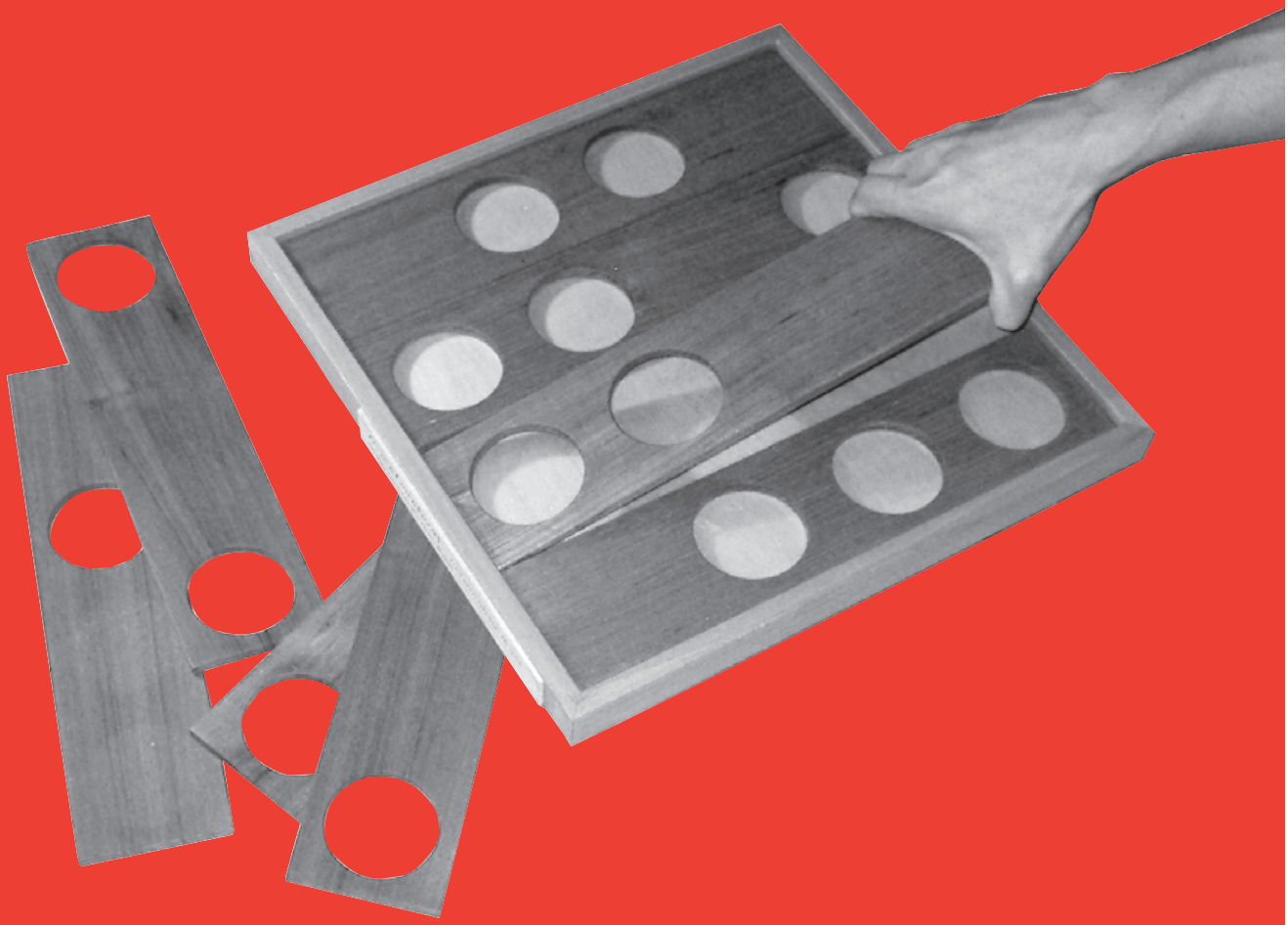
PYTHAGORAS



WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN JANUARI 2007

Een toren met daarop in neonlicht de rij van Fibonacci (lees het artikel op pagina 22)

Foto: Stadt Unna

ONWAARSCHIJNLIJK

'Niemand heeft nog een militaire toepassing ontdekt van getaltheorie of de relativiteitstheorie, en het lijkt onwaarschijnlijk dat iemand dat in de voorzienbare toekomst wel doet,' schreef de grote Britse wiskundige G.H. Hardy in 1940. Hardy vond juist de meest nutteloze wiskunde het zuiverst en dus het mooist.

Vijf jaar later ontplofte de eerste atoombom, en tegenwoordig vormen toepassingen van getaltheorie de hoeksteen van moderne geheimschriften. Je weet dus maar nooit waar het goed (of slecht) voor is als je een schijnbaar volstrekt onpraktische tak van wiskunde beoefent. In deze *Pythagoras* staat bijvoorbeeld uitgelegd hoe elliptische krommen er voor zorgen dat je mobiele telefoon veilig is voor identiteitsfraude, zodat anderen niet op jouw kosten kunnen telefoneren.

Het abc-vermoeden, ook in dit nummer, had Hardy vast prachtig gevonden, aangezien er nog geen enkele toepassing bekend is voor deze merkwaardige eigenschap van gehele getallen. Misschien bewijst iemand over tien jaar het abc-vermoeden en kan je daarmee al die geheimschriften weer kraken – niemand die zoiets kan voorspellen of uitsluiten. In ieder geval kun je nu zelf meehelpen zoeken naar de beste abc-drietallen en zo deze tak van de zuivere getaltheorie verder helpen.

Niveausymbooltjes
Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de wiskunde nodig is, hebben bij de titel een symbool voor de moeilijkheidsgraad. Artikelen met ◆ zijn vanaf de vierde klas te begrijpen. Voor artikelen met ◆◆ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ◆◆◆ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

INHOUD

2 – 3 **Kleine nootjes**

4 – 5 **Journaal**

6 **De 16-gaten-puzzel**
[Foto omslag]

7 – 9 **Eindbestemming Vietnam**

10 – 11 **Aftelbare magie**

12 – 15 **De wiskunde van Wouter Berkelmans**

16 – 17 **Kleurrijke kaarten**

18 – 19 **Reken mee met ABC**

20 – 21 **Pythagoras Olympiade**

22 **De getallen van Fibonacci**

23 – 25 **Twee apen en twee typemachines**

26 – 27 **(On)eindige reeksen sommeren**

28 – 29 **Problemen – Oplossingen**

30 – 32 **De elliptische kromme in je telefoon**

33 **Oplossingen Kleine nootjes nr. 2**

door **Dick Beekman** en **Jan Guichelaar**

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

In de tram

In de tram kijkt Aafke door het gangpad en ziet alleen drie jongens en twee meisjes aan de kant van het gangpad zitten. Zij beweert: 'Naast elk meisje zit een jongen.' Naast wie moet Aafke zeker kijken om vast te stellen dat haar bewering juist is?

Tegels leggen

Je hebt een kleine tegel van 1 bij 1, vier middelgrote van 1 bij 2 en vier grote van 2 bij 2. Op hoeveel manieren kun je hiermee een vierkant van 5 bij 5 leggen dat door een draaiing om het middelpunt in zichzelf overgaat?

Allemaal centen

In Amerika heb je muntjes van 1, 5, 10 en 25 cent (onder de dollar); in Europa muntjes van 1, 2, 5, 10, 20 en 50 cent (onder de euro). Welke bedragen (onder de 100 cent) kun je in Amerika met minder munten betalen dan in Europa?

Een bijzondere papegaai

'Ik verzeker u,' zei de verkoper van de dierenwinkel, 'deze papegaai praat werkelijk álles na wat hij hoort.' De klant koopt deze unieke vogel en komt de volgende dag boos terug: 'Wat ik ook tegen de papegaai zeg, hij zegt helemaal niets!' Toch loog de verkoper niet. Hoe kan dat?

Een rare rij

Kies een getal uit 1, ..., 99. Maak een rij getallen door afwisselend het getal door 2 te delen (en eventueel naar beneden af te ronden) en het grootste cijfer vooraan te zetten (schrijf 1 als 01, enzovoort). Hiernaast zie je de rij die met 99 begint. Welke serie getallen krijg je die zich steeds herhaalt?

99, 49, 94, 47, 74, 37, ...

Pythagoras

Januari 2007 **Journaal** Nummer 3

door **Alex van den Brandhof** en **Arnout Jaspers**

Breinkrakersudoku

Een Fins wiskundige zegt 's werelds moeilijkste sudokupuzzel te hebben gemaakt. '*A.I. Slak* is de moeilijkste sudoku puzzel die tot dusver bekend is,' aldus de 37-jarige maker Arto Inkala. 'Ik heb de sudoku *A.I. Slak* genoemd, omdat de posities van de startwaarden een slakvorm hebben. A.I. zijn mijn initialen,' Volgens een berekening op een sudoku-internetsite kan *A.I. Slak* aanspraak maken op de hoogste positie op de lijst van sudoku's lastigste hersenkrakers.

1					7		9	
	3			2				8
		9	6			5		
		5	3			9		
	1			8				2
6					4			
3							1	
	4							7
		7				3		

Als je de Slak wilt kraken, moet je acht oorzaken en gevolgen tegelijk overzien, terwijl de moeilijkste varianten die de doorsnee burger probeert maar één of twee combinaties tegelijk vergen. Sudoku-experts hebben zich inmiddels door de moeilijke opgave gewortsteld en hem weten op te lossen.

Bron: http://frontpage.fok.nl/nieuws/70266

Eindstand Olympiade

Bij de eindstand van de Pythagoras Olympiade van jaargang 45 staat Jens Vande Cavey van het Heilige-Drievuldigheidscollege te Leuven bovenaan. Van de twaalf opgaven heeft hij tien goede oplossingen ingestuurd. Hij wint daarom de bonusboekenbon ter waarde van 100 euro. Jens wordt op de voet gevolgd door Milo van Holsteijn van RSG Pantarijn te Wageningen en Elias C. Buissant des Amorie uit Castricum. Zij wisten negen opgaven goed op te lossen.

Een cake optimaal verdelen

Stel dat twee mensen een cake moeten delen. De aloude methode om dit te doen is om de één te laten snijden en de ander een van de verkregen stukken te laten kiezen. De persoon die snijdt, kan dan maar het beste de cake precies in twee gelijke helften snijden, om te voorkomen dat de kiezer er met het grootste stuk vandoor gaat.

In december 2006 presenteerden drie wiskundigen, Steven Brams, Michael Jones en Christian Klamler, een betere snijmethode. De klassieke methode is uitstekend als de cake er overal hetzelfde uitziet, maar in de praktijk bevat een taart vaak allerlei lekkers, zoals een roosje van marsepein en blaadjes van chocolade. Niet iedereen vindt alles even lekker: de een verkiest het roosje terwijl de ander aast op een chocolaatje.

De methode van Brams, Jones en Klamler houdt hier rekening mee. Zij bedachten een methode om met één keer snijden twee stukken te krijgen zó, dat beide personen meestel meer dan 50% krijgen van wat ze willen. Zij noemen hun methode de 'surplus-methode'. De onderzoekers wijzen op nog een voordeel van de nieuwe procedure: er is niet mee te sjoemelen. Wie niet eerlijk is over hetgeen hij het lekkerst vindt, eindigt doorgaans met minder cake dan mogelijk is.

De methode is volgens de bedenkers nuttig in diverse situaties. Zij geven als voorbeeld het eerlijk verdelen van een stuk land. Voor de ene partij kan een stuk land dat aan water grenst aantrekkelijk zijn, terwijl voor de andere partij een bosrijk gebied waardevol is.

Bron: Kennislink

‘Coster-groot’ gekraakt

‘Het vinden van grote Coster-getallen zal niet meevallen’, schreven we in het septembernummer, waaruit weer eens blijkt dat de resultaten van onderzoek soms de stoutste verwachtingen overtreffen. Coster-getallen zijn met +, –, x, : en dubbel gebruik van de losse cijfers te maken (bijvoorbeeld: 5 x 5 + 2 – 2 = 25). We loofden onder meer een prijs uit voor degene die voor 15 januari ‘het grootste Coster-getal instuurt, tientallig uitgeschreven’. De verwachting was dat de grootste inzending misschien tientallen of een paar honderd cij-fers zou hebben, maar al snel kwamen inzendingen van duizenden cijfers lang binnen.

Een kapitaalkrachtige deelnemer had de redactie desgewenst kunnen bedelven onder vrachtwagenladingen papier om de prijs te winnen. Er blijken namelijk constructiemethodes te bestaan waarmee je willekeurig grote Coster-getallen kunt maken. Dat betekent ook dat er oneindig veel van zijn. In feite was daarmee de ‘Coster-groot’-prijsvraag gekraakt.

Wiskundestudent David de Kloet vond als eerste, in oktober, zo’n constructiemethode. De wiskundestudenten Albert Hendriks en Arjen Stolk vonden onafhankelijk van elkaar een andere constructiemethode.

De voortgang van de Costerologie was bijna live te volgen op de weblog www.wiskundemeisjes.nl. Dat plaatste de redactie van *Pythagoras* voor een dilemma: moesten we nog vóór het sluiten van de prijsvraag, dus in het novembernummer, vertellen dat het zoeken naar een zo groot mogelijk Coster-getal zinloos geworden was? De redactie heeft besloten om dat niet te doen: we wilden het plezier van de toegewijde knutselaars die nog op jacht waren naar ‘loslopende’ Coster-getallen niet verpesten. Er was immers ook nog een prijs uitgeloofd voor de ‘fraaiste, elegantste of indrukwekkendste vondst’ op dit gebied.

In het aprilnummer publiceren we de constructiemethodes voor willekeurig grote Coster-getallen, en het eindoordeel van de jury.

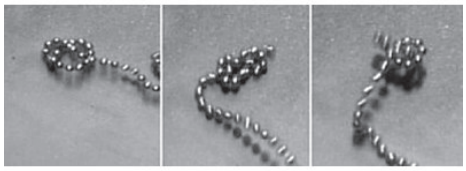
Ringen op springen

In het vorige nummer stonden twee opdrachten om ringen te laten springen. Hier zie je de oplossingen.

Opdracht 2

Opdracht 3

De knoopkans van de gootsteenstopketting



Een team van de universiteit van Bristol bestudeerde het gedrag van dunne kralenkettinkjes, zoals de kettinkjes aan de gootsteenstop. Het team onderzocht voor kettingen van verschillende lengtes de kans dat zo’n ketting in een bepaalde tijd in de knoop raakt.

De kettinkjes werden op een holle trilplaat gelegd en een halve minuut geschud. Op filmbeelden daarvan schieten ze zichtbaar in de knoop en soms er ook weer uit. Bij kettingen korter dan 16 cm werd nooit een knoop aangetroffen: deze kettingen zijn kennelijk te kort om in de knoop te raken. Vanaf 16 cm groeit de ‘knoopkans’ razendsnel. Bij kettingen van 90 cm stabiliseert deze kans tot 26%, dat wil zeggen: bij alle kettingen langer dan 90 cm is de kans dat ze in de knoop raken hetzelfde, namelijk 26%.

De tijd die nodig is voordat een ketting van minimaal 16 cm in de knoop raakt, hangt nauwelijks af van de lengte van de ketting. Opvallend is dat de lengte wél bepaalt hoe lang het gemiddeld genomen duurt om de knoop er weer uit te schudden. Bij een ketting van 30 cm blijft een knoop gemiddeld 13 seconden zitten, terwijl bij een twee keer zo lange ketting de knoop er pas na gemiddeld 102 seconden uit gaat.

Foto’s: Physical Review
Bron: Kennislink

door **Chris Zaal**

Stel je voor: je hebt een oude pan, maar daarin zitten allemaal gaten. Gelukkig heb je acht latjes waarmee je de bodem kunt bedekken. Maar ook in die latjes zitten gaten. Kun je de latjes dan zo op de bodem leggen, dat alle gaten bedekt zijn? Dit is de bedoeling van de 16-gaten-puzzel.

De 16-gaten-puzzel

De 16-gaten-puzzel bestaat uit acht latjes van 10 bij 40 centimeter. In de latjes zijn één, twee of drie gaten geboord, zestien in totaal. Er zijn dus ook zestien 'niet-gaten'. Omdat je de latjes ook mag omdraaien, komt elk mogelijk gatenpatroon precies één keer voor. De bodem is gewoon een vierkant van 40 bij 40 centimeter met daarin 16 gaten.

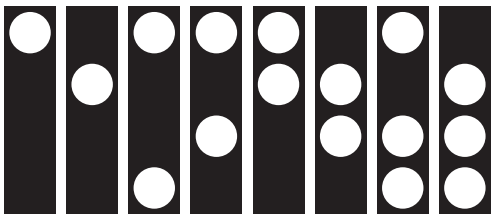
De opdracht
De opdracht is om met de acht latjes alle gaten van de bodem te bedekken. Daarvoor heb je ze alle acht nodig – in twee lagen over elkaar heen. Als je zomaar wat probeert, zul je hoogstwaarschijnlijk ergens een gat overhouden.

Opgave 1. In elk latje is op vier plekken systematisch wel of niet een gat geboord. Laat zien dat als alle gaten in de bodem afgedekt zijn, er nooit twee 'niet-gaten' in de latjes op elkaar liggen. Dat betekent dus dat elk van de zestien 'niet-gaten' een gat bedekt.
Opgave 2. De acht latjes bedekken de bodem in twee lagen van vier. Dat kan op twee manieren: beide lagen in dezelfde richting, of kruiselings. Laat zien dat als je beide lagen in dezelfde richting legt, je nooit een volledige bedekking krijgt.

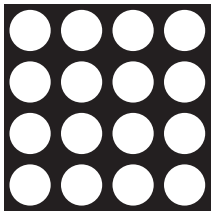
Timmeren
De 16-gaten-puzzel is bedacht door Wim Zwaan, een timmerman uit Workum. Hij heeft deze puzzel uiteraard in hout gemaakt. Je ziet de puzzel op het omslag van dit nummer.

De acht puzzelstukjes zijn doodgewone houten latjes, de gaten daarin zijn gezaagd met een gatenzaag. De bodem is het mooist als die uitgevoerd wordt als 'pan': met rechtopstaande zijden en een bodem met daarin zestien gaten. Maar een gewoon vierkant met opstaande randen kan ook. De zestien gaten in de bodem zijn niet per se noodzakelijk.

Snel aan de slag
Om snel aan de slag te gaan, heb je geen hout nodig. Je hebt al voldoende aan acht papieren stroken waarin je zestien gaten knipt. Een bodem is niet nodig. Je moet de stroken in twee lagen zo op tafel weten te leggen, dat je het tafelkleed er niet meer door heen ziet.



Figuur 1 Acht puzzelstukjes met in totaal zestien gaten



Figuur 2 De bodem die precies door de acht puzzelstukjes bedekt moet worden

door **Alex van den Brandhof**

De Wiskunde Olympiade is een toernooi over meerdere rondes voor leerlingen van havo en vwo. De allerbesten van een land komen in het internationale eindtoernooi tegen de rest van wereld uit, komend jaar in Vietnam.

Eindbestemming Vietnam

Eerste ronde

Op vrijdagmiddag 26 januari 2007 is de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, op je eigen school. Elke leerling kan hieraan meedoen. Er zijn A-opgaven (multiple choice) en open vragen in de B-categorie, die wat lastiger zijn. De ruim honderd beste leerlingen strijden dan in september 2007 in de tweede ronde om een plek in de Internationale Wiskunde Olympiade, die in de zomer van 2008 gehouden wordt.

Tweede ronde

Op 15 september 2006 begonnen 120 leerlingen om 13.00 uur aan de tweede-ronde-opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De tweede ronde wordt altijd centraal in Eindhoven gehouden. Voor één deelnemer werd dit jaar een uitzondering gemaakt: Jochem Atteveld uit Amsterdam zat met zijn klas in Rome. Een begeleidend docent had de opgaven in een verzegelde envelop meegekregen. Tegelijk met de kandidaten in Eindhoven zat Jochem te zwoegen op de vraagstukken in een kamer in een klooster te Rome.

De prijsuitreiking van de tweede ronde was op 10 november. Op de foto zie je de tien prijswinnaars.

De tien prijswinnaars van de laatst gehouden tweede ronde:
Staand v.l.n.r.: Wouter Zomervrucht, Kyndylan Nienhuis, Rogier Huurman, Yvette Welling, Hilje Doekes, Remy van Dobben de Bruyn, Milo van Holsteijn.
Zittend v.l.n.r.: Raymond van Bommel (de nr. 3); Wouter Berkelmans (de nr. 1); Milan Lopuhaä (de nr. 2).

Internationale eindronde

Voor leerlingen die dit jaar met de eerste ronde meedoen, is de Internationale Wiskunde Olympiade nog ver weg. Zij moeten eerst de tweede ronde zien te halen, en maken vervolgens kans op een plek in het internationale eindtoernooi in de zomer van 2008 in Spanje.

Van de leerlingen van de laatst gehouden tweede ronde wordt, na speciale trainingen, een team van zes bollebozen geselecteerd. Zij zullen Nederland bij de Internationale Olympiade komende zomer, in Vietnam, vertegenwoordigen.

Sommige winnaars van deze eindronde groeiden uit tot beroemde wiskundigen. Grigori Perelman en Terence Tao, die beiden in 2006 de Fields Medal (de 'Nobelprijs voor wiskunde') kregen, wonnen een gouden medaille op de Olympiade in respectievelijk 1982 en 1988.

In de zomer van 2006 was de Internationale Olympiade in Slovenië. Een verslag van Hildo Bijl, een van de Nederlandse deelnemers, lees je hieronder.

door **Hildo Bijl**

Het WK-wiskunde onder de twintig

Op 10 juni 2006 werd bekendgemaakt welk team Nederland mocht vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Slovenië: Wouter Berkelmans, Hildo Bijl, Bauke Conijn, Erik van Holland, Jinbi Jin en Julian Lyczak. Een maand later was het zover. Terwijl de finale van het WK-voetbal begon, stond ons team klaar voor vertrek op station Utrecht, wachtend op deputy-leader Fokko van de Bult. Na een treinreis van elf uur arriveerden we in München, waar we onze Oostenrijkse collega's ontmoetten. Gezamenlijk zetten we de reis voort naar Ljubljana, de hoofdstad van Slovenië.

Aan de 47ste Internationale Wiskunde Olympiade deden 92 landen mee; in totaal 498 mensen, waarvan 40 meisjes. De dag na onze aankomst stond de openingsceremonie op het programma, waar met enkele speeches en traditionele Sloveense muziek de Olympiade werd geopend. De volgende dag deden we de eerste toets. Juist toen we wilden vertrekken naar de wedstrijdzaal, barstte het noodweer los. De lucht was opeens pikzwart, maar vijf minuten later was er vreemd genoeg geen wolkje meer aan de lucht, en hadden we de enige inbreuk op de zuivere blauwe lucht gehad voor de rest van de week. De deelnemers mochten hun talenten in twee grote gymzalen 4,5 uur lang tot uiting brengen. De test was erg lastig, maar toch wisten we bijna allemaal één opgave (van de drie) op te lossen. De tweede toets, een dag later, was nog veel lastiger. Uit ons team wist niemand een van de drie opgaven te kraken.

In de vrije tijd waren de Nederlanders meestal op de sportvelden te vinden. Op het voetbalveld stond je al gauw met achttien man uit twaalf verschillende landen te spelen. Verbazingwekkend was het hoe iedere persoon Engels met weer een ander accent sprak, bijna niