dit stelsel van zeven vergelijkingen oplossen met de *Regel van Cramer*. Op pagina 28 kun je lezen hoe een stelsel van drie vergelijkingen wordt opgelost. Een stelsel van méér vergelijkingen gaat op dezelfde manier.

Vermenigvuldig in bovenstaand stelsel eerst alles met z en breng vervolgens de onbekenden naar links, net zoals we deden bij de woorden AAA en API:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1 &= z \\
(2-z)\mathbf{t}_0 + (z-1)\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 &= z \\
(1-z)\mathbf{t}_0 + z\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3 &= z \\
(3-z)\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + z\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4 &= z \\
(1-z)\mathbf{t}_0 + z\mathbf{t}_4 - \mathbf{t}_5 &= z \\
(2-z)\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1 + z\mathbf{t}_5 - \mathbf{t}_5 &= z \\
(1-z)\mathbf{t}_0 + z\mathbf{t}_6 &= z
\end{aligned}$$

De coëfficiënten van de onbekenden in het linkerlid van dit stelsel vormen de determinant in de noemer van de oplossing van elke $\mathbf{t}_k$:

$$\begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2-z & z-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1-z & 0 & z & -1 & 0 & 0 & 0 \\
3-z & -1 & -1 & z & -1 & 0 & 0 \\
1-z & 0 & 0 & 0 & z & -1 & 0 \\
2-z & -1 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\
1-z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{vmatrix}$$

Om deze determinant uit te rekenen, tellen we de tweede tot en met de zevende kolom op bij de eerste kolom:

$$\begin{vmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & z-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & z & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{vmatrix}$$

In de eerste kolom staan nu zes nullen, zodat ontwikkelen naar deze kolom het volgende levert:

$$1 \times \begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & z & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & z & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & z & -1
\end{vmatrix}$$

Als in een determinant aan één kant van de diagonaal van linksboven naar rechtsonder louter nullen staan, is de uitkomst van de determinant gelijk aan het product van de getallen op die diagonaal. Hieruit volgt dat bovenstaande determinant gelijk is aan 1. Het blijkt bij élk woord zo te zijn dat de determinant in de noemer van de oplossing van $\mathbf{t}_k$ gelijk is aan 1.

De verwachtingswaarde die we zoeken, is dus gelijk aan de determinant in de teller van $\mathbf{t}_0$. Hiertoe vervangen we de eerste kolom van de determinant in de noemer door de z's rechts in het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{A}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{A} \end{array}
\begin{vmatrix}
z & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z & z-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z & 0 & z & -1 & 0 & 0 & 0 \\
z & -1 & -1 & z & -1 & 0 & 0 \\
z & 0 & 0 & 0 & z & -1 & 0 \\
z & -1 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\
z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{vmatrix}$$

Voor het gemak staan de letters van het woord ABACABA ervoor. We trekken de eerste rij van elke andere rij af:

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{A}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{A} \end{array}
\begin{vmatrix}
z & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & z & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & z & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & z & -1 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & z & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{vmatrix}$$

Bij het uitwerken van deze determinant levert elke +1 (groen) en de –1 (rood), naast de term z^7, een extra term z^k. De uitkomst is

$$\mathbf{t}_0 = z^7 + z^5 - z^5 + z^3 + z = z^7 + z^3 + z.$$

De drie groene +1'tjes staan bij de tweede, derde en vierde A (de herhalingen van de eerste A), en leiden tot de termen z^5, z^3 en z. De rode –1 komt uit de vergelijking voor $\mathbf{t}_3$ (waarin C de goede nieuwe letter is) en van de term $\mathbf{t}_2$ daarin (keuze B leidt tot AB, de eerste twee letters van het woord), en leidt tot de term $-z^5$. Zo 'heffen' de bovenste +1 en de –1 'elkaar op' en bevat de uitkomst géén term z^5.

De Regel van Cramer

Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen kan wel wat tijd vergen, maar in principe is er geen creatief denkwerk bij nodig. Voor de stelsels in *Onverwachte verwachtingen* is de Regel van Cramer (Gabriel Cramer, 1704 – 1752) erg handig.

Neem dit stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 6 \\ -3x + y - 3z &= -14 \end{aligned}$$

Daarbij horen deze matrix en vector.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Volgens Cramer zijn de oplossingen dan

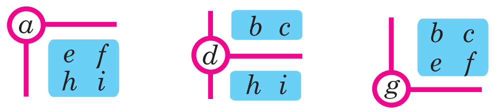
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -14 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -3 & -14 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

De 'absoluut-strepen' hierin staan voor 'determinant' van de betreffende matrix. Maar hoe bereken je zo'n determinant?

In het algemeen wordt een determinant van een 3x3 matrix berekend door hem te 'ontwikkelen' naar een rij of een kolom. Ontwikkelen naar de eerste kolom gaat zo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

De 2x2 matrix per kolomgetal krijg je door de rij en de kolom van dat getal weg te laten.



Dan houd je drie determinanten van 2x2 matrices over. Die bereken je volgens:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Je kunt je veel werk besparen door gebruik te maken van het volgende feit: de determinant van een matrix verandert niet als je een kolom (of rij) naar keuze een aantal keren bij een andere kolom (of rij) optelt.

Bij het ontwikkelen van de determinant moet je afwisselend optellen en aftrekken, volgens dit patroon.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

-1 x $+\frac{1}{2}$ x   -1 x   + 2 x

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 2\,(0 \times -3 - 2 \times -5) = 20$$

Op deze manier vinden we de oplossingen van het stelsel: $x = \frac{40}{20} = 2,\ y = \frac{20}{20} = 1,\ z = \frac{60}{20} = 3.$

door **Klaas Pieter Hart**

In het januarinummer van *Pythagoras* hebben we de functie $x \mapsto 2^x$ netjes gedefinieerd. In dit artikel kijken we naar de inverse functie: de logaritme.

Logaritmen voor gevorderden

De functie $x \mapsto 2^x$, zoals we die in het januarinummer hebben gedefinieerd, heeft alle eigenschappen die we van deze exponentiële functie mogen verwachten. De functie is strikt stijgend en voor alle x en y geldt $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$. In dit artikel laten we zien dat onze functie een inverse functie heeft, de logaritme in basis 2. Die functie noteren we als ${}^2\log$ en per definitie betekenen

$$a = {}^2\log b \quad \text{en} \quad 2^a = b$$

precies hetzelfde. Bij het bepalen van een inverse functie verwisselen we domein en bereik: het bereik/domein van $x \mapsto 2^x$ wordt het domein/bereik van $x \mapsto {}^2\log x$. Het domein van $x \mapsto 2^x$ kennen we, dat is $\mathbf{R}$. Het bereik kennen we nog niet; we weten dat de waarden in het interval $\langle 0, \infty \rangle$ zitten, maar wat we willen, namelijk dat $\langle 0, \infty \rangle$ het domein van de logaritme is, moeten we wel netjes vaststellen en dat doen we door te bewijzen dat het bereik van $x \mapsto 2^x$ precies het interval $\langle 0, \infty \rangle$ is.

Dus bij gegeven $b > 0$ moeten we een a maken met $2^a = b$ (en omdat $x \mapsto 2^x$ strikt stijgend is, is er precies één zo'n a). Dit bewijzen we met behulp van de nu al vertrouwde eigenschap van $\mathbf{R}$: de volledigheid.

De logaritme

Stel je hebt een willekeurig getal $b > 0$. Hoe vind je dan een getal a met $2^a = b$?

We nemen eerst aan dat $b > 1$ en maken een verzameling A door daar alle x met $2^x < b$ in te stoppen. De verzameling A is niet leeg, immers $2^0 = 1 < b$. De verzameling A is ook naar boven begrensd: neem maar een natuurlijk getal k met $k > b$. Voor natuurlijke getallen is $2^k > k$ niet moeilijk aan te tonen. Omdat $x \mapsto 2^x$ strikt stijgend is, volgt dat k een bovengrens voor A is, immers $x \geq k$ én $x \in A$ kunnen niet samengaan: als $x \geq k$, dan $2^x \geq 2^k > k > b$, dus $x \notin A$.

Zoals we al in herinnering brachten: $\mathbf{R}$ is volledig, dus heeft elke begrensde niet-lege verzameling een kleinste bovengrens. Onze verzameling A heeft dus een kleinste bovengrens, laten we die a noemen. We beweren dat $2^a = b$.

We kiezen natuurlijke getallen m en n met $m < a < n$, waarbij m zo groot mogelijk is en n zo klein mogelijk. In de inzet op de volgende pagina wordt aangetoond dat $|2^x - 2^a| < 2^n |x - a|$ als $m < x < n$.

Voor elk positief getal ε dat kleiner is dan $a - m$ geldt $2^a < 2^{a-\varepsilon} + 2^n\varepsilon < b + 2^n\varepsilon$, en dus $2^a \leq b$. Evenzo volgt $2^a > 2^{a+\varepsilon} - 2^n\varepsilon > b - 2^n\varepsilon$ als $\varepsilon < n - a$, en dus $2^a \geq b$. Conclusie: $2^a = b$. Als $b < 1$ vinden we eerst a met $2^a = \frac{1}{b}$, dan geldt $2^{-a} = b$.

Samengevat: voor elk positief getal b bestaat precies één getal a met $2^a = b$; dat getal heet de *logaritme in basis* 2 *van* b en we schrijven $a = {}^2\log b$.

Opgave 1. Toon aan dat $^2\log(x \times y) = {}^2\log x + {}^2\log y$ voor elke positieve x en y.

Opgave 2. Toon aan: als $a > 0$ en als p een breuk is, dan geldt $^2\log(a^p) = p \times {}^2\log a$.

Andere grondtallen

In het januarinummer is geschetst hoe je de functie $x \mapsto a^x$ voor alle a kunt definiëren. Dat kan ook met behulp van alleen 2^x en $^2\log x$. In de opgaven hebben we gezien dat $^2\log(a^p) = p \times {}^2\log a$ als p een breuk is. Dit betekent dat

$$a^p = 2^{p \times {}^2\log a}.$$

Omdat 2^x en de logaritme stijgende functies zijn, kunnen we inzien dat voor alle andere x die formule ook moet gelden, dus

$$a^x = 2^{x \times {}^2\log a}.$$

Dus, bijvoorbeeld, $\pi^\pi = 2^{\pi \times {}^2\log \pi}$.

Nu krijgen we ook voor elke a een logaritmische functie: $^a\log q = p$ betekent $a^p = q$. Die logaritmen zijn allemaal in elkaar uit te drukken. Dat gaat als volgt: uit de definite volgt: als $q = a^p$, dan ook $q = 2^{p \times {}^2\log a}$, en dus $^2\log q = p$ x $^2\log a$. Maar $p = {}^a\log q$, dus als we de factoren omwisselen krijgen we de fraaie betrekking

$$^2\log q = {}^2\log a \times {}^a\log q.$$

Gebruik van logaritmen

Logaritmen werden door de Schot John Napier (1550-1617) bedacht om er snel grote vermenigvuldigingen mee uit te kunnen voeren. Dat gebeurde op basis van de eigenschap $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$. Men werkte met het grondtal 10 omdat dat beter bij ons tientallig stelsel past; in plaats van $^{10}\log$ schrijven we daarom nog steeds log. Om, bijvoorbeeld, 313,585 x 204,123 te berekenen, ging men als volgt te werk.

Stap 1. Zoek log 313,585 en log 204,123 op in een tabel. Tabellen geven alleen logaritmen van getallen tussen 1 en 10; dat is niet erg want 313,585 = 3,13585 x 10^2 en dus log 313,585 = 2 + log 3,13585. Met behulp van mijn tabel heb ik gevonden dat log 313,585 = 2,4963 en log 204,123 = 2,3071 (ongeveer).

Stap 2. Tel de logaritmen bij elkaar op: 2,4963 + 2,3071 = 4,8034; dit is de logaritme van ons product.

Stap 3. Zoek in de tabel de x op met log x = 0,8034 (ongeveer): x = 6,359 en dus 313,585 x 204,123 = 6,359 x 10^4 (ongeveer).

Tegenwoordig doen we zo'n vermenigvuldiging op een rekenmachientje, maar dan lopen we soms tegen de beperkingen van het apparaat aan. Mijn rekenmachine kan, bijvoorbeeld, 70! niet weergeven: bij 69! krijg ik nog 1,711224524 x 10^{98} maar bij 70! krijg ik `Error`. Met de logaritmetoets is dat zo verholpen: log 1,711224524 = 0,233307995 en log 70 = 1,84509804. De som is 2,078405035 en $10^{0,078405035}$ = 1,197857167. De 2 levert nog 10^2 en dus is 70! ongeveer gelijk aan 1,197857167 x 10^{100}.

Opgave 3. Bepaal, met behulp van de log- en 10^x-toetsen, een benadering van 100!; hoeveel cijfers heeft 100!?

De ongelijkheid $|\,2^x - 2^a\,| < 2^n\,|\,x - a\,|$

In het januarinummer is aangetoond dat $|2^r - 1| < |r|$, als $|r| < 1$; met behulp hiervan bewijzen we de ongelijkheid hierboven.

We hebben ons getal a en gehele getallen m en n zó dat $m < a < n$ (met m zo groot mogelijk en n zo klein mogelijk). Als nu x tussen m en n ligt, dan geldt $|\,x - a\,| < 1$ en dus

