PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN JUNI 2006

PYTHAGORAS

45ste jaargang nummer 6
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Arnout Jaspers, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Chris Zaal

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

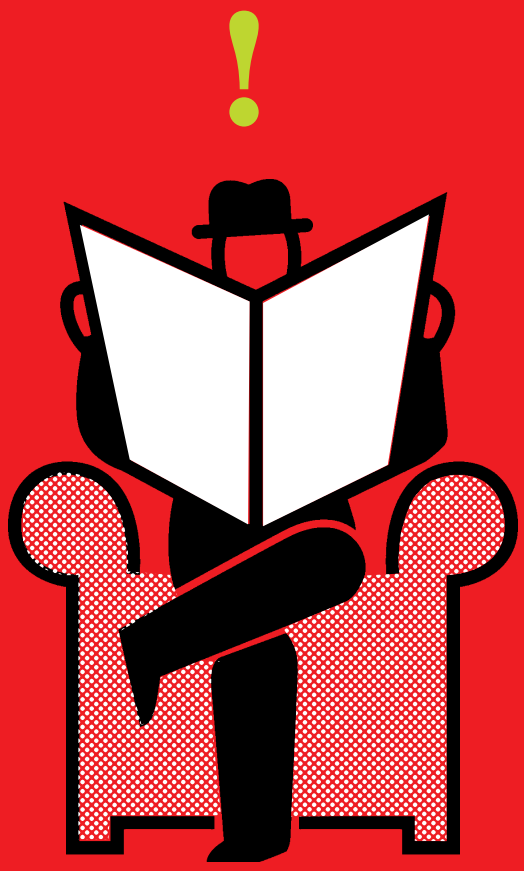
Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), prof.dr. J. van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de UvA en de Open Universiteit (craats@science.uva.nl), S. Garst, docent wiskunde op de RSG Goeree-Overflakkee te Middelharnis (nlgarst018@planet.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de Eötvös Universiteit te Boedapest (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), D.J. de Leeuw, student taalwetenschappen aan de UvA (d.j.deleeuw@student.uva.nl), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector op het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum en de EHvA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), E. Timmermans, dissectie-onderzoeker (trinitypuzzle@hotmail.com), R. de Vlaming, student econometrie en besliskunde aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam (rdevlaming@gmail.com), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Op het omslag
Een ingepakt viervlak; zie het artikel Hè?! op pagina 10.

Niveau-rondjes
Artikelen in Pythagoras gaan vergezeld van rondjes die de moeilijkheidsgraad aangeven. Voor artikelen zonder rondjes is weinig tot geen wiskundige voorkennis vereist. Artikelen met één rondje ° zijn voor iedereen vanaf de derde klas te begrijpen. Voor artikelen met twee rondjes °° heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig en artikelen met drie rondjes °°° gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:



INHOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 9 **Nulpunten op één lijn?**

10 – 11 **Hè?!**

12 – 15 **Bingo beter bekeken**

16 – 17 **Pythagoras Olympiade**

18 – 19 **Perioden van breuken**

20 – 21 **Problemen – Oplossingen**

22 – 23 **Benaderingen van π**

24 – 27 **Haal meer uit je GR**

28 **Helft keer dubbel**

29 – 31 **De wiskunde van Edo Timmermans**

32 **Journaal**

33 **Oplossing Hè?!**
Oplossingen
Kleine nootjes nr. 5

door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

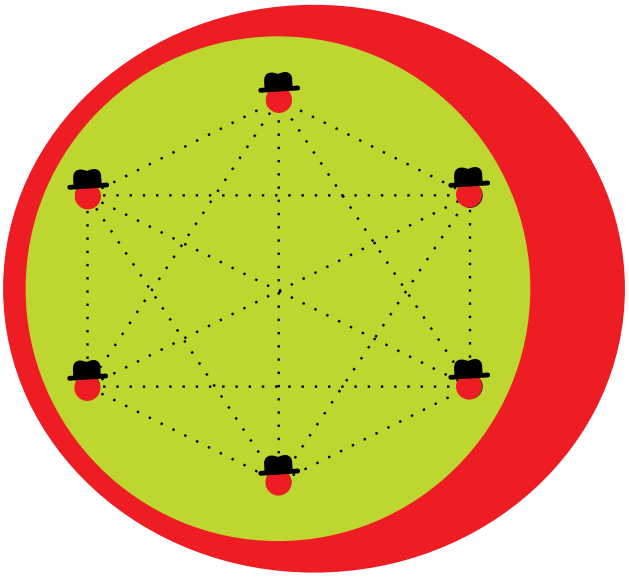
Vals geld

Iemand koopt een paar schoenen voor € 80. Hij betaalt met een biljet van € 100. De winkelier heeft nog geen geld in kas en wisselt het biljet bij zijn buurman. Hij geeft de koper de schoenen mee en € 20 terug. De buurman merkt later dat het gewisselde briefje vals is. De winkelier vergoedt zijn buurman volledig. Wat is nu de schade van de winkelier?

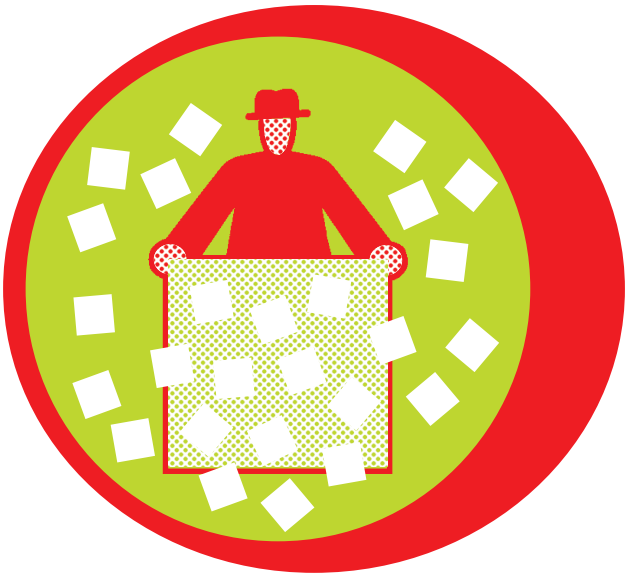
(Ed de Moor)

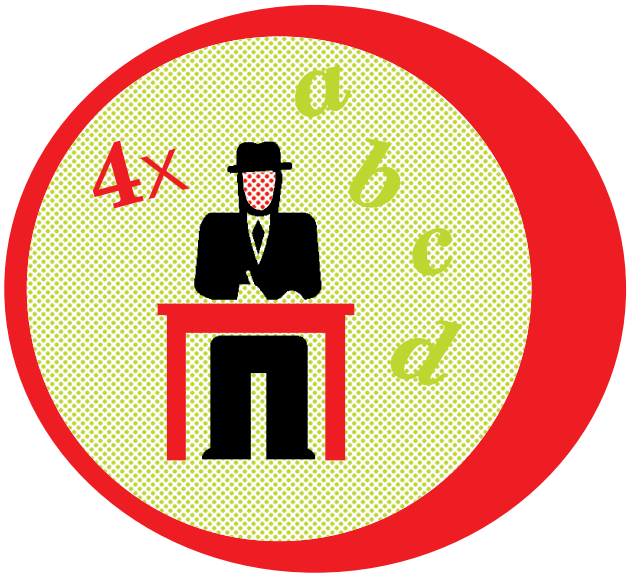
Kleurige driehoeken

Hiernaast zie je zes stippen en alle verbindingslijnstukken (gestippeld). Kleur elke stippellijn rood óf blauw. Lukt het je om dit zo te doen, dat er geen rode driehoek (met als hoekpunten drie van de zes stippen) en ook geen blauwe driehoek ontstaat?



Rechthoeken
Bulle heeft 2006 vierkante papiertjes (allemaal even groot). Hiermee kan hij een rechthoek van 1 bij 2006 maken. Welke rechthoeken kan hij nog meer maken?





Omgekeerd
Vermenigvuldig het getal van vier cijfers $abcd$ met 4. Er komt $dcba$ uit. Wat is dat getal?

Hoe laat?
Drie passagiers stappen een voor een in de trein en na een uur rijden stappen ze een voor een uit. Hoe laat vertrok de trein?

door **Jan van de Craats**

ooo Nulpunten op één lijn?

Het belangrijkste open probleem in de wiskunde is het *vermoeden van Riemann*. Het is een van de *millennium problems* waarmee je een miljoen dollar kunt verdienen (zie nummer 1 van deze jaargang). De *Riemann-hypothese*, zoals het vermoeden ook vaak genoemd wordt, luidt:

alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritische lijn.

Over wat deze begrippen betekenen en over de verdere inhoud van de hypothese gaat het laatste artikel in onze serie over open problemen.

Eulers zètafunctie

Wat komt er uit de limietsom

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

als je op de plaats van de stippeltjes steeds meer omgekeerde kwadraten meeneemt? Met de computer kun je er proberen achter te komen. De eerste tien termen geven als uitkomst $1{,}54976$, de eerste honderd termen $1{,}63498$, de eerste duizend termen $1{,}64393$ en de eerste tienduizend termen $1{,}64483$. Het is niet moeilijk om te bewijzen dat er inderdaad een limietwaarde moet zijn en dat die kleiner is dan 2, maar toch schiet het met de convergentie (het naderen tot de limietwaarde) niet erg op. In feite zijn er bij tienduizend termen nog maar drie decimalen correct! We weten dit dankzij de beroemde wiskundige Leonhard Euler, die in in 1735 de *exacte* limietwaarde van deze som vond, namelijk

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Op vijf decimalen afgerond is dit $1{,}64493$. Eulers ontdekking zorgde voor een sensatie in de wiskundewereld. Hoe is het mogelijk dat die som exact uitgerekend kan worden, en dat de uitkomst iets te maken heeft met het getal π? Klaas Pieter Hart schreef hier een stukje over in *Pythagoras* 41-4 (april 2002).

Euler vond nog veel meer, zoals

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

en

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

Hij definieerde in het algemeen de *zètafunctie* $\zeta(x)$ door

$$\zeta(x)=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots \qquad (1)$$

en vond uitdrukkingen voor $\zeta(x)$ voor alle even waarden van x. Je zult het misschien vreemd vinden dat een functie gedefinieerd wordt door een *reeks*, een oneindige som van termen, maar zolang die reeks maar convergeert, dat wil zeggen een (eindige) limietsom heeft, is er niets mis mee. Met een stukje wiskundige techniek dat bekend staat als het *integraalkenmerk* (eerstejaarsstof voor wiskundestudenten) kun je bewijzen dat de reeks van de zètafunctie convergent is voor alle $x > 1$. Maar voor $x = 1$ gaat het mis, want

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=\infty.$$

Dit wordt duidelijk gemaakt in het kader op de volgende pagina.

Ook voor $x < 1$ convergeert de reeks (1) niet, want dan zijn de termen alleen nog maar groter. De functie $\zeta(x)$ is dus alleen nog maar gedefinieerd voor $x > 1$, maar later in dit artikel zullen we het domein van $\zeta(x)$ via andere formules stap voor stap verder uitbreiden.

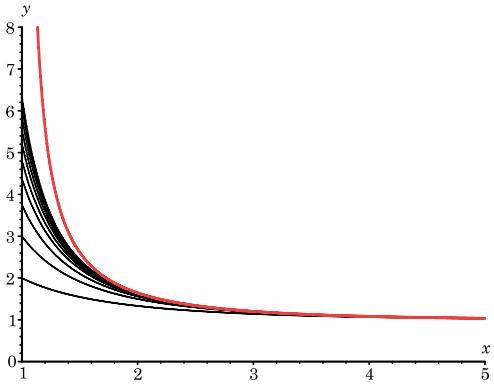
Het Eulerproduct

Waren Eulers vondsten voor $\zeta(x)$ voor even waarden van x al sensationeel, minstens zo indrukwekkend was de volgende formule die hij twee jaar later, in 1737, voor de zètafunctie vond. Hij liet daarin zien dat de zètafunctie alles te maken heeft met de *priemgetallenrij*. Euler bewees namelijk dat

$$\zeta(x)=\frac{2^x}{2^x-1}\times\frac{3^x}{3^x-1}\times\frac{5^x}{5^x-1}\times\frac{7^x}{7^x-1}\times\cdots \qquad (2)$$

Hier staat een *oneindig product* van termen van de vorm $p^x/(p^x-1)$, waarbij je voor p achtereenvolgens alle priemgetallen moet nemen. De volgende term is dus $11^x/(11^x-1)$, dan een term met 13, enzovoort.

Formule (2) staat bekend als het *Eulerproduct*. Als je dit product na k termen afbreekt, krijg je de k-de *productbenadering*. Omdat elke term groter dan 1 is, vormen de productbenaderingen een stijgende rij functies met als limiet de zètafunctie. In figuur 1 zie je een grafiek van $\zeta(x)$ samen met de eerste tien productbenaderingen.



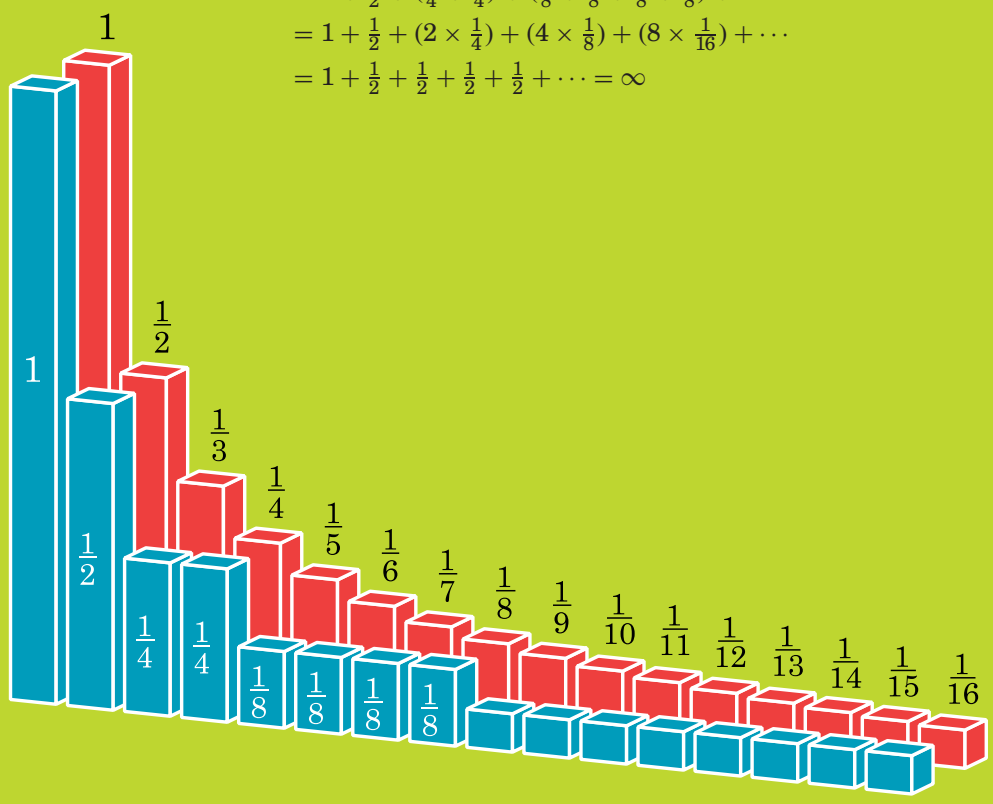
Figuur 1 De grafiek van $\zeta(x)$ (rood) samen met de grafieken van de eerste tien productbenaderingen.

In een baanbrekend artikel uit 1859 nam Bernhard Riemann het Eulerproduct als uitgangspunt voor zijn onderzoek naar de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ die aangeeft hoeveel priemgetallen er kleiner dan of gelijk aan x zijn. In nummer 2 van deze jaargang

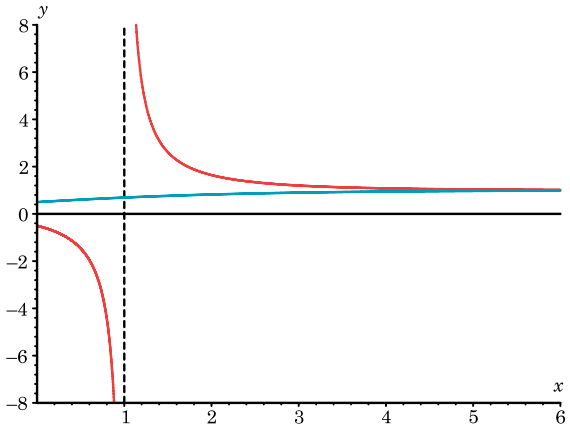
Waarom is $\zeta(1) = \infty$?

Onderstaande figuur laat zien dat

$$\begin{aligned}\zeta(1) &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + (2 \times \tfrac{1}{4}) + (4 \times \tfrac{1}{8}) + (8 \times \tfrac{1}{16}) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots = \infty\end{aligned}$$



hebben we al iets over deze functie verteld. Riemann wist verrassende verbanden te leggen tussen $\pi(x)$ en de zètafunctie.



Figuur 2 Een grafiek van $\zeta(x)$ voor $x > 0$ (rood). Let op de verticale asymptoot bij $x = 1$. Het punt $x = 1$ heet een *pool* van de functie. In dezelfde figuur in blauw de grafiek van $\eta(x)$.

Domein uitbreiden

Formule (1) definieert $\zeta(x)$ voor $x > 1$, want alleen op dat domein convergeert die reeks. Maar met een eenvoudige truc kun je het domein uitbreiden tot $x > 0$. In figuur 2 kun je alvast de grafiek van $\zeta(x)$ bewonderen op dat grotere domein.

Om de domeinuitbreiding te realiseren, bekijken we de zogenaamde *ètafunctie*

$$\eta(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \cdots$$

die alleen maar van $\zeta(x)$ verschilt in het teken van de even termen. Trek je de twee reeksen van elkaar af, dan houd je twee maal de even termen over, en dat kun je weer schrijven in termen van $\zeta(x)$ als volgt:

$$\zeta(x) - \eta(x) = 2\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \cdots\right)$$
$$= 2^{1-x}\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right)$$
$$= 2^{1-x}\zeta(x).$$

Hieruit kun je $\zeta(x)$ oplossen:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}}\,\eta(x). \qquad (3)$$

Nu komt de verrassing: de reeks van $\eta(x)$ convergeert niet alleen voor alle $x > 1$, maar zelfs voor alle $x > 0$ (ook dat is weer eerstejaarsstof). Met de computer kun je goede benaderingen van de limietsom vinden. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\eta(\frac{1}{2}) \approx 0{,}6048986$.

Formule (3) geldt in principe alleen voor $x > 1$, maar omdat $\eta(x)$ voor alle $x > 0$ berekend kan worden, kun je deze formule gebruiken om $\zeta(x)$ ook voor $0 < x < 1$ te *definiëren*. Daarmee is het domein van de zètafunctie uitgebreid tot $x > 0$. Zo volgt bijvoorbeeld uit $\eta(\frac{1}{2}) \approx 0{,}6048986$ dat $\zeta(\frac{1}{2}) \approx -1{,}4603545$. Alleen in $x = 1$ blijft het misgaan, want daar geldt formule (3) niet omdat de noemer dan nul wordt. Men noemt $x = 1$ een *pool* van de functie.

Riemanns formidabele formule

Figuur 2 suggereert duidelijk dat het domein van $\zeta(x)$ nog steeds niet af is. Bij $x = 0$ lijkt de grafiek gewoon af te breken (met $\zeta(0) \approx 0{,}5$). Zou het domein nog verder kunnen worden uitgebreid? Riemann vond het antwoord in de vorm van een werkelijk formidabele formule. Die formule was tegelijkertijd de gouden sleutel die hem toegang gaf tot de meest wonderbaarlijke verbanden tussen de zètafunctie en de priemgetallen. In een iets gewijzigde vorm luidt die formule als volgt:

$$\zeta(-x) = -2\,\frac{x!}{(2\pi)^{x+1}}\,\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\zeta(x+1). \qquad (4)$$

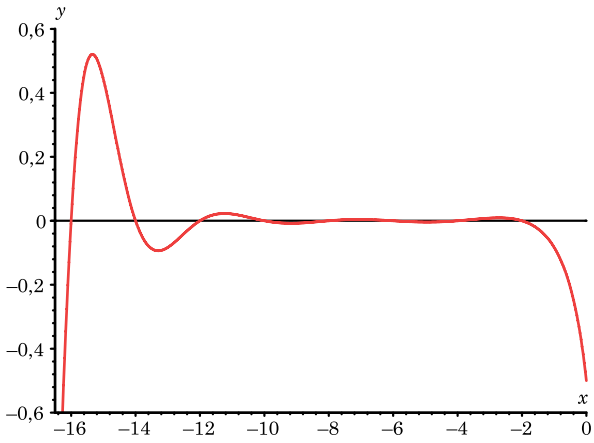
Met deze formule kun je het domein van de zètafunctie uitbreiden. In het rechterlid komt het bekende getal $\pi = 3{,}14159...$ voor, maar ook $x!$, de *faculteitsfunctie* die je op school alleen maar leert voor gehele waarden van x, bijvoorbeeld $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, maar die via een integraal voor alle reële $x \geq 0$ kan worden gedefinieerd. Het rechterlid van (4) geeft op die manier voor alle $x > 0$ een uitkomst die gebruikt kan worden om $\zeta(-x)$ te berekenen.

Neem bijvoorbeeld $x = 1$. We weten dat $1! = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$ en $\zeta(2) = \pi^2/6$, dus

$$\zeta(-1) = -2 \cdot \frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Controleer nu zelf dat $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ en dat $\zeta(-5) = -\frac{1}{252}$. Verder is $\zeta(-2) = 0$, want voor $x = 2$ is de sinusterm in het rechterlid van (4) nul. Hetzelfde geldt voor $\zeta(-4)$, $\zeta(-6)$, $\zeta(-8)$, enzovoort. Deze nulpunten heten de *triviale nulpunten* van de zètafunctie.

Het punt $x = 0$ is een probleem, want in het rechterlid kom je dan de pool $\zeta(1)$ tegen, en daar is $\zeta(x)$ niet gedefinieerd. Maar met een limietovergang kan men bewijzen dat $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, zoals ook de grafiek van figuur 2 suggereert. In figuur 3 is een grafiek van $\zeta(x)$ getekend voor $-16{,}5 \leq x \leq 0$. Let op de ongelijke schaalverdelingen op de assen!



Figuur 3 Een grafiek van $\zeta(x)$ voor $-16{,}5 \leq x \leq 0$. Je ziet dat $\zeta(x) = 0$ als $x = -2$, $x = -4$, ..., $x = -16$.

Het complexe vlak

Riemann vond zijn formidabele formule door het domein van de zètafunctie uit te breiden tot de *complexe getallen*, dat wil zeggen getallen van de vorm $z = x + yi$. Daarmee kun je via haakjes uitwerken gewoon rekenen, als je

maar gebruikt dat $i^2 = -1$. Zo geldt bijvoorbeeld $(3-4\,i)(2+3\,i) = 6+9\,i-8\,i-12\,i^2 = 6+\,i-12(-1) = 18+\,i$. Je kunt het complexe getal $z = x + yi$ zien als het punt met coördinaten (x, y) in het vlak, dat op die manier het *complexe vlak* wordt. De getallen van de vorm $x + 0i$ vind je op de x-as. We noteren ze gewoon als x in plaats van als $x + 0i$. Op die manier maken de reële getallen dus deel uit van de complexe getallen.

Riemanns zètafunctie is gedefinieerd op het gehele complexe vlak met uitzondering van de pool $z = 1$. Naast de triviale nulpunten $z = -2, -4, -6, -8, \ldots$ die we zojuist al gevonden hebben, blijken er nog oneindig veel andere nulpunten te zijn. Riemann bewees dat juist deze *niet-triviale* nulpunten een cruciale rol spelen in de relatie die hij vond tussen de zètafunctie en de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$. Hij kon aantonen dat al die nulpunten in de *kritische strook* $0 \le x \le 1$ moeten liggen. De *Riemann-hypothese* zegt veel meer, namelijk dat ze allemaal op de *kritische lijn* $x = \frac{1}{2}$ liggen. De *priemgetallenstelling* daarentegen is veel zwakker: die is ermee equivalent dat er geen enkel nulpunt op de lijn $x = 1$ ligt. In nummer 2 van deze jaargang hebben we de priemgetallenstelling beschreven. Een van de formuleringen ervan is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/(\ln x)} = 1.$$

Toch kon ook Riemann deze zwakkere stelling niet bewijzen; een bewijs daarvan moest wachten tot 1896.

De niet-triviale nulpunten

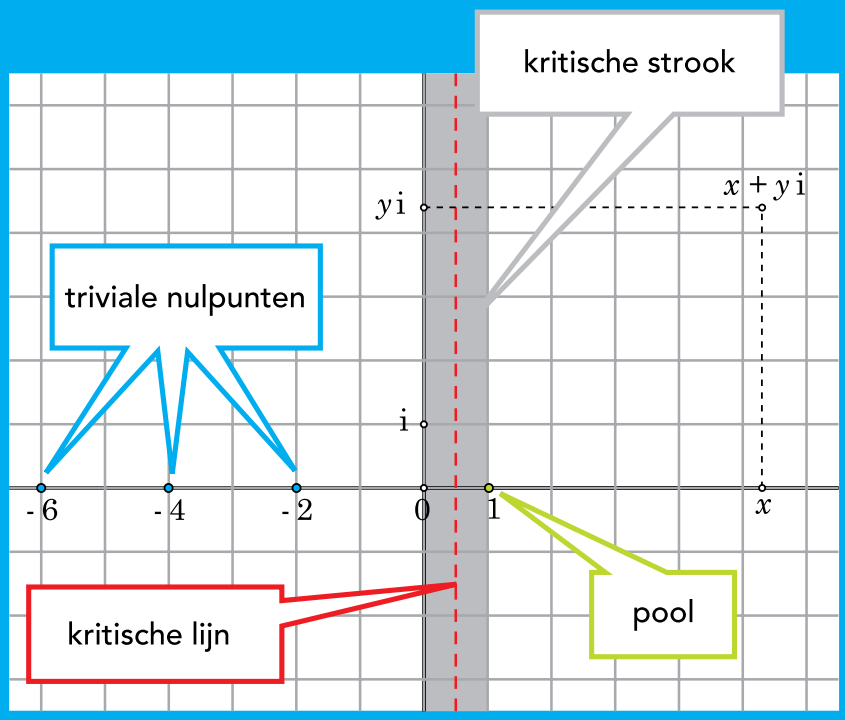
De Riemann-hypothese zelf wacht nog steeds op een bewijs of een weerlegging. Maar er is al veel over de niet-triviale nulpunten bekend. Zo komen ze in paren voor: als $x + yi$ een nulpunt is, is $x - yi$ (het spiegelbeeld in de x-as) ook een nulpunt. Je hoeft dus alleen maar in het bovenhalfvlak te zoeken. Als er ook maar één nulpunt buiten de kritische lijn gevonden wordt, is de Riemann-hypothese weerlegd. Maar dat is nog niet gebeurd. Riemann zelf berekende de eerste nulpunten en controleerde dat ze allemaal op de kritische lijn liggen. De eerste twee keer tien niet-triviale nulpunten (waarbij de y-waarde telkens op drie decimalen is afgerond) zijn

$\frac{1}{2} \pm 14{,}135\,i$	$\frac{1}{2} \pm 37{,}586\,i$
$\frac{1}{2} \pm 21{,}022\,i$	$\frac{1}{2} \pm 40{,}919\,i$
$\frac{1}{2} \pm 25{,}011\,i$	$\frac{1}{2} \pm 43{,}327\,i$
$\frac{1}{2} \pm 30{,}425\,i$	$\frac{1}{2} \pm 48{,}005\,i$
$\frac{1}{2} \pm 32{,}935\,i$	$\frac{1}{2} \pm 49{,}773\,i$

In 1986 publiceerden Jan van de Lune, Herman te Riele en Dik Winter van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam de resultaten van een computerproject waarin ze verifieerden dat de eerste *anderhalf miljard* nulpunten allemaal op de kritische lijn liggen. Dat gaat overigens niet zo maar, want je moet laten zien dat het reële deel van zo'n nulpunt *exact* gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Daarvoor zijn geavanceerde wiskundige technieken nodig. Anderen hebben dat werk voortgezet, en inmiddels is bekend dat de eerste honderd miljard nulpunten allemaal op de kritische lijn liggen. Nog steeds is er geen enkel niet-triviaal nulpunt buiten de kritische lijn gevonden! De zoektocht lijkt vruchteloos: de Riemann-hypothese, die zegt dat ze er helemaal niet zijn, lijkt hoge ogen te gooien. Maar helaas, een *bewijs* daarvan ontbreekt nog steeds.

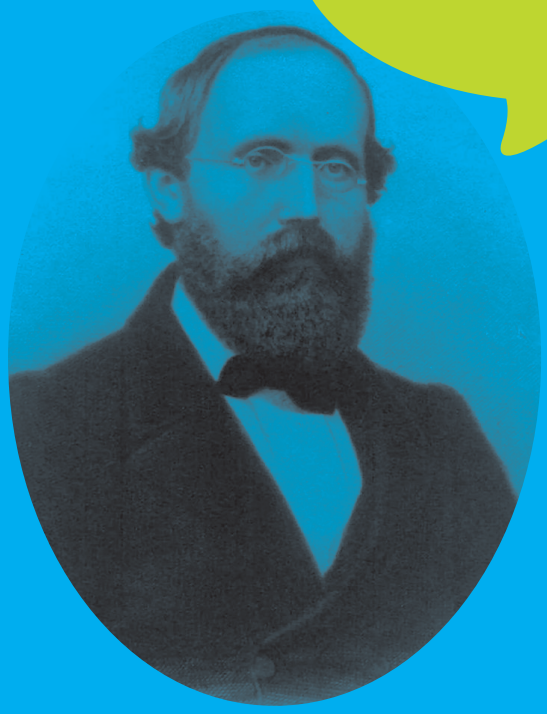
Surfen en verder lezen

Op het internet is veel over de Riemann-hypothese en de zètafunctie te vinden.
Een prachtig boek dat alleen maar vwo-B voorkennis vereist, is: John Derbyshire, *Prime Obsession - Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, 2003, ISBN 0-452-28525-9.

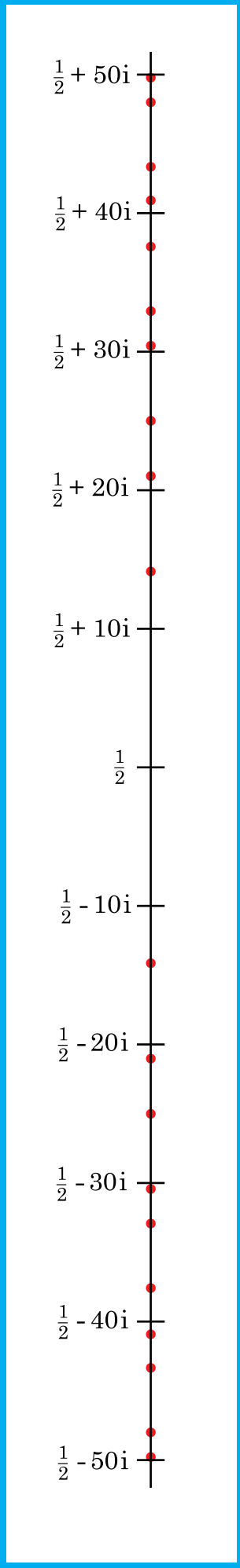


Het complexe vlak met daarin de kritische strook, de kritische lijn, de pool $z = 1$ en enkele triviale nulpunten van de zètafunctie. De niet-triviale nulpunten liggen allemaal in de kritische strook, maar vallen buiten dit plaatje.

Alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritische lijn, vermoed ik.



Bernhard Riemann (1828 - 1868)

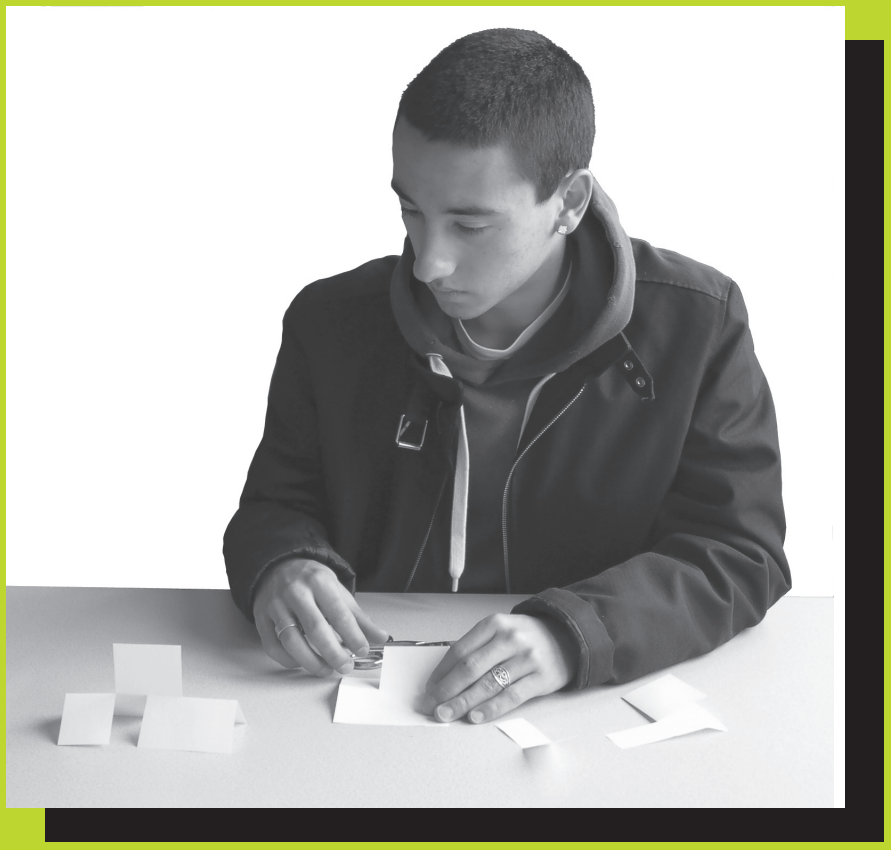


De kritische lijn met daarop de eerste twintig niet-triviale nulpunten van de zètafunctie.

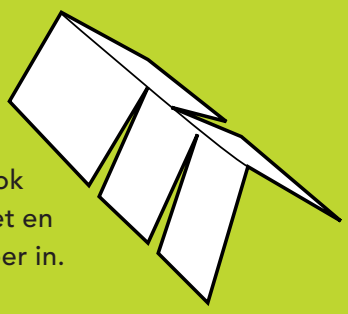
door **Marco Swaen**

Hè?!

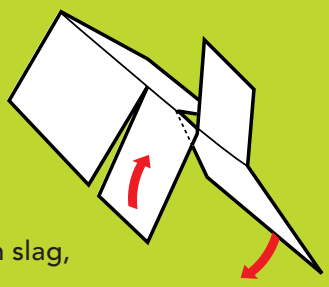
Dit bouwseltje ziet er eenvoudig uit, maar... maak het maar eens na!



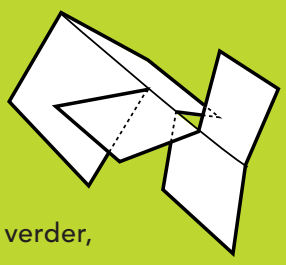
Hoe maak je het bouwseltje?



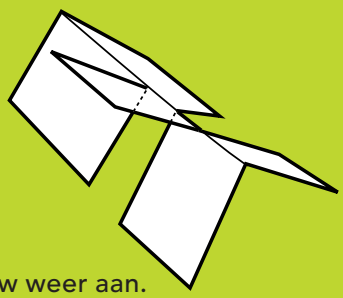
Neem een strook papier, vouw het en knip het drie keer in.



Draai een slag,

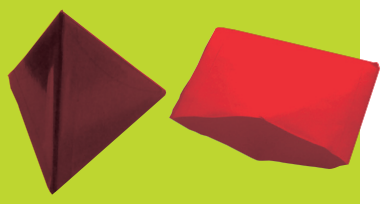


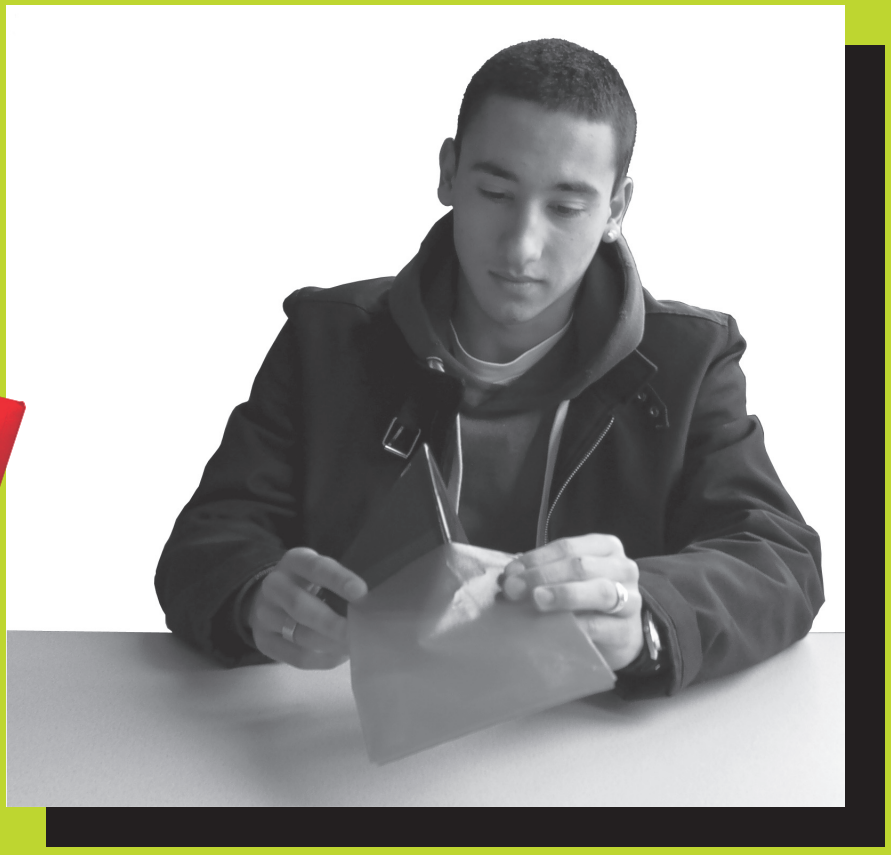
en draai nog verder,



en pas de vouw weer aan.

Stop het viervlak in de hoes.

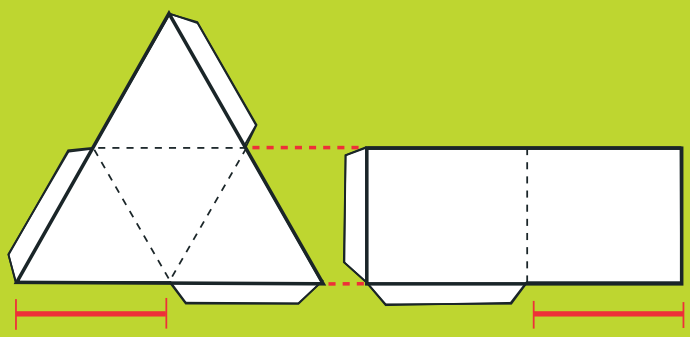


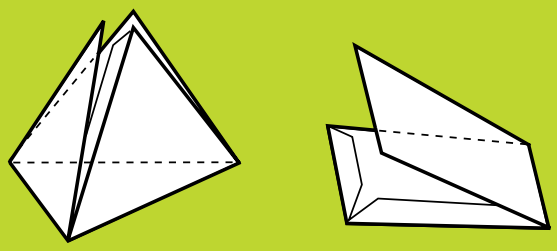


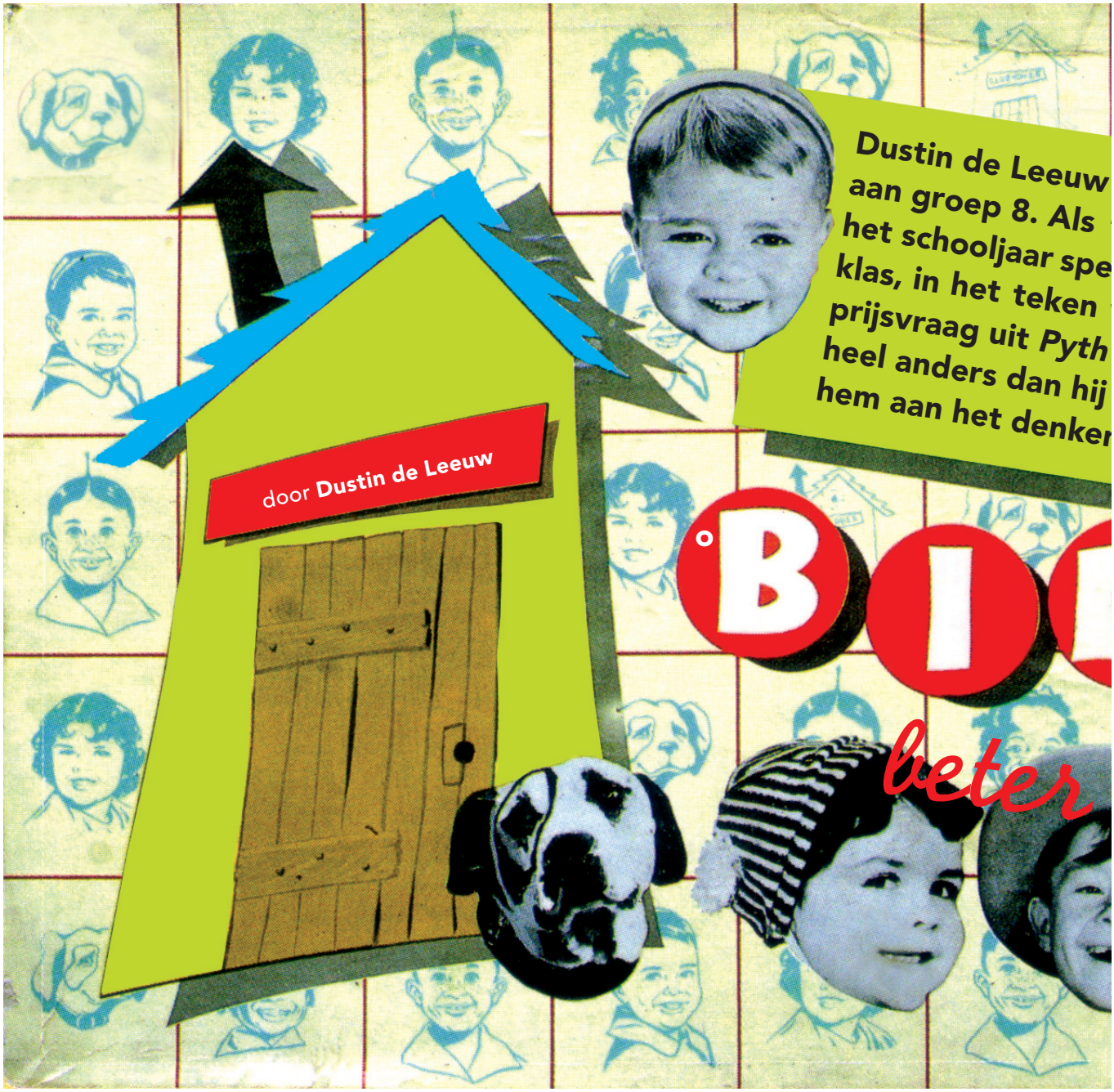
Zelf maken

De bouwplaat van een viervlak bestaat uit vier gelijkzijdige driehoeken.
Maak de hoes van soepel papier of plastic, met de breedte gelijk aan een ribbe, en de hoogte gelijk aan de hoogte van een van de driehoeken.

En probeer het viervlak dan maar in de hoes te schuiven.
Op bladzijde 33 vind je de oplossing.



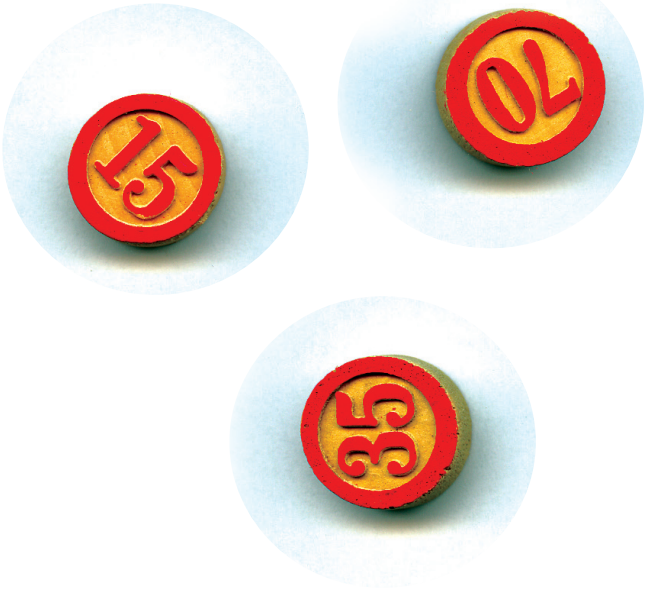




Al een paar weken waren de leerlingen bezig met de Priemgetallenprijsvraag. De muurkrant waarop leerlingen trots hun oplossingen invulden, was voor ruim de helft vol. Voor de laatste les had ik beloofd alle oplossingen tot en met 80 te geven, en ik heb woord gehouden... in plaats van het bingonummer direct te geven, schreef ik een som met de vijf kleinste priemgetallen op het bord.

Na een tijd waren de prijzen voor de eerste rij en de eerste kolom er al uit, maar de volle bingokaart liet eindeloos op zich wachten. Reken op ongeveer een minuut per som (balletje trekken, som op het bord schrijven, uitrekenen, uitvegen, nieuw balletje pakken...), dus binnen drie kwartier zou ik wel klaar zijn, dacht ik. Niet dus. Bijna een uur later was de bingobak voor driekwart leeg, maar nog steeds geen bingo. Zucht. Als meerdere mensen tegelijkertijd bingo zouden halen, had ik een probleem. Met een angstig gevoel riep ik het 72ste nummer, eindelijk bingo, bij één meisje. Een enkeling had nog één, maar de meesten toch wel twee of soms drie nummers open.

Iets klopte hier niet: 36 leerlingen met ieder één kaart. Op elke kaart 24 nummers



(vijf rijen en vijf kolommen, waarvan de middelste cel leeg is), 80 nummers in de ballenbak. Dan moet het wel heel vreemd lopen als na 71 ballen nog steeds niemand bingo heeft, toch? Mijn vermoeden was dus dat de nummers op de kaarten niet goed gerandomiseerd zouden zijn, waardoor iedereen op dezelfde paar nummers zat te wachten.

Kansmodel

Thuis begon ik eens uit te rekenen wat de kans op een dergelijk uitzonderlijke gebeurtenis is. Noem de stochast X het aantal benodigde ballen om tot een volle kaart te komen (80 nummers, op elke kaart staan er 24). Met behulp van de *kansverdeling* van X (dat wil zeggen: alle kansen $\mathbf{P}(X = k)$, de kans dat de kaart bij precies de k-de bal vol is) kunnen de *cumulatieve kansen* $\mathbf{P}(X \leq k)$ worden berekend. De *staartkans* $\mathbf{P}(X > k) = 1 - \mathbf{P}(X \leq k)$ is de kans dat de kaart na k ballen nog niet vol is. De kans dat 36 deelnemers na 71 ballen nog steeds geen van allen bingo hebben, is dus $(\mathbf{P}(X > 71))^{36}$, zie ook de grafiek op de volgende pagina.

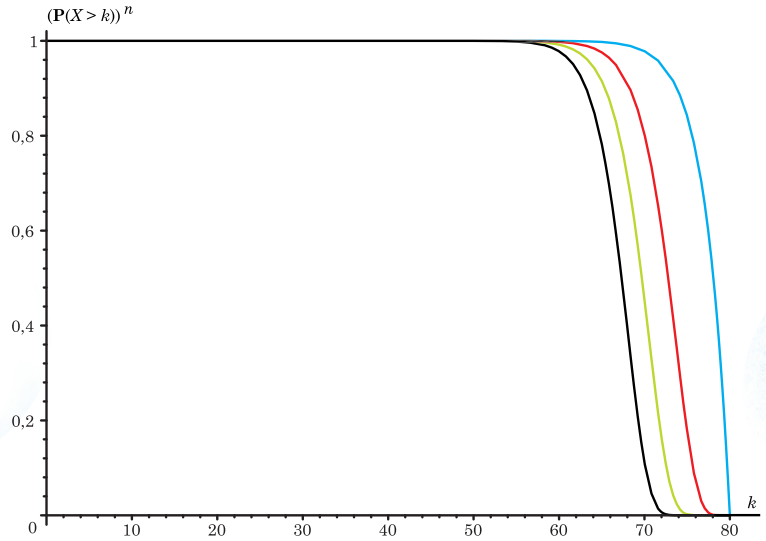
$\mathbf{P}(X = k)$, oftewel de kans dat je precies bij de k-de bal je kaart vol krijgt, is 0 voor alle getallen kleiner dan 24: je kunt na de 23ste bal geen volle kaart hebben.

Voor $k > 80$ heeft de kans ook waarde 0. We rekenen dus alleen de kansen $\mathbf{P}(X = k)$ uit voor k tussen 24 en 80. Dit experiment is vergelijkbaar met het trekken van gekleurde ballen uit een vaas, zonder terugleggen. In een vaas zitten 80 ballen: 24 rode en 56 witte. Wat is de kans dat ik bij de k-de trekking de laatste rode bal trek?

Eerst trek ik $k - 1$ uit 80 ballen. Daarvan zijn er 23 rood, de overige $(k - 1) - 23 = k - 24$ zijn wit. In de vaas zitten dan nog $80 - (k - 1) = 81 - k$ ballen, waaronder precies één rode. De k-de keer pak je dan precies die rode bal. Dus, voor $24 \leq k \leq 80$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{24}{23}\binom{56}{k-24}}{\binom{80}{k-1}} \cdot \frac{1}{81 - k} =$$

$$24 \cdot \frac{56!}{80!} \cdot (k-1)(k-2)\cdots(k-23).$$



De kans dat met n deelnemers na k ballen nog niemand een volle kaart heeft, voor n = 1 (blauw), 10 (rood), 36 (groen), 100 (zwart).

Dat herschrijven is natuurlijk niet noodzakelijk, maar het geeft wel meer inzicht in de orde van grootte van de kansen. De kans dat in mijn klas met 36 leerlingen na 71 nummers nog niemand bingo heeft, is maar liefst 30,2%! Zeer waarschijnlijk dus; de hypothese dat er iets mis zou zijn met de briefjes, kan absoluut niet bevestigd worden.

Cumulatieve kansen

Door deze kansen op te tellen, krijg je de cumulatieve kansen $\mathbf{P}(X \leq k)$. Je kunt deze kans echter ook direct uitrekenen, als je op een handige manier naar het experiment kijkt. Voor het uitrekenen van de kans $\mathbf{P}(X = k)$ hebben we een willekeurige bingokaart gekozen en gekeken wat de kans is dat je na exact k getrokken ballen bingo hebt. Nu bekijken we het experiment van de andere kant: als je de ballen in een bepaalde volgorde trekt, wat is dan de kans dat een willekeurige bingokaart in maximaal k ballen vol is? Dan moeten de 24 nummers op de kaart in hoogstens k ballen getrokken worden. Of, in vaasmodelterminologie: in een vaas met 80 ballen zitten 24 rode ballen en 56 witte; als ik k ballen pak, wat is dan de kans dat ik alle rode ballen krijg?

Voor $24 \leq k \leq 80$ geldt:

$$\mathbf{P}(X \leq k) = \frac{\binom{24}{24}\binom{56}{k-24}}{\binom{80}{k}} = \frac{\binom{k}{24}}{\binom{80}{24}}.$$

Dit is een logische formule: van de 80 nummers staan er 24 op een kaart. Op deze manier kun je $\binom{80}{24}$ kaarten maken. Als je in de eerste k ballen alle nummers gehad wilt hebben, mag je willekeurig 24 van de eerste k ballen kiezen die op je kaart moeten staan. Dit kan op $\binom{k}{24}$ manieren.

Je kunt ook een simulatie doen, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine. De simpelste manier is ook nu om niet bij een vaste kaart verschillende trekkingen te bekijken, maar bij een vaste trekking te kijken na hoeveel ballen de verschillende kaarten vol zijn. Het maakt niets uit welke trekkingsvolgorde je kiest, dus laten we voor het gemak de trekking (1, 2, 3, ..., 79, 80) nemen. Een kaart waarop k het hoogste nummer is, is nu na k ballen vol.

Als je geen zin hebt in programmeren, dan neem je gewoon een aantal bingokaarten en neem je het hoogste daarop voorkomende nummer.

Opmerkelijke resultaten
Enkele van de opmerkelijkste resultaten die ik gevonden heb:
• de verwachtingswaarde van het aantal ballen dat getrokken moet worden tot een specifieke kaart vol is, is maar liefst 77,76;
• als je meedoet aan de bingo met één briefje, heb je 97,8% kans om na 70 nummers nog geen bingo te hebben;
• de kans dat je pas bij het allerlaatste balletje je kaart vol hebt, is maar liefst 24/80, oftewel 30%;
• zelfs met 100 mensen is de kans dat je na 65 nummers klaar bent, slechts 21,7%;
• als je met één briefje meedoet, dan heb je na maximaal 72 nummers 4,9% kans op bingo, na maximaal 74 nummers 10,8%, na 77 nummers 33,7% en na 78 nummers 48,7%;
• dat wil dus zeggen dat je meer dan 50% kans hebt om na 78 nummers nog steeds geen bingo te hebben!

Uit dit laatstgenoemde punt volgt dat bingo tot het einde toe 'spannend' is: er worden ontzettend veel ballen getrokken, na 70 ballen is meestal nog niet duidelijk wie er gaat winnen. Ik was verrast door deze uitkomsten, ze druisen tegen al mijn intuïtie in. Vandaar dat er veel verleidelijke loterijen zijn die de deelnemers voornamelijk veel geld kosten. Wat dacht je van deze loterij: een lot kost €1, als je binnen 60 nummers bingo hebt, krijg je €100, binnen 70 nummers €10 en binnen 75 nummers je inleg terug. Klinkt aantrekkelijk toch? De verwachtingswaarde van de uitbetaling per lot is

$$100 \cdot 0{,}000\,222\,023 + 10(0{,}021\,625 - 0{,}000\,222) + 1(0{,}158\,894 - 0{,}021\,625\,812) = 0{,}022 + 0{,}214 + 0{,}137 = 0{,}374.$$

Dat betekent dus een huispercentage van 62,6%. Als je bij 75 nummers in plaats van je inleg een gratis lot krijgt, is het huispercentage zelfs 72,7%!

(advertentie)

Bedrijfswiskunde?

Praktische problemen kraken met wiskunde en ict is voor jou een uitdaging. Samen met anderen daaraan werken is ok. De resultaten? Die deel je uiteraard met anderen.

Waar jij voor staat: je vooropleiding (havo/vwo, profiel N&T of N&G) zit er bijna op. Het bedrijfsleven trekt je. En nu? Actuariaat? Bedrijfskunde? Cryptologie? Database marketing? Economie? Risico management? Software ontwikkeling? Statistiek? Techniek? Voorraadbeheer? Klinkt allemaal goed. Maar kiezen is moeilijk.

Is wiskunde voor jou de verbindende schakel? Dan is een studie bedrijfswiskunde jouw keuze:
• hbo-opleiding
• kleinschalig
• goed toekomstperspectief (bankwezen, verzekeringsmaatschappijen, industrie, handel, transport en communicatie, overheid en automatisering)

Meer informatie:

Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
www.nhl.nl

Fontys Hogescholen
www.fontys.nl

Hogeschool van Amsterdam
www.hva.nl

Hogeschool INHOLLAND
www.inholland.nl

Technische Hogeschool Rijswijk
www.thrijswijk.nl

°Pythagoras Olympiade

door Arno Kret en Thijs Notenboom

In elk nummer van *Pythagoras* tref je de Pythagoras Olympiade aan: twee uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.
De tussenstand is te volgen op de website van *Pythagoras*.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 30 augustus 2006.

OPGAVE 132

Allard tekent op een vel papier een cirkelschijf met straal 1. Hij markeert n punten binnen de cirkel. Bewijs dat er een punt P op de cirkel is waarvoor geldt dat de som van de afstanden van P tot de gemarkeerde punten groter dan of gelijk aan n is.

Aanwijzing. Gebruik de driehoeksongelijkheid: voor drie punten A, B en C geldt dat $\mathrm{d}(A, C) \leq \mathrm{d}(A, B) + \mathrm{d}(B, C)$.

OPGAVE 133

Gegeven is een geheel getal $k > 3$.
De oplossingen van de vergelijking

$$x^2 - kx + 1 = 0$$

zijn a en b. Bewijs dat voor ieder geheel getal $n \geq 0$ geldt:

a. $a^n + b^n$ is geheel.
b. $a^n + b^n$ is niet deelbaar door $k - 1$.

OPLOSSING

128

Gegeven een positief geheel getal n, bereken

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}.$$

Oplossing. Zoals bekend staat $\binom{n}{i}$ voor het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, ..., n\}$ met i elementen. Je kunt de som interpreteren als het tellen van alle mogelijke kleuringen van $\{1, 2, ..., n\}$ met drie kleuren: $\binom{n}{i}$ telt het aantal mogelijkheden om een verzameling met i elementen te kiezen, de punten buiten die verzameling kleuren we rood; $\binom{i}{j}$ telt dan het aantal mogelijkheden om j punten uit de ongekleurde i te kiezen, die kleuren we groen en de rest blauw; kortom $\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ telt alle kleuringen met $n-i$ rode, j groene en $i-j$ blauwe punten. De som telt al die aantallen bij elkaar op en geeft dus het totaal aantal kleuringen.

Je kunt het aantal kleuringen ook in één keer opschrijven: elk getal kan drie kleuren krijgen, onafhankelijk van de andere getallen; dat geeft dus 3^n mogelijkheden.
We vinden

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = 3^n$$

Opmerking: de opgave kan ook worden opgelost door het *binomium van Newton* toe te passen.

Deze opgave werd goed opgelost door: Hildo Bijl van **OSG Huygenwaard** te Heerhugowaard, Paul Bloembergen van **RSG Pantarijn** te Bennekom, Saartje Van Bockstal van **Edugo Campus De Toren** te Oostakker (België), Elias C. Buissant des Amorie uit Castricum, Milo van Holsteijn van **RSG Pantarijn** te Wageningen, Marleen Kooiman van het **Bonhoeffer College** te Castricum, Ela Kowalczyk uit Amsterdam en Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven.
De boekenbon gaat naar Saartje Van Bockstal.

OPLOSSING

129

Achilles en de schildpad spelen een potje *Set*. Stel dat er nog maar drie kaarten over zijn (de overige 78 kaarten zijn dus verdeeld). Bewijs dat deze drie kaarten een set zijn.

Oplossing. Noteer iedere setkaart s als een rijtje van vier getallen $s = (a, b, c, d)$ die waarde 0, 1 of 2 hebben. Immers, er zijn vier eigenschappen die drie verschillende waarden aannemen. Drie setkaarten s_1, s_2, s_3 vormen een set als hun som $s_1 + s_2 + s_3 := (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3, d_1 + d_2 + d_3)$ bestaat uit getallen die deelbaar zijn door 3. Als de drie kaarten geen set zijn, dan is minimaal één van de vier getallen niet deelbaar door 3. Hetzelfde geldt voor meer kaarten. Als we $3k$ kaarten hebben, dan weten we dat we ze in k sets kunnen verdelen precies wanneer de vier getallen van de totale som deelbaar zijn door 3.
De som S van alle 81 setkaarten is $(81, 81, 81, 81)$. Deze vier getallen zijn deelbaar zijn door 3. Als we drie kaarten s_1, s_2, s_3 van de stapel halen die geen set vormen, dan wordt de nieuwe som $S - (s_1 + s_2 + s_3)$. Omdat een van de vier getallen getallen uit $s_1 + s_2 + s_3$ niet deelbaar is door 3, is ook een van de vier getallen uit $S - (s_1 + s_2 + s_3)$ niet deelbaar door 3, en dus zijn de 78 overige kaarten niet te verdelen in 26 sets.

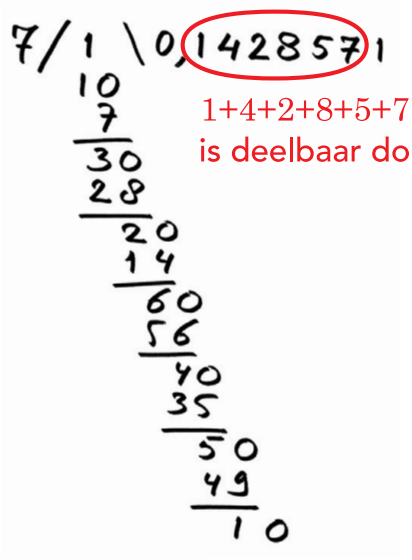
Deze opgave werd goed opgelost door: Hildo Bijl van **OSG Huygenwaard** te Heerhugowaard, Elias C. Buissant des Amorie uit Castricum, Milo van Holsteijn van **RSG Pantarijn** te Wageningen, Ela Kowalczyk uit Amsterdam, Milan Lopuhaä uit Driehuis en Jens Vande Cavey van het **Heilige-Drievuldigheidscollege** te Leuven.
De boekenbon gaat naar Hildo Bijl.

door **Swier Garst**

Wil je $\frac{1}{7}$ met behulp van je rekenmachine als decimale breuk schrijven, dan krijg je $0{,}1428571429$. Je rekenmachine kapt af met een 9, maar misschien is die 9 alleen maar een afronding. Wat houdt zich achter die 9 schuil?

Perioden van breuken

Om te zien hoe $\frac{1}{7}$ zich werkelijk ontwikkelt, maken we een staartdeling:



1+4+2+8+5+7
is deelbaar door 9

Bij iedere stap in de deling krijgen we een rest. Na zes stappen hebben we de rest 1, waarmee we begonnen, voor het eerst weer terug. We kunnen dan stoppen met staartdelen, want het hele patroon zal zich blijven herhalen. Die 9 op het scherm van je rekenmachine blijkt inderdaad een afronding te zijn. We zien dus dat

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots$$

We schrijven dat als $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$.
Het rijtje 142857 heet de *periode* en omdat er zes cijfers in de periode staan, zeggen we dat de *periodelengte* gelijk is aan 6. Bij $\frac{1}{7}$ kan de periodelengte niet groter zijn dan 6, omdat je na zes stappen in je staartdeling alle mogelijke resten (1 tot en met 6) gehad hebt en je bij een zevende keer delen altijd een rest krijgt die je al een keer hebt gehad.

Som van de periodecijfers

Nu letten we op de som van de cijfers in de periode. Bij $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$ gaat het dus om $1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$, en dat is 9×3: negen keer de helft van de lengte van de periode. Dat dat geen toeval is, zien we als we de deling $\frac{1}{7}$ anders opschrijven:

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \times 7 + 1\\
10 &= 1 \times 7 + 3\\
30 &= 4 \times 7 + 2\\
20 &= 2 \times 7 + 6\\
60 &= 8 \times 7 + 4\\
40 &= 5 \times 7 + 5\\
50 &= 7 \times 7 + 1
\end{aligned}$$

Tellen we vanaf de tweede regel de getallen aan de linker- en rechterkant van de =-tekens op, dan krijgen we

$$10 + 30 + 20 + 60 + 40 + 50 =$$
$$(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) \times 7 +$$
$$(3 + 2 + 6 + 4 + 5 + 1).$$

Of anders geschreven:

$$10 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = (1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) \times 7 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6),$$

zodat

$$(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) \times 7 = 9 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).$$

Omdat je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ eenvoudig kunt uitrekenen ($\frac{6\times 7}{2}$), krijgen we:

$$7 \times (1+4+2+8+5+7) = 9 \times \frac{6 \times 7}{2}.$$

Delen we tot slot links en rechts door 7, dan krijgen we

$$1+4+2+8+5+7 = \frac{9 \times 6}{2} = 27.$$

Andere breuken

Stel dat we dit niet speciaal met 7 doen, maar met een willekeurig priemgetal p waarvan $\frac{1}{p}$ periodelengte $p-1$ heeft. Dan krijgen we

$$\frac{1}{p} = 0{,}0\cdots 0a_1a_2a_3\cdots a_{p-1},$$

waarbij het aantal nullen dat direct achter de komma staat gelijk is aan het aantal cijfers dat p heeft. Noem dat aantal cijfers k, dan hebben we $10^{k-1} < p < 10^k$ en begint de periode dus pas als 10^k gedeeld wordt door p. Vanaf dat moment krijgen we:

$$\begin{aligned} 10^{k-1} &= 0 \cdot p + 10^{k-1} \\ 10 \cdot 10^{k-1} &= a_1 \cdot p + r_1 \\ 10 \cdot r_1 &= a_2 \cdot p + r_2 \\ 10 \cdot r_2 &= a_3 \cdot p + r_3 \\ &\vdots \\ 10 \cdot r_{p-2} &= a_{p-1} \cdot p + 10^{k-1} \end{aligned}$$

Optellen van de linker- en de rechterkant van het = -teken vanaf de tweede regel geeft je

$$\begin{aligned} 10(10^{k-1} + r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-2}) &= \\ p(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{p-1}) &+ \\ + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{p-2} + 10^{k-1}&. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} 9(10^{k-1} + r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-2}) &= \\ = p(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{p-1})&. \end{aligned}$$

In de staartdeling passeren alle getallen van 1 tot en met $p-1$ precies één keer als rest, daar hoort dan ook 10^{k-1} bij. Vandaar dat

$$10^{k-1} + r_1 + r_2 + \cdots + r_{p-2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + p - 1 = \tfrac{1}{2}p(p-1).$$

Dat levert op:

$$9 \cdot \tfrac{1}{2}p(p-1) = p(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{p-1}),$$

zodat

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{p-1} = \tfrac{9}{2}(p-1).$$

Dus als van een priemgetal p het getal $\frac{1}{p}$ een periodelengte $p-1$ heeft, dan is de som van de cijfers in de periode gelijk aan $\frac{9(p-1)}{2}$. Dat is inderdaad negen maal de helft van de lengte van de periode.

Een voorbeeld: $\frac{1}{17} = 0{,}\overline{0588235294117647}$ en dus, volgens de formule:

$$0 + 5 + 8 + 8 + \cdots + 4 + 7 = \frac{9(17-1)}{2} = 72.$$

De 9 in onze formule is ook geen toevallig getal, het is $10-1$ waarbij 10 staat voor het 10-tallig stelsel waarin we rekenen. Zou je rekenen in een g-tallig stelsel, dan geldt voor de som S van de cijfers van een repeterende breuk afkomstig van een getal van de vorm $\frac{1}{p}$, met p een priemgetal en een periodelengte $p-1$ de volgende formule:

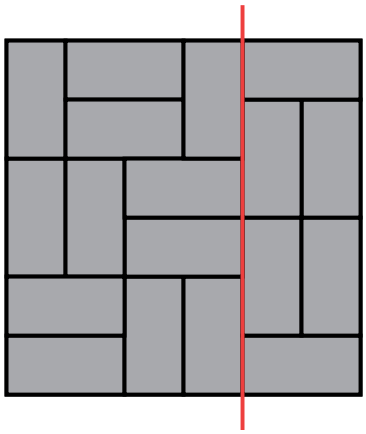
$$S = \frac{(g-1)(p-1)}{2}.$$

Dit kun je bewijzen door de afleiding hierboven nog algemener te maken. Wie ten slotte nog zelf wil experimenteren, kan gebruik maken van een programma voor de GR, dat te vinden is op Henkshoekje.com.

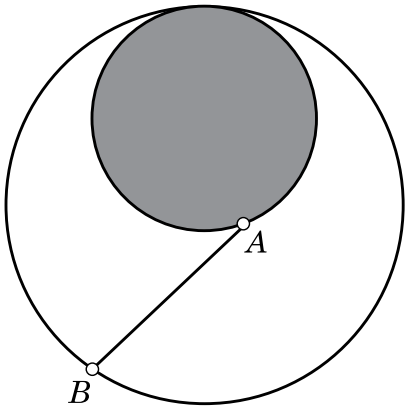
°Problemen

door **Dion Gijswijt**

Breukvrije betegeling
Een betegeling van een rechthoek met domino's heet *breukvrij* als de betegeling niet te splitsen is in twee betegelingen van kleinere rechthoeken. In de figuur zie je een betegeling van een 8 x 8 rechthoek, die niet breukvrij is. Vind een breukvrije betegeling van een 8 x 6 rechthoek. Bestaat er ook een breukvrije betegeling van een 6 x 6 vierkant?



Cirkels
Een cirkel met straal 5 raakt inwendig aan een cirkel met straal 9. Punt A ligt op de kleine cirkel en punt B op de grote cirkel zó, dat lijnstuk AB en de kleine cirkel alleen punt A gemeen hebben. Wat is de maximale lengte van zo'n lijnstuk AB?



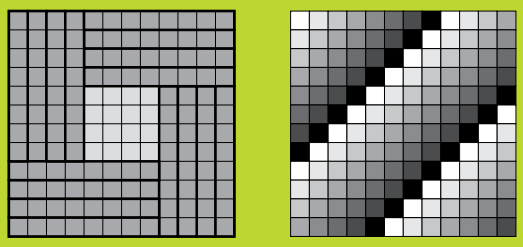
Getalfabriek
Vincent verzamelt getallen. Hij heeft er al één: het getal 0. Maar hij heeft een manier om nieuwe getallen te maken met behulp van getallen die hij al heeft. Als hij getallen a en b in zijn verzameling heeft, mag hij het getal $a^2 - b^2 + 1$ aan zijn verzameling toevoegen. Hier mag a gelijk zijn aan b.
Zo maakt hij bijvoorbeeld:
$1 = 0^2 - 0^2 + 1$, $2 = 1^2 - 0^2 + 1$ en $-2 = 1^2 - 2^2 + 1$.
Kan hij ook het getal 2006 maken?

Kop of munt
Amber en Benjamin spelen een kansspelletje. Telkens gooien ze een muntje op, zodat een reeks uitkomsten kop(K)/munt(M) ontstaat. Als op zeker moment de laatste drie uitkomsten MKK zijn, wint Amber het spel. Als op zeker moment de laatste drie uitkomsten KKK of KKM zijn, wint Benjamin. Is dit wel een eerlijk spel?

Zie ook de artikelen *Onverwachte verwachtingen* in het februari- en het aprilnummer.

°Oplossingen
nr. 5

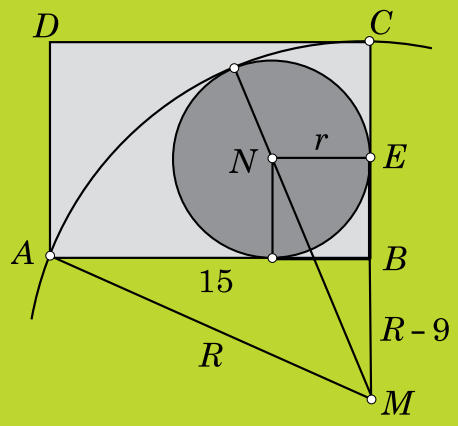
Inpakken
Als je de kleuring met 8 kleuren van de 144 velden bekijkt, dan zie je dat elke strip van ieder nummer precies één vakje neemt. De aantallen vakjes in de verschillende kleuren zijn: 17, 18, 19, 20, 19, 18, 17 en 16. Omdat er maar 16 zwarte vakjes zijn, kunnen er niet meer dan 16 strips in het vierkant worden gepast. Dat 16 wel mogelijk is, zie je in de figuur.



Sneeuwwitje
Sneeuwwitje nummert de dwergen binair: RRR, RRB, RBR, RBB, BRR, BRB en BBR. Dan geeft ze elke dwerg de kleur muts aangegeven door de eerste van zijn drie bits. Is het niet correct, dan gebruikt ze voor elk de tweede bit, en ten slotte de derde bit. Omdat Dopey en Grumpy in minimaal één bit verschillen, is ten minste een van de drie antwoorden correct.

In minder dan drie pogingen kan het niet. Immers, na twee pogingen zijn er per dwerg maar vier kleuringen mogelijk. Maar er zijn meer dan vier dwergen, dus zijn er twee dwergen die steeds dezelfde kleur hebben ontvangen.

Twee cirkels
Noem de middelpunten van de grote en kleine cirkel respectievelijk M en N en de stralen R en r.
Dan volgt uit $|AM|^2 = |AB|^2 + |BM|^2$ dat $R = 17$. Uit $|NM|^2 = |EM|^2 + |NE|^2$ volgt $r^2 + (8 + r)^2 = (17 - r)^2$.
Oplossen geeft $r = 5\sqrt{34} - 25$.



Drie breuken
Schrijf $k = 7q + r$ met $0 \le r \le 6$. Dan is

$$\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{2k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{4k}{7} \right\rfloor$$

gelijk aan

$$\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{r}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{2r}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{4r}{7} \right\rfloor + 7q.$$

Het volstaat daarom om de gevallen $k = 0, 1, \ldots, 6$ te controleren.

door **Ronald de Vlaming**

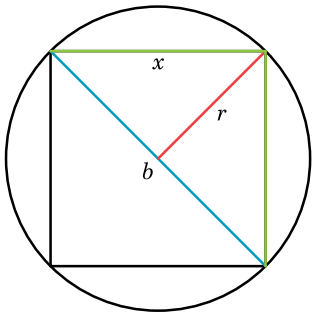
Benaderingen van π

Iedereen weet wat π is: de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Je kunt, uitgaande van die definitie, steeds betere benaderingen van π maken. Ronald de Vlaming laat zien hoe.

We tekenen een cirkel met diameter 1, dus de straal is $\frac{1}{2}$. De omtrek van de cirkel is dan (per definitie) gelijk aan π. De omtrek van een regelmatige veelhoek waarvan de hoekpunten op de cirkel liggen, geeft een benadering van π. Hoe meer zijden de veelhoek heeft, hoe beter de benadering is.

Eerste benadering

We beginnen met een vierkant dat precies binnen de cirkel past. De omtrek van dit vierkant geeft onze eerste π-benadering, die natuurlijk nog erg grof is.



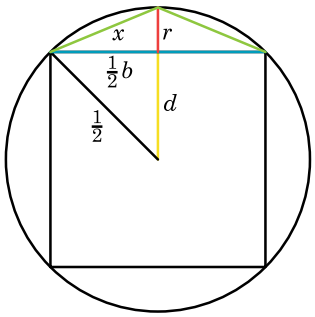
De lengte van een (groene) zijde x van het vierkant kun je met behulp van de stelling van Pythagoras uitrekenen. De (blauwe) diagonaal heeft lengte $b = 1$, de helft daarvan is $\frac{1}{2}$ en dat is ook de lengte van het rode lijnstuk r. We zien dat $x^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + r^2$. In dit geval $(\frac{1}{2}b)^2 + r^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ en dus volgt dat $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. De omtrek van het vierkant is dus

$$4x = 2\sqrt{2}.$$

Dat is onze eerste benadering van π.

Tweede benadering

Vervolgens maken we de benadering beter, door op elke zijde van het vierkant een gelijkbenige driehoek te zetten met de top op de cirkel. Zo krijgen we een regelmatige achthoek waarvan de omtrek een betere benadering van π is. Om die omtrek te berekenen, verplaatsen we de situatie van het eerste plaatje naar die driehoek: de basis b maken we blauw, de overige twee zijden, met lengte x, maken we groen en ten slotte maken we de hoogtelijn r uit de top rood.



We krijgen dezelfde formule als daarnet: $x^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + r^2$. Nu is b gelijk aan de oude waarde van x; r is niet meer de halve straal, maar we kunnen hem wel berekenen met behulp van een extra rechthoekige driehoek.

Met behulp van de zwart-blauw-gele driehoek vinden we $d^2 + (\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2})^2$; hieruit volgt $d = \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2}$ en dus $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2}$. Als we dit invullen in $x^2 = (\frac{1}{2}b)^2 + r^2$ komt er $x^2 = \frac{1}{4}b^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{4}(1-b^2))$.
Na wegwerken van de haakjes krijgen we $x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2}$ en dus

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-b^2}}.$$

Die formule kunnen we opknappen:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-b^2}}. \qquad (*)$$

Omdat $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt

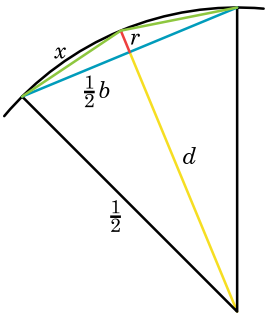
$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

en dit kunnen we vereenvoudigen tot $x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. De omtrek van de achthoek is dus

$$4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Nog meer zijden

Formule (*) is belangrijk; die komt namelijk iedere keer terug als we het aantal zijden verdubbelen.



We hebben de vorige groene lijn blauw gemaakt en die als basis van het nieuwe driehoekje gebruikt. De nieuwe groene lijn noemen we weer x, het rode lijntje r en de gele lijn d. Dan vinden we weer $d^2 + (\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2})^2$ en daaruit volgt op precies dezelfde manier als boven weer formule (*).

°°Een recursieve formule

Met behulp van formule (*) hebben we de lengte van een zijde van de achthoek uitgedrukt in de lengte van de zijde van het vierkant. De formule werkt ook bij het berekenen van de lengte van de zijde van het vierkant: vul maar $b = 1$ in.

Als we de diameter eventjes een 'tweehoek' noemen, dan kunnen we een rij getallen x_1, x_2, x_3, ... maken.

We beginnen met $x_1 = 1$ (de lengte van een zijde van de tweehoek). Dan krijgen we $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (de lengte van een zijde van het vierkant). Via formule (*) krijgen we

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-x_2^2}}$$

(de lengte van een zijde van de achthoek).
In het algemeen is x_n de lengte van een zijde van de 2^n-hoek en de getallen x_n zijn onderling verbonden door formule (*):

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-x_n^2}}.$$

De omtrek van de 2^n-hoek wordt dan gegeven door $O_n = 2^n x_n$.

Deze formules kun je eenvoudig in je rekenmachientje programmeren; daarmee kun je onderzoeken hoe snel de rij omtrekken O_n tot π nadert.

Mooie formules

Als je de moeite neemt de eerste getallen x_n netjes uit te schrijven, zul je iets fraais ontdekken. Het begint niet opwindend met $x_1 = 1$ en $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor x_3 hadden we $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ gevonden. In de volgende stap krijgen we

$$x_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-x_3^2}}.$$

Als we dat uitschrijven komt er

$$x_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Dit fraaie patroon blijft zich voortzetten:

$$x_5 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

(even doorzetten bij het uitschrijven). In het algemeen, als

$$x_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2+a}},$$

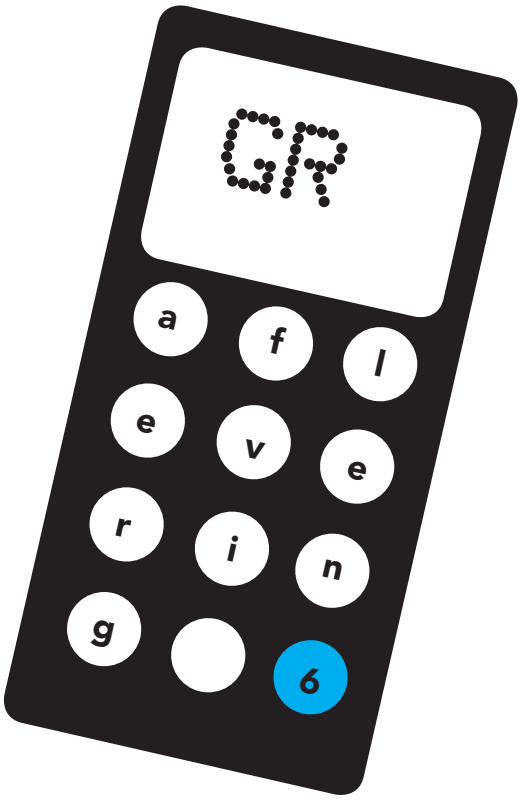
dan volgt na uitschrijven dat

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2+a}}}.$$

door **Henk Pfaltzgraff**

ooo Haal meer uit je

Programmeren op je TI-83 (of -84) is een fluitje van een cent. Je drukt op [PRGM]<NEW> en [ENTER], voert een naam in en begint te programmeren. Onder 2nd[CATALOG] vind je alle commando's. De hier beschreven programma's kun je downloaden van www.henkshoekje.com (klik op Pythagoras' Hoekje).



In deze slotaflevering van programmeren in TI-BASIC verdiepen we ons in wiskunde die verbonden is met de naam van het Zwitserse genie Leonhard Euler (1707-1783). Overbekend is het (ware) verhaal van de doofheid van Ludwig von Beethoven, de componist die bleef doorcomponeren ook toen hij geheel doof geworden was. Veel minder bekend is wat Euler overkwam. Na in 1735 één oog verloren te hebben, werd hij in 1766 geheel blind. Zijn wiskundige arbeid leed er blijkbaar niet onder, want hij produceerde nog vele publicaties van een buitengewone diepgang en helderheid. Opschrijven kon hij zijn gedachten echter niet meer, hij moest ze dicteren.

De oppervlakte onder de hyperbool

Euler is niet de bedenker van het getal e, maar hij is wel degene die voor het eerst deze constante aanduidde als 'e'. Ten onrechte wordt wel eens beweerd dat hij daarmee verwees naar zijn eigen naam Euler. Het getal e is een fundamenteel grondtal van machten en logaritmen. Dit grondtal is ook de uitkomst van

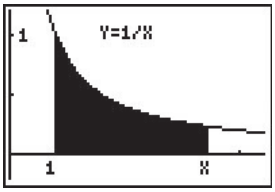
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Probeer dit maar eens uit op je GR:

```
(1+1/100)^100
          2.704813829
1.000001^1000000
          2.718280469
e
          2.718281828
```

Merkwaardigerwijs komen we deze limiet

ook tegen bij het bepalen van de oppervlakte onder de hyperbool. We tekenen de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, wat is dan de oppervlakte van een stukje onder die hyperbool zoals gearceerd hieronder?



We zullen daar eens op een ongebruikelijke manier naar kijken. De oppervlakte van het gearceerde gebied kunnen we benaderen met een groot aantal staafjes (rechthoekjes) van variabele breedte, zoals in nevenstaande schermbeeldjes te zien is. Op de x-as zetten we een meetkundige rij met reden $r > 1$ af. Zo krijg je voor de hoekpunten van die staafjes op de x-as de waarden $1, r, r^2, r^3$, enzovoorts. De hoogte van zo'n rechthoekje wordt bepaald door de functiewaarde $1/r$, zodat de gesommeerde oppervlakte is:

$$\begin{aligned}(r-1)\cdot 1 \;+\; (r^2-r)\cdot 1/r \;+\\ +\,(r^3-r^2)\cdot 1/r^2 \;+\; \cdots =\\ (r-1)+(r-1)+(r-1)+\cdots\end{aligned}$$

Je ziet dat een *meetkundige* rij op de x-as voor de oppervlakte een *rekenkundige* rij tot gevolg heeft. Vermenigvuldiging wordt omgezet in optelling. Dat doet denken aan de volgende eigenschap van logaritmen:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

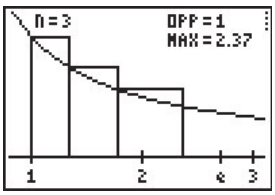
Conclusie: de oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ is een logaritme! Welke grondtal hoort bij deze logaritme?

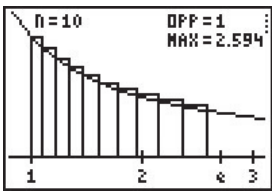
We nemen $r = 1 + 1/n$. De bewuste oppervlakte is dan gelijk aan

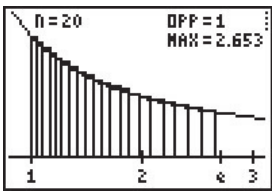
$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ keer}} = n\cdot\frac{1}{n}.$$

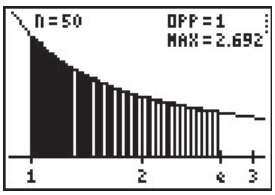
Deze uitkomst is exact 1, onafhankelijk van de grootte van n. De rechtergrens echter verschuift in de richting van de limietwaarde van $(1 + 1/n)^n$ en benadert zo de constante e.

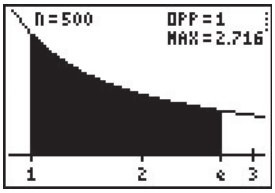
Om het je allemaal goed te laten zien, schreef ik het demoprogrammaatje LNDEMO, waaruit de volgende plaatjes afkomstig zijn:











De aldus gevonden logaritme heeft het grondtal e en heet de natuurlijke logaritme.

Een supertrage rij

Leonhard Euler bestudeerde de harmonische reeks:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

De vraag is of deze reeks bij toenemende n

willekeurig groot wordt (divergeert), danwel een limietwaarde heeft (convergeert). Misschien valt daar wat over te zeggen met `sum(seq(...` Probeer het, en je ziet dat dat tegenvalt, zoals blijkt uit het onderstaande schermbeeldje.

```
sum(seq(1/N,N,1,
100))
      5.187377518
sum(seq(1/N,N,1,
999))
      7.484470861
```

De geheugenruimte van de TI-83 en -84 laat rijen met duizend termen of meer niet toe. We zullen voor verder onderzoek een programma moeten schrijven. We noemen het `HARMONIE`.

```
PROGRAM:HARMONIE
:sum(seq(1/X,X,N+1,N+500))→T
:S+T→S:N+500→N
:Output(1,3,N)
:Output(2,3,S)
:Pause
:Goto 0
```


Na zes keer vijf seconden wachten is er nog steeds reden voor twijfel:

$$\sum_{k=1}^{3000} \frac{1}{k} \approx 8{,}58.$$

Een onbetwistbare conclusie is nog niet te trekken, maar een vermoeden hebben we wel: *de harmonische reeks lijkt te divergeren*. Deze divergentie is echter van een onvoorstelbare traagheid! Na een miljoen termen is de som pas gevorderd tot iets voorbij de 14; in 1968 berekende J. Wrench het aantal benodigde termen om boven de 100 te komen; dat aantal was 15.092.688.622.113.788.323.693.563.264.538.101.449.859.497.

Wie denkt dat die som simpel door een computer is uit te voeren, vergist zich. Stel je een supercomputer voor die elke seconde een miljard optellingen verricht, dag en nacht, onvermoeibaar. Deze zou er ruim 10^{26} jaar voor nodig hebben, onvergelijkelijk veel langer bijvoorbeeld dan het heelal bestaat (15×10^9 jaar). In de veertiende eeuw (!) gaf de Franse bisschop Nicholas Oresme een bewijs dat de harmonische reeks toch elke grens op een gegeven moment passeert. Hoe hij dat deed, kun je lezen in het kader op pagina 6. Vier eeuwen later kwam Euler hierop terug en weer drie eeuwen later komen wij op Euler terug.

Gamma

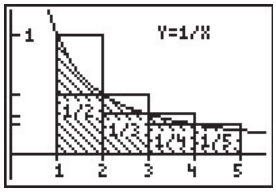
Euler zocht naar het verband tussen de harmonische reeks en de oppervlakte onder de hyperbool. De oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, rechts van de lijn $x = 1$, kan namelijk bij benadering geschreven worden als een som van rechthoekjes met breedte 1 en hoogte $\frac{1}{x}$:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} \cdot 1$$

en dat lijkt wel heel erg op de integraal

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

waarvan de uitkomst $\ln n$ is. En tegelijkertijd is de totale oppervlakte van die rechthoekjes juist de som van de harmonische reeks!



Laten we eerst zelf eens wat proberen. De oppervlakte onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, tussen de lijnen $x = 1$ en $x = n$, kan door rechthoekjes benaderd worden. De hoogste rechthoekjes leveren, als we $\ln n$ proberen te benaderen, duidelijk te veel op. Die bovensom is

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

De onderste rechthoekjes hebben een oppervlakte die te weinig oplevert, namelijk:

$$O_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Het gemiddelde van de bovensom en de ondersom $(O_n + B_n)/2$ is een veel betere benadering. Zo vinden we:

$$\ln n \approx \frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n})}{2} = H_n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$$

(ga na); eigenlijk nog ietsje minder, omdat de kromme $y = \frac{1}{x}$ iets onder de schuine lijnstukjes (de 'koorden') ligt. Noem 'ietsje' even ε. De som van de harmonische reeks is dan te schrijven als

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \varepsilon.$$

Als n naar oneindig gaat, wordt het verschil tussen de harmonische reeks en $\ln n$ langzamerhand een vaste waarde:

$$H_n \approx \ln n + \gamma.$$

De letter γ is hier de *constante van Euler*; deze is dus iets groter dan $0{,}5$. Euler slaagde erin een benadering voor γ te vinden die pas in de zesde decimaal afweek van wat we er tegenwoordig van weten. Hoe knap zijn prestatie was, kun je inschatten als je het volgende programma uitvoert.

We breiden het vorige programma HARMONIE zodanig uit dat in de lijst L1 de n-waarden komen (500, 1000, 1500, ...), in L2 de som H_n en in L3 de schatting van $\gamma = H_n - \ln n$. Noem het programma GAMMA en sla het op, om er later nog eens bij stil te kunnen staan dat je er niet in zult slagen Eulers prestatie te evenaren.

```
PROGRAM:GAMMA
:0→S:0→N:0→I
:Lbl 0
:Output(8,10," ")
:sum(seq(1/X,X,N+1,N+500))→T
:S+T→S
:N+500→N:I+1→I
:S-ln(N)→C
:Output(1,1,"N=")
:Output(1,3,N)
:Output(2,1,"S=")
:Output(2,3,S)
:Output(3,1,"C=")
:Output(3,3,C)
:Output(8,10,"[ENTER]")
:N→L1(I)
:S→L2(I)
:C→L3(I)
:Pause
:Goto 0
```

L1	L2	L3 3
25000	10.704	[illegible]
25500	10.724	.57724
26000	10.743	.57723
26500	10.762	.57723
27000	10.781	.57723
27500	10.799	.57723
28000	10.817	.57723

L3(50)=.57723564...

N.B.: de constante van Euler is ongeveer $0{,}5772156...$; Euler kwam tot $0{,}577218$. Ik kwam na een minuut of tien met de TI-84 uit op $0{,}57724$ en gaf het toen op.

Kan het nog trager?

Jazeker! Stoutmoedigheid is een karaktertrek van veel wiskundigen. Welk gewoon mens zou er aan denken om oneindig veel termen uit de harmonische reeks te schrappen om vervolgens te bewijzen dat de overgebleven reeks nog steeds divergeert, maar onvoorstelbaar veel trager dan onvoorstelbaar! Euler onderzocht de oneindige reeks van omgekeerde priemgetallen:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

en constateerde dat voor alle priemgetallen kleiner dan n (maar wel moet n zeer groot zijn) bij benadering geldt:

$$P_n \approx \ln \ln n + 0{,}26.$$

Neem je bijvoorbeeld alle omgekeerden van priemgetallen onder de miljoen ($n = 10^6$), dan is de reeks, zuchtend en steunend, niet verder gekomen dan $2{,}886$. En daarbij past een eerbiedig zwijgen.

door **Marco Swaen**

Helft keer dubbel

21	x	39		21	x	39
10	x	78		~~10~~	~~x~~	~~78~~
5	x	156		5	x	156
2	x	312		~~2~~	~~x~~	~~312~~
1	x	624		1	x	624
						+
						819

Goeie hoofdrekenaars hebben allerlei trucjes om moeilijke opgaven in makkelijke te veranderen. Een zo'n trucje is *Helft keer dubbel*. Als je het product van twee getallen niet direct ziet, neem dan van de ene de helft en van de ander het dubbele, dan krijg je vaak een gemakkelijker product. Bijvoorbeeld: in plaats van 24 x 15 kun je ook 12 x 30 doen en dat is 360, dat zie je zo.

Product van twee oneven getallen

Zijn beide getallen oneven, dan heb je weinig aan *Helft keer dubbel*. In het boeiende boekje *Gegoochel met getallen* geeft Job van de Groep een uitbreiding van *Helft keer dubbel* die ook in zulke gevallen werkt. Het resultaat is wel iets ingewikkelder, zodat het meer een goocheltruc is dan een hoofdrekentruc.

De truc gaat als volgt. Om 21 x 39 te berekenen, pas je steeds *Helft keer dubbel* toe tot het linker getal 1 is. Wordt onderweg de helft ergens een breuk, rond dan eerst af naar beneden en ga weer verder. Zo krijg je het linker rijtje hierboven.

Streep nu alle regels weg waarin het linker getal even is, en tel van de overgebleven regels alleen de rechter getallen op, zie het rechter rijtje hierboven. De uitkomst is dus 819.

Waarom werkt dit?

Merk op dat de producten op de verschillende regels niet altijd gelijk zijn. Als het linker getal even is, is de volgende regel wel gelijk volgens *Helft keer dubbel*. Die regels schrap je. Maar als het linker getal *oneven* is, gaat er door het afronden één keer het rechter getal verloren. Die regels laat je staan. Ook de onderste regel wordt niet geschrapt, want daar staat links een 1. Rechts staat daar dan de uitkomst minus wat je onderweg verloor, en dat zijn de rechter getallen van de andere regels die je niet schrapte.

21	x	39	= 39 +
10	x	78	=
5	x	156	= 156 +
2	x	312	=
1	x	624	

Gegoochel met getallen, Job van de Groep, ISBN 90-11-09944-3.

door **Marco Swaen**

De wiskunde van Edo Timmermans

Wiskunde en geloof vormen geen voor de hand liggende combinatie. Als wiskundige geloof je iets pas als je het onomstotelijk bewezen hebt. En religie gaat juist over dat wat niet te bewijzen is, en waar je dus hoogstens in geloven kunt. In de moderne opvatting hebben religie en wetenschap principieel geen overlap.

Ooit lag dat anders. Mensen zoals Kepler en Newton zagen hun wetenschappelijk werk in het verlengde van een diepe religieuze overtuiging. Zij achterhaalden de wetten die de beweging van hemellichamen beschrijven en meenden daarmee Gods gedachten te lezen. Gaan wij nog verder terug in de tijd, dan zien we godsdienst en wiskunde nog inniger verbonden. Pythagoras en zijn volgelingen bestudeerden getallen in de overtuiging dat ze daarmee alle raadsels van het leven ontrafelen zouden. Hun wiskunde en hun geloof waren één.

Ook heden ten dage zijn er mensen voor wie wiskunde en spiritualiteit overlappen. Zo bijvoorbeeld voor Edo Timmermans, die je misschien nog kent van zijn artikelen over dissecties in onze vorige jaargang. Tijdens zijn studie informatica aan de Technische Universiteit stuitte Edo in het faculteitsblaadje op een puzzel over de dissectie van een vierkant. Verdeel een vierkant van 13 x 13 in vier stukken waarmee je een vierkant van 5 x 5 en van 12 x 12 kunt leggen. De puzzel loste hij rap op, maar dissecties lieten hem niet meer los. Al gauw zette hij de computer in om systematisch naar dissecties van vierkanten en kubussen te zoeken. Dat onderzoek leverde hem menig mooie verrassing op.

Belangstelling voor spiritualiteit kreeg Edo mee van zijn moeder. Zij was het die hem in 1991 op het idee bracht naar India te reizen om daar de goeroe Sai Baba te bezoeken. ‘Mijn band met Sai Baba heeft mij vele merkwaardige en onverklaarbare ervaringen opgeleverd. Het heeft belangrijke gevolgen gehad voor mijn visie op wetenschap. Veel mensen geloven iets pas wanneer ze het met hun eigen ogen zien. Ik houd het liever bij het voordeel van de twijfel: iets is voor mij pas onmogelijk als dat wiskundig kan worden bewezen.’

In het artikel op de volgende twee pagina’s beschrijft Edo een bijzondere kubusdissectie waarin een puzzelstuk voorkomt dat opvallend veel lijkt op een bekend symbool uit het hindoeïsme. ‘Geen toeval,’ zegt Edo. En van die overtuiging laat hij zich niet afbrengen totdat iemand wiskundig bewijzen kan dat die overeenkomst *wel* toevallig is.

door **Edo Timmermans**

Teken v

Tijdens een wiskundeles in de bovenbouw vertelde mijn leraar dat mystici al eeuwen op zoek zijn naar een teken van God in de wiskunde.

Ondanks naarstig zoeken hebben zij het nog steeds niet gevonden, dus zal zo'n teken van God er wel niet zijn, aldus het betoog van mijn leraar. Bij mij kwam toen de gedachte op: 'Oh, maar dat zal ik later vinden,' het leek of iemand anders die gedachte in mijn hoofd plaatste. 'Ik heb geen idee hoe zo'n teken eruit ziet en waar ik het zou moeten zoeken,' redeneerde ik, 'ach ja, ik zie het wel,' en daar liet ik het verder maar bij.

Nu, ongeveer vijftien jaar later, meen ik het teken van God gevonden te hebben in een heel bijzondere kubusdissectie.

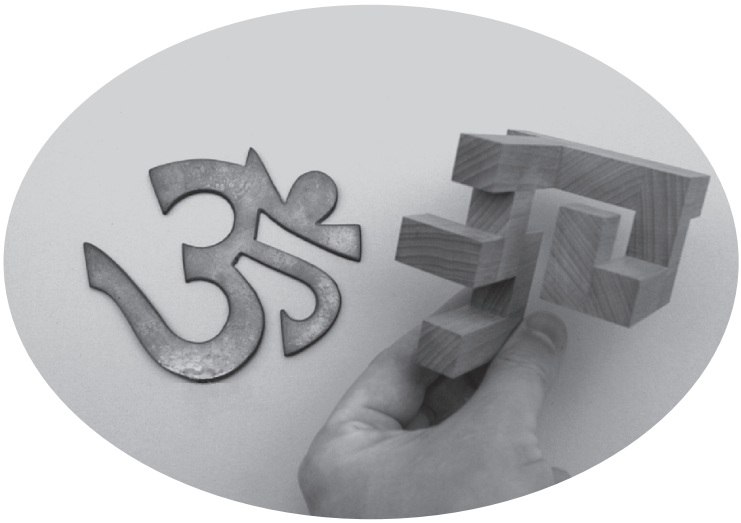
Waarschijnlijk heb je wel eens het om-symbool gezien, zie figuur 1 (links), een symbool dat door Hindoes wordt gezien als een teken van God. Om, ofwel aum, is de oerklank waaruit het hele universum is ontstaan, volgens de heilige boeken van de Hindoes. Het om-symbool heeft vele betekenissen, waaronder die van de heilige drie-eenheid. De puzzels die ik onderzoek, vormen ook een drie-eenheid. Bij een kubusdissectie gaat het er immers om een grote kubus in stukjes te verdelen waarmee je samen drie kleine kubusjes kunt maken.

Heilige drie-eenheid-puzzel

Er zijn vele kubusdissecties, het gebied dat ik met de computer doorzocht heb bevat er zo'n 1,7 miljoen. (Lees mijn artikel in het februarinummer van de vorige jaargang.) Vele daarvan bevatten een eenvoudig schuifprobleem, waarbij een stukje verschoven moet worden voor een ander eruit gehaald kan worden. Ook zijn er puzzels waarbij stukjes gedraaid moeten worden en puzzels waarbij er één uniek sluitstuk is, dat je eerst moet weghalen om de kubus uiteen te halen. Maar onder de 1,7 miljoen was maar precies één dissectiepuzzel die zowel een interessant schuifprobleem, een rotatie als een uniek sluitstuk bevatte. Dus weer een drie-eenheid.

Toen ik bezig was die ene puzzel van hout te maken, zag ik tot mijn verbazing dat een van de puzzelstukken een opmerkelijke gelijkenis vertoont met het om-symbool. In mijn ogen een teken van God, en ik gaf de puzzel de naam *Heilige drie-eenheid-puzzel.*

In figuur 2 zie je de puzzel. In de 5 x 5 x 5-kubus vormt het groene stuk het sluitstuk. Na het groene stuk



Figuur 1
Een metalen om-symbool, afkomstig uit India (links), en het om-symbool uit de dissectie (rechts).

an God

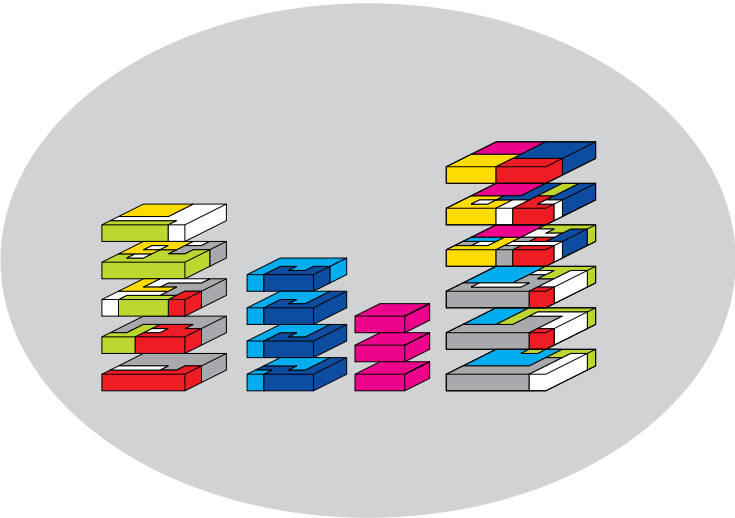
kan het gele stuk worden verwijderd. Om hierna het rode stuk te kunnen verwijderen, dient eerst het witte stuk verschoven te worden. Ten slotte kunnen het grijze en het witte stuk uit elkaar draaien.

Zeldzame vorm

Om een idee te krijgen hoe zeldzaam de vorm van het om-symbool-stuk is, heb ik de *slankheidswaarde* van een puzzelstuk gedefinieerd. Deze waarde geeft aan op hoeveel plaatsen in het stuk er vier eenheidskubusjes zijn die een 1 x 2 x 2-balkje vormen. Hoe vaker dit voorkomt, hoe massiever het stuk is. De slankheidswaarde van een 2 x 2 x 3-balk is 11 (ga dit na) en voor het om-symbool-stuk is deze waarde 3. Hoe groter een stuk, hoe groter die waarde doorgaans is. Een groot stuk met een lage slankheidswaarde is een slank stuk. Het blijkt dat het om-symbool-stuk uitzonderlijk slank is. In de ongeveer 82000 puzzels die volledig uit elkaar kunnen in het volledig doorgerekende gebied, bevinden zich slechts twee puzzels waarin een stuk met slankheidswaarde 3 zit dat groter is dan het om-symbool-stuk. Grote, slanke puzzelstukken zijn dus redelijk zeldzaam. Daaruit volgt dat de kans dat een willekeurig puzzelstuk binnen die 82000 puzzels op het om-symbool lijkt klein is, omdat die gelijkenis een groot slank stuk vereist. Dat die gelijkenis juist in die ene puzzel met die drie problemen voorkomt, is volgens mij dan ook erg bijzonder.

Alomtegenwoordigheid

Een van de betekenissen van het om-symbool is alomtegenwoordigheid. Het om-symbool-stuk is in de 6 x 6 x 6-kubus alomtegenwoordig omdat het alle andere stukken raakt. Ook in de 5 x 5 x 5-kubus is het stuk alomtegenwoordig, het is het enige stuk dat aan alle zijden zichtbaar is. Het komt overigens redelijk vaak voor dat een stuk in een puzzel op die manier alomtegenwoordig is. Wel apart zijn de zes getallen die je vindt wanneer je het zichtbare oppervlak meet dat per zijde zichtbaar is. Bij het om-symbool-stuk vind je de getallen 2, 3, 4, 5, 6 en 12. De middelste vier getallen komen precies overeen met de grondtallen uit de gelijkheid $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, die ten grondslag ligt aan de kubusdissecties. De getallen 3, 4, 5 en 6 komen bij minder dan één procent van de alomtegenwoordige puzzelstukken voor. Ook 2 en 12 vind ik er goed bij passen, omdat 3 + 4 + 5 = 6 x 2 = 12. Dat lijkt veel op de vorige vergelijking zonder machten.



Figuur 2
De Heilige drie-eenheid-puzzel: met de drie kleine kubussen (ribben 3, 4 en 5) kun je één grote maken (ribbe 6). De lagen van de kubussen zijn los van elkaar getekend, zodat de vorm van elk stuk zichtbaar is.

Pythagoras

Juni 2006 **Journaal** Nummer 6

door **Matthijs Coster** en **Alex van den Brandhof**

Sommen van kwadraten

In 1770 bewees Lagrange dat elk positief geheel getal kan worden geschreven als som van hooguit vier kwadraten, bijvoorbeeld $23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$. In dit voorbeeld zijn twee kwadraten gelijk. Het is echter niet voor elk getal mogelijk om het te schrijven als som van vier kwadraten, waarbij twee kwadraten gelijk zijn, in formule: $n = x^2 + y^2 + 2z^2$. Dan rijst de vraag of misschien elk getal geschreven kan worden als $n = ax^2 + by^2 + cz^2$, met (a, b, c) een geschikt drietal gehele getallen, bijvoorbeeld (1, 2, 3). Welke keuze van a, b en c er ook wordt gemaakt, er blijven getallen n die niet met die formule kunnen worden geschreven.

Kijken we nu naar $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$, dan zijn er talloze viertallen (a, b, c, d) te vinden zó dat alle positieve getallen n met die formule kunnen worden geschreven, bijvoorbeeld (1, 1, 3, 5).

Onlangs bewezen Manjul Bhargava en Jonathan Hanke een generalisatie van dit resultaat, door er ook de tussenvormen bij te betrekken, zoals xy, xz, ..., zw. Met hun stelling kunnen ze laten zien dat met de formule $n = x^2 + xz + xw + 2y^2 + yz + yw + 4z^2 + 3zw + 28w^2$ alle getallen n kunnen worden gerepresenteerd. Ze hebben alle formules van bovengenoemde vorm opgesomd waarmee alle positieve gehele getallen te representeren zijn.

Links: blog.sciencenews.org/2006/03/all_square.html
www.math.duke.edu/~jonhanke/290/Universal-290.html

Weblog door wiskundemeisjes

Regelmatig presenteren diverse politici en tv-programmamakers, maar ook vele Jannen-met-de-pet, hun nieuws op een *weblog*. Sinds π-dag (14 maart) is Nederland een bijzonder weblog rijker: de *wiskundemeisjes* Ionica Smeets en Jeanine Daems, promovendi aan de Universiteit Leiden, startten toen een weblog met allerhande wiskundewetenswaardigheden. Neem snel een kijkje op www.wiskundemeisjes.nl!

In Berlijn stuitte Ionica op deze bar

Efficiënt instappen in vliegtuig

Veel luchtvaartmaatschappijen gebruiken een inefficiënte methode om passagiers te laten instappen, door te beginnen met het vullen van de achterste rijen. Zelfs het willekeurig laten instappen van passagiers kost nog minder tijd. Dat blijkt uit een wiskundige analyse door onderzoekers van de Ben Gurion Universiteit in Israël. De wiskundige technieken die werden gebruikt, werden eerder alleen toegepast in de relativiteitstheorie en de getaltheorie. Uit het model blijkt dat van achteren naar voren werken alleen optimaal is als passagiers elkaar in het gangpad zonder problemen kunnen passeren. De optimale strategie is te beginnen met stoelen aan het raam, dan die in het midden en ten slotte die aan het gangpad.

Bron: *NRC Handelsblad*, 11 mei 2006

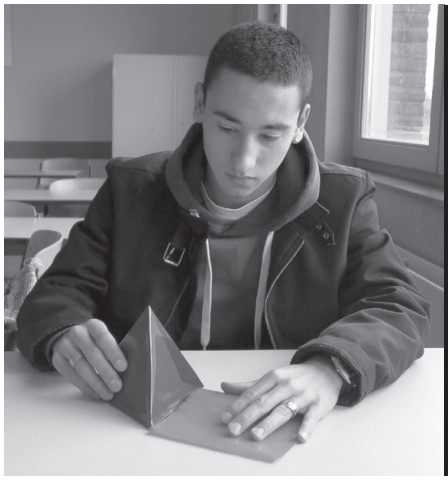
Getallenrij

In het vorige nummer verscheen de uitslag van de Zeven-prijsvraag. De grote moeilijkheid bij deze prijsvraag was het gebruik van de P-functie (met de P-functie bereken je het product van de cijfers, bijvoorbeeld $P(77) = 49$). Operaties zeer veel lijkend op de P in onze prijsvraag blijken ook onderwerp van onderzoek te zijn. Met de H-functie factoriseer je een getal in priemfactoren, die je dan, van klein naar groot, achter elkaar plaatst. Zo is $H(49) = 77$, want $49 = 7 \times 7$. Op het getal 77 kun je weer de H-functie loslaten: $H(77) = 711$, want $77 = 7 \times 11$. Ga je zo door, dan krijg je de volgende rij getallen: 49, 77, 711, 3379, 31109, 132393, 344131, 1731653, 71143523. Het is onduidelijk of deze reeks eindigt met een priemgetal, of oneindig voortgaat. Wiskundigen proberen hier een antwoord op te vinden.

Interessante links over dit probleem:
www.worldofnumbers.com/topic1.htm
www.angelfire.com/falcon2/homeprimes/s100-199.html
www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A056938

Oplossing Hè?!

Zet de gleuf van de hoes over een ribbe, en schuif hem zo voorzichtig over het viervlak heen.



1

2

3

Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Tekens plaatsen
De beste oplossingen die wij kennen zijn:
$123 - 45 - 67 + 89 = 100$ en
$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$.

Spiegel
De hoogte van de spiegel moet ten minste de helft van je lengte zijn.

Hoeveel zwaarder?
Nul: de bouwstoffen van de nieuwe levende mensen worden onttrokken aan de dode natuur.

Vouwen
De zijden van de vierkanten zijn $\frac{1}{4}a$ en $\frac{1}{4}b$. De inhouden verhouden zich als $(\frac{1}{16}a^2b)/(\frac{1}{16}b^2a) = a/b$. Dus a is twee keer zo groot (of twee keer zo klein) als b.

Dobbelsteen
Er zijn in totaal acht lege hoekjes (vier van de 1, twee van de 2 en twee van de 3). De kans is dus $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

45ste JAARGANG NUMMER 6