

PYTHA GORAS



PYTHA GORAS

46ste jaargang nummer 1
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Arnout Jaspers,
René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Chris Zaal

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde,
Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41,
7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)

€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig
buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabon-
nement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken
(dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof,
docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te
Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster,
wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van
Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt,
postdoc combinatorische optimalisering aan de
Universiteit van Amsterdam (dion@pythagoras.nu), dr. J.
Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele
Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), dr. K.P.
Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.
nu), J. Haubrich, docent wiskunde aan de Fontys
Hogeschool te Eindhoven (j.haubrich@fontys.nl), drs.
A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.
nu), drs. S. de Kinderen, aio bedrijfsinformatica aan de
VU (sdkinde@cs.vu.nl), A. Kret, student wiskunde aan
de UL (pytholym@pythagoras.nu), H. van Lienen, co-
auteur van diverse boeken over computertoepassingen
en rekenen (h.v.lienen@chello.nl), drs. T. Notenboom,
voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van
Utrecht (thijs@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent
wiskunde op het Calandlyceum en de EHvA te Amsterdam
(swaen@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent
wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G.
Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA
(chris@pythagoras.nu)

Op het omslag

Ellips getekend volgens de methode van de glazenwasser

Niveausybooltjes

Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de
wiskunde nodig is om te kunnen volgen, worden bij de titel
voorzien van een symbool dat de moeilijkheidsgraad aan-
geeft. Artikelen voorzien van ♦ zijn meestal vanaf de vierde
klas te begrijpen. Voor artikelen met ♦♦ heb je kennis uit
de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ♦♦♦ gaan net
iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bij-
dragen van de onderstaande instituten en instellingen:



INHOUD

Deze nieuwe jaargang van Pythagoras staat in het teken van het thema 'krommen'. Je zult oude bekenden zoals de parabool en de ellips tegenkomen, maar ook krommen die je zeker nog niet kent. Aan krommen valt wiskundig voor iedereen wat te beleven. Er spelen praktische kwesties zoals 'hoe kun je hem zelf tekenen?', 'welke formule hoort bij deze kromme?' en 'waar kun je deze kromme voor gebruiken?'. En voor wie echt diep wil gaan: 'hoe komt deze kromme aan die en die eigenschap?'. In deze eerste aflevering vind je een artikel over de ellips. Naast de thema-artikelen staat ook deze jaargang weer vol met allerlei andere interessante artikelen, de vertrouwde puzzelrubrieken en het Journaal.

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 **Een brief van een
wanhopige lezer**

5 – 8 **De tuinman en de
glazenwasser**

9 **Postzegels vouwen**

10 – 11 **De rekenprijsvraag**

12 – 13 **De wereldbeelden van
twee tegenpolen**

14 – 15 **Gokspelletjes, of de
aanzet tot kansrekening**

16 – 17 **De semafoor**

18 – 22 **De wiskunde van
Hans de Rijk**

24 – 25 **Pythagoras Olympiade**

26 – 29 **Perfect verdeelde vierkanten**

30 – 31 **Problemen – Oplossingen**

32 – 33 **Journaal**

33 **Oplossingen
Kleine nootjes nr. 6**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

2



Reisportemonnee

In Turkije hebben Anja en Els ieder 200 euro in de reisportemonnee gedaan. Ze kopen twee flessen wijn van 5 euro per stuk om mee naar huis te nemen. Uiteindelijk wil Anja geen fles en Els wil er wel twee. Hoeveel moet Els buiten de kas om aan Anja geven?

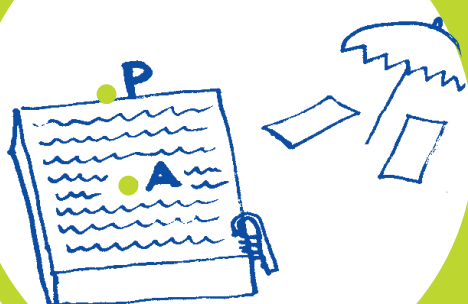
Weging

Co heeft 4 gewichtjes met een verschillend gewicht. Elk gewichtje weegt een geheel aantal gram, de 4 gewichtjes samen wegen 50 gram. Co laat het kleinste gewichtje steeds op de linkerkant van een balans staan. Als hij met de andere 3 gewichtjes mag doen wat hij wil, kan hij op 3 verschillende manieren evenwicht krijgen. Hoe zwaar zijn de 4 gewichtjes?



$$15 - 6 = 11$$

Je ziet hier vijftien lucifers liggen.
Neem er zes weg en houd elf over.



Ontsnappen?

In een vierkant zwembad van 16 bij 16 meter bevindt Anja zich in het midden *A*. Peter, die niet kan zwemmen maar vier keer zo hard kan lopen als Anja kan zwemmen, staat aan de rand van het zwembad bij *P*. Kan Anja, die alleen evenwijdig aan een kant mag zwemmen, de kant bereiken voordat Peter op dezelfde plek is?

Waar wonen ze?

Hans, die ongeveer halverwege een straat met honderd huizen woont, zegt tegen zijn vriendje Kees, die twee huizen verderop woont, en tegen Piet van de overkant: 'Leuk hè, onze huisnummers zijn allemaal priem.' Op welke nummers wonen ze?



Zo af en toe krijgt de redactie van *Pythagoras* brieven van lezers. De onderstaande brief is van een lezer die *Pythagoras* om hulp vraagt. We zijn benieuwd of een van onze lezers raad weet.

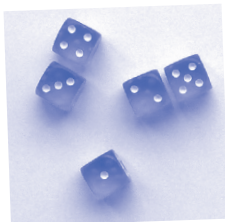
Een brief van een wanhopige lezer

door **Sybren de Kinderen**
en **Chris Zaal**

Beste *Pythagoras*lezers,

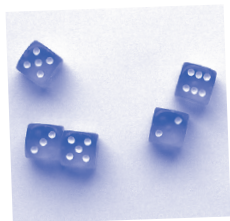
Graag jullie hulp bij het oplossen van een raadsel. Sinds mijn bezoek aan de waarzegster van circus Drontino achtervolgt dit mij in mijn dromen. Vijf manshoge dobbelstenen zie ik op mij afrollen. In koor roepen ze: 'Hoeveel rozenblaadjes zie je?' Als ik fout antwoord, rollen ze dichterbij. Ik ren weg, maar bots tegen een enorme muur en de dobbelstenen zetten mij volledig klem. Zwetend word ik wakker. Hoe dit zo komt? Dat zal ik vertellen. Ik hoop dat de *Pythagoras*lezers mij kunnen helpen bij het oplossen van dit raadsel.

Op een dag zoek ik de waarzegster op, een geheimzinnige vrouw in een ouderwetse woonwagen. Ze zit daar aan tafel met in haar hand vijf dobbelstenen. Ze rolt de stenen over de tafel, dit is het resultaat:



Ze vraagt mij zachtjes: 'Hoeveel rozenblaadjes tel je?' 'Pardon?', vraag ik verbaasd. 'Het is een eeuwenoud raadsel,' fluistert de vrouw. 'Om het te kunnen oplossen moet je anders naar voorwerpen kunnen kijken. Kijk dus naar de dobbelstenen en zeg mij: Hoeveel rozenblaadjes zie je?' Ik besluit op haar vraag in te gaan en zeg 'Eh... vier.' 'Mis,' lispelt de waarzegster, 'het zijn er zes.'

Ze gooit opnieuw met de dobbelstenen:



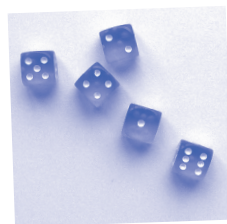
De vrouw vraagt mij dwingend: 'Hoeveel rozenblaadjes zijn er?' Niet begrijpend wat er aan de hand is, antwoord ik: 'Zeven?' 'Weer mis! Nu zijn het er tien!'

Ik snap er niks van, maar voordat ik kan vragen wat de vraag eigenlijk inhoudt, heeft de waarzegster alweer gegooid:



Weer vraagt ze me hoeveel rozenblaadjes ik zie. Uiteraard heb ik het weer mis. Ik verneem dat ik er nu acht had moeten tellen.

De waarzegster pauzeert. Ze kijkt me indringend aan en maakt duidelijk dat de vraag 'Hoeveel rozenblaadjes tel je?' een belangrijke hint is. Ze gooit nog een keer:



Ze kijkt me afwachtend aan en zegt: 'Ik ga het antwoord nu niet meer verklappen, ondertussen zou je het zelf wel moeten zien!'

Maar ik zie helemaal niks. In arren moede besluit ik de worpen op papier over te nemen zodat ik er thuis over na kan denken. Nachtelang lig ik nu al wakker, nadenkend over dit raadsel. Kan een van de lezers van *Pythagoras* me alstublieft helpen met het oplossen ervan, zodat ik weer rustig kan gaan slapen?

De tuinman & de glazenwasser



5

Om rechte lijnen te trekken gebruik je een liniaal, cirkels maak je met een passer. Maar hoe teken je een ellips? We bekijken twee methoden, de een wordt toegepast door tuinmannen, de ander soms ongewild door glazenwassers.

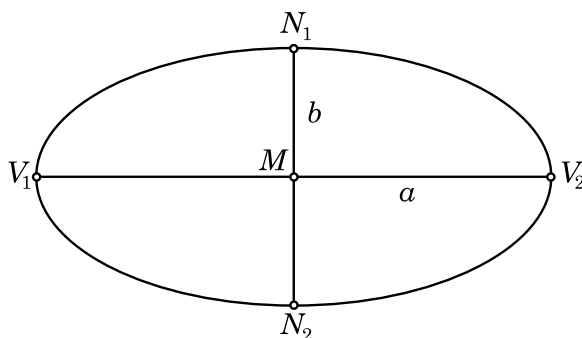
Wat is een ellips?

Niet elk rondje is een zuivere cirkel. Zo is ook niet elke ovale vorm een ellips. Cirkels zijn gemakkelijk te herkennen, maar waaraan herken je een ellips?

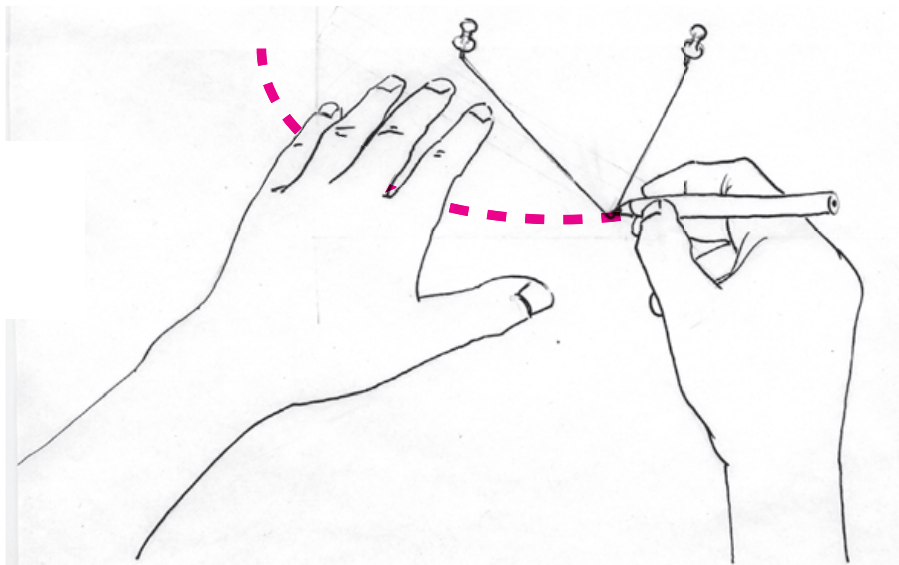
Wil iets een ellips zijn, dan moet het in elk geval twee symmetrieassen hebben die loodrecht op elkaar staan, de lange as en de korte as. Het speciale van een ellips is dit: een ellips krijg je door een cirkel in één richting (gelijkmatig) uit te rekken. Dus als je iets hebt dat op een ellips lijkt, spoor dan de symmetrieassen op, verkort vanuit de korte as tot lengte en breedte gelijk zijn. Dat zou dan een cirkel moeten opleveren.