$$2^x - 2^a = 2^a(2^{x-a} - 1) < 2^n(x - a)$$

als $a < x$ en

$$2^a - 2^x = 2^x(2^{a-x} - 1) < 2^n(a - x)$$

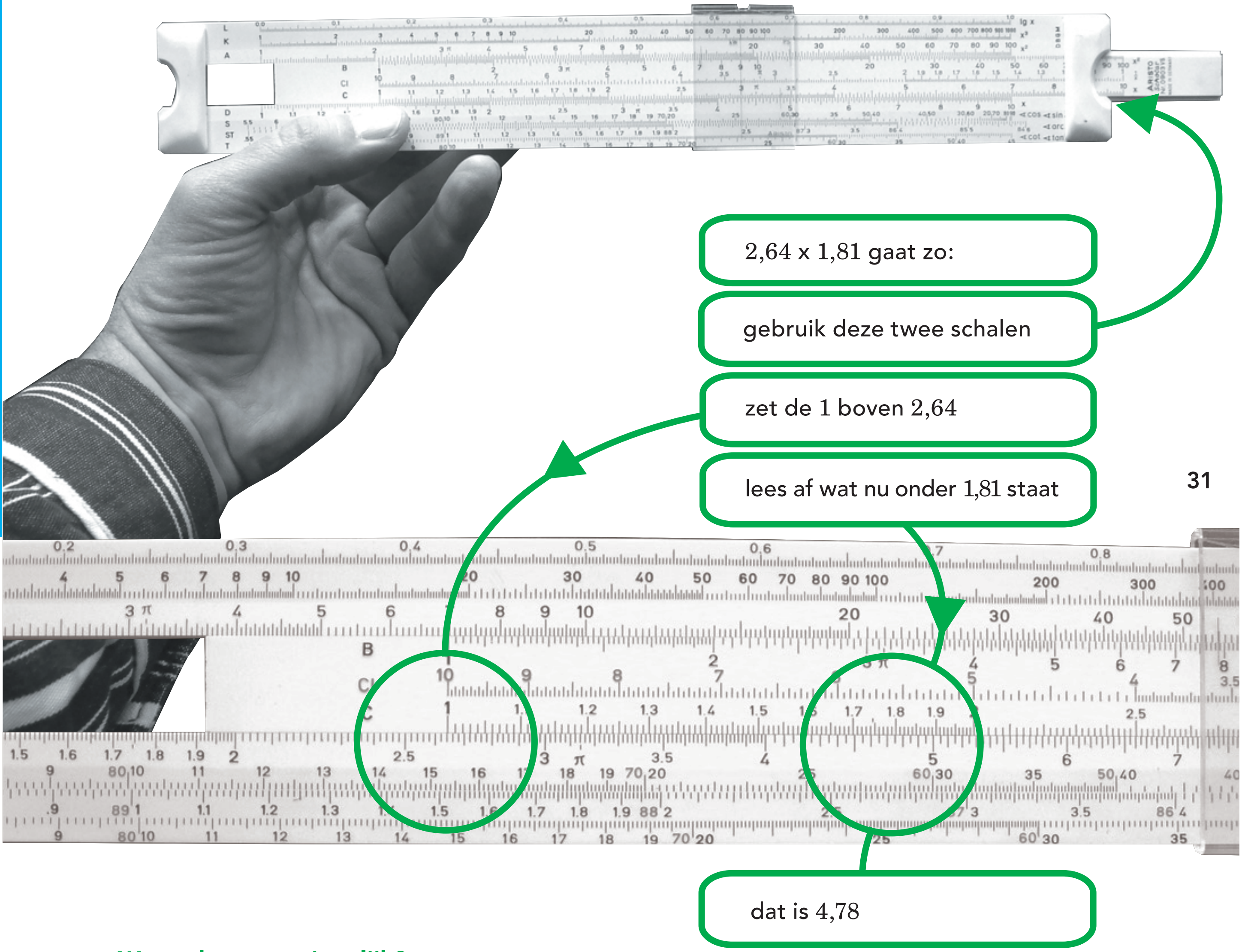
als $x < a$; samengevat:

$$|2^x - 2^a| \le 2^n|x - a|$$

als $m < a < n$.

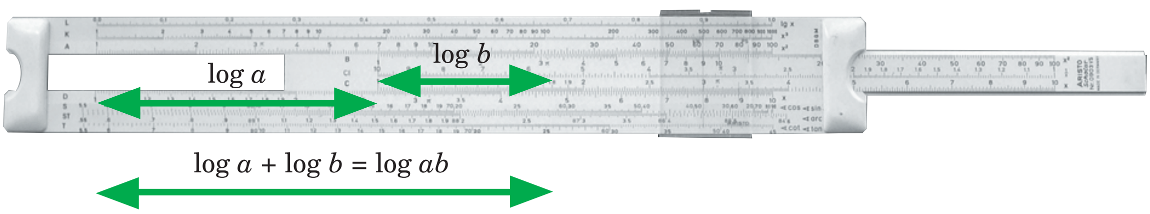
Ooit hadden leerlingen geen rekenmachines, zij gebruikten toen een rekenliniaal. Hoe vermenigvuldig je op een rekenliniaal?

Vermenigvuldigen door schuiven



Wat gebeurt er eigenlijk?

De schalen zijn logaritmisch. De afstand van 1 tot 2,64 is $\log 2{,}64$, die van 1 tot 1,81 is $\log 1{,}81$. Bij het schuiven leg je de twee afstanden aan elkaar, dus krijg je $\log 2{,}64$ + $\log 1{,}81$, oftewel $\log(2{,}64 \times 1{,}81)$ en je leest af welk getal daarbij hoort: 4,78.



Pythagoras

Journaal

April 2006 Nummer 4

door **Alex van den Brandhof**

Abelprijs 2006 voor Zweeds wiskundige

Op 23 maart 2006 werd in Oslo bekendgemaakt dat de Abelprijs – in de volksmond ook wel de 'Nobelprijs voor de wiskunde' genoemd – dit jaar is toegekend aan Lennart Carleson van de Kungliga Tekniska Högskolan (Royal Institute of Technology) in Zweden. Op 23 mei zal de prijs worden uitgereikt. De 78-jarige Carleson is de vierde Abelprijswinnaar. Hij ontvangt de prijs, een bedrag van 6 miljoen Noorse kronen (750.000 euro), voor zijn baanbrekende werk op het gebied van de Fourieranalyse en dynamische systemen. Veel vermoedens, die tot de moeilijkste open problemen in de wiskunde werden gerekend, zijn door Carleson opgelost. Ook heeft hij altijd een belangrijke rol gespeeld bij de popularisering van wiskunde in Zweden en toonde hij interesse in de wiskunde op de middelbare school.

De Abelprijs is vernoemd naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829).

Vierkant-zomerkampen

Voor iedereen van 10 tot 18 jaar die het leuk vindt om zijn of haar hersens te laten kraken, zijn er de wiskunde-zomerkampen, die Vierkant voor Wiskunde dit jaar voor de 13de maal organiseert. Er zijn drie kampen, elk voor een aparte leeftijdscategorie. De kampen vinden plaats in augustus te Lunteren. Uitgebreide informatie over de wiskunde-zomerkampen kun je lezen op www.vierkantvoorwiskunde.nl.

Archimedes-spiraal al duizenden jaren bekend

Bij een opgraving op het Griekse eiland Santorini (vroeger Thera) zijn schilderingen van de Minoërs, die van 3000 tot 1400 voor Christus op Kreta en de eilanden daaromheen leefden, gevonden. Deze schilderingen bevatten meetkundige figuren, waaronder de bekende 'spiraal van Archimedes'. Deze figuur werd, zoals de naam al zegt, toegeschreven aan Archimedes, die veel later leefde (300 na Christus). Nader onderzoek van een team Griekse wiskundigen en informatici heeft uitgewezen dat deze spiralen binnen een marge van een derde millimeter de ideale Archimedesvorm volgen. Deze spiralen teken je niet zomaar even met een krijtje op de muur; kennelijk hadden de Minoërs onverwacht veel inzicht in meetkundige constructies.

Van Wijngaarden Award 2006

De Amerikaanse onderzoekers Persi Diaconis en Nancy Lynch hebben de Van Wijngaarden Award 2006 gewonnen. Deze prijs werd voor de eerste keer uitgereikt ter markering van het 60-jarig bestaan van het Centrum voor Wiskunde en Informatica te Amsterdam en is bestemd voor wetenschappers die een bijzondere betekenis hebben voor de wiskunde en informatica.

'Kaartschudprofessor' Persi Diaconis deed onderzoek op het gebied van Markov-ketens die toepassingen hebben in casino-spelen: hoe vaak moet je een spel kaarten schudden, willen de spelers werkelijk willekeurige kaarten krijgen? Hij heeft aangetoond dat na zeven keer schudden van kaarten – door ze, met in elke hand een stapel, ongeveer om en om in elkaar te schuiven – niemand de volgorde van de kaarten kan voorspellen. Bij minder vaak schudden is de volgorde nog wel voorspelbaar, waar ervaren spelers van kunnen profiteren. Vaker schudden is zinloos, omdat er toch nauwelijks nog verbetering optreedt. Het bewijs van deze stelling is fundamenteel en abstract en maakt gebruik van representatietheorie van groepen en niet-commutatieve Fourieranalyse. De manier waarop Diaconis – ex-beroepsgoochelaar – zijn onderzoek over het voetlicht brengt, maakte hem immens populair.
Nancy Lynch heeft baanbrekend werk in de informatica verricht. Zij heeft zich gespecialiseerd in zogeheten 'gespreide systemen'; een voorbeeld hiervan is een metrosysteem met onder meer chauffeurloze treinstellen en automatisch open- en dichtgaande deuren.

De prijs is vernoemd naar Adriaan van Wijngaarden (1916-1987), een van de grondleggers van de informatica in Nederland. Hij was hoofd van de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum (tegenwoordig Centrum voor Wiskunde en Informatica) in Amsterdam en later directeur van het centrum.

Sudoku

In *Sudoku wiskundig bekeken* (januarinummer) werd de vraag gesteld wat het *grootste* aantal startwaarden is waarbij geen enkele gemist kan worden. Henk Molster is er in geslaagd een sudoku te ontwerpen met 27 startwaarden. Hij liet zien dat bij weglating van steeds een van de getallen, er altijd een tweede invulling van de sudoku mogelijk is.

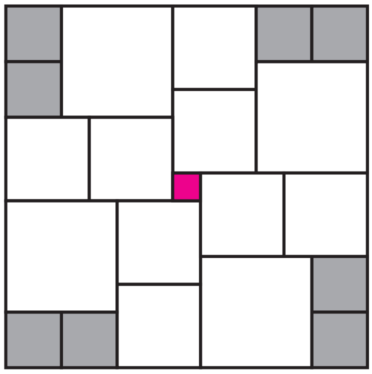
		6				2		
				8			7	
			5	2			6	1
					2			
		7		3				
1			6		8		3	
	5				9			2
9		2	3					7
8	6				7	9	1	

Eisenstein-Hopf

In het vorige nummer heb je kunnen lezen over de *proef van Eisenstein-Hopf*. Zolang je de ring links en rechts tegelijkertijd loslaat, valt hij gewoon van de ketting af. Om ervoor te zorgen dat de ring in de ketting blijft hangen, moet je de symmetrie dus verbreken. Er is een manier om dit bijna onzichtbaar te doen. Laat de ene kant van de ring los en laat de andere kant niet los, dat wil zeggen: til je middelvinger op zodat de ring aan die kant valt, maar houd je duim onbeweeglijk. Als je met je duim de ring aan die kant een beetje ondersteunt, zal de ring over je duim kantelen en zichzelf zo met een flinke zwieper in de ketting vastknopen!

Eén kleinste vierkantje

Op pagina 5 wordt de vraag gesteld of er een vierkant van vierkanten bestaat met één deelvierkantje van 1 bij 1. Hier zie je een oplossing.



Oplossingen Kleine nootjes nr. 4

Dobbelsteen
Als s de som van de ogentallen is en w is het aantal worpen, dan is $s/w = 4{,}2s$, ofwel $s = 4w + 0{,}2w$. Omdat s natuurlijk geheel moet zijn, is w een vijfvoud. Jim heeft dus minimaal vijf keer gegooid.

Hardlopen
Het kan. Stel voor drie wedstrijden de aankomstvolgordes: ABC, BCA en CAB. A wint twee keer van B en B dus één keer van A. Hetzelfde geldt voor B en C en voor C en A. In dertig dagen neem je dan tien keer deze volgordes.

Zes stokjes
Met vijf stokjes van lengte 5 en één stokje van lengte 6 is er maar één oplossing. Met vier stokjes van 5, één van 6 en één van 7 zijn er drie mogelijkheden.

Schoenen
Een dozijn is *per definitie* 12 (dus ongeacht het soort objecten waarom het gaat). Dat betekent dat voor beide vragen het antwoord 12 is.

Vrachtwagen
Met bijvoorbeeld snelheden van 60 en 90 km/u haalt de achterste wagen met 30 km/u de voorste in. Hij moet de som van de lengtes overbruggen. Tegemoetkomend passeert de wagen van 90 km/u t.o.v. de weg de andere wagen met 150 km/u. Ook nu moet dezelfde afstand overbrugd worden. De passagetijd is dus vijf keer zo klein.


45ste JAARGANG NUMMER 5