PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN NOVEMBER 2006

PYTHAGORAS

46ste jaargang nummer 2
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu

Internet
www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur
Marco Swaen

Eindredacteur
Alex van den Brandhof

Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Arnout Jaspers, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager
Chris Zaal

Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam

Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176
E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), E.C. Buissant des Amorie, voormalig docent wiskunde in Amstelveen (ecbuissantdesamorie@ncrvnet.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), J. Haubrich, docent wiskunde aan de Fontys Hogeschool te Eindhoven (j.haubrich@fontys.nl), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), F. Roos, docent natuurkunde te Tolbert (fd_r@yahoo.com), I. Smit, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (swaen@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Op het omslag
Patronen gemaakt met de vierkanten en ruiten van de krans van vierkanten, zie het artikel op pagina 4.

Niveausybooltjes
Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de wiskunde nodig is om te kunnen volgen, worden bij de titel voorzien van een symbool dat de moeilijkheidsgraad aangeeft. Artikelen voorzien van ◆ zijn meestal vanaf de vierde klas te begrijpen. Voor artikelen met ◆◆ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ◆◆◆ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

Costerverslaving

Als er buitenaardse beschavingen bestaan die net als wij de televisie en het straalvliegtuig hebben uitgevonden, moeten ze ook een wiskunde kennen die sterk lijkt op die van ons. Maar zouden ze ook massaal sudoku's invullen en zich gretig op allerlei even listige als nutteloze puzzels storten?

Zo'n vraag komt bij je op als je ziet hoe enthousiast onze prijsvraag over Costergetallen in het septembernummer ontvangen is. Een Costergetal is te maken met +,–, x, : en dubbel gebruik van z'n losse cijfers (bijvoorbeeld $5 \times 5 + 2 - 2 = 25$).

De weblog www.wiskundemeisjes.nl nam de prijsvraag ook op, waarna online duidelijk werd dat de speurtocht naar grote Costergetallen iets verslavends heeft. Op de website van de wiskundemeisjes staan al Costergetallen van enige honderden cijfers lang. Iedereen die nog een kans wil wagen, kan tot 15 januari 2007 z'n absurd grote of bijzondere Costergetallen naar rene@pythagoras.nu sturen. Wat 'bijzonder' is? Dat verzin je gewoon zelf, waarna de jury z'n ondoorgrondelijke oordeel velt.

INHOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 5 **Krans van acht vierkanten**

6 – 7 **Ringen op springen**

8 – 11 **De wiskunde van Raimond Puts**

12 – 16 **Eerlijk delen**

16 **Pythagoras aan 't IJ**

17 **Verwisselsommen**

18 – 19 **Pythagoras Olympiade**

20 – 21 **Journaal**

22 – 25 **Perfectie door precisie**

26 – 27 **Problemen – Oplossingen**

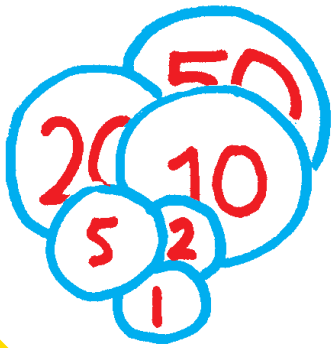
28 – 31 **Een aap en een typemachine**

33 **Oplossingen Bouwkampcode, Een brief van een wanhopige lezer, Kleine nootjes nr. 1**

door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

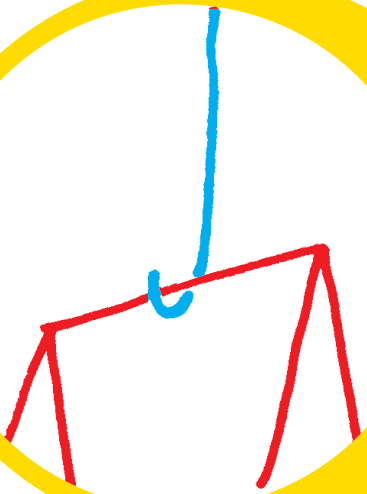


Munt ruilen

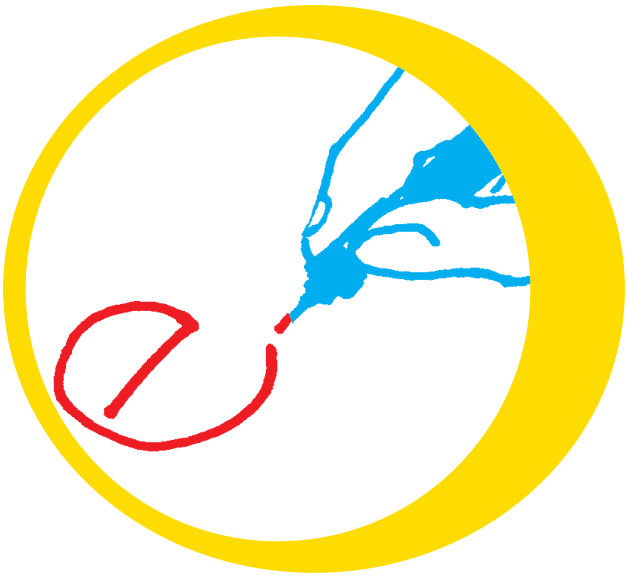
Er bestaan munten van 2 en van 1 euro, en van 50, 20, 10, 5, 2 en 1 cent. Saar en Suus hebben samen tien munten. Elke muntsoort komt ten minste eenmaal voor. Saar heeft vier keer zo veel geld als Suus. Ze ruilen één munt. Dan heeft Saar tien keer zo veel geld als Suus. Met welke munten begonnen ze?

Weegprobleem

Je hebt drie gewichtjes (er kunnen gelijke tussen zitten). Je wilt ze in een rijtje leggen, van licht naar zwaar. Lukt dit met minder dan drie keer wegen op een balans?



De letter 'e'
Vul in: 'In deze zin zie je ... keer de letter 'e' staan.'



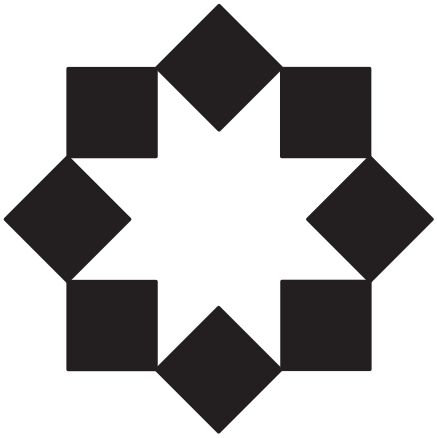
Daklozenkrant
Een verkoper van de daklozenkrant koopt een daklozenkrant in voor 1 euro en verkoopt hem voor 2 euro. Walter koopt de krant en geeft daarna de krant weer terug aan de dakloze. Wat heeft Walter de dakloze op die manier gegeven: 2, 3 of 4 euro?

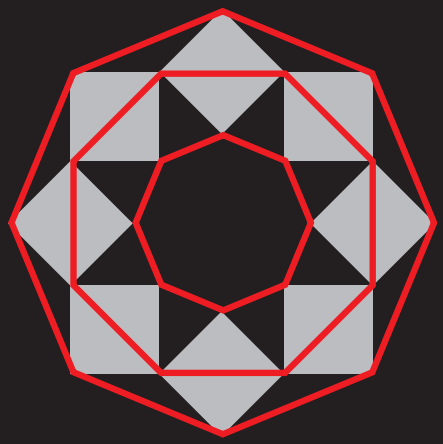
Even en oneven data
De datum 19.11.1999 bestaat alleen maar uit oneven cijfers en noemen we daarom oneven. De datum 02.02.2000 bestaat alleen maar uit even cijfers en noemen we daarom even. Wat is de eerste oneven datum na 02.02.2000 en de laatste even datum voor 19.11.1999?

door **Frank Roos**

Tussen de *clipart*-plaatjes van *Word* kun je dit figuurtje vinden, een krans van acht vierkantjes. Frank Roos keek op verschillende manieren naar deze krans.

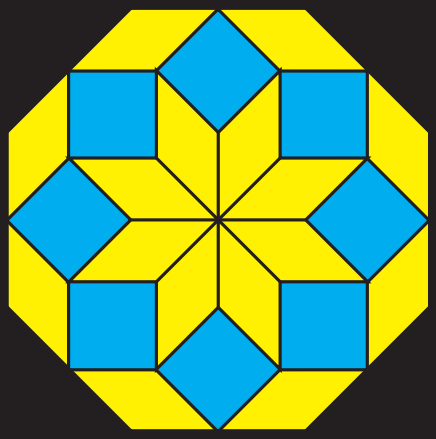
Krans van acht vierkanten

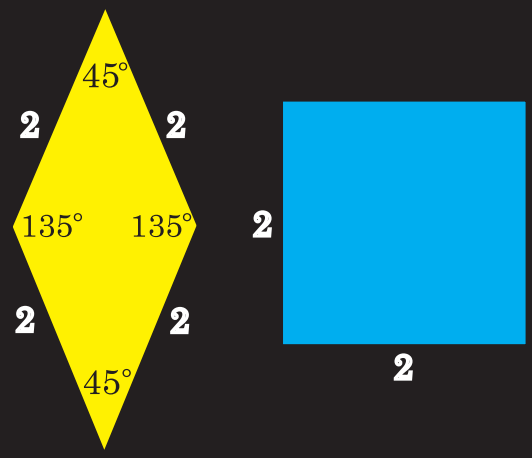




Als je de krans tussen je oogharen bekijkt, dan lijkt het net alsof er twee grote, maar niet getekende, vierkanten over elkaar heen liggen met een hoek van 45° ertussen.

De hoekpunten van de vierkanten vormen drie regelmatige achthoeken: een kleine die de binnenste hoekpunten van de vierkanten verbindt, een tweede door de scharnierpunten en een derde door de buitenste hoekpunten. Ik stelde mij de opdracht de oppervlakte van die drie achthoeken te berekenen. Laten we zeggen dat de vierkanten een zijde van 2 hebben. Dan kun je met de stelling van Pythagoras uitrekenen wat de verschillende maten zijn. Probeer het maar, voor je verder leest.

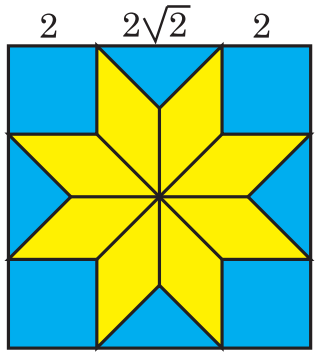


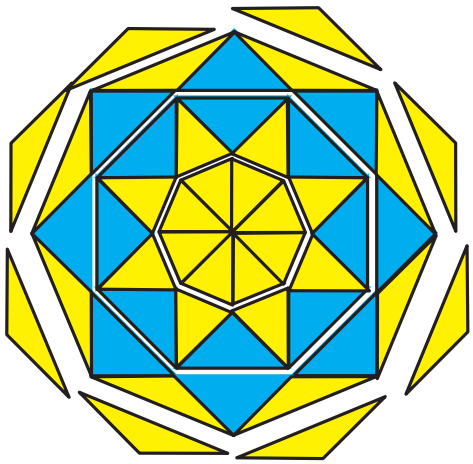


Bekijk je de figuur goed, dan zie je dat hij op een mooie manier kan worden opgesplitst. Als je een aantal van de diagonalen trekt, ontstaan er acht ruiten die samen de witte ster vormen. Dat dit inderdaad ruiten zijn, blijkt wanneer je de hoeken berekent. De scherpe hoek bij het centrum van de figuur is namelijk $45°$ (= $360° : 8$). De stompe hoeken zijn ieder $135°$, want zij zijn onderling gelijk en samen met een rechte hoek van het vierkant zijn ze $360°$. Dan is de andere scherpe hoek $360° - 45° - 2 \times 135°$, dus ook $45°$.

Buitenom liggen ook weer dezelfde ruiten, zoals je gemakkelijk kunt vaststellen door ook daar de verschillende hoeken te berekenen.

De krans van vierkanten kun je dus opbouwen met twee tegels: de witte ruit en de bijpassende vierkanten. Met deze vierkanten en ruiten kun je ook veel andere interessante patronen leggen. Knip er een stel en probeer het maar. Op het omslag van dit nummer zie je enkele patronen.





Wat is de oppervlakte van zo'n ruit? Duidelijk is dat de vierkanten zijde 2 hebben. Een diagonaal van zo'n vierkant is dus $2\sqrt{2}$. De oppervlakte van de ruiten kun je nu berekenen door te kijken naar het grote vierkant. De zijde daarvan bestaat uit twee zijden en een diagonaal van de basisvierkanten, en is dus $4 + 2\sqrt{2}$. Het grote vierkant bestaat uit acht ruiten, vier hele en vier halve vierkanten. Die vierkanten zijn samen $16 + 8 = 24$. Dus de acht ruiten zijn samen $(4 + 2\sqrt{2})^2 - 24$. Reken je door met de wortels, dan vind je dat de oppervlakte van één ruit $2\sqrt{2}$ is.

Nu kun je de oppervlakte van de drie achthoeken berekenen door gewoon te tellen. Dat levert $8\sqrt{2}$ voor de kleinste, $16\sqrt{2} + 16$ voor de middelste en $24\sqrt{2} + 32$ voor de grootste. Merk op dat de middelste achthoek wat oppervlakte betreft precies het midden houdt tussen de grote en de kleine. Bekijk ook eens kransen van andere aantallen vierkanten. Hoe zit het daar met de oppervlakte van de drie veelhoeken?

door **Marco Swaen**

Ringen op springen

Voor de eerste opdracht heb je genoeg aan een paar strookjes papier en wat lijm. Voor de opdrachten op de rechter bladzijde moet je lange stroken gebruiken en papier dat niet snel scheurt. Beter lukt het met vier stukken touw van verschillende kleur zodat je ze goed uit elkaar kunt houden.

Hier zie je drie ringen stevig door elkaar. Als je één ring doorknipt, blijven de andere nog aan elkaar.

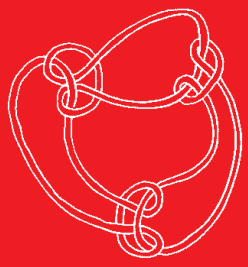
Hier zie je weer drie ringen door elkaar. Nu hangt het er maar vanaf welke je doorknipt. Knip je de middelste door, dan zijn de andere twee vrij. Knip je een van de buitenste ringen door, dan blijven de overgebleven twee aan elkaar zitten.

Opdracht 1 Maak 'drie ringen op springen', dat wil zeggen: welke van de drie je ook doorknipt, de andere twee zijn dan ook meteen los. De oplossing staat meteen al op de volgende bladzijde (foto 5).

5

Drie ringen op springen.

Er zijn meer manieren om ringen te laten springen.



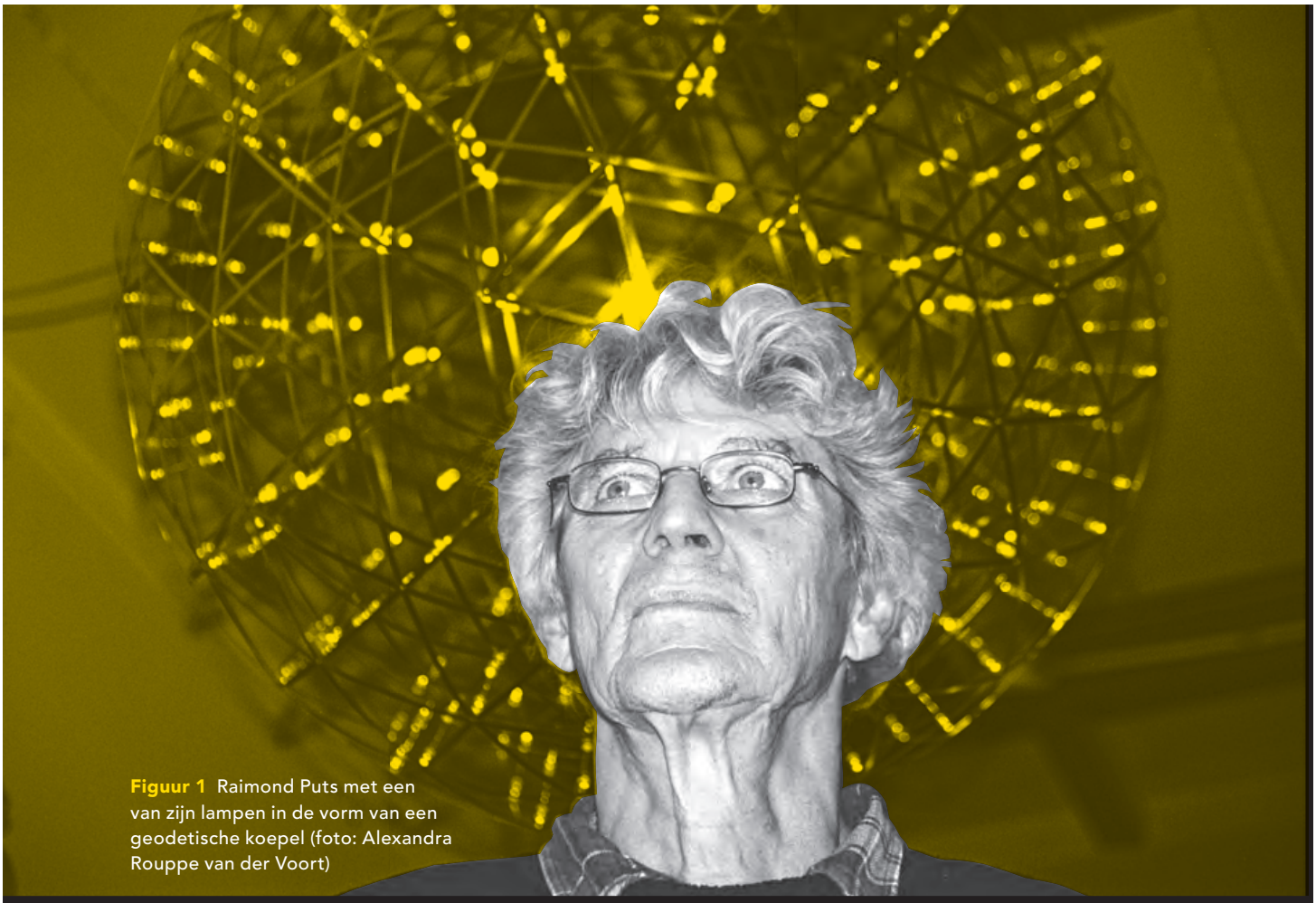
Het is niet moeilijk vier ringen aan elkaar te zetten zodat de overgebleven ringen altijd vast blijven zitten, welke je ook weghaalt. Zorg dat je elke volgende ring door alle voorgaande haalt.

Opdracht 2 Zet vier ringen zo aan elkaar dat welke je ook weghaalt, de drie overgebleven ringen los van elkaar zullen zijn.

Opdracht 3 Zet vier ringen zo aan elkaar dat:
- als je er willekeurig één doorknipt, de overige drie aan elkaar vast blijven zitten;
- als je er vervolgens nog één doorknipt, de overgebleven twee los zijn.

De oplossing van opdracht 2 en 3 vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

6



Figuur 1 Raimond Puts met een van zijn lampen in de vorm van een geodetische koepel (foto: Alexandra Rouppe van der Voort)

door **Marco Swaen**

De wiskunde van Raimond Puts

Op de technische school kreeg Raimond Puts veel goniometrische formules voorgeschoteld. Ze leken vooral bedacht om er eindeloos veel opgaven mee te maken. Wat je er later mee zou kunnen doen, kwam niet ter sprake. Net als zijn vader ging hij werken in de metaalindustrie, en de gonio-formules kwam hij nooit meer tegen. Maar nu hij eenmaal met pensioen is, heeft hij de oude goniometrieboeken weer opengeslagen omdat hij alles wil begrijpen van geodetische bollen, een speciaal soort veelvlakken dat hem mateloos fascineert.

Na militaire dienst werd Raimond Puts machineconstructeur, een beroep waar zeker emplooi voor was in de jaren van grootschalige mechanisatie. Lange tijd werkte hij bij Philips in Hilversum en Zurich. De jaren zestig stonden in het teken van de opbouw. Opbouw van de welvaartstaat, waarin materiële voorspoed eindelijk voor iedereen bereikbaar werd. De armoede, werkeloosheid en politieke tegenstellingen van voor de oorlog leken voorbij.

De voortschrijdende welvaart bracht echter nieuwe problemen, zoals ernstige milieuvervuiling en uitputting van grondstoffen. De jaren van opbouw werden gevolgd door jaren van protest. Mensen gingen op zoek naar een andere manier van leven, die minder beslag zou leggen op het milieu. Zo werd begin jaren zeventig in Boxtel, in de buurt van Eindhoven, de 'Kleine Aarde' opgericht, een soort proefboerderij voor alternatieve landbouw. Raimond Puts kwam vaak op de Kleine Aarde en bouwde daar mee aan een bolwoning volgens een uit Amerika overgewaaide constructie: een *geodetische koepel*. Zo'n koepel bestaat uit een groot aantal driehoeken die tezamen een bolvorm benaderen (lees pagina 10 en 11). De constructie liet Raimond niet meer los en in zijn vrije tijd maakte hij modellen van hout, karton en papier, om de structuur van geodetische bollen te doorgronden.

Lampenkap

Pas met zijn pensioen kreeg Raimond eindelijk de rust en de tijd zich helemaal op de geodetische bollen te storten. Zijn modellen oogden zo mooi, dat hij ze ging toepassen als kap voor lampen. Hierbij beviel het hem niet dat de bolconstructie alleen een decoratief element was, en functioneel niets toevoegde. Hij kwam op het idee het raamwerk te gebruiken als de bedrading van de lamp. Sindsdien bestaan zijn lampen uit twee bollen van metalen strips die in elkaar zitten, met daartussen kleine lampjes. Een zwakstroompje op de bollen is dan de voeding. De lampjes moeten klein zijn en duurzaam, omdat ze gesoldeerd worden op de strips en dus moeilijk te vervangen zijn.

Zijn veertig jaren ervaring als metaalbewerker kwam bij het ontwikkelen van de lamp goed van pas. Het prototype van zijn led-lamp had maar een doorsnede van zo'n 25 cm en telde een veertigtal lampjes. Spoedig werden de constructies groter en ingewikkelder, met langere strips en meer tussenverbindingen, en honderden led-lampjes.

De bouw van een lamp begint met het uitmeten van de strips. Daarin moeten gaatjes worden aangebracht voor de boutjes die de strips aan elkaar verbinden. De afstand tussen de gaatjes varieert. Dan worden de strips met boutjes aan elkaar gezet en worden de lampjes op het raamwerk gesoldeerd. De afstanden tussen de gaatjes op de strips moeten heel precies kloppen, elke afwijking breidt zich in de constructie uit tot een storende oneffenheid. Pas als de lamp helemaal in elkaar zit, blijkt of alles past en, wat belangrijker is, of de constructie de schoonheid heeft waar het Raimond om te doen is.

In de lampen komen voor Raimond twee werelden bij elkaar. Aan de ene kant de mogelijkheden van het materiaal, die hij na veertig jaar werken in de metaal kent als geen ander. Aan de andere kant de prachtige meetkunde van de veelvlakken waar hij meer en meer door gegrepen wordt.

Gezocht!

De grootste lamp die Raimond Puts tot nog toe heeft gemaakt, bevat 362 led-lampjes, waarbij de ribbe van de icosaëder is onderverdeeld in zes stukken. De volgende stap is een lamp met 492 lampjes, en dus een onderverdeling in zeven, negen en elf stukken. Daarvoor heeft hij nog geen tabel kunnen vinden.

Raimond Puts zoekt iemand die voor hem een tabel kan maken voor deze verdeling, na overleg over het onderliggende systeem van geodeten. Als tegenprestatie schenkt hij graag een geodetische lamp in handzaam formaat.

Icosaëder

Dat je met twintig gelijkzijdige driehoeken een soort bolvorm kunt maken, was al in de oudheid bekend. De Grieken gaven dit bouwwerk de naam *icosaëder*: (regelmatig) twintigvlak, zie figuur 2. Als raamwerk voor een koepel is de icosaëder niet geschikt. Het aantal zijvlakken is klein, waardoor hij de vorm van een bol maar heel slecht benadert. Bovendien zijn de ribben te lang als je de koepel enige omvang wil geven.

Bij de icosaëder komen in elk hoekpunt vijf gelijkzijdige driehoeken samen. Worden dat er meer, dan vallen er hoekpunten plat. Met gelijkzijdige driehoeken kun je dus geen grotere bolvorm maken. Er zijn al lang veelvlakken bekend die meer zijvlakken hebben dan de icosaëder, maar die bevatten zijvlakken die niet driehoekig zijn, waardoor ze als stangenconstructie niet stijf zijn.

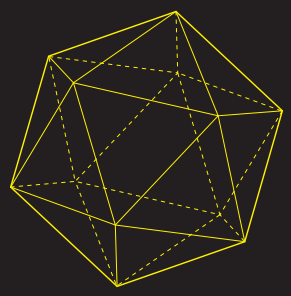
Buckminster Fuller

Vooral in Duitsland werden aan het begin van de twintigste eeuw glazen koepels gebouwd van staal en glas gebaseerd op veelvlakken. Heel beroemd is de koepel van het Glaspaviljoen van Bruno Taut uit 1914.

De echte doorbraak in de toepassing van veelvlakken in koepels kwam in de jaren vijftig. Toen ging de Amerikaan R. Buckminster Fuller (1897-1985) gericht op zoek naar nieuwe constructies, die minder materiaal kosten en energiezuinigere gebouwen opleveren. Hij bedacht in 1947 dat je van de icosaëder koepels met eindeloos veel driehoekige zijvlakjes kunt maken, mits je bereid bent de afmetingen van de ribben te variëren. Alle zijvlakken worden dan driehoekig, maar zijn niet meer gelijkzijdig. De eerste koepel die hij bouwde, stortte weinig hoopvol na enkele minuten al in. Buckminster Fuller liet zich echter niet uit het veld slaan, en in 1967 was zijn enorme geodetische koepel het pronkstuk op de wereldtentoonstelling in Montreal.

Constructie

Buckminster Fuller noemde zijn constructies 'geodesic domes', geodetische koepels, omdat de ribben zoveel mogelijk grootcirkels (geodeten) volgen. Het uitgangspunt voor de constructie is een icosaëder. De driehoekige zijvlakken deel je op in kleinere driehoekjes volgens een vast patroon, zie figuur 4. Daarbij heb je twee basispatronen, hetzij met ribben evenwijdig met die van de driehoek, hetzij met middellijnen. Vervolgens druk je de hoekpunten die daarbij ontstaan naar buiten, tot ze op de bol komen te liggen die de icosaëder omhult.



Figuur 2 Icosaëder

Dat naar buiten drukken kun je meetkundig op verschillende manieren doen. Je kunt ervoor zorgen dat de oorspronkelijke ribben in gelijke stukken worden verdeeld. Het gevolg is dan dat aansluitende ribben steeds knikken maken waardoor het geheel nogal rommelig oogt. Een mooier resultaat krijg je door te projecteren vanuit het midden van de bol. Er zijn dan meer ketens van ribben die een geodeet volgen. En je kunt vervolgens ook nog schuiven met hoekpunten, zodat er nog meer geodeten in het patroon komen. Maar welk principe je ook volgt, helemaal perfect wordt het nooit. Heb je veel geodeten, dan zullen de driehoekjes in het patroon qua vorm en afmeting sterk van elkaar verschillen. Zijn alle driehoekjes ongeveer even groot, dan zitten er veel knikken in de doorgaande ketens van ribben.

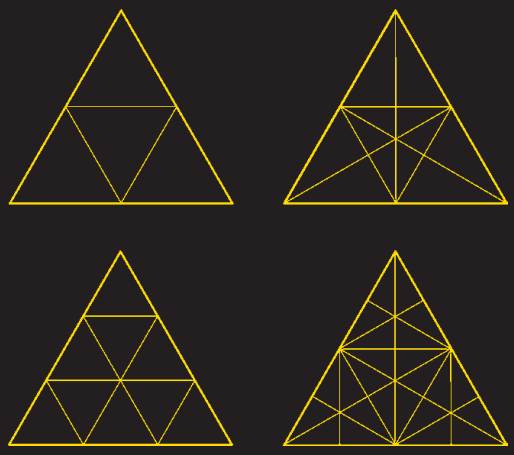
Sinds de jaren zestig bestaan er tabellen voor de lengtes van de ribben in geodetische bolverdelingen. De samenstellers van de tabellen geven vaak niet duidelijk aan volgens welk principe zij de icosaëder opdelen, en vrijwel nooit leveren zij de precieze formules erbij waarmee zij de lengtes vonden.

Literatuur

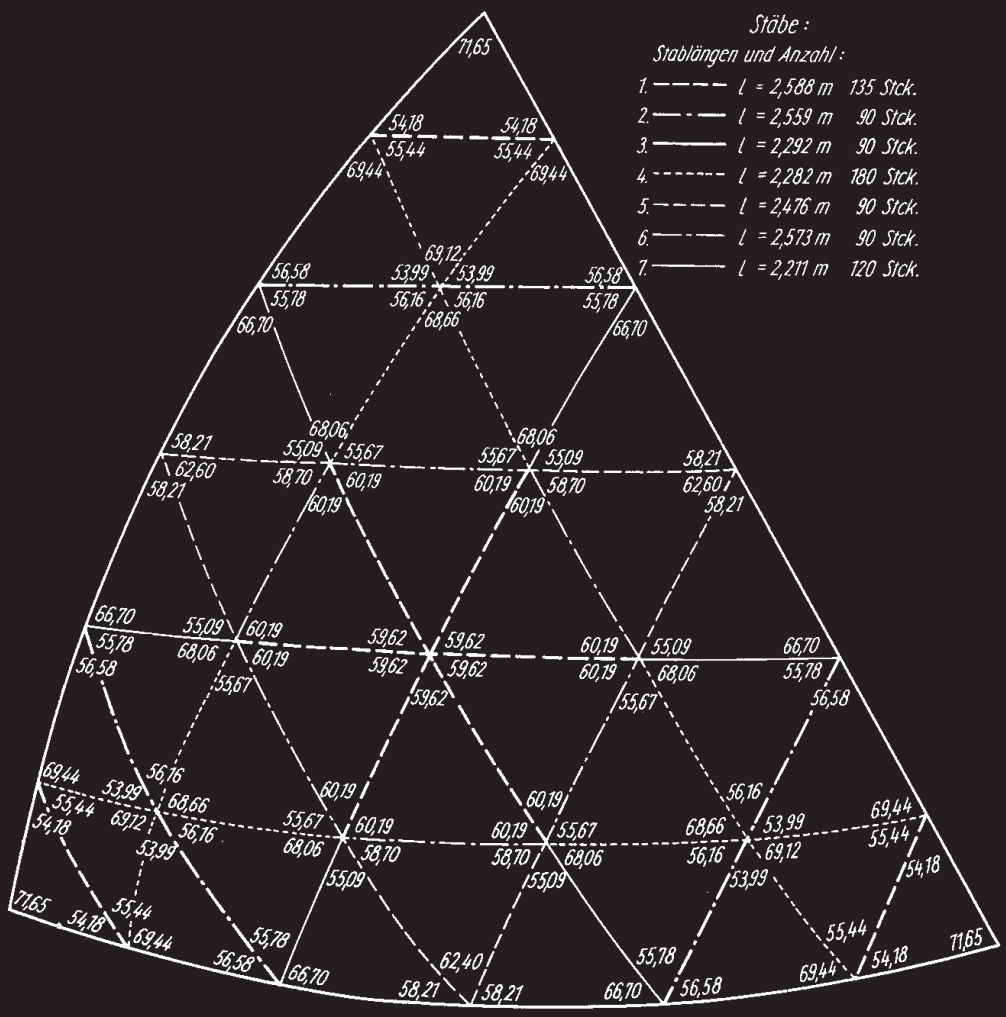
Hugh Kenner, *Geodesic Math and How to Use It* (1976).
Hermann Rühle, *Räumliche Dachtragwerke - Konstruktion und Ausführung. Band 2* (1970).

Bild 2.22. Kugelhaus mit untergehängter textiler Dachhaut als Stabnetzwerkkonstruktion aus Aluminiumprofilen in Budapest (Entwurf *I. Ozerai* und *I. Kadar*)

Figuur 3 Een vroeg voorbeeld van een constructie met een geodetische koepel



Figuur 4 Verdeling van de driehoek volgens klasse 1 en klasse 2 met $\nu = 3$ en 4



Figuur 5 Schema uit een Duits ingenieursboek uit beginjaren '70 met lengtes en hoeken voor een verdeling volgens klasse 1 met $\nu = 5$.

door **Marco Swaen**

Heb je al leren differentiëren, dan ken je dit soort opgaven wel: 'Het punt $P(3, 1)$ ligt op de grafiek van $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$. Stel de vergelijking op van de raaklijn in P aan de grafiek van f.' Heel geschikt om het differentiëren te oefenen. Maar juist bij zo'n kwadratische functie is er een veel snellere methode: 'eerlijk delen'.

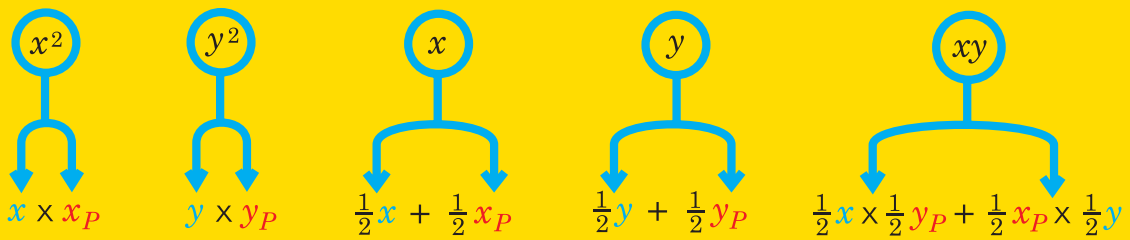
'Eerlijk de-len

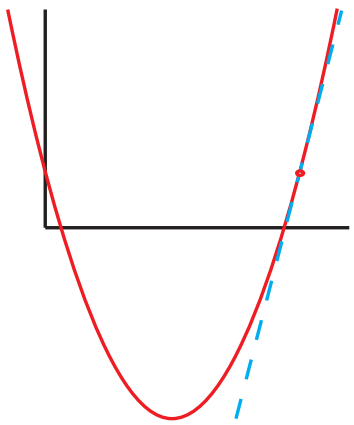
Bij 'eerlijk delen' haal je de vergelijking van de raaklijn direct uit die van de grafiek door de coördinaten van P 'voor de helft' in te vullen. Eerst splits je x in $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$. In één van deze termen vervang je x door de x-coördinaat van P. Dus x wordt $\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$. Met y en x^2 doe je iets vergelijkbaars, en je hebt de vergelijking van de raaklijn. Op de volgende twee pagina's doen we het uitgebreid voor.

'Eerlijk delen' werkt als de grafiek van f een *kwadratische kromme* is, dat wil zeggen een vergelijking heeft die je kunt schrijven in de vorm

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

De functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ is een voorbeeld van een kwadratische kromme, want zijn vergelijking $y = 2x^2 - 6x + 1$ kun je ook schrijven als $2x^2 - y - 6x + 1 = 0$.

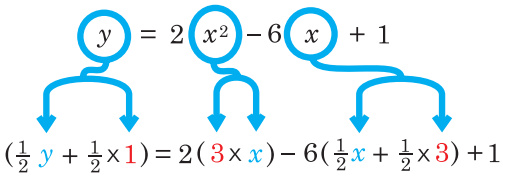




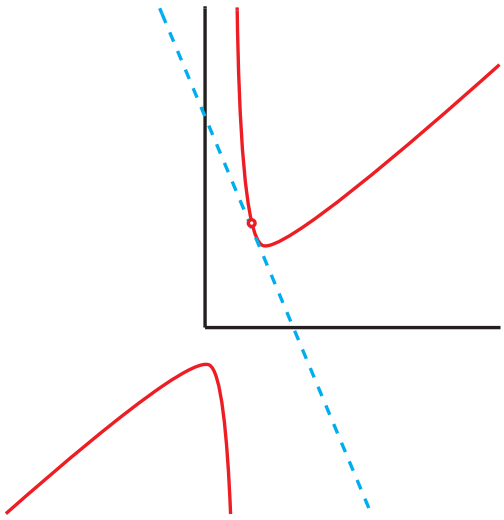
Stel de vergelijking op van de raaklijn in (3, 1) aan de grafiek van de functie

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1.$$

De grafiek van f is een kwadratische kromme. Eerlijk delen met (3, 1) levert



Uitwerken geeft $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 6x - 3x - 9 + 1$, ofwel $\frac{1}{2}y = 3x - 8\frac{1}{2}$. Dus een vergelijking voor de raaklijn is $y = 6x - 17$.



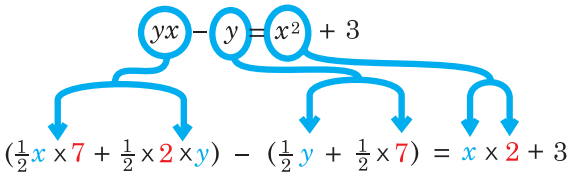
Stel de vergelijking op van de raaklijn in (2, 7) aan de grafiek van de functie

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

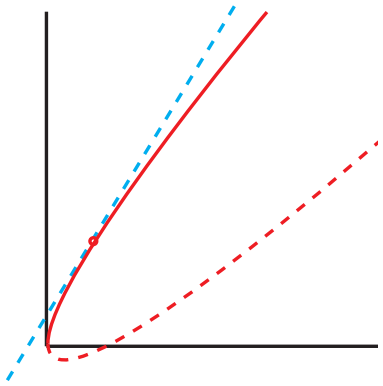
Eerst werken we de vergelijking van de grafiek om:

$$y(x - 1) = x^2 + 3.$$

Haakjes uitwerken en eerlijk delen levert



Dit kunnen we herleiden tot $3\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}y - 3\frac{1}{2} = 2x + 3$, ofwel $\frac{1}{2}y = -1\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$. Een vergelijking voor de raaklijn is dus $y = -3x + 13$.



Stel de vergelijking op van de raaklijn in (1, 2) aan de grafiek van de functie

$$f(x) = x + \sqrt{x}.$$

Eerst omwerken:

$$y - x = \sqrt{x}.$$

Kwadrateer links en rechts:

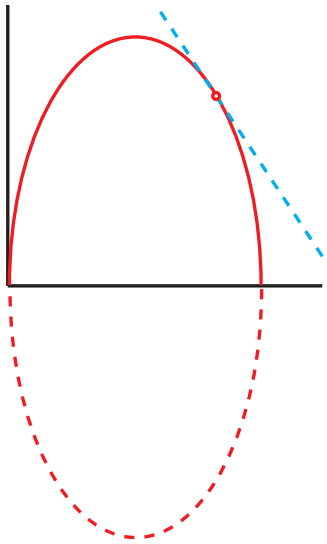
$$(y - x)^2 = x.$$

De grafiek van f is maar een gedeelte van deze kromme, maar voor het punt (1, 2) deert dat niet. Haakjes uitwerken en eerlijk delen levert

$$y^2 - 2xy + x^2 = x$$

$$2 \times y - 2\left(\tfrac{1}{2}x \times 2 + \tfrac{1}{2} \times 1 \times y\right) + 1 \times x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \times 1$$

Vereenvoudigen geeft $y - x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
Een vergelijking voor de raaklijn is dus $y = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



Stel de vergelijking op van de raaklijn in (4, 6) aan de grafiek van de functie

$$f(x) = 2\sqrt{25 - x^2}.$$

We kwadrateren de vergelijking van de grafiek: $y^2 = 4(25 - x^2)$.
De grafiek van f is een gedeelte van een ellips, het punt (4, 6) ligt op dat gedeelte. Haakjes uitwerken en eerlijk delen levert

$$4x^2 + y^2 = 100$$

$$4(4 \times x) + 6 \times y = 100$$

Een vergelijking voor de raaklijn is dus $y = -2\frac{2}{3}x + 16\frac{2}{3}$.

Kwadratische krommen
We hebben al een paar krommen met een vergelijking van de vorm

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gezien in de voorbeelden:
- $2x^2 - 6x - y + 1 = 0$: parabool (rechtop);
- $x^2 - xy + y + 3 = 0$: hyperbool;
- $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$: parabool (scheef);
- $4x^2 + y^2 - 100 = 0$: ellips.

In het algemeen is een kwadratische kromme een *kegelsnede*, dat wil zeggen: een kromme die je kunt krijgen door een kegel te doorsnijden met een plat vlak. In het schema op pagina 15 zie je zulke doorsnijdingen en de krommen die ze opleveren. Afhankelijk van de hoek die het snijvlak maakt met de as van de kegel krijg je cirkels, ellipsen, parabolen en hyperbolen. Wanneer het snijvlak door de top van de kegel gaat, ontstaan er zogeheten *ontaarde kegel-*

sneden, zoals een punt, een rechte lijn, twee snijdende lijnen.

Elke kegelsnede, in elke afmeting, verhouding en stand, komt overeen met een kwadratische kromme. Ook de ontaarde kegelsneden zijn kwadratisch, bijvoorbeeld:

- $x^2 + y^2 = 0$: punt;
- $x^2 + 2xy + y^2 = 0$: rechte lijn;
- $x^2 - y^2 = 0$: twee snijdende lijnen.

Bij de kwadratische krommen komen we ook nog twee bijzondere gevallen tegen, die je niet direct als kegelsneden zult herkennen:

- $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$: twee evenwijdige lijnen;
- $x^2 + y^2 = -1$: niets.

Krommen zoals de laatste hebben helemaal geen punten. Toch worden ze niet als ontaard beschouwd, maar als cirkels (ellipsen) met een imaginaire straal. In ons gewone platte vlak hebben ze weliswaar geen punten, maar bekijk je ze in de tweedimensionale complexe ruimte, dan zijn het ellipsen die dwars op onze bekende ellipsen staan.

Handig om te weten is dat je aan de vergelijking van de kromme betrekkelijk eenvoudig kunt zien met welk type kegelsnede je te maken hebt. Bereken het getal $d = B^2 - 4AC$ (het lijkt wel de discriminant!), dan geldt:

- $d < 0$: ellips;
- $d = 0$: parabool;
- $d > 0$: hyperbool.

Er is ook een getal h dat vertelt of de kromme ontaard is. De uitdrukking voor h ziet er echter wat ingewikkeld uit:

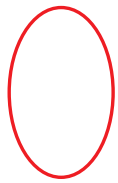
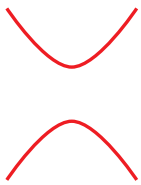
$$h = 8ACF + BDE - 2AE^2 + \\ - 2CD^2 - 2B^2F + BD^2.$$

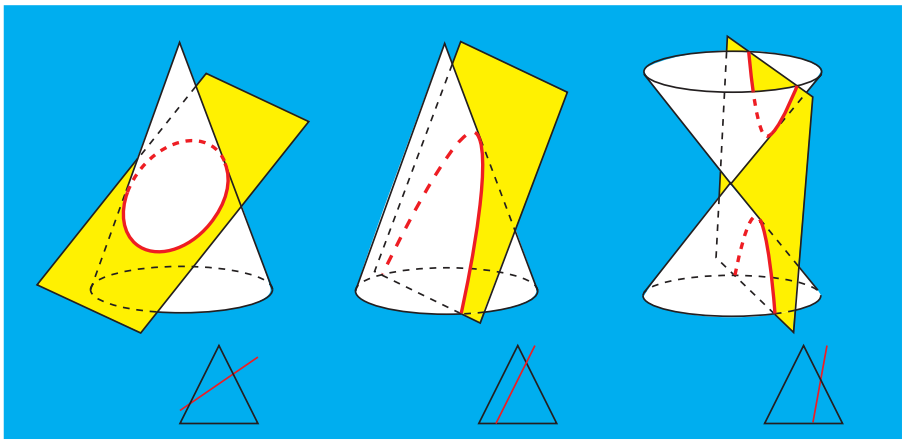
Als $h = 0$, is de kromme ontaard, anders niet.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$d = B^2 - 4AC$$

$$h = 8ACF + BDE - 2AE^2 - 2CD^2 - 2B^2F + BD^2$$

		$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
		ellips	parabool	hyperbool
$h \neq 0$	niet-ontaard			
$h = 0$	ontaard			



◆◆ **Waarom mag je eerlijk delen?**
Dat eerlijk delen de vergelijking van de raaklijn oplevert is niet moeilijk aan te tonen, tenminste als je wat van krommen weet, en je je niet al te veel zorgen maakt over uitzonderingsgevallen. Differentieer de hele vergelijking van de kwadratische kromme, dan krijg je

$$2Ax\mathbf{d}x + Bx\mathbf{d}y + By\mathbf{d}x + \\ +2Cy\mathbf{d}y + D\mathbf{d}x + E\mathbf{d}y = 0.$$

Dat geeft je de raaklijnrichting in het punt P:

$$\left[\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right]_{(x_P,y_P)} = -\frac{2Ax_P + By_P + D}{2Cy_P + Bx_P + E}.$$

De lijn door een gegeven punt (a, b) met richtingscoëfficiënt λ heeft de vergelijking

$$y - b = \lambda(x - a)\ .$$

In ons geval krijg je, na een beetje omwerken, de volgende vergelijking:

$$(2Ax_P + By_P + D)(x - x_P) + \\ +(2Cy_P + Bx_P + E)(y - y_P) = 0.$$

Deel dit door 2, vermenigvuldig alles uit en gebruik dat (x_P, y_P) op de kwadratische kromme ligt, dan krijg je

$$Ax_Px + \frac{1}{2}By_Px + \frac{1}{2}Bx_Py + Cy_Py + \\ + \frac{1}{2}Dx + \frac{1}{2}Dx_P + \frac{1}{2}Ey + \frac{1}{2}Ey_P + F = 0$$

en dat is precies de vergelijking die je krijgt na 'eerlijk delen'.

Vraag: Wat levert 'eerlijk delen' op indien P niet op de krommen ligt?

Pythagoras aan 't IJ

Zonder wetenschap geen technische vooruitgang, en dus ook geen spoorwegen. Dat besef wilde de architect P.J.H. Cuypers de treinreizigers meegeven, toen het decoratieprogramma voor zijn Centraal Station in Amsterdam werd opgesteld. Sinds 1889 staan daarom boven de westelijke gevel drie beelden die 'de Physica, de Mathesis en de Mechanica' voorstellen. Op het wapenschild boven zijn hoofd van de middelste figuur staat een rechthoekige driehoek met vierkanten op de zijden. Geen twijfel dus dat we hier te maken hebben met een beeld van Pythagoras.

door **Elias C. Buissant des Amorie**

Verwisselsommen

Iedereen weet dat $5^2 = 25$. Hier is het opmerkelijk dat links en rechts van het =-teken dezelfde cijfers staan. Nu kun je dat natuurlijk op veel manieren voor elkaar krijgen, door cijfers te verwisselen, maar meestal is dat erg flauw, zoals bij $2 + 3 = 3 + 2$ en $12 + 34 = 14 + 32$. Er zijn ook aardiger vondsten. Wat dacht je van deze collectie:

$$11^2 = 121$$
$$5^{1+2} = 125$$
$$\sqrt{4^6} = 64$$
$$(3+4)^3 = 343$$
$$(7+2)^{\sqrt{9}} = 729$$

$$11^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = 1331$$
$$1+2+3 = 1\times2\times3$$
$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \times \frac{9}{9}$$
$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{6}$$
$$2^4 = 4^2$$

$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9}$$
$$\sqrt{169} = 19 - 6$$
$$\sqrt{256} = 2 \times 5 + 6$$
$$\sqrt{289} = 8 + \sqrt{9^2}$$
$$\sqrt{324} = 3^2 \times \sqrt{4}$$

Wie vindt nog meer verwisselsommen?
Stuur ze op naar rene@pythagoras.nu.
De mooiste inzendingen plaatsen we in *Pythagoras*.

Pythagoras Olympiade

door **Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom** en **Iris Smit**

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2006.

OPGAVE 136

Gegeven een gelijkbenige driehoek ABC met $|AC| = |BC|$. Punt D is het midden van AB. Laat nu P een punt zijn op CD en Q een punt op BC, met $Q \neq B$, zodanig dat $|AP| = |PQ|$. Bewijs dat vierhoek $APQC$ een koordenvierhoek is.

OPGAVE 137

Bewijs dat

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i} = 6.$$

OPLOSSING

132

Allard tekent op een vel papier een cirkelschijf met straal 1. Hij markeert n punten binnen de cirkel. Bewijs dat er een punt P op de cirkel is waarvoor geldt dat de som van de afstanden van P tot de gemarkeerde punten groter dan of gelijk aan n is.

Oplossing. We tekenen een rechte lijn door het middelpunt van de cirkel en noemen de punten waar de lijn de cirkel snijdt P_1 en P_2. De punten binnen de cirkel noemen we A_1, A_2, ..., A_n. Nu volgt uit de driehoeksongelijkheid dat voor alle i geldt:

$$\mathrm{d}(P_1, A_i) + \mathrm{d}(A_i, P_2) \geq \mathrm{d}(P_1, P_2) = 2.$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(P_1, A_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(A_i, P_2) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathrm{d}(P_1, A_i) + \mathrm{d}(A_i, P_2)\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n.$$

Nu zijn er twee mogelijkheden:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(P_1, A_i) \geq n \quad \text{of} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(P_1, A_i) < n.$$

In het eerste geval kunnen we punt P_1 kiezen als P. In het tweede geval moet gelden dat

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(A_i, P_2) \geq n$$

en kunnen we punt P_2 kiezen als P.

Deze opgave werd goed opgelost door **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam.

OPLOSSING

133

Gegeven is een geheel getal $k > 3$.
De oplossingen van de vergelijking $x^2 - kx + 1 = 0$ zijn a en b. Bewijs dat voor ieder geheel getal $n \geq 0$ geldt:
a. $a^n + b^n$ is geheel.
b. $a^n + b^n$ is niet deelbaar door $k - 1$.

Oplossing. De oplossingen van de vergelijking $x^2 - kx + 1 = 0$ zijn $\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4}$. Hierdoor weten we dat $a + b = k$ en $ab = 1$.
a. Noem $r_n = a^n + b^n$, dan $r_0 = a^0 + b^0 = 2$, dus geheel, en $r_1 = a^1 + b^1 = k$, wat ook geheel is. We passen nu inductie toe. Stel dat voor alle elementen r_i met $i \leq m$ geldt dat r_i geheel is, voor zekere m. Bekijk dan $r_{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} = (a + b)(a^m + b^m) - ab(a^{m-1} + b^{m-1}) = k \cdot r_m - r_{m-1}$. Dus ook r_{m+1} is dan geheel. Hieruit volgt dat $a^n + b^n$ geheel is voor alle n.
b. Stel dat m het kleinste gehele getal is waarvoor geldt dat $r_m = a^m + b^m$ deelbaar is door $k - 1$ en $m \geq 2$. Omdat $r_m = k \cdot r_{m-1} - r_{m-2} = (k^2 - 1)r_{m-2} - k \cdot r_{m-3} = (k - 1)(k + 1) \cdot r_{m-2} - k \cdot r_{m-3}$, moet ook $k \cdot r_{m-3}$ deelbaar zijn door $k - 1$. Omdat $k - 1$ geen deler kan zijn van k, moet $k - 1$ een deler zijn van r_{m-3}. Dit is alleen mogelijk als $m - 3 < 3$, maar $r_0 = 2$, $r_1 = k$ en $r_2 = k^2 - 2 = (k - 1)(k + 1) - 1$: alledrie niet deelbaar door $k - 1$. Conclusie: er is geen enkele n waarvoor $a^n + b^n$ deelbaar is door $k - 1$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam en **Jens Vande Cavey** van het Heilige-Drievuldigheidscollege te Leuven.
De boekenbon gaat naar Jens Vande Cavey.

Pythagoras

November 2006 **Journaal** Nummer 2

door **Alex van den Brandhof** en **Arnout Jaspers**

Wiskunde Olympiade

Op vrijdagmiddag 26 januari 2007 is de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Hierbij moet je in twee uur tijd acht vijfkeuze-problemen en vier open vragen, die elk een (exact) getal als antwoord hebben, proberen te kraken. Hogere wiskunde komt er niet in voor; met een gezonde dosis probleemoplossend vermogen moet je een eind kunnen komen! Informeer bij je wiskundeleraar hoe je je opgeeft. De besten gaan door naar de tweede ronde en de besten daarvan vertegenwoordigen Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2008 in Spanje!

Een opgave uit de eerste ronde van vorig jaar: In een magisch vierkant is de som van de drie getallen in elke rij, de som van de drie getallen in elke kolom en de som van de drie getallen in elk van de twee diagonalen steeds hetzelfde. Wat is de waarde van N in het magische vierkant hieronder?

	N	
11		15
12		10

OPLOSSING: N=9

Meer opgaven uit de voorgaande jaren vind je op www.wiskunde-olympiade.nl.

Drie prijzen achter elkaar

De 31-jarige wiskundige Terence Tao van de Universiteit van Californië heeft kort na elkaar drie grote prijzen gewonnen. Op 22 augustus was hij een van de vier winnaars van de Fields Medal, het hoogst haalbare in de wiskunde.

Op 19 september viel hij opnieuw in de prijzen: hij is een van de 25 winnaars van de MacArthur Fellowship, een prijs die sinds 1981 jaarlijks wordt uitgereikt aan mensen die uitzonderlijke prestaties in hun werk leveren. Het werkterrein doet er niet toe. Wetenschappers, schrijvers, kunstenaars, docenten, ondernemers: allemaal kunnen ze in aanmerking komen voor de Mac Arthur Fellowship, een prijs van 500.000 dollar.

Een maand later was het weer raak: de SASTRA Ramanujanprijs, een bedrag van 10.000 dollar, is dit jaar toegekend aan Tao. Deze prijs, die vorig jaar voor het eerst werd uitgereikt, is bedoeld voor wiskundigen die bijdragen hebben geleverd op het gebied waar het wiskundige genie Srinivasa Ramanujan, afkomstig uit Zuid-India, zich mee bezighield. De leeftijdsgrens voor de prijs is 32 jaar, de leeftijd waarop Ramanujan in 1920 stierf.

Record π opzeggen

De 60-jarige Japanner Akira Haraguchi heeft op 4 oktober zijn eigen record voor het onthouden en voordragen van π verbroken. Hij wist het getal dat begint met de cijfers 3,1415 uit zijn hoofd te benoemen tot 100.000 cijfers achter de komma. Tijdens zijn recordpoging nam hij iedere één of twee uur een pauze van tien minuten. Zijn oude record stond op 83.431 cijfers achter de komma.

Biografisch Woordenboek wiskundigen

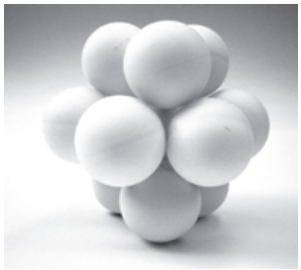
Op 21 september 2006 werd op het Centrum voor Wiskunde en Informatica het online Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen (BWNW) geopend. De website bevat korte, heldere lemma's. Dat maakt dit online naslagwerk toegankelijk voor een breed publiek. Het BWNW geeft bibliografische verwijzingen voor wie meer over een bepaalde wiskundige te weten wil komen. De website is te vinden onder www.bwnw.nl.

Kussen in hogere dimensies

Frank Vallentin van het Centrum voor Wiskunde en Informatica en Christine Bachoc van de universiteit van Bordeaux hebben nieuwe bovengrenzen gevonden voor het 'kussen' in hogere dimensies. Het *kusgetal* is het grootste aantal eenheidsbollen dat tegelijkertijd een centrale bol kan raken, zonder elkaar te overlappen.

In twee dimensies is het kusgetal 6. Dit kun je goed zien als je euro's om een centrale euromunt groepeert. In drie dimensies is het kusgetal 12.

In twee en drie dimensies kunnen we ons het kusgetal prima voorstellen. Wiskundigen willen vaak weten hoe zaken zitten in hogere dimensies. Pas in 2003 werd bewezen dat het kusgetal in vier dimensies gelijk is aan 24. In acht dimensies is het kusgetal 240 en in 24 dimensies 196560. In andere dimensies is het *precieze* kusgetal onbekend, maar voor diverse dimensies zijn wel *bovengrenzen* bekend van het kusgetal. Vallentin en Bachoc ontwikkelden een nieuwe methode om zo'n bovengrens te bepalen. In vijf dimensies brachten ze de bovengrens van 45 terug tot 44, terwijl er bijvoorbeeld in tien dimensies 27 bollen minder bleken te kunnen kussen dan bekend was.



Het kusgetal in twee dimensies is 6, in drie dimensies 12.
Bron: http://homepages.cwi.nl/~vallenti

Ig Nobelprijs voor wiskunde

Omdat er geen Nobelprijs is voor wiskunde, worden andere prijzen zoals de Fields Medal of Abelprijs de 'Nobelprijs voor de wiskunde' genoemd. Er is wel een *Ig Nobelprijs* (woordgrapje met het Engelse 'ignoble' dat het tegenovergestelde is van 'nobel') voor wiskunde. Elk jaar worden deze prijzen uitgereikt voor onderzoek dat op de lachspieren werkt. De Ig Nobelprijs voor wiskunde ging dit jaar naar Piers Barnes en Nic Svenson voor het beantwoorden van de vraag: 'Hoeveel foto's moet je nemen van een groep om er 99% zeker van te zijn dat niemand op de foto zijn ogen dicht heeft?' Gemiddeld knippert iemand die op de foto gezet wordt tien keer per minuut met zijn ogen. Barnes kwam na zijn rekenwerk tot de volgende vuistregel voor groepen van minder dan twintig mensen: deel bij goed licht het aantal mensen door drie, en bij slecht licht door twee, om te vinden hoeveel foto's je moet maken.

Nieuw priemrecord

Op 4 september werd een nieuw Mersenne-priemgetal gevonden: $2^{32.582.657} - 1$. Dit gebeurde in het kader van GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), een project waarbij de ongebruikte rekencapaciteit van vele computers wordt ingezet om nieuwe priemgetallen van de vorm $2^n - 1$ te vinden. Het nieuwe priemgetal is het grootst bekende priemgetal tot nu toe, maar is met 9.808.358 cijfers nog net te klein om in aanmerking te komen voor de 100.000 dollar, die de organisatie van GIMPS uitlooft voor de eerste die een Mersenne-priemgetal van ten minste tien miljoen cijfers vindt. Het getal werd gevonden door Curtis Cooper en Steven Boone, die ook al het vorige Mersenne-priemgetal vonden, in december 2005.

Heemstede en Nijmegen winnen Wiskundetoernooi

Honderd teams van scholen uit heel Nederland deden op 22 september mee met het vijftiende Wiskundetoernooi aan de Radboud Universiteit in Nijmegen. Tijdens de *Estafette*, 's ochtends, moesten de teams in razend tempo zo ver mogelijk komen in een opeenvolging van twintig gevarieerde opgaven. 's Middags, tijdens het onderdeel *Sum of Us*, ging het om het 'kraken' van twee lastige geheimschriften. In de tjokvolle sporthal was de spanning aan de meeste tafeltjes te snijden, al waren er ook wel wat teams vooral voor de gezelligheid gekomen. College Hageveld uit Heemstede won met 430 van de 500 punten de *Estafette*, terwijl het Stedelijk Gymnasium Nijmegen de beste was bij *Sum of Us*. Beide teams winnen een vierdaagse reis naar Cambridge. Meer informatie kun je lezen op www.ru.nl/wiskundetoernooi.

door **Jacques Haubrich**

Perfectie door precisie

Kan een vierkant worden opgedeeld in vierkanten die allemaal verschillend van grootte zijn? Ja, dat kan. R. Sprague demonstreerde dit in 1939 met een verdeling van het vierkant in 55 deelvierkanten. Al gauw rees de vraag of er niet meer oplossingen zijn, en bijvoorbeeld eenvoudigere. Iemand die zich als geen ander op die vragen heeft gestort, was de in 2003 overleden prof. dr. C.J. Bouwkamp.

J.C. Bouwkamp (1915-2003)

De opdracht een vierkant te verdelen in vierkanten die allemaal verschillende afmetingen hebben, staat bekend als *Probleem 59 van het Schotse boek*. We schreven erover in het aprilnummer van de vorige jaargang. De eerste oplossing, afkomstig van R. Sprague uit 1939, telt 55 vierkanten, of, zoals dat in vaktermen heet: is van *orde* 55. We noemen een vierkant dat verdeeld is in vierkanten van verschillende grootte een *perfect verdeeld vierkant*. Imperfecte verdelingen zijn snel gevonden: zet in een vierkant een kruis, en je hebt er een van orde 4.

In het vorige nummer van *Pythagoras* lieten we Spragues vierkant zien. Zou dit vierkant, van orde 55, de laagst mogelijke orde hebben, of zouden er verdelingen bestaan met minder deelvierkanten? Behalve dat Spragues verdeling zo'n hoge orde heeft, is het jammer dat hij *samengesteld* is: het vierkant bestaat uit twee grote rechthoeken van vierkanten die met twee vierkanten handig aan elkaar gezet zijn. Mooier is het als er in de verdeling geen subrechthoeken voorkomen; de verdeling heet dan *simpel*.

Netwerken

In de vorige aflevering vertelden wij hoe in de jaren dertig Brooks, Smith, Stone en Tutte een methode ontwikkelden om rechthoekverdelingen te berekenen vanuit elektrische netwerken. Een netwerk van bijvoorbeeld 13 takken levert een verdeling van een rechthoek in 12 vierkanten op.

Het is een precisiewerk, maar niet onmogelijk alle netwerken van 13 takken op te sommen. En daarmee ligt dan de weg open systematisch *alle* verdelingen van orde 12 af te zoeken, tot je een perfecte verdeling hebt van een vierkant. Brooks, Smith, Stone en Tutte hebben zulks gedaan tot orde 13, en dat leverde nog geen perfect verdeeld vierkant op. Hoger konden zij niet komen, daarvoor was de toenmalige rekencapaciteit te beperkt.

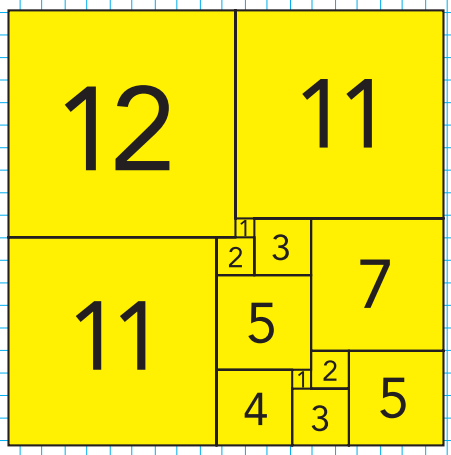
Een imperfect vierkant

Vanwege de Tweede Wereldoorlog kwam de publicatie van Brooks, Smith, Stone en Tutte pas enkele jaren later in Nederland. Zo kon het gebeuren dat hier iemand op eigen houtje dezelfde methode ontdekte. Dat was C.J. Bouwkamp, een doctor in de natuurkunde met een bijzondere interesse voor recreatieve wiskunde. Sinds 1941 werkte Bouwkamp bij het Natuurkundig Laboratorium van Philips, en gebruikte een deel van zijn werktijd en vrije tijd aan het tekenen van netwerken en het berekenen van de stromen. Vele bladzijden aantekeningen, tekeningen en berekeningen alsmede een complete kaartenbak heeft hij in die jaren gevuld. In 1946 leidde dit tot een driedelige publicatie in de *Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen*.

Met eindeloos geduld en gigantisch veel rekenwerk heeft hij alle 63 netwerken met maximaal 14 takken afgeleid en uitgetekend en daaruit alle 213 verdelingen van orde 13 of minder gevonden en als 'nevenproduct' nog 34 imperfecte verdelingen, verdelingen waarin sommige vierkanten even groot zijn. Dat waren op één na allemaal verdelingen van rechthoeken.

Het enige vierkant tussen de 213 verdelingen was de vierkantverdeling van orde 13 in figuur 1. Deze verdeling is wel simpel (in de verdeling komen geen subrechthoeken voor), maar bepaald niet perfect: het vierkant bevat twee vierkanten van 11 x 11 en ook enkele kleinere maten komen tweemaal voor. Bouwkamp vond niet alleen deze bijzondere verdeling, hij ontwikkelde ook een codering voor rechthoekverdelingen. Over de naar hem genoemde Bouwkampcode lees je op bladzijde 25.

Het moet een monnikenwerk geweest zijn, al deze 63 netwerken uit te tekenen en vervolgens bij elk een flink aantal stelsels van maximaal 13 (lineaire) vergelijkingen met even zoveel onbekenden uit te schrijven en op te lossen. Er zijn wel methodes waarbij een deel van het rekenwerk vervallen kan of eenvoudiger kan op grond van een dosis inzicht, maar toch. Helaas dateerde Bouwkamp in die tijd zijn aantekeningen nog niet; we weten dus niet exact wanneer hij wat precies deed. Zijn kaartenbak gaat overigens nog door tot en met netwerken van 16 takken (waarvan er 249 zijn) waaruit rechthoekverdelingen van orde 15 te voorschijn komen. Gelet op Bouwkamps welhaast legendarische precisie lijkt het onwaarschijnlijk dat hij daarbij exemplaren over het hoofd heeft gezien. Zijn aantekeningen vermelden overigens niet alle rechthoekverdelingen; soms heeft hij bij een netwerk maar één of enkele van de mogelijke verdelingen berekend.



Figuur 1 Een verdeling van een vierkant in vierkanten. Deze verdeling is wel *simpel*, maar niet *perfect*!

Jaren zestig

Op vierkantengebied werd het even rustig, tot het einde van de jaren vijftig, toen bij Philips de eerste echte computers werden geplaatst. Een speciale rekengroep onder leiding van A.J.W. Duijvestijn werd in het leven geroepen en Bouwkamp, inmiddels ook hoogleraar aan wat nu de TU/e heet, was er als de kippen bij om de computer netwerken te laten genereren en verdelingen te laten berekenen. De eerste programma's, volgens de rekenmethode die Bouwkamp in de oorlog bedacht, werden ontwikkeld en uitgeschreven door Duijvestijn en P. Medema, in 1960 leidend tot een publicatie van uitgebreide tabellen met alle gevonden verdelingen en in 1964 tot nog zo'n tabel.

Toen Philips zijn eerste eigen computer, de voor die tijd uiterst snelle PASCAL, in 1961 operationeel had, werd de aanzienlijk grotere rekenkracht van deze machine ingezet om het allemaal nog enkele ordes verder te brengen en onder Bouwkamps supervisie leidde dat in 1962 tot de promotie van Duijvestijn, die daartoe alle netwerken tot en met orde 20 had gegenereerd en daarmee dus alle verdelingen van rechthoeken in vierkanten tot en met orde 19 had onderzocht. Daarbij bleken naast onderverdeelde rechthoeken uitsluitend imperfecte vierkantverdelingen tevoorschijn te komen. Meer dan orde 20 was in die tijd niet goed mogelijk: de benodigde rekentijd kwam in de orde van de MTBF (Mean Time Between Failures) van de computer.

Duijvestijn, op zijn beurt in 1964 benoemd tot hoogleraar aan de Universiteit Twente, ging door met het genereren van netwerken en het berekenen van verdelingen. In maart 1978 had hij succes met de ontdekking van de kleinste perfecte vierkantverdeling in 21 vierkanten. De verdeling van Duijvestijn werd wereldberoemd.

Uiteindelijk kon Duijvestijn begin jaren negentig doorgaan tot en met verdelingen van orde 26 en onder de vele miljoenen rechthoekverdelingen van die orde vond hij 441 vierkantverdelingen. De resultaten voor de ordes 21 tot en met 26 werden door Bouwkamp en Duijvestijn vastgelegd in twee dikke albums van tezamen zo'n 600 bladzijden, gepubliceerd in 1992 en 1994. Inmiddels zijn we weer ruim tien jaar verder en ondanks de exponentieel uit de hand lopende hoeveelheid rekenwerk zou het nu met de juiste computerkracht mogelijk moeten zijn, weer twee of drie ordes verder te komen. Maar een uitputtende berekening van alle 'vierkanten van vierkanten' blijft voor altijd ondenkbaar.

Literatuur

A.T. de Hoop, 'Passie voor precisie', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 nr. 3 (sep. 2003).
J. Haubrich, 'C.J. Bouwkamp en de Squared Squares', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 nr. 4 (dec. 2003).

door **Marco Swaen**

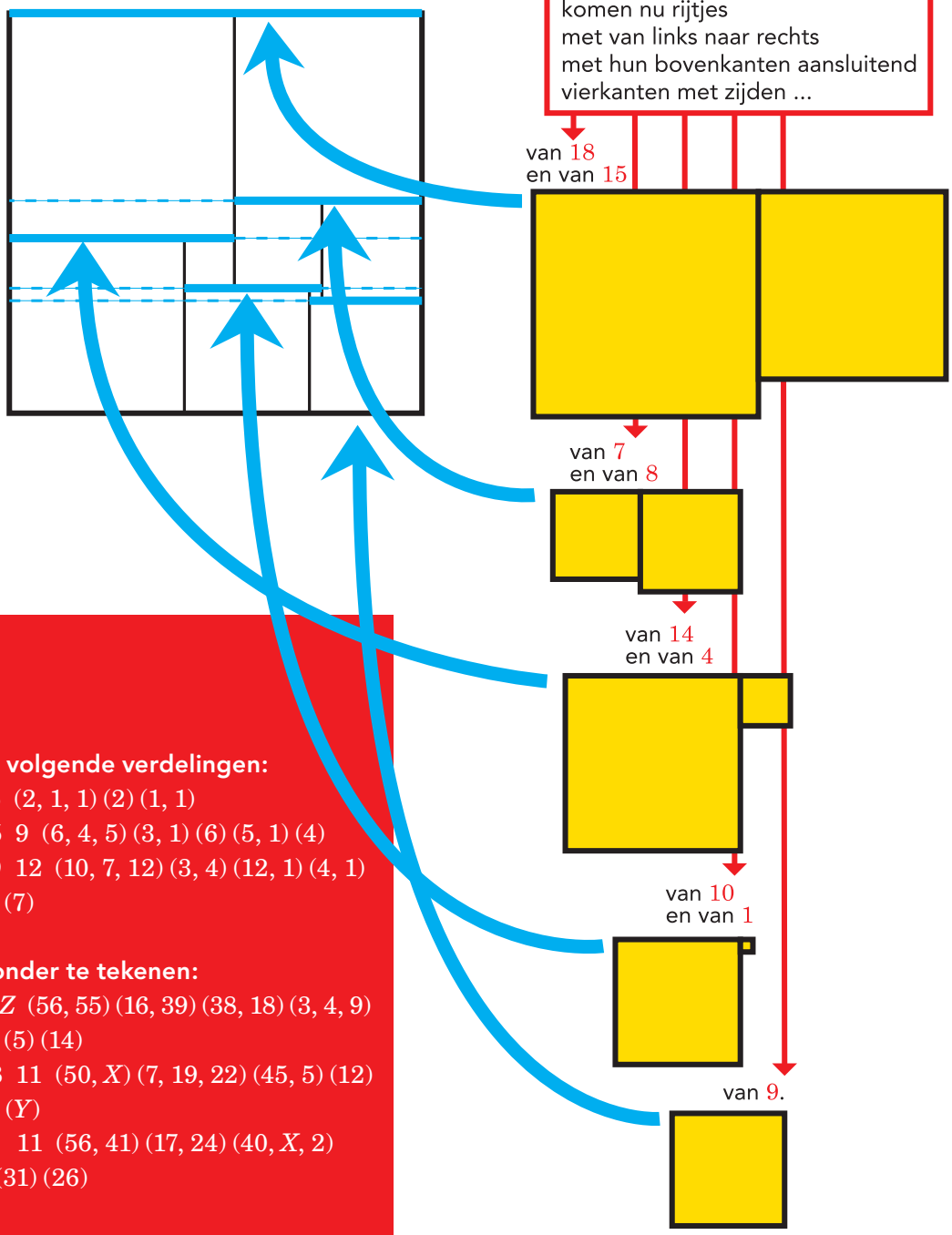
De Bouwkampcode

De Bouwkampcode legt met getallen vast hoe een rechthoek verdeeld is in vierkanten. We demonstreren de code aan de hand van het voorbeeld 32 x 33 9 (18, 15) (7, 8) (14, 4) (10, 1) (9).

De betekenis van de code 32 x 33 9 (18, 15) (7, 8), (14, 4) (10, 1) (9) is:

de rechthoek is 32 bij 33
en is verdeeld in 9 vierkanten

Steeds zo hoog mogelijk
komen nu rijtjes
met van links naar rechts
met hun bovenkanten aansluitend
vierkanten met zijden ...



Oefenen

Teken de volgende verdelingen:

a. 2 x 4 6 (2, 1, 1) (2) (1, 1)
b. 11 x 15 9 (6, 4, 5) (3, 1) (6) (5, 1) (4)
c. 22 x 29 12 (10, 7, 12) (3, 4) (12, 1) (4, 1) (3, 10) (7)

Los op zonder te tekenen:

d. X x Y Z (56, 55) (16, 39) (38, 18) (3, 4, 9) (20, 1) (5) (14)
e. 95 x 98 11 (50, X) (7, 19, 22) (45, 5) (12) (28, 3) (Y)
f. 96 x 97 11 (56, 41) (17, 24) (40, X, 2) (Y, Z) (31) (26)

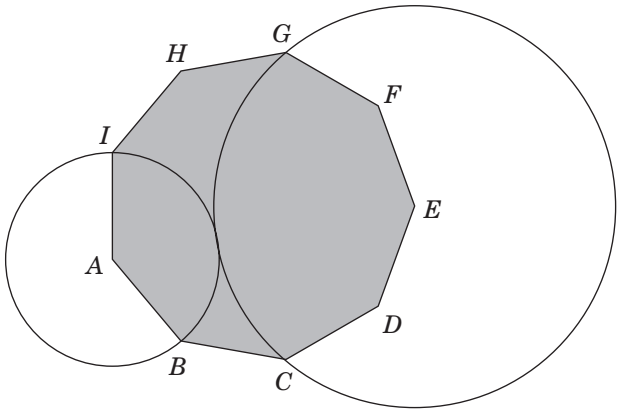
De oplossingen staan op pagina 33.

˙Problemen

door **Dion Gijswijt**

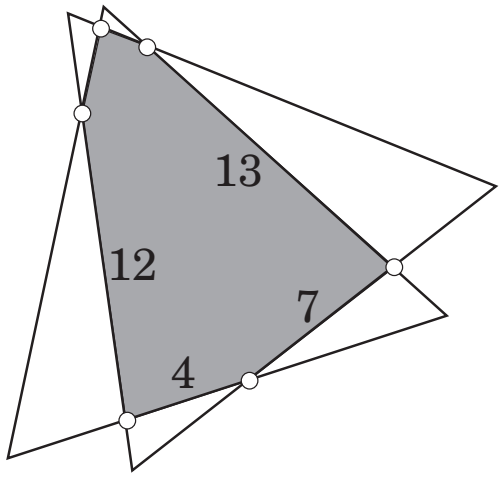
Koerier
Vijf vrienden (A, B, C, D en E) willen elkaar brieven sturen: A schrijft aan B, C en D; B schrijft aan C; C schrijft aan D; D schrijft aan B en E; E schrijft aan A, B en C. Een koerier die de brieven ophaalt en bezorgt, kan dat doen door achtereenvolgens A, B, C, D, E, A, B en weer C te bezoeken, acht bezoekjes in totaal. Het kan echter ook met minder bezoekjes. Wat is het kleinste aantal bezoekjes dat volstaat om alle brieven te bezorgen?

Regelmatige negenhoek
In de figuur zie je een regelmatige negenhoek $ABCDEFGHI$. Er zijn ook twee cirkels getekend: de eerste met middelpunt A en straal AB, de tweede met middelpunt E en straal CE. Is het waar dat deze twee cirkels elkaar raken? (Aad Goddijn)



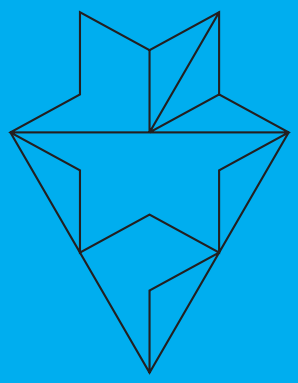
Muntjes
Kristine heeft vier muntjes, Monique slechts drie. Ze gooien tegelijkertijd hun muntjes op en tellen het aantal keer dat *kop* boven komt. Wat is de kans dat Kristine vaker *kop* heeft dan Monique?

Zeshoek
In de figuur zie je twee even grote gelijkzijdige driehoeken die samen een zeshoek omsluiten. Vier van de zijden van de zeshoek zijn gegeven. Hoe lang zijn de overige twee zijden?



˙Oplossingen
nr. 1

Knippen en plakken



Dozen stapelen

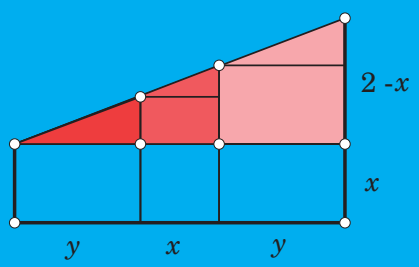
Noem de korte en de lange zijde van de 'doos' x en y. In de figuur zie je drie gelijkvormige rode driehoeken. Uit deze gelijkvormigheid volgt dat

$$\frac{y-x}{y} = \frac{2x-y}{x}$$

en

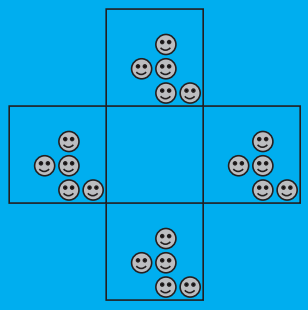
$$\frac{y-x}{y} = \frac{2-x}{2y+x}.$$

Oplossen geeft $x = 3 - \sqrt{5}$ en $y = \sqrt{5} - 1$.



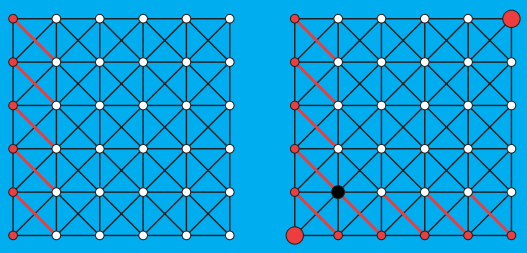
Kopieermachine

In het begin bevinden de bezette cellen zich in een 3 x 3 rechthoek. Na vier rondes zie je de beginsituatie viermaal gekopieerd: vier cellen verschoven naar boven, onder, links en rechts. Kun je hier zelf een verklaring voor vinden?



Wandeling

Het is niet mogelijk de gevraagde wandeling te maken. Ieder punt (behalve de twee eindpunten van de wandeling) moet grenzen aan precies één diagonaal lijnstukje in de wandeling. Er zijn nu twee gevallen.
Als er een zijde is waarop geen eindpunt van de wandeling ligt, kunnen voor de zes punten aan deze zijde geen niet-kruisende diagonalen worden gekozen.
Als er op iedere zijde een eindpunt van de wandeling ligt, liggen deze eindpunten op twee hoekpunten, en zie je in de tweede figuur waarom het mis gaat.



door **Alex van den Brandhof**

We zetten een aap achter een typemachine, die lukraak op de toetsen begint te slaan. Lezen of begrijpen wat hij schrijft, kan de aap niet. Hoe groot is de kans dat het woord ABRACADABRA eerder op papier verschijnt dan ABCDEFGHIJK?

Een aap en een typemachine

illustratie
Suus van den Akker

Hoe lang duurt het gemiddeld voordat een gegeven woord op papier verschijnt, als een aap willekeurig toetsen van de typemachine aanslaat? Deze vraag stond centraal in het tweedelige artikel 'Onverwachte verwachtingen' uit het februari- en het aprilnummer van onze vorige jaargang. De verwachting van het aantal aanslagen dat de aap moet doen, noemen we de *verwachte stoptijd*. In kader 1 staat de regel voor het bepalen van de verwachte stoptijd.

Als we uitgaan van een toetsenbord met 26 toetsen, die de 26 letters van het alfabet bevatten, duurt het naar verwachting 26^{11}

aanslagen voordat ABCDEFGHIJK op papier staat, terwijl de verwachte stoptijd voor ABRACADABRA gelijk is aan $26^{11} + 26^4 + 26$. We noteren dit als volgt:

$$\mathbf{t}(\text{ABCDEFGHIJK}) = 26^{11}$$

en

$$\mathbf{t}(\text{ABRACADABRA}) = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

Het feit dat $\mathbf{t}(\text{ABCDEFGHIJK})$ kleiner is dan $\mathbf{t}(\text{ABRACADABRA})$ komt doordat de eerste en de laatste letter, en ook de eerste vier en de laatste vier letters, van ABRACADABRA hetzelfde zijn; daardoor neemt de verwachte stoptijd met $26^4 + 26$ toe.

Is de *kans* dat ABRACADABRA eerder verschijnt dan ABCDEFGHIJK kleiner dan, gelijk aan of groter dan $\frac{1}{2}$?

In dit artikel beantwoorden we dit soort vragen, waarbij we uitgaan van een typemachine met twee letters: A en B. Elke combinatie van letters beschouwen we als woord. Aan het eind komen we terug op de typemachine met 26 letters.

Notaties

Met $\mathbf{P}(\text{AB} \prec \text{AA})$ noteren we 'de kans dat het woord AB eerder op papier verschijnt dan het woord AA'. Als duidelijk is om welke 'gebeurtenis' het gaat, noteren we de kans kortweg met $\mathbf{p}$. Met $\mathbf{p}_{\text{A}}$ noteren we een *voorwaardelijke kans*; ook hier laten we de onderhavige 'gebeurtenis' in de notatie achterwege: in het geval van de gebeurtenis '$\text{AB} \prec \text{AA}$' bedoelen we met $\mathbf{p}_{\text{A}}$ 'de kans dat AB eerder verschijnt dan AA, als er al een A op papier staat'.

Tweeletterwoorden

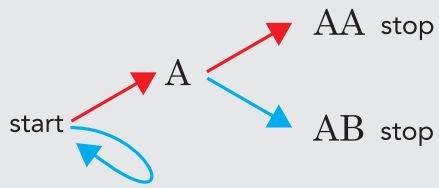
Wat is de kans dat de aap eerder AB dan AA typt? Uit de regel in kader 1 volgt dat $\mathbf{t}(\text{AB}) = 2^2 = 4$ en $\mathbf{t}(\text{AA}) = 2^2 + 2 = 6$. Gemiddeld genomen verschijnt AB dus *eerder* dan AA. Is $\mathbf{P}(\text{AB} \prec \text{AA})$ dan ook *groter* dan $\frac{1}{2}$? In figuur 1 zie je een diagram dat de structuur in kaart brengt. De rode pijl betekent dat een A wordt getypt, de blauwe pijl een B.

1

Algemene regel voor het bepalen van verwachte stoptijden

Gegeven een woord van n letters uit een alfabet van z letters. Als de *eerste* k letters van dit woord gelijk zijn aan de *laatste* k letters van dit woord, levert dat een term z^k op voor de verwachte stoptijd van dat woord, voor $k = 1, \ldots, n$.

Merk op dat voor $k = n$ zowel de eerste k letters als de laatste k letters gewoon het hele woord is; de verwachte stoptijd van élk n-letterwoord bevat derhalve een term z^n.



Figuur 1 De aap stopt als hij AB of AA heeft getypt

Uit dit schema volgen de volgende vergelijkingen:

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}$$
$$\mathbf{p}_{\text{A}} = \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{AA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{AB}}$$

Natuurlijk is $\mathbf{p}_{\text{AA}} = 0$ en $\mathbf{p}_{\text{AB}} = 1$. Vullen we deze waarden in in de onderste vergelijking, dan vinden we dat $\mathbf{p}_{\text{A}} = \frac{1}{2}$. Nu kunnen we deze uitkomst invullen in de bovenste vergelijking, dan volgt dat $\mathbf{p} = \frac{1}{2}$.

2

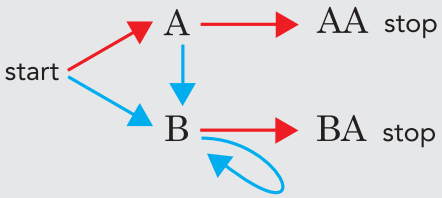
De kans dat woord 1 eerder op papier verschijnt dan woord 2 bij tweeletterwoorden. De rode getallen zijn de *verwachte stoptijden* van de betreffende woorden.

		6	4	4	6
	woord 2	AA	AB	BA	BB
woord 1					
6	AA		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	AB	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Ondanks het feit dat de verwachte stoptijd van AB kleiner is dan van AA, is $\mathbf{P}(\mathrm{AB} \prec \mathrm{AA})$, de kans dat AB eerder verschijnt dan AA, gelijk aan $\frac{1}{2}$!

Dit kun je ook zonder figuur 1 inzien, door te bedenken dat ná het optreden van de eerste A het even waarschijnlijk is dat deze gevolgd wordt door een A als door een B.

Dat de kansen niet altijd gelijk zijn, zien we bij een ander paar: BA versus AA. De verwachte stoptijden zijn natuurlijk weer 4 respectievelijk 6. Om $\mathbf{P}(\mathrm{BA} \prec \mathrm{AA})$ te berekenen, hebben we het diagram van figuur 2 nodig.



Figuur 2 De aap stopt als hij BA of AA heeft getypt

Het stelsel vergelijkingen dat hierbij hoort, is:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{A}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{B}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{BA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} &= 0 \\
\mathbf{p}_{\mathrm{BA}} &= 1
\end{aligned}$$

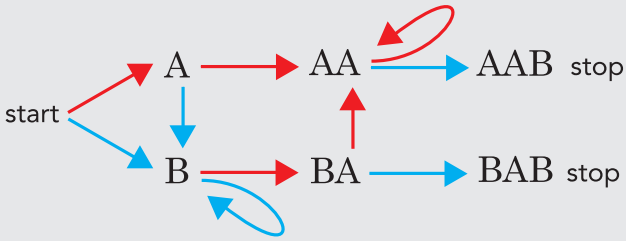
Oplossen levert $\mathbf{p} = \frac{3}{4}$.

De kansen $\mathbf{P}(\mathrm{BA} \prec \mathrm{AA})$ en $\mathbf{P}(\mathrm{AA} \prec \mathrm{BA})$ zijn dus allerminst gelijk! Dit komt doordat AA alléén als eerste verschijnt indien de eerste twee aanslagen allebei A's zijn. Zijn de eerste twee aanslagen AB, BA of BB, dan zal BA altijd eerder op het papier verschijnen dan AA.

In kader 2 staan de kansen voor combinaties van tweeletterwoorden. Omdat $\mathbf{P}(\mathrm{BB} \prec \mathrm{BA})$ vanwege de symmetrie gelijk is aan $\mathrm{P}(\mathrm{AA} \prec \mathrm{AB})$, is $\mathbf{P}(\mathrm{BB} \prec \mathrm{BA})$ niet in het kader opgenomen. Ook andere symmetrische gevallen staan niet in het kader. Behalve de kansen staan de verwachte stoptijden van de woorden vermeld (in rood).

Drieletterwoorden

Wat is de kans dat AAB eerder op papier verschijnt dan BAB? Bekijk hiertoe het diagram in figuur 3.



Figuur 3 De aap stopt als hij AAB of BAB heeft getypt

Het stelsel vergelijkingen dat hierbij hoort, is:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{A}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{B}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{BA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{B}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{AAB}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{BA}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{AA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\mathrm{BAB}} \\
\mathbf{p}_{\mathrm{AAB}} &= 1 \\
\mathbf{p}_{\mathrm{BAB}} &= 0
\end{aligned}$$

Oplossen geeft $\mathbf{p} = \frac{5}{8}$.

In kader 3 zie je alle mogelijke kansen bij drieletterwoorden, wederom met uitzondering van symmetrische gevallen. Ook staan de verwachte stoptijden er weer bij.

Vierletterwoorden

Er zijn paren van woorden met *dezelfde* verwachte stoptijd, maar met *verschillende* kansen. Zo is $\mathbf{t}(\mathrm{AAB}) = \mathbf{t}(\mathrm{ABB}) = 8$, maar $\mathbf{P}(\mathrm{AAB} \prec \mathrm{ABB}) = \frac{2}{3}$.

Ook zijn er paren van woorden met *verschillende* verwachte stoptijden, maar met *gelijke* kansen. Zo is $\mathbf{t}(\mathrm{AAA}) = 14$ en $\mathbf{t}(\mathrm{AAB}) = 8$, maar $\mathbf{P}(\mathrm{AAB} \prec \mathrm{ABB}) = \frac{1}{2}$.

3

De kans dat woord 1 eerder op papier verschijnt dan woord 2 bij drieletterwoorden. De rode getallen zijn de *verwachte stoptijden* van de betreffende woorden.

	woord 2	14 AAA	8 AAB	10 ABA	8 ABB	8 BAA	10 BAB	8 BBA	14 BBB
14	AAA		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
8	AAB	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$
10	ABA	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
8	ABB	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$

4

De kans dat woord 1 eerder op papier verschijnt dan woord 2 bij vierletterwoorden. De rode getallen zijn de *verwachte stoptijden* van de betreffende woorden.

		30	16	18	16	18	20	18	16	16	18	20	18	16	18	16	30
woord 1 \ woord 2		AAAA	AAAB	AABA	AABB	ABAA	ABAB	ABBA	ABBB	BAAA	BAAB	BABA	BABB	BBAA	BBAB	BBBA	BBBB
30	AAAA		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{2}$
16	AAAB	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{22}$
18	AABA	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
16	AABB	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
18	ABAA	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{7}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
20	ABAB	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
18	ABBA	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
16	ABBB	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$

De resultaten zijn nog verrassender bij sommige paren van *vierletterwoorden*. Neem de woorden ABAB en BABB, dan geldt dat $\mathbf{t}(\text{ABAB}) = 20$ en $\mathbf{t}(\text{BABB}) = 18$. Hoewel ABAB naar verwachting langer duurt dan BABB, is $\mathbf{P}(\text{ABAB} \prec \text{BABB})$ groter dan $\frac{1}{2}$! In figuur 4 staat het bijbehorende diagram. De vergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{B}} \\
\mathbf{p}_{\text{A}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{AB}} \\
\mathbf{p}_{\text{B}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{BA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{B}} \\
\mathbf{p}_{\text{AB}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{ABA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{B}} \\
\mathbf{p}_{\text{BA}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{BAB}} \\
\mathbf{p}_{\text{ABA}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{A}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{ABAB}} \\
\mathbf{p}_{\text{BAB}} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{ABA}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{p}_{\text{BABB}} \\
\mathbf{p}_{\text{ABAB}} &= 1 \\
\mathbf{p}_{\text{BABB}} &= 0
\end{aligned}$$

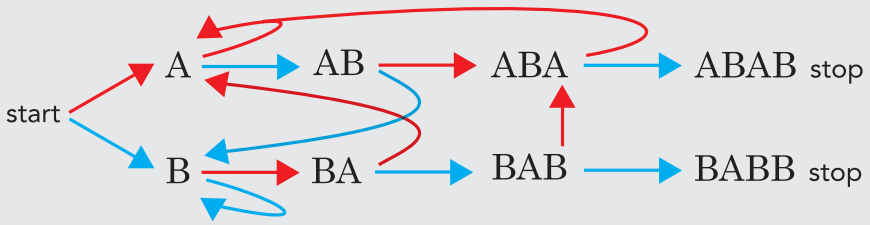
Als we dit stelsel oplossen, krijgen we $\mathbf{p} = \frac{9}{14}$. Overige resultaten vind je in kader 4.

Abracadabra

In dit artikel gingen we uit van een alfabet met twee letters. Als de aap een typemachine heeft met het voltallige, 26 letters tellende, alfabet, wat is dan de kans dat ABRACADABRA eerder optreedt dan ABCDEFGHIJK? Met de methode die we in dit artikel hebben besproken, krijg je een diagram met lange takken en een stelsel met niet minder dan negentien vergelijkingen. Voor het oplossen van dit grote stelsel vergelijkingen heb ik de computer laten rekenen. De kans dat ABRACADABRA eerder optreedt dan ABCDEFGHIJK blijkt gelijk te zijn aan $\frac{8031810176}{16063620353}$. In elf decimalen nauwkeurig is dit gelijk aan 0,49999999997. De intuïtie op grond van verwachte stoptijden dat ABRACADABRA met een kans kleiner dan $\frac{1}{2}$ eerder optreedt dan ABCDEFGHIJK klopt dus, al is het verschil tussen $\mathbf{P}(\text{ABRACADABRA} \prec \text{ABCDEFGHIJK})$ en $\mathbf{P}(\text{ABCDEFGHIJK} \prec \text{ABRACADABRA})$ marginaal.

Literatuur

M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* (1988)



Figuur 4 De aap stopt als hij ABAB of BABB heeft getypt

WISKUNDE
de garantie voor een zekere toekomst

"Als consulent Asset & Liability Management bij ORTEC geef ik advies aan pensioenfondsen over het beleid wat ze het beste kunnen voeren. Mijn opleiding tot wiskundige maakt het mogelijk om daarvoor de lange termijn modellen te ontwikkelen."

drs. Marnix Engels

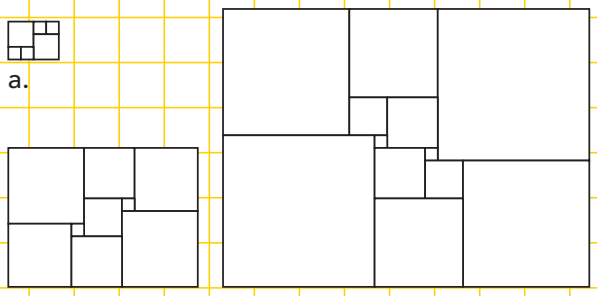
Ontdek wiskunde op het Studiefestival en de Open dag. Kijk voor meer informatie op
www.science.leidenuniv.nl

Universiteit Leiden

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

Oplossingen Bouwkampcode

De oplossingen van de zes vragen op pagina 25 zijn:



a.

b. c.

d. $X = 94$, $Y = 111$, $Z = 13$

e. $X = 48$, $Y = 25$

f. $X = 14$, $Y = 12$, $Z = 7$

Oplossing
Een brief van een wanhopige lezer

'Hoeveel rozenblaadjes tel je?' Deze vraag werd in het vorige nummer gesteld. Om het probleem op te lossen, moet je je voorstellen hoe een roos eruit ziet. En kijk dan nog eens naar de dobbelsteen met vijf ogen. Zie je de overeenkomst? Juist, de blaadjes van de roos zijn de stippen die zich bevinden op de dobbelstenen met een stip in het midden: de drie en de vijf dus, en ook de één, maar dat is een roos zonder blaadjes. Tel dus het aantal stippen exclusief de middelstip van de dobbelstenen die op een roos lijken bij elkaar op.

Het aantal rozenblaadjes bij de worp hierboven is vier, dat zijn de 'blaadjes' in de dobbelsteen met vijf ogen. In de overige worpen kun je geen roos zien. Op de worp met één oog na dan, maar die heeft geen blaadjes.

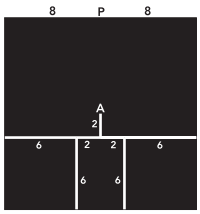
Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

Reisportemonnee
Na verdeling van de rest van de kas aan het eind van de reis krijgen ze eigenlijk ieder een fles. Els koopt die fles buiten de kas om voor 5 euro van Anja.

Weging
De gewichtjes zijn 5, 10, 15 en 20 gram. De evenwichten zijn $5 + 10 = 15$, $5 + 15 = 20$ en $5 + 20 = 10 + 15$.

15 – 6 = 11

Ontsnappen?
Ja, het kan. Afhankelijk van Piets route zwemt Anja een van de vier getekende routes.



Waar wonen ze?
Piet moet op nummer 2 wonen (er is maar één even priemgetal). Hans woont op 47 en Kees op 43 (oneven priemgetallen met verschil 4).

Op drie kalveren

Een praktische methode voor de behandeling van rangtelwoorden komt van drie kalveren te Grouw waarvan door middel van een touw boven een waterput te Hierden de eerste twee de derde vierden.

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse

46ste JAARGANG NUMMER 2