Voor we ellipsen gaan tekenen, voeren we

eerst wat termen in. Het snijpunt van de assen noemen we het middelpunt M van de ellips. De snijpunten van de ellips met zijn assen zullen we *toppen* noemen; de *verre toppen* V_1 en V_2 op de lange as, en de *nabije toppen* N_1 en N_2 op de korte as. De afstand van M tot een verre top noemen we a , de afstand van M tot een nabije top b . Zie figuur 1.



Figuur 1 Een ellips met symmetrieassen en toppen N_1 , N_2 , V_1 en V_2



Figuur 2 De methode van de tuinman

De tuinman

Een bekende manier om ellipsen te tekenen is de zogenaamde *tuinmanmethode*. Die methode stamt uit de oudheid en wordt nog steeds toegepast door de tuinman om ovale perkjes af te zetten. De tuinman slaat dan twee paaltjes in de grond en neemt een touw dat hij aan beide paaltjes bindt, met wat speling. Dan trekt hij het touw strak met een stok en beweegt die stok terwijl het touw strak blijft. Het spoor dat hij dan trekt is een ellips, zie figuur 3. Dat dit echt een ellips oplevert, bewijzen we in kader 1 op pagina 8.

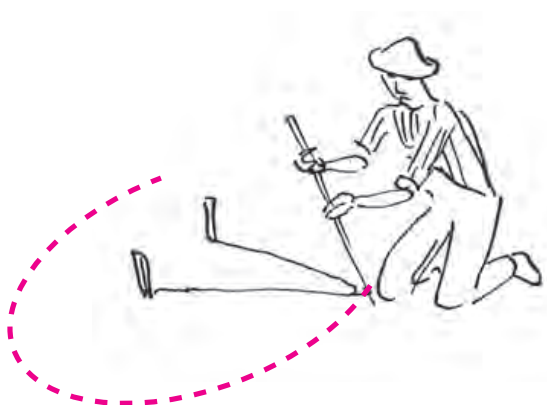
De plaats van de punaises

Op een tekenblad kunnen we hetzelfde doen met een koordje en twee punaises, zie figuur 2. Stel je hebt een rechthoek waarin

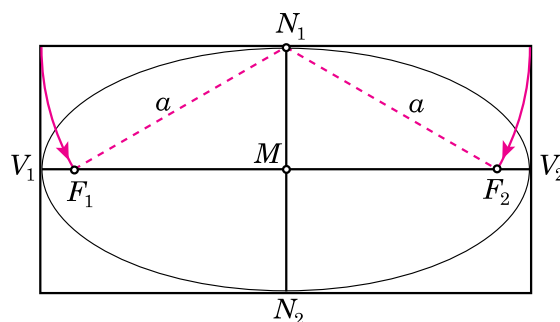
je een ellips wilt passen. Waar moet je dan de punaises zetten zodat de ellips precies past? De punten waar de punaises moeten staan heten de *brandpunten* van de ellips, we geven ze aan met F_1 en F_2 , zie figuur 4. Hieruit kunnen we afleiden waar de brandpunten precies moeten liggen en hoe lang het touwtje moet zijn.

Kijk eerst naar de verre top V_1 . We zien daar dat de lengte van het touwtje gelijk is aan $|V_1 F_1| + |V_1 F_2| = (a - |MF_1|) + (a + |MF_2|) = 2a$. Het touwtje is dus even lang als de totale lengte van de rechthoek.

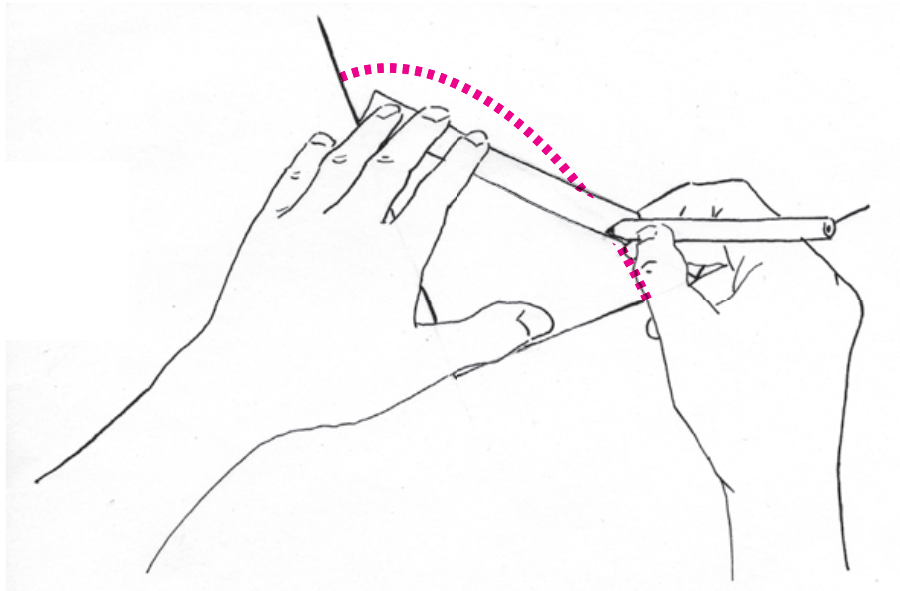
Kijk nu naar de nabije top N_1 . Voor N_1 loopt het touwtje van F_1 via N_1 naar F_2 . Hier zie je dat $|N_1 F_1| + |N_1 F_2| = 2a$. Omdat $|N_1 F_1| = |N_1 F_2|$, is dus $|N_1 F_1| = a$. De brandpunten vind je dus door de halve lange as om te cirkelen vanuit N_1 .



Figuur 3 De tuinman aan het werk met de paaltjes



Figuur 4 Waar moeten de punaises staan? (Neem een halve lange as vanaf de nabije toppen)



Figuur 5 De methode van de glazenwasser

Ellipsograaf

Probeer het tekenen met punaises en touwtje uit, en je zult merken dat het niet echt gemakkelijk gaat. Geen wonder dat er in het verleden gezocht is naar betere methoden. Dat leverde diverse instrumenten op die bekend staan onder de naam *ellipsograaf*. Een van de eerste vinden we beschreven in Simon Stevins *Meetdaet* uit 1605, zie figuur 6. Dit instrumentje werd zo'n halve eeuw eerder in Italië uitgevonden. Het principe achter deze ellipsograaf is goed uit te leggen aan de hand van 'de glijdende ladder'.

De glazenwasser

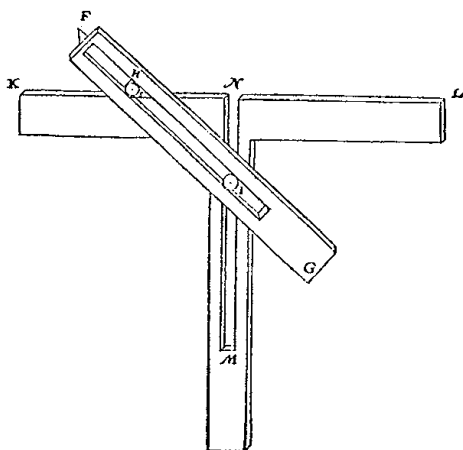
Een glazenwasser heeft zijn ladder tegen de muur gezet en die ladder glijdt langzaam weg, zie figuur 7. Aan de ladder hangt een

emmertje; welke baan zal dat emmertje beschrijven?

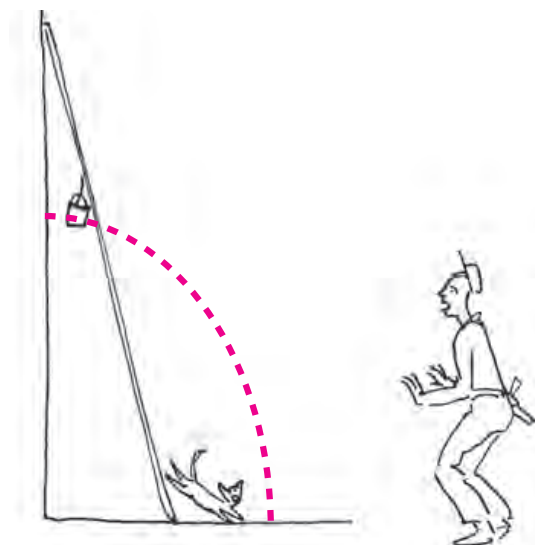
Pak deze vraag experimenteel aan, zie figuur 5. Knip van karton een rechte hoek, en een strookje dat de ladder voorstelt en zet daar een stip op. Leg de ladder met de uiteinden tegen de twee benen van de hoek, varieer en markeer het spoor van de stip. Zo krijg je de baan van het emmertje, die verdacht veel op een (kwart) ellips lijkt. Dat de baan inderdaad een ellips is, bewijzen we in kader 2 op pagina 8.

Bij de ellipsograaf van Stevin bevindt de emmer P zich niet tussen de uiteinden van de ladder, maar in het verlengde van de ladder. Ook dat levert een ellips, hetgeen je bewijzen kunt op ongeveer dezelfde manier als voor de emmer aan de ladder.

7



Figuur 6 De ellipsograaf van Simon Stevin



Figuur 7 De glazenwasser met de glijdende ladder

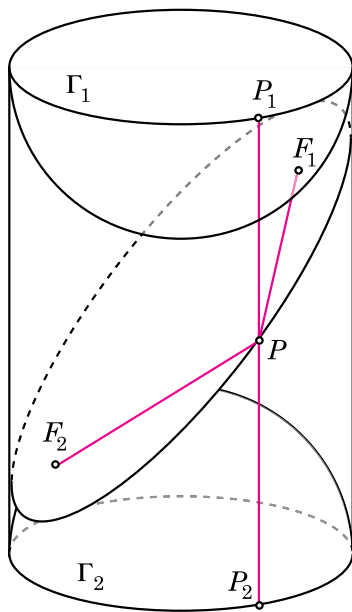
De kromme van de tuinman is een ellips

Dat een ellips een uitgerekte cirkel is, betekent dat je hem ook kunt zien als de doorsnijing van een cilinder met een plat vlak. Pas in de cilinder van beide kanten bollen die zowel het vlak als de cilinder raken. Noem de punten waar de bollen raken aan het doorsnijdingsvlak F_1 en F_2 . Noem de cirkels waarlangs de bollen de cilinder raken Γ_1 en Γ_2 . Zie figuur 8.

We zullen nu laten zien dat voor elk punt P van de ellips $|PF_1| + |PF_2|$ constant is, oftewel dat F_1 en F_2 brandpunten zijn. Neem dus willekeurig een punt P op de doorsnijdingskromme. Kies P_1 op Γ_1 zodat PP_1 in de lengterichting van de cilinder loopt. Evenzo P_2 op Γ_2 . Dan zijn PP_1 en PF_1 raaklijnen aan dezelfde bol, dus even lang. Evenzo is $|PP_2| = |PF_2|$. Dus $|PF_1| + |PF_2| = |PP_1| + |PP_2| = |P_1P_2| = \text{constant}$.

We zien dus dat ellipsen gemaakt kunnen worden op de tuinmanmanier. In een gegeven rechthoek past maar één ellips. En ook de tuinman kan in een gegeven rechthoek maar één kromme passen (de plaats van de brandpunten is bepaald). Blijkbaar zijn die tuinman-kromme en de ellips hetzelfde.

8



Figuur 8 De cilinder met ellips en bollen

De kromme van de glazenwasser is een ellips

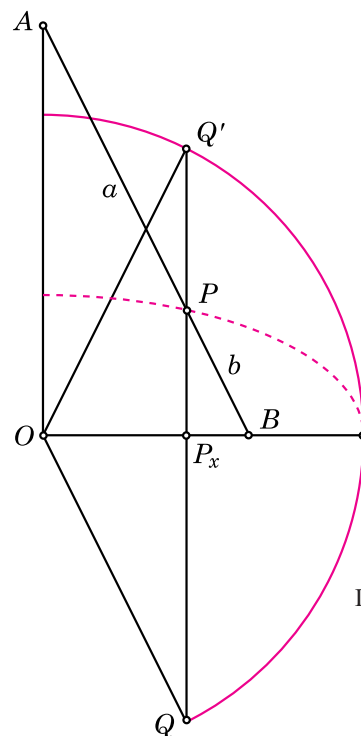
Ga uit van een assenstelsel met O als oorsprong, zie figuur 9. Laat AB de ladder zijn, met A op de verticale as (de muur) en B op de horizontale as (de grond). Op AB ligt P , het punt waar de emmer hangt. Noem $|AP| = a$ en $|BP| = b$. Trek cirkel Γ met middelpunt O en straal $|AP|$. Trek OQ evenwijdig met AB met Q op Γ . Dan is $APQO$ een parallellogram. Spiegel Q in de horizontale as, dat levert Q' . Het snijpunt van $Q'Q$ met de horizontale as noemen we P_x .

Merk nu op dat $\triangle OQP_x$ en $\triangle BPP_x$ gelijkvormig zijn. Dus $|PP_x| : |P_xQ'| = |BP| : |OQ'| = |BP| : |AP| = b : a = \text{constant}$. Dus de baan van de emmer krijg je door de cirkel Γ in verticale richting te vermenigvuldigen met een factor b/a . En volgens onze definitie is dat een ellips.

Vragen

1. Hoe vind je het middelpunt van een cirkel?
 2. Hoe vind je het middelpunt van een ellips?
- En zijn toppen?

De inhoud van dit artikel is terug te vinden in boek I van *Meetdaet*, Simon Stevin, Leiden 1605.
Zie bijvoorbeeld: www.xs4all.nl/~adcs/stevin.



Figuur 9 De ellips en de ladder

door Marco Swaen

Postzegels vouwen

Een strookje postzegels kun je op
verschillende manieren vouwen:

bijvoorbeeld zo



of zo



Zijn het drie zegels
en geef je ze letters A, B, C

dan kun je krijgen ABC



maar ook ACB



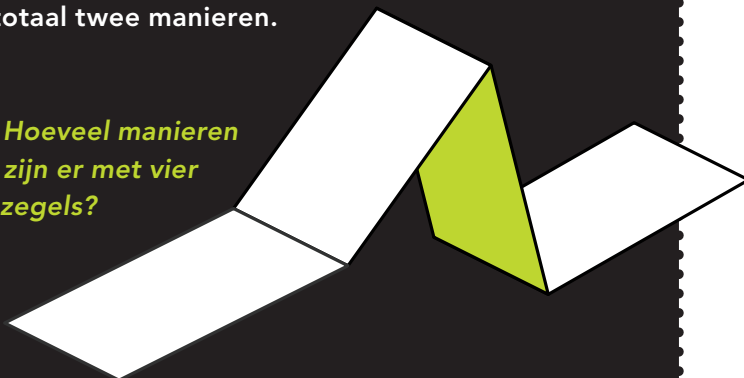
en CAB



9

ACB en CAB zijn niet echt verschillend.
Er zijn dus in totaal twee manieren.

Hoeveel manieren
zijn er met vier
zegels?



En met vijf?



Bron: Michael Holt,
More Math Puzzles & Games,
Walker and Company, 1978.

door **Matthijs Coster**

De Rekenprijsvraag

10

Twee seizoenen geleden hadden we de priemgetallenprijsvraag en vorig jaar de zeven-prijsvraag. Ook dit jaar heeft *Pythagoras* weer een uitdaging in petto voor iedereen die van rekenen houdt, en schrijft daarom uit: de rekenprijsvraag.

Coster-getallen

Bij de rekenprijsvraag draait het om *Coster-getallen*. Een Coster-getal is een geheel getal dat je met +, -, x en : kunt maken uit zijn eigen cijfers, waarbij elk cijfer precies twee keer wordt gebruikt. In de berekening mag je de rekenvolgorde zelf bepalen, je mag dus haakjes zetten zoveel je wilt. 'Cijfers plakken' (bijvoorbeeld van een 1 en een 2 het getal 12 maken) is *niet* toegestaan.

Voorbeelden

Het getal 25 is een Coster-getal, want $25 = 5 \times 5 + 2 - 2$. En ook 256 is 'Coster', want $256 = (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6)$.

De opdracht

Er zijn twee categorieën, elk met een eigen vraag.

Coster-klein

is bestemd voor leerlingen tot en met veertien jaar. Ook hele klassen (tot en met klas 2 in het voortgezet onderwijs) kunnen meedoen. De opdracht is: vind alle Coster-getallen van 1 tot en met 200. Je inzending bestaat uit een lijst van de Coster-getallen die je gevonden hebt. Uiteraard vermeld je bij elk getal hoe het uit tweemaal zijn eigen cijfers gemaakt kan worden. Onder de complete inzendingen wordt het Pythagoras-verrassingspakket verloot, inclusief 100 zelf vrij te besteden euro's.

Coster-groot

staat open voor iedereen. De opdracht is: zoek zo groot mogelijke Coster-getallen. Er is een prijs voor degene die het grootste Coster-getal instuurt, tientallig uitgeschreven, uiteraard met bijbehorend bewijs.

In deze categorie zal de redactie ook een schoonheidsprijs toekennen voor de fraaiste, elegantste, of indrukwekkendste vondst op het gebied van de Coster-getallen. Je mag meer dan één Coster-getal insturen.

127750

Het vinden van grote Coster-getallen zal niet meevallen. De redactie geeft bij dezen al een voorzetje met 127750 dat Coster is, want $127750 = 5 \times 5 \times 7 \times (7 \times (7 \times (7 \times 2 + 1) - 1) + 2) + 0 + 0$.

Inzenden

Je oplossingen kun je mailen of posten naar:
René Swarttouw
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
e-mail: rene@pythagoras.nu

Vermeld bij de oplossingen de naam van de opdracht: *Coster-klein* of *Coster-groot*. Vermeld verder je naam en adres, en als je scholier bent, de naam en het adres van de school, je leeftijd en je klas. Bij een klas-seninzending moet bovendien de naam van de wiskundedocent opgegeven worden. Inzendingen moeten bij ons binnen zijn vóór 15 januari 2007.

Friedman-getallen

De Coster-getallen zijn speciaal voor deze rekenprijsvraag door Matthijs Coster bedacht. Wel bekend zijn de *Friedman-getallen*. Een getal is een Friedman-getal als je het kunt maken uit zijn eigen cijfers met de bewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$ en $^$ (machtsverheffen), waarbij je elk cijfer precies één keer gebruikt, en waarbij 'cijfers plakken' is toegestaan. Zo zijn $125 = 5^{1+2}$, $126 = 6 \times 21$ en $128 = 2^{8-1}$ Friedman-getallen. De Friedman-getallen tot en met 100.000 zijn inmiddels bekend.

Meer informatie over Friedman-getallen kun je vinden op

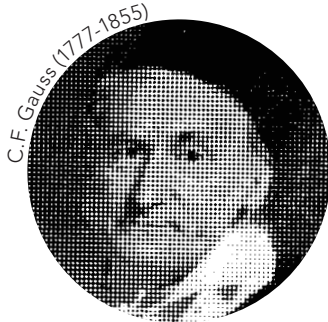
<http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number

$$25 = 5 \times 5 + 2 - 2$$
$$= 5 \times 5 \times 7 \times (7 \times (7 \times (7 \times 2 + 1) - 1) + 2) + 0 + 0$$
$$256 = (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6)$$

door Arnout Jaspers

De wereldbeelden van twee tegenpolen



Het meten van de wereld - boekbespreking

Dit jaar verscheen de Nederlandse vertaling van Daniel Kehlmanns historische roman *Die Vermessung der Welt* over twee grote Duitse wetenschappers: de wiskundige Carl Friedrich Gauss en de geograaf Alexander von Humboldt.

Zelfs toen er nog onontdekte plekken op de wereld bestonden, eind achttiende eeuw, waren er nieuwsgierige mensen die liever thuisbleven. Carl Friedrich Gauss was zo iemand die levenslang op ontdekkingsreis was in z'n eigen studeerkamer, omdat hij wiskundige was – de grootste aller tijden, vinden sommigen. Z'n absolute tegenpool, Alexander von Humboldt, reisde als een bezetene de wereld af om feiten te verzamelen, over de natuur, over vreemde volkeren, over geologie, over oceaanstromingen, eigenlijk over alles wat op zijn weg kwam.

Rond deze twee historische figuren weefde de jonge Duitse schrijver Daniel Kehlmann een quasi-historisch verhaal dat in Duitsland een bestseller werd. Gauss en Von Humboldt

krijgen in het grootste deel van het boek om en om een hoofdstuk toebedeeld, omdat ze totaal verschillende levens leidden en elkaar pas ontmoetten op het eind van hun leven, op een congres in 1828.

Tegenpolen

Kehlmann buit de tegenstelling tussen de twee ten volle uit: Von Humboldt is een rijke aristocraat, Gauss is van eenvoudige komaf. Von Humboldt krijgt natuurlijk de best mogelijke opleiding, maar dwaalt als kind liever door de natuur. De jonge Gauss zou niet verder zijn gekomen dan het dorpsschooltje, als niet een onderwijzer – die trouwens als slecht in z'n vak en verzuurd wordt afgeschilderd – zijn talent ontdekt had en hem een beurs voor het gymnasium had bezorgd.

Eenmaal volwassen, heeft Gauss zich ontwikkeld tot een elitaire cynicus, wiens voornaamste zorg is zich de domme medemens van het lijf te houden en die niets belangrijker vindt dan de volgende wiskundige stelling die hij gaat bedenken. Von

Humboldt is de volmaakte vakidioot, een wandelend meetstation dat op zijn expeditie dikke logboeken volschrijft met gegevens, maar zelf aan leven niet toekomt. Zijn enige sociale band is die met zijn assistent, Aimé Bonpland, die de menselijke zwakte vertegenwoordigt. Bonpland is wél bang als hij achter Von Humboldt aan de zeven kilometer hoge berg Chimborazo beklimt. Bonpland gaat wél in op de toenaderingspogingen van de inlandse schone die ze op hun reizen ontmoeten.

Poppenkast

Het was duidelijk niet Kehlmanns bedoeling om met *Het meten van de wereld* een psychologische roman met geloofwaardige personages te schrijven. Ook over de wetenschappelijke prestaties van de twee hoofdpersonen word je nauwelijks iets wijzer. Maar met aanstekelijk plezier trekt de auteur aan de touwtjes van zijn zelfgeschapen marionetten, die een poppenkastvoorstelling opvoeren over de vraag wat ware kennis is, ofwel wetenschap. Het is een klassieke tegenstelling: Gauss is een platonist, iemand voor wie echte waarheid alleen te vinden is in – veelal wiskundige – ideeën, die je achter je schrijftafel kunt ontdekken. De realist Von Humboldt, die waarheid denkt te halen uit het catalogiseren van zo veel mogelijk feiten, zonder veel analyse, daar kijkt Gauss op neer: 'Wat in de verte verborgen lag, in gaten, vulkanen of mijnen, was toeval en onbelangrijk. De wereld werd er op die manier niet duidelijker door.'

Als Gauss en Von Humboldt ten slotte in Berlijn door een samenloop van omstandigheden nogal wat tijd samen doorbrengen, blijft een echte confrontatie uit, want de bokkige oude heren praten vooral langs elkaar heen, ieder gevangen in z'n eigen wereldbeeld. Bovendien krijgen ze het plotseling nog druk met een sub-plot, omdat Gauss' zoon Eugen revolutionaire sympathieën heeft en uit handen van de geheime politie gehouden moet worden. Het boek eindigt ermee dat Eugen voor z'n eigen bestwil op de boot naar Amerika wordt gezet. De kapitein hoort dat hij iets van wiskunde weet, nodigt hem uit in de stuurhut en vraagt of hij in navigatie geïnteresseerd is. 'Niet in het minst,' antwoordt hij. Eugen schrijft liever gedichten.



Daniel Kehlmann, *Die Vermessung der Welt*, Reinbek, Rowohlt, 2005, ISBN 3498035282. Nederlandse vertaling door Jacq Vogelaar: *Het meten van de wereld*, Amsterdam, Querido, 2006, ISBN 90-214-7030-6.

Gokspelletjes, of de aanzet tot kansrekening

In de geschiedenis van de wiskunde wordt 1654 gezien als het 'geboortjaar' van de kansrekening. In dat jaar ontstond een briefwisseling tussen de Franse wiskundigen Pierre de Fermat (1601-1665) en Blaise Pascal (1623-1662), over kansproblemen die aan hen door gokkers werden voorgelegd.

Toch was er ook vóór 1654 sprake van enig kansbesef. Uit de tiende eeuw dateert een manuscript waarin een monnik een opsomming geeft van de mogelijke uitkomsten bij het gooien met twee dobbelstenen. In een boek van de Indiër Bhāscara Acharya uit de twaalfde eeuw komen we enkele vraagstukken over telproblemen tegen. En de Italiaan Gerolamo Cardano uit de zestiende eeuw – vooral bekend vanwege een formule waarmee de oplossingen van een derdegraadsvergelijking te vinden zijn – hield zich bezig met theorieën over dobbelspelen. Zijn boek *Liber de ludo aleae* ('Het boek over het dobbelspel') werd in zijn tijd echter niet uitgegeven.

Briefwisseling

In 1654 maakte Pascal kennis met de edelman Antoine Gombauld, Chevalier de Méré. Het verhaal gaat dat De Méré verzot was op kansspelen en het vermogen had om daarbij veel geld te verdienen. Toen hij ontdekte dat spelletjes anders verliepen dan hij op grond van zijn theorie mocht verwachten, wendde hij zich tot de wiskundige Pascal. Op zijn beurt legde Pascal de vraagstukken per brief aan Fermat voor. Dit was het begin van een briefwisseling tussen Pascal en Fermat over kansproblemen. De hele correspondentie is bewaard gebleven en tegenwoordig

beschikbaar (ook in Engelse vertaling) op het internet, zie de literatuur aan het einde van het artikel.

Na de briefwisseling volgde een reeks publicaties over kansrekening. In 1657 schreef onze landgenoot Christiaan Huygens het eerste boek over dit onderwerp, getiteld *De ratiociniis in ludo aleae* ('Over berekeningen bij het dobbelspel'). Vanaf 1660 gebruikte Johan de Witt kansrekening voor berekeningen van lijfrenten. Het reeds genoemde *Liber de ludo aleae* van Cardano werd in 1663, lang na zijn dood, alsnog uitgegeven.

Een dobbelstenenprobleem

Wat is voordeliger: de weddenschap om ten minste eenmaal 'zes' te werpen in 4 worpen met één dobbelsteen, of de weddenschap om ten minste eenmaal 'dubbel-zes' te werpen in $6 \times 4 = 24$ worpen met twee dobbelstenen?

Dit is een van de problemen die door De Méré aan Pascal werden voorgelegd. De Méré redeneerde als volgt: de verhouding $4 : 6$ (4 worpen, bij het werpen met één dobbelsteen zijn er 6 mogelijke uitkomsten) is gelijk aan de verhouding $24 : 36$ (24 worpen, bij het werpen met twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijke uitkomsten), dus beide situaties zijn even waarschijnlijk. Na vele spelletjes merkte hij echter dat deze theorie niet strookte met de ervaring: hij constateerde dat de eerste weddenschap gemakkelijker te winnen is dan de tweede. Pascal rekende De Méré vóór dat kansen zich niet volgens evenredigheidsprincipes gedragen, zoals De Méré veronderstelde. In kader 1 kun je lezen hoe je de twee kansen kunt uitrekenen.

Een verdeelde pot

Een tweede probleem waarvoor De Méré hulp inriep bij Pascal, gaat over het verdelen van een gezamenlijke inzet, de 'pot'. Twee spelers, A en B, spelen een spel dat uit meerdere ronden bestaat. In iedere ronde heeft elk van hen kans $\frac{1}{2}$ om een punt te scoren. Wie het eerst vijf punten heeft gehaald, wint de pot. Als het spel niet wordt uitgespeeld, wat is dan een rechtvaardige verdeling van de pot?

Stel dat de spelers na zes ronden moeten ophouden, en wel bij de volgende stand:

AABABA.

Welke verdeling van de pot lijkt nu fair? Had den de spelers gewoon doorgespeeld totdat er een winnaar is, dan waren er nog de volgende uitkomsten mogelijk geweest:

A, BA, BBA, BBB.

In de eerste drie gevallen zou A het spel gewonnen hebben, alleen in het laatste geval B. De kans dat B alsnog zou hebben gewonnen, lijkt dus $\frac{1}{4}$. Dat dit onjuist is, en dat de pot dus *niet* in de verhouding 3 : 1 verdeeld moet worden, kun je lezen in kader 2.

Literatuur

J.H. van der Vlis & E.R. Heemstra, *Geschiedenis van kansrekening en statistiek*. Pandata Uitgeverij 1988.
H.G. Dehling & J.N. Kalma, *Kansrekening, het zekere van het onzekere*. Epsilon Uitgaven, deel 36, tweede druk 2005.
H. Tijms, *Spelen met kansen*, Epsilon Uitgaven, deel 43, 1999.
P. Tannery & C. Henry, *Oeuvres de Fermat*, vol. II, p.288 e.v. Beschikbaar in *University of Michigan History of math collection* (www.hti.umich.edu) met zoekwoord "si j'entreprens". Voor een Engelse vertaling, zie www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf.

1



Wat is waarschijnlijker:

- ten minste eenmaal 'zes' in 4 worpen met één dobbelsteen;
- ten minste eenmaal 'dubbel-zes' in $6 \times 4 = 24$ worpen met twee dobbelstenen.

Als we met X het aantal keer 'zes' in 4 worpen met één dobbelsteen noteren, dan is

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,5177.$$

Als we met Y het aantal keer 'dubbel-zes' in 24 worpen met twee dobbelstenen noteren, dan is

$$P(Y \geq 1) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

De eerste situatie is dus waarschijnlijker!

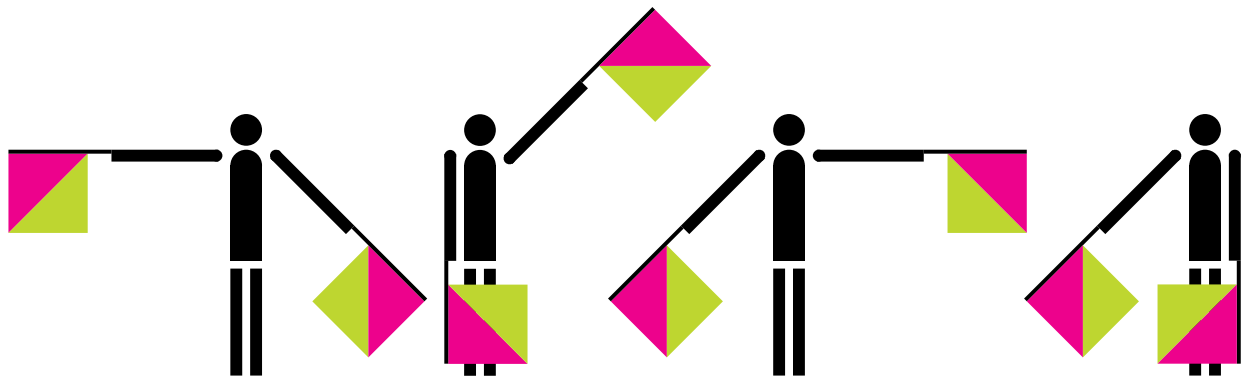
2

Bij een spel voor twee spelers, A en B, dat uit meerdere ronden bestaat, wint de speler die het eerst vijf ronden heeft gewonnen. Hoe moet de pot tussen de spelers worden verdeeld, als het spel wordt afgebroken bij de stand AABABA?

Om de pot eerlijk te verdelen, moeten de winstkansen van A en B uitgaande van de situatie na de eerste zes ronden berekend worden. Hiertoe voeren we het volgende gedachte-experiment uit: we spelen nog drie ronden, ook al staat de uitslag eerder vast. De mogelijke uitkomsten voor die drie ronden zijn:

AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB.

Speler A wint bij elk van de eerste zeven mogelijke uitkomsten, terwijl speler B alleen bij de laatste uitkomst wint. Hun winstkansen zijn dus $\frac{7}{8}$ respectievelijk $\frac{1}{8}$. De pot moet dus in de verhouding 7 : 1 worden verdeeld.



DE SEMAFOOR

Ook vóór de tijd van telecommunicatie werden berichten over grote afstanden doorgegeven. Simpele berichten verstuurde je met rookwolken, tromslag of klockgelui. Voor een ingewikkelder bericht was er de **semafoor**: een mast met bijvoorbeeld vlaggen die de boodschap volgens een kleurcode letter voor letter doorgaven.

16

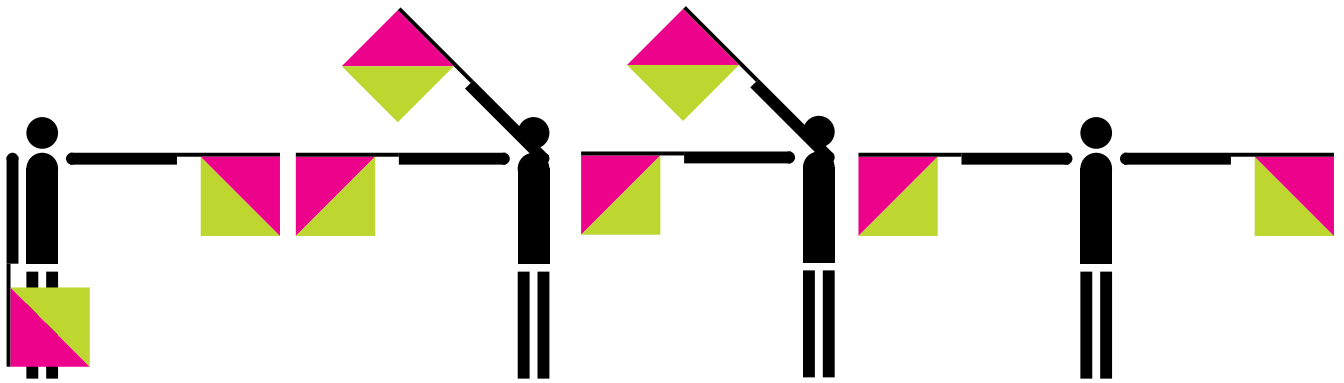
Het woord semafoor is een samenstelling van de Griekse woorden $\sigma\eta\mu\alpha$ (teken) en $\phi\omega\rho\epsilon\omega$ (dragen). De eerste goed opgezette semafoor stamt uit 1793. De gebroeders Chappe bouwden toen in de omgeving van Parijs een netwerk van torens die onderling op gezichtsafstand lagen. Op elke toren stond een mast met armen die vanaf de grond bewogen konden worden.

In vereenvoudigde vorm zag het er uit als in figuur 1. Zowel de dwarsverbinding (régulateur) als elk van de beide armen (indicateur) kon draaien. Dat leverde in totaal $4 \times 8 \times 8 = 256$ verschillende standen op, die niet allemaal gebruikt werden omdat sommige op afstand moeilijk van elkaar te onderscheiden zijn. Zo waren er standen om cijfers en letters door te geven, en om het doorgeven van de berichten te reguleren (bijvoorbeeld 'einde bericht'). In figuur 2 zie je 36 standen.

Napoleon zag wel wat in de semafoor van de Chappes en niet lang daarna verbond

een dicht netwerk van torens de belangrijkste steden van Frankrijk. In het kielzog van Napoleons veroveringsoorlogen werd het netwerk van Chappe verder uitgebreid. Duizenden verdienden hun brood met het instand houden van de torens en het bedienen van de armen. De geoefende sein-bediende haalde een snelheid van vijftien tekens per minuut. Berichten reisden langs het netwerk met een snelheid van zo'n 500 kilometer per uur. Zoals onze computers tegenwoordig gesaboteerd kunnen worden door virussen, werden toen soms torens overvallen om valse berichten de wereld in te sturen, de aangrenzende torens gaven elk bericht immers trouw door.

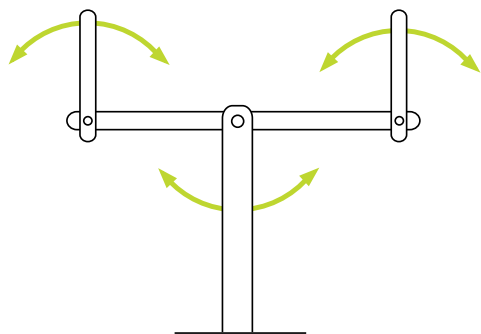
De uitvinding van de telegraaf met het morse-alfabet maakte de seinpalen van Chappe overbodig. In 1860 werd de laatste Chappe-semafoor buiten gebruik gesteld, maar wie op reis door Frankrijk goed oplet zal de torens van Chappe nog kunnen herkennen.



De moderne versie

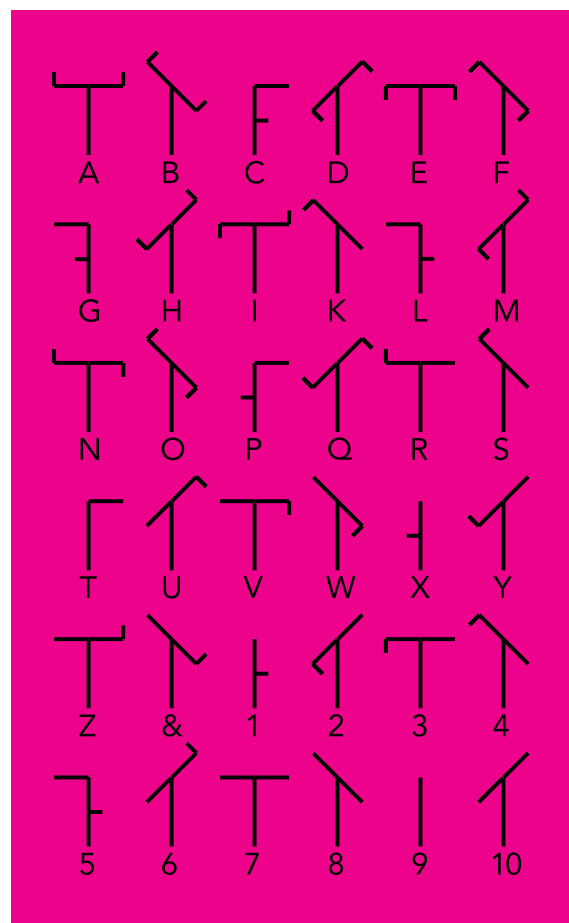
Een systeem dat verwant is aan de semafoor is het seinen met vlaggetjes. Bovenaan deze twee pagina's zie je hoe het woord SEMAFOOR met vlaggen wordt uitgebeeld. Naast morse was het vlaggenseinen een vast onderdeel in de opleiding tot seiner/marconist en officier bij de koopvaardij of marine. Tegenwoordig is het vlaggenseinen door moderne communicatiemiddelen verdrongen. Je kunt je wel voorstellen dat een lang bericht voor de seiner een aardige gymnastische oefening was. Het systeem kende geen cijfers; getallen in een bericht werden als tekst weergegeven.

In vereenvoudigde vorm is deze seintaal nog steeds in gebruik op vliegvelden en vliegdekschepen om de piloot aanwijzingen te geven bij het taxiën. De vlaggen zijn vervangen door een soort tafeltennisbatjes, in het donker worden lichtgevende sticks gebruikt. Regelmatig kregen de marine- en koopvaardijofficieren in het verleden bij hun opleiding de opdracht een analyse van de



Figuur 1
Schematische tekening van de semafoor van Chappe

semafoortekens te maken, vaak aangevuld met de opdracht zelf een alfabet te ontwerpen. Je bent nu even marineofficier in opleiding: zoek op internet het vlaggenalfabet op en analyseer de tekenreeks. Zijn er nog meer tekens mogelijk? Zit er een systeem in de reeks, en is er niet een handiger systeem te bedenken?



Figuur 2
36 standen van de semafoor

door Marco Swaen

DE WISKUNDE VAN



HANS
DE
RIJK

Met nummer 1 van de nieuwe jaargang voor je, besef je waarschijnlijk niet dat de allereerste *Pythagoras* al vijfenveertig jaar geleden verscheen. Van een kaftloos blaadje enkele bladzijden dik, groeide het spoedig uit tot een begrip, want een paar jaar later had elke leerling met enige interesse in wiskunde een abonnement op *Pythagoras*. De wiskunde in *Pythagoras* was sprankelender en avontuurlijker dan de stof in de schoolboeken. Altijd stond er wel een stukje in dat ook jij begreep, en een denkertje dat je maar niet los wilde laten.

De drijvende kracht achter de *Pythagoras* van de beginjaren was Hans de Rijk. Hij schreef zelf een groot deel van de kopij, deed de redactie, maakte foto's en illustraties, en zette het nummer op een zaterdagochtend met schaar en lijmpot in elkaar. Door de week gaf hij les in scheikunde, natuurkunde en wiskunde. Een opleiding tot leraar wiskunde heeft hij nooit gehad, de lesbevoegdheid werd hem later door het ministerie verleend mede op grond van het werk dat hij voor *Pythagoras* had gedaan. Als leraar vond hij het belangrijker enkele mooie ideeën over te brengen, dan een veelheid aan technieken en trucjes. Dat was ook zijn uitgangspunt bij *Pythagoras*. Zijn stukjes leiden zonder veel technische omhaal altijd tot iets om je over te verwonderen, iets dat je als lezer aan het denken zet. De vele artikelen in *Pythagoras* zijn maar een klein gedeelte van hetgeen hij schreef. Over talloze onderwerpen schreef hij boeken, de beroemdste gaan over het werk van Escher en over onmogelijke figuren, die in vele talen zijn uitgegeven.

Hans de Rijk, die inmiddels zijn tachtigste verjaardag heeft gevierd, heeft nog niets ver-

loren van zijn jeugdige nieuwsgierigheid. En hij bezit de gave bij anderen die nieuwsgierigheid te prikkelen. Dat lukte hem niet alleen als leraar en publicist, maar ook door mensen bij elkaar te brengen die zijn interesses delen. Zo was hij medeoprichter van de stichting Ars et Mathesis, van de Zonnewijzerkring en van de volkssterrenwacht Simon Stevin.

Hans de Rijks belangstelling bestrijkt gebieden in wijd uiteenlopende richtingen. Toch is zijn belangstelling zeker niet ongericht. In wat hem wel en niet interesseert is hij juist heel selectief. Om uit te leggen wat voor wiskunde hem trekt, gebruikt Hans de Rijk de volgende beeldspraak. Zie de wiskunde als een prachtige tuin. Midden in de tuin staat een enorme boom met takken die naar de hemel reiken. Aan de stam van de boom zijn de namen van grote wiskundigen verbonden uit het verre verleden: Pythagoras, Archimedes, Euclides. Hoger in de boom prijken de namen van knappe koppen als Euler, Gauss en Hilbert. Wil je de prachtige wiskunde helemaal bovenin die boom bewonderen, dan moet je flink klimmen. Maar de tuin bestaat niet uit die ene boom alleen, er zijn ook bloemperken



en struiken. Daar kun je zonder klimpartijen minstens zo van genieten. En gewoon op de grond, tussen het gras staat soms onverwacht een prachtig madeliefje. Dat is de wiskunde waar Hans de Rijk het meest van houdt: madeliefjeswiskunde.

Wie in het gelukkige bezit is van Pythagorassen uit die beginjaren, herkent de madeliefjes die Hans de Rijk erin plantte: de platlanders, onmogelijke figuren, perspectief, gezichtsbedrog, wiskunst, elegante bewijzen voor de stelling van Pythagoras. Nu, vijftienvertig jaargangen verder, laat hij ons er weer eentje zien, één die hij zelf gevonden heeft. Het gaat om een elegant bewijs voor een verschijnsel dat allang bekend is, maar nooit afdoende verklaard.

Hol lijkt bol

Als een beeld zo vaag is dat er niets in te herkennen valt, zie je er vaak een gezicht in. Zo word je gezichten gewaar in wolken, in een inktvlek en in de schaduwen op de maan. Onze hersenen zijn behept met gezichten. Enkele signaaltjes zijn voldoende om een gezicht uit duizenden te herkennen. Die rappe gezichtsherkenning bedriegt ons echter ook, in welk geval we heel dubbelzinnig te maken hebben met gezichtsbedrog. Een bekend geval van zulk dubbel gezichtsbedrog is de



illusie van het holle gezicht.

Kijk naar de holle afdruk van een gezicht, zoals bijvoorbeeld de achterkant van een masker, zie onderstaande foto's. Je zult dan al gauw een gewoon bol gezicht zien. Zeker als dat holle gezicht in een vlakke muur zit, is de illusie bijzonder sterk. Het is die beheptheid van onze hersenen overal gezichten in te willen zien, en gezichten zijn nu eenmaal bol.

De holle-gezicht-illusie is al vaak toegepast in souvenirs en andere huiskamer-snuisterijen. Als je een beetje zoekt, bijvoorbeeld op internet, dan kun je holle portretten vinden van beroemdheden als Charlie Chaplin, Boeddha, Einstein, en de heilige Maria.

Het verrassende effect van zo'n hol gezicht is te zien op foto's, maar je ervaart het pas echt als je er fysiek voor staat. Beweeg je je hoofd, dan merk je dat het bolle gezicht draait. Over dat draaien schrijft Hans de Rijk zelf op de volgende twee pagina's.



door **Hans de Rijk**

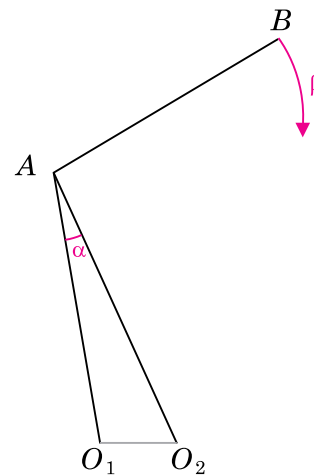
Onverwachte draaiing

Merkwaardig is, dat een hol gezicht zich niet van ons afkeert, als we er langs lopen (we zien immers een bol gezicht eerst *en face* en daarna van de zijkant), maar dat het zich naar ons toekeert, alsof het ons na blijft kijken. Nog merkwaardiger is dat deze draaiing veel sneller is dan we verwachten. Met vernuftige opstellingen is in psychologische laboratoria vastgesteld dat deze draaiing twee maal zo snel verloopt als bij het lopen langs een normaal bol gezicht. Van verschillende kanten werd mij verteld dat voor dit feit een eenvoudig wiskundig bewijs te geven was. Omdat ik een hekel heb aan het zoeken naar dingen die anderen reeds gevonden hebben, zocht ik lange tijd (tevergeefs) naar literatuur waar dit bewijs te vinden zou zijn. Mijn nieuwsgierigheid en mijn ongeduld wonnen het van mijn luiheid en ik begon zelf te puzzelen. Tot mijn verbazing vond ik binnen een kwartier een heel elementair bewijs. Hier volgt het.

Het simpele bewijs

We vereenvoudigen het driedimensionale voorwerp tot een lijnstuk AB , waarbij A dichterbij het oog ligt dan B . Kijken we naar A vanuit O_1 en verplaatsen we het oog naar

O_2 , dan draait de gezichtslijn over een hoek α ; dit komt overeen met een draaiing van AB in tegengestelde richting over een hoek β . Zie figuur 1.



Figuur 1

Dat is niets bijzonders, we zien dat dagelijks om ons heen gebeuren als we langs een gezicht of een bos bloemen lopen. Kijken we naar figuur 2, dan ligt B op de zichtlijn OB . Er zijn echter geen gegevens over de afstand waarop wij B zien. Maar we kiezen het beeld B' zo, dat $|AB| = |AB'|$. Dat is niet zo willekeurig als het lijkt. Als we een hol masker bekijken, waarbij de punt van de neus



het verste van ons af is, zien we een normaal (bol) masker met het punt van de neus het dichtste bij het oog. En dat zonder vervormingen: de neus wordt bijvoorbeeld niet plotseling een heel lange Pinocchio-neus!

In figuur 3 is eerst een cirkel getekend door A en B en door de beginpositie van het oog O_1 . Het oog beweegt zich naar rechts, naar O_2 . Voor een eenvoudige bewijsvoering is O_2 ook op de cirkelomtrek getekend. Als de afstand van het oog tot AB niet al te klein is, zal de praktische uitkomst weinig afwijken van de theoretische draaiing, namelijk twee keer zo snel.

Nu volgt het bewijs. Vanuit O_1 zien we AB als AB' en vanuit O_2 zien we AB als AB'' . Het inverse beeld van AB is dan gedraaid over een hoek β en het niet-inverse beeld (dat we dus niet waarnemen) over een hoek α . We moeten dus bewijzen dat $\beta = 2\alpha$.

Dit gaat als volgt. Omdat A, B, O_1 en O_2 op een cirkel liggen en de driehoeken ABB' en $AB''B$ gelijkbenig zijn, zijn de bijbehorende basishoeken gelijk (γ en $\alpha + \gamma$). Daaruit volgt dat $\delta = 180^\circ - 2(\alpha + \gamma)$ en $\beta + \delta = 180^\circ - 2\gamma$, dus $\delta = 180^\circ - 2\gamma - \beta$. Daaruit volgt dat $\delta = 180^\circ - 2(\alpha + \gamma) = 180^\circ - 2\alpha - 2\gamma = 180^\circ - 2\gamma - \beta$. Dus $\beta = 2\alpha$.

Meer informatie

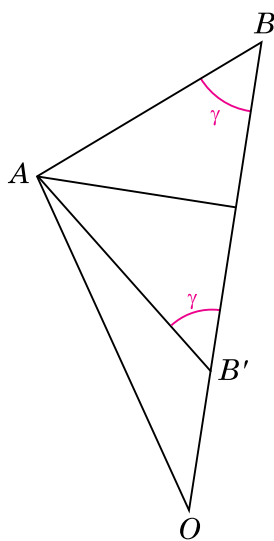
Over Hans de Rijk:

Zsafia Ruttkay, 'Een man met zes pseudoniemen', *Nieuw archief voor wiskunde* 5/1 nr. 3, pp. 282-286 (sept. 2000)

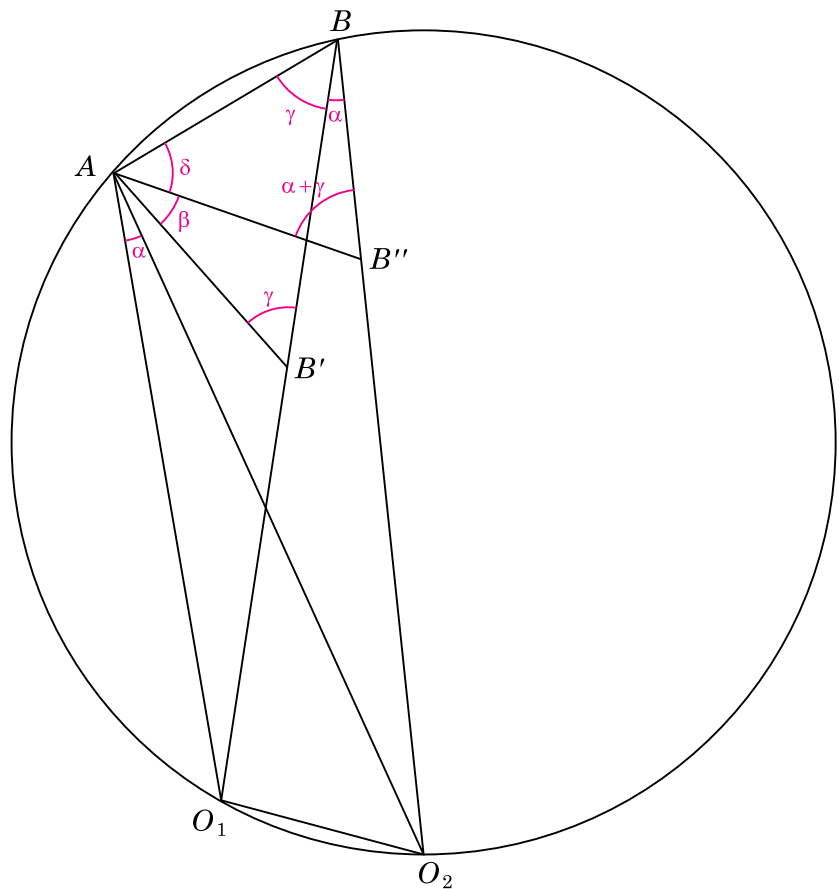
Over de holle-gezicht-illusie (inclusief animatie en bouwplaat):

www.michaelbach.de/ot/fcs_hollow-face

www.arsetmathesis.nl (Bruno's column, januari tot en met mei 2003)



Figuur 2



Figuur 3

WISKUNDE

de garantie voor een zekere toekomst

“Als consultant Asset & Liability Management bij ORTEC geef ik advies aan pensioenfondsen over het beleid wat ze het beste kunnen voeren. Mijn opleiding tot wiskundige maakt het mogelijk om daarvoor de lange termijn modellen te ontwikkelen.”

drs. Marnix Engels

Ontdek wiskunde op het Studiefestival en de Open dag. Kijk voor meer informatie op www.science.leidenuniv.nl



Universiteit Leiden

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

♦ Pythagoras Olympiade

door Arno Kret, Thijs Notenboom,
Anne de Haan en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

24

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2006.

OPGAVE

134

Veronderstel dat $n > 1$ een geheel getal is. Bestaat er een hoek α met $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, zó dat $\sin \alpha$ en $\cos \alpha$ beide een n -de macht zijn van een rationaal getal? En hoe zit dat als $n = 1$?

OPGAVE

135

Is het mogelijk om de getallen 1, 2, 3, ..., 121 in de hokjes van een rooster van 11 bij 11 vierkantjes te schrijven onder volgende voorwaarden:

1. twee getallen die precies 1 schelen staan in twee vierkantjes die één zijde gemeenschappelijk hebben;
2. de kwadraten 1, 4, 9, ..., 121 staan in dezelfde kolom.

OPLOSSING

130

Stel n is een positief geheel getal. Bewijs dat er oneindig veel gehele, positieve getallen a , b en c met $a \neq b$ bestaan zó dat

$$a^n + b^n = c^{n+1}.$$

Oplossing. We laten zien dat de vergelijking oneindig veel oplossingen heeft door oneindig veel oplossingen te geven. Merk op dat we niet álle oplossingen hoeven te geven!

Schrijf $c = x + 1$, dan geldt:

$$\begin{aligned} c^{n+1} &= (x+1)^{n+1} = (x+1)(x+1)^n = \\ &= x(x+1)^n + (x+1)^n. \end{aligned}$$

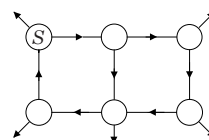
Als $x = t^n$ een n -de macht is van een geheel getal t , dan kunnen we dus $a = t(t^n + 1)$ en $b = t^n + 1$ nemen als oplossing van de vergelijking. Als t groter dan 1 is, dan is aan de voorwaarde $a \neq b$ voldaan. Voor ieder geheel getal $t > 1$ hebben we een oplossing van de vergelijking. Dit zijn oneindig veel oplossingen.

Deze opgave werd goed opgelost door: **Wouter Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Hildo Bijl** van OSG Huygenwaard te Heerhugowaard, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Lieselotte van de Capelle**, **Milo van Holsteijn** van RSG Pantarijn te Wageningen, **Jens Vande Cavey** van het Heilige-Drievuldigheidscollege te Leuven.
De boekenbon gaat naar Wouter Berkelmans.

OPLOSSING

131

Een mier wandelt over het hieronder getekende bord (hij start bij S). Vanuit iedere cirkel loopt hij met kans $\frac{1}{2}$ in de richting van een van de twee uitgaande pijlen. Zodra de mier van het bord valt, stopt hij met wandelen. Bereken de kans dat de mier bij de cirkel waar hij begonnen is van het bord valt.



Oplossing. Als de mier vanuit S wegwandelt, kan hij op twee manieren weer bij S uitkomen: via een kort pad ($\rightarrow \downarrow \leftarrow \uparrow$) of via een lang pad: ($\rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow$). De kans dat de mier het korte pad loopt, is $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ en de kans dat de mier het lange pad loopt, is $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$. De kans dat de mier vanuit S naar S wandelt (zonder onderweg langs S te komen), is dus $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{5}{64}$.

Voordat de mier van het bord valt, kan de mier een willekeurig aantal keren van S naar S lopen. De kans dat de mier n keer van S naar S wandelt en er vervolgens afvalt, is $\left(\frac{5}{64}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$. De totale kans p dat de mier bij S van het bord valt, is dus

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{64}\right)^n \cdot \frac{1}{2}.$$

Uit deze formule volgt dat $p - p \cdot \frac{5}{64} = \frac{1}{2}$ geldt. En dus geldt: $p = \frac{1}{2} / (1 - \frac{5}{64}) = \frac{32}{59}$.

Deze opgave werd goed opgelost door: **Wouter Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Lieselotte van de Capelle**, **Milo van Holsteijn** van RSG Pantarijn te Wageningen, **Marleen Kooiman** van het Bonhoeffercollege te Castricum, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam en **Sander van der Maat** van het Rijnlands Lyceum te Sassenheim.
De boekenbon gaat naar Milo van Holsteijn.

♦ Perfect verdeelde vierkanten

26

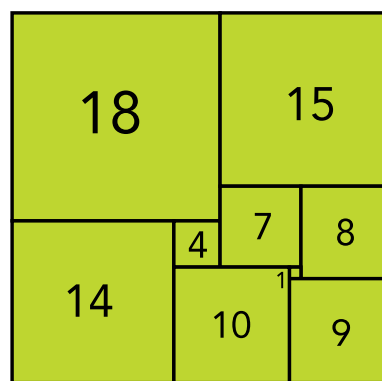
In het aprilnummer van de vorige jaargang kwam *Probleem 59 van het Schotse boek* aan de orde: kun je een vierkant verdelen in vierkanten die onderling allemaal verschillend van grootte zijn? Het antwoord luidt 'ja', maar zelfs de eenvoudigste oplossing is zo ingewikkeld dat je je afvraagt hoe iemand die kan vinden. Jacques Haubrich, ooit zelf bij het onderzoek naar vierkantverdelingen betrokken, laat iets van de technische achtergronden zien.

Het probleem

Ruim een eeuw geleden, namelijk in 1903, behandelde M. Dehn het probleem of het mogelijk is, een rechthoek op te delen in een eindig aantal vierkanten van onderling verschillende grootte. Dehn gaf zelf geen oplossing voor dit probleem, maar hij bewees wel dat een dergelijke verdeling altijd zou resulteren in vierkanten met zijden met rationale verhoudingen tot de zijden van de totale rechthoek. Pas in 1925 werd de eerste oplossing gepubliceerd en wel door Z. Moron. Hij verdeelde een rechthoek van 33×32 in 9 ongelijke vierkanten zoals aangegeven in figuur 1.

Omdat de rechthoek is verdeeld in 9 vierkanten, spreken we van een verdeling van orde 9. Alle vierkanten zijn verschillend van grootte; de verdeling heet daarom *perfect*.

Er is nog één andere manier om een rechthoek te verdelen in 9 ongelijke



Figuur 1 De verdeling van Moron

vierkanten. Een hint: de rechthoek heeft afmetingen 69×61 en het kleinste vierkant dat erin voorkomt heeft zijde 2.

Pas in 1940 werd bewezen dat deze twee verdelingen ook de perfecte verdelingen zijn van de laagst mogelijke orde. Het is dus niet mogelijk een rechthoek perfect te verdelen in minder dan 9 ongelijke vierkanten. Een vierkant perfect verdeeld in vierkanten was echter nog niet gevonden. Wel kende en kent natuurlijk iedereen een verdeling van een vierkant in vier gelijke vierkanten, maar die verdeling is zo enorm imperfect...! Het zou tot 1939 duren voor R. Sprague het eerste perfect in vierkanten verdeelde vierkant (in vakjargon: *perfect squared square*) vond en wel één van orde 55. Deze verdeling, zie figuur 2, is helaas *samengesteld* (*compound*): in de verdeling zit een rechthoek die zelf verdeeld is. Spragues vierkant was

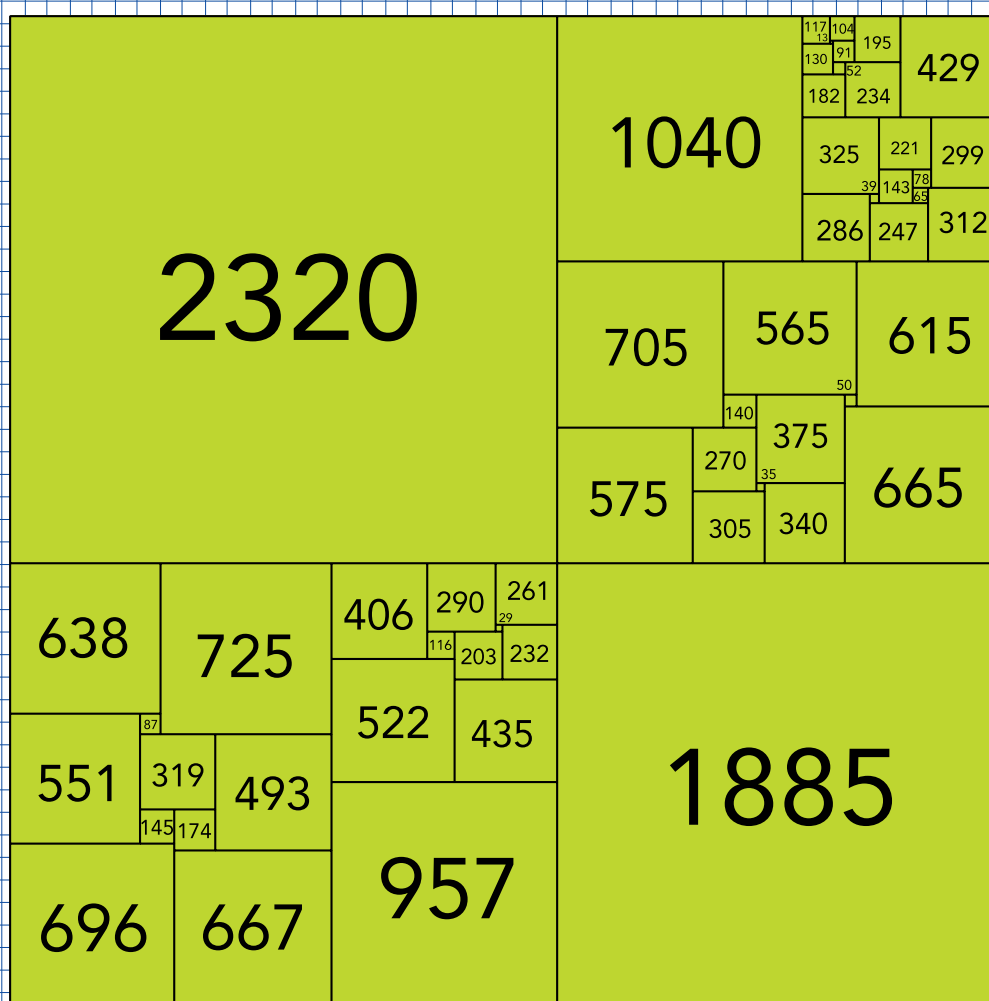
samengesteld uit twee grote vierkanten (met maten 2320 en 1885) plus twee in vierkanten verdeelde rechthoeken, beide met maten 2320 x 1885 en beide zelf ook weer samengesteld.

Het duurde nog tot 1967 voor T.H. Willcocks de kleinste *compound perfect squared square* vond, eentje met slechts 24 vierkanten. Dit vierkant is afgebeeld in het aprilnummer van de vorige jaargang. De rechthoek van 111 x 94 in de linker bovenhoek valt meteen op; deze maakt de verdeling dus samengesteld. In 1952 had Leonard Brooks overigens al de eerste perfecte verdeling van een vierkant gevonden: een vierkant met zijden 4920 verdeeld in 38 ongelijke vierkanten.

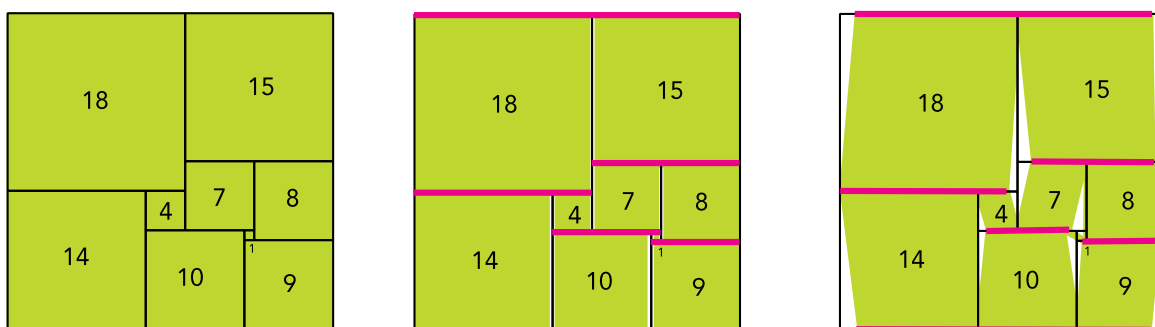
Hoe vond men zulke vierkanten?

Sprague gebruikte een slimme truc om een perfect verdeeld vierkant te vinden. Hij ging uit van de reeds bekende rechthoekverdelingen in 9 en 10 vierkanten, vergrootte deze met verschillende factoren, voegde er een handvol vierkanten aan toe, en voilà! In de tekening is deze structuur gemakkelijk ontdekken. Willcocks deed het met gewoon proberen.

Maar het bleek systematischer te kunnen. Vier studenten in Cambridge vonden in de jaren 1936-'38 een methode en publiceerden die in 1940. Leonard Brooks, Cedric Smith, Arthur Stone en William Tutte lieten zien dat een in vierkanten verdeelde rechthoek overeenkomt met



Figuur 2 Het eerste, door Sprague gevonden perfect verdeelde vierkant



Figuur 3 De verdeling van Moron en het ermee corresponderende netwerk

de stromen in een weerstandsnetwerk als dat aan een stroombron is aangesloten. Dus eerst even een beetje elementaire natuurkunde. Een rechthoek van bijvoorbeeld koperplaat, met een perfect geleidende boven- en onderrand, heeft namelijk een (Ohmse) weerstand die evenredig is met de hoogte van de rechthoek en omgekeerd evenredig met de breedte ervan. Dus als je de rechthoek driemaal zo hoog maakt, wordt ook de weerstand driemaal zo groot. Je hebt dan in feite drie van zulke weerstanden in serie geschakeld. Maar als je de rechthoek viermaal zo breed maakt, wordt de weerstand juist door vier gedeeld. Je hebt in dat geval immers vier van zulke weerstanden parallel geschakeld. Even doordenken en je ziet in dat alle vierkante platen van datzelfde materiaal ook allemaal precies dezelfde weerstand hebben, die gemakshalve gelijk aan 1Ω (Ohm) gesteld kan worden (en dat kan ook bij de juiste dikte van de koperplaat).

We kunnen nu als gedachte-experiment de rechthoek van Moron uit figuur 1 opgebouwd denken uit dergelijk materiaal. Verder denken we hem verdeeld in 33 (de breedte van de rechthoek) verticale repen van 1 eenheid breed en 32 eenheden hoog. Elk van die repen heeft dan een weerstand van 32Ω . Zetten we nu over boven- en onderrand een spanning van 32 V, dan zal door elke reep een stroom van precies 1 Ampère lopen. Aangezien elk vierkant bestaat uit één of meer repen naast elkaar, zal door elk vierkant dus een stroom lopen van evenveel ampères als de breedte van dat vierkant en

zal tevens de spanningsval in volts over het vierkant gelijk zijn aan de hoogte van het vierkant.

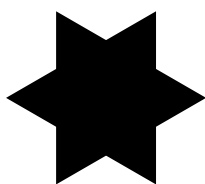
Een in vierkanten verdeelde rechthoek heeft dus een elektrisch analogon: een netwerk bestaande uit weerstanden van 1Ω die met elkaar zijn verbonden in knooppunten die overeenkomen met de horizontale lijnsegmenten in de rechthoekverdeling op plaatsen waar boven- of onderranden van vierkanten tegen elkaar komen. Dat klinkt even moeilijk, dus lees de vorige zin nog een paar keer en kijk dan voor de verduidelijking naar figuur 3: de verdeling uit figuur 1 opnieuw, met het bijbehorende elektrische netwerk. De weerstanden van 1Ω in elke tak zijn eenvoudigheidshalve weggelaten. Bij een totale stroom $I = 33 \text{ A}$ zal door tak AC een stroom van 18 A lopen, door AB een stroom van 15 A, enzovoort. De getallen geven dus telkens de stroomsterkte aan en de pijlen de richting van de stroom. Elk knooppunt in het netwerk komt overeen met een horizontaal lijnsegment in de rechthoekverdeling, dus met de onder- en bovenranden van vierkanten. De polen A en F corresponderen met de boven- en onderrand van de rechthoek. In elk knooppunt komt 'van boven' evenveel stroom binnen als er 'naar onderen' weer uitgaat, dus dat de stroomsterktes kloppen, is gemakkelijk in te zien. Het kost wat meer moeite deze stromen te berekenen als ze nog niet bekend zijn. Dat is gelukkig in principe zelfs vrij eenvoudig mogelijk dankzij de wetten van Kirchhoff: volgens zijn eerste wet is in elk knooppunt

Problemen

door Dion Gijswijt

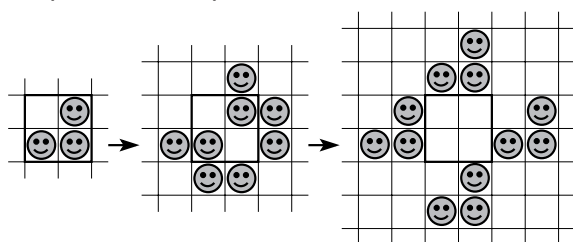
Knippen en plakken

Knip de zespuntige ster in vijf stukken en vorm daarmee een gelijkzijdige driehoek.

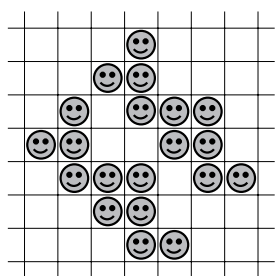


Kopieermachine

Het vlak is betegeld met vierkante *cellen*, waarvan er eindig veel bezet zijn, en de rest *leeg* is. Nu wordt het volgende 'spel' gespeeld. Bij elke spelronde veranderen sommige cellen van bezet naar leeg of andersom. De spelregel is, dat een cel in de nieuwe ronde bezet is, precies dan als in de vorige ronde een *oneven* aantal van zijn vier buurcellen bezet was. Hieronder zie je een voorbeeld van een beginsituatie en de twee erop volgende spelrondes.



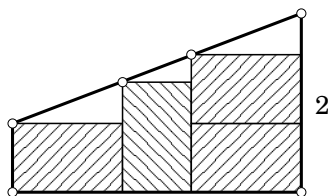
Bij een andere beginsituatie ziet het bord er na twee rondes als volgt uit:



Wat was hier de beginsituatie?

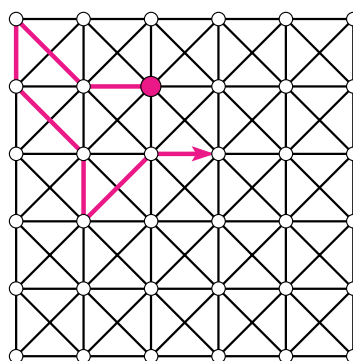
Dozen stapelen

Hieronder zie je vier gelijke rechthoekige 'dozen' die op een 'zolderkamertje' zijn gepakt. Wat zijn de afmetingen van een doos?



Wandeling

In de onderstaande figuur is het de bedoeling om over de lijntjes van knooppunt naar knooppunt te lopen, waarbij je steeds een horizontale/verticale stap afwisselt met een diagonale stap. Je mag je eigen pad niet doorkruisen. Kun je op deze manier elk van de 36 kruispunten precies eenmaal aandoen? Je mag beginnen en eindigen waar je wilt.

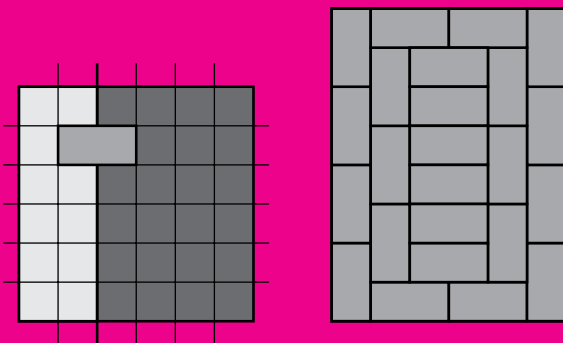


Oplossingen

nr. 6

Breukvrije betegeling

Een 6×6 vierkant heeft geen breukvrije betegeling. Iedere lijn die het vierkant in twee rechthoeken verdeelt, moet in een breukvrije betegeling door minstens één domino worden doorsneden. Omdat beide rechthoeken aan weerszijden van de lijn een even aantal vakjes hebben, moet een even aantal domino's deze lijn doorsnijden, minstens 2 dus. In zo'n betegeling zijn dus minstens $2 \times 10 = 20$ domino's nodig, terwijl er maar 18 in het vierkant passen!



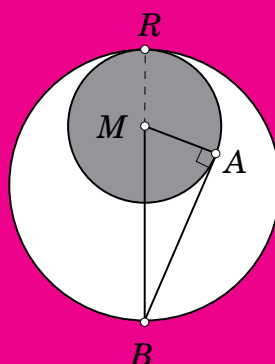
Getalfabriek

Voor iedere n kan Vincent $\pm n$ (n of $-n$) maken. Als n even is, dus als $n = 2k$, dan maakt hij eerst $\pm k$ en $\pm(k-1)$, en daarna $n = 2k = k^2 - (k-1)^2 + 1$. Als n oneven is, dus als $n = 4k+1$ of $n = 4k+3$, gebruikt hij dat $n = 4k+1 = (k+1)^2 - (k-1)^2 + 1$ en $-n = -4k-3 = k^2 - (k+2)^2 + 1$. Via $2006 = 1003^2 - 1002^2 + 1$ maakt hij 2006.

Cirkels

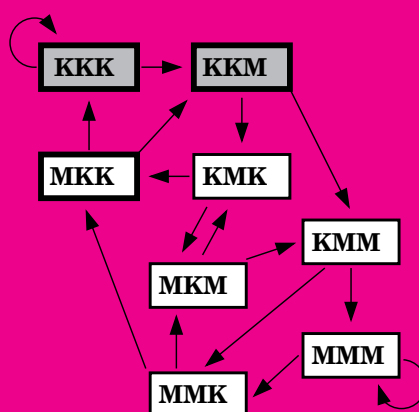
Laat R het punt zijn waar de twee cirkels raken, en M het middelpunt van de kleine cirkel. Als $|AB|$ maximaal is, dan raakt de lijn door AB aan de kleine cirkel (ga na). Er geldt dan: $|AB|^2 = |MB|^2 - 5^2$. Dus $|AB|$ is maximaal

wanneer $|MB|$ maximaal is. Dit is wanneer B op de lijn RM ligt. Er geldt dan $|MB| = 18 - 5 = 13$ en $|AB| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.



Kop of munt

Als je de *stoptijden* berekent (zoals in het februari-nummer van de vorige jaargang), vind je 8 voor Amber (MKK) en 7 voor Benjamin (KKM of KKK). Toch is Amber in het voordeel en wint met kans $\frac{3}{4}$. In het diagram zie je waarom. Gegeven de laatste drie worpen, geven de pijlen aan wat de uitkomst na een verdere worp is. Na de eerste drie worpen wint Benjamin in 2 gevallen direct. Maar in de overige 6 gevallen zal (vroeg of laat) Amber winnen, omdat ieder pad naar KKM en KKK via MKK loopt.



door Alex van den Brandhof

Perelman weigert prestigieuze prijs

Op 22 augustus 2006 werden tijdens het Internationaal Wiskundig Congres in Madrid de winnaars van de prestigieuze *Fields Medal* bekendgemaakt: de Russen Andrei Okounkov en Grigori Perelman, de Australiër Terence Tao en de Fransman Wendelin Werner. De Fields Medal werd in 1936 voor het eerst uitgereikt. De tweede uitreiking vond plaats in 1950. Sindsdien wordt de Fields Medal elke vier jaar uitgereikt aan ten hoogste vier wiskundigen. Met de Abelprijs, die sinds 2003 eenmaal per jaar wordt uitgereikt, is het de belangrijkste prijs voor wiskundigen.

De vier winnaars werden enkele weken voor de uitreiking benaderd om bij het Internationaal Wiskundig Congres aanwezig te zijn. Perelman, die we kennen van zijn vermeende bewijs van het Poincaré-vermoeden dat hij eind 2002 als preprint op internet zette (we schreven over dit topologische probleem in

het februarinummer van de vorige jaargang), bedankte echter voor de eer en was daarom niet aanwezig bij de feestelijkheden. Hij is wars van media-aandacht en heeft geen interesse in prijzen. De laatste tijd beantwoordt hij geen e-mails meer. Hij schijnt ontslag te hebben genomen bij het onderzoeksinstituut waar hij werkzaam was. Vakgenoten hebben ieder contact met de schuwe Perelman verloren.

Drie jaar lang hebben wiskundigen zich het hoofd gebogen over Perelmans bewijs van het Poincaré-vermoeden. Inmiddels zijn ze zover dat ze Perelman volledig begrijpen. Fouten in zijn bewijs hebben ze niet ontdekt. In 2000 loofde het Clay Mathematics Institute een miljoen dollar uit voor degene die een van de zeven *millennium problems*, waaronder het Poincaré-vermoeden, weet op te lossen. In de reglementen staat dat het miljoen pas twee jaar na publicatie in een vooraanstaand vaktijdschrift kan worden uitgereikt. Zover is het nog niet, maar het zou niemand verbazen als de geniale excentriekeling het miljoen aan zijn neus voorbij laat gaan.

Meer over de vier winnaars: www.icm2006.org

32

Jan van de Craats wint NWO Eurekaprijs

Prof.dr. Jan van de Craats heeft de NWO Eurekaprijs gewonnen. Voor Pythagoraslezers is Van de Craats geen onbekende. De vorige jaargang oogstte hij veel succes met zijn artikelen over onopgeloste problemen in de wiskunde. Dat is slechts een van de vele bijdragen die hij levert aan (popularisering van) de wiskunde. Tot vorig jaar was hij voorzitter van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olym-

piade, hij houdt lezingen over uiteenlopende onderwerpen in de wiskunde, hij heeft diverse boeken op zijn naam staan, hij schrijft materiaal voor het nieuwe vak *Wiskunde D* en hij organiseert webklassen voor middelbare scholieren. De Eurekaprijs wordt jaarlijks toegekend aan de persoon met de beste prestaties op het gebied van het populariseren van wetenschap en kennis naar het brede publiek. De prijs bestaat uit een Eureka-beeldje van beeldend kunstenaar Richard de Vrijer en 12.500 euro.



(Door)denker

De omslagen van de vorige jaargang van *Pythagoras* riepen bij sommige lezers de vraag op: 'wat stellen die grillig gevormde witte vlakken voor?'

Leg de zes omslagen neer zoals hierboven is te zien, en het raadsel is opgelost. Het beeld *De denker* van Rodin leek de redactie een mooie verwijzing naar het jaarthema, dat *open problemen* was.

Priempalindroom

Een *palindroom* is een woord, zin of getal dat van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links. Voorbeelden zijn 'meetsysteem', 'De mooie zeeman nam Anna mee, zei oom Ed' en '12321'. Sommige mensen vinden het leuk om te zoeken naar *priempalindromen*. Een priempalindroom is een priemgetal dat palindroom is. Een klein priempalindroom is bijvoorbeeld 757. In de zomer van 2006 werden vier priempalindromen gevonden die de top-20 van grootst bekende priempalindromen hebben gehaald: $10^{160016} + 8231328 \cdot 10^{80005} + 1$ (160017 cijfers), $10^{73916} + 282 \cdot 10^{36957} + 1$ (73917 cijfers), $10^{72226} + 1212831382121 \cdot 10^{36107} + 1$ (72227 cijfers) en $10^{71916} + 1358307038531 \cdot 10^{35952} + 1$ (71917 cijfers).

Bron: <http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=53>

Internationale Wiskunde Olympiade

Van 6 tot 18 juli 2006 vond de Internationale Wiskunde Olympiade plaats in Ljubljana, Slovenië. Er waren 498 deelnemers, afkomstig uit 90 landen. China won met een totaal aantal punten van 214. In totaal waren er 252 punten te verdienen. Tweede, derde, vierde en vijfde werden achtereenvolgens Rusland, Korea, Duitsland en de Verenigde Staten. Het Nederlandse team wist dit jaar helaas geen medaille in de wacht te slepen. Wel kregen vijf van de zes Nederlandse deelnemers een eervolle vermelding, wat ook een mooie prestatie is. Nederland eindigde met 57 punten op de 62ste plaats. De Belgen deden het wat beter: zij werden 52ste met 75 punten. Van alle deelnemers waren er drie die alle opgaven foutloos hadden gemaakt: een Chinees, een Rus en een Moldaviër. Op gaven en oplossingen kun je vinden op <http://imo2006.dmfa.si>.

Flatland verfilmd

Edwin Abbott Abbott (1838-1926), een Engelse schoolmeester en theoloog, werd bekend als auteur van de wiskundige satire *Flatland* (1884). Abbott legt hierin op informele wijze de mogelijkheid van meerdere dimensies uit. *Flatland* volgt de avonturen van A. Square die op een dag wordt bezocht door een cirkel, die eigenlijk een bol blijkt te zijn die als cirkel verschijnt in Flatland. Zij belanden in lijnland en puntland en leren zo dat er meer dimensies zijn dan alleen de twee van Flatland.

Van *Flatland* is nu een animatiefilm gemaakt, die in het najaar van 2006 uitkomt. Een trailer van de film is alvast te zien op www.flatlandthemovie.com.

33

Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

Vals geld

De klant verlaat de winkel met een paar schoenen van €80 en een biljet van €20, terwijl de verkoper met een vals briefje van €100 blijft zitten; zijn schade is dus €100.

Kleurige driehoeken

Nee, er zal altijd een driehoek van één kleur zijn. Neem punt 1, van de 5 lijnstukken die uit dat punt vertrekken, zijn er minstens 3 van dezelfde kleur, zeg rood. Neem de 3 eindpunten van deze rode lijnstukken en kleur deze driehoek. Als een van de drie zijden rood is, vormt die met de twee andere een rode driehoek.

Rechthoeken

$2006 = 2 \times 17 \times 59$, dus behalve 1 bij 2006 kan Bulle de volgende rechthoeken maken: 2 bij 1003, 17 bij 118 en 34 bij 59.

Omgekeerd

Het getal is 2178.

Hoe laat?

Een van de twee teksten 'een voor een' moet als tijdstip (12.59 uur) worden gelezen, de andere als 'achter elkaar instappen'. De trein vertok dus om 11.59 uur of 12.59 uur.

Op een bok

In Siddeburen was een bok,
die machtsverhief en worteltrok.
Die bok heeft onlangs onverschrokken
de wortel uit zichzelf getrokken,
waarna hij zonder ongerief
zich weer in het kwadraat verhief.
Maar 't feit waardoor hij voort zal leven
is, dat hij achteraf nog even
de massa die hem huldigde
met vijf vermenigvuldigde.

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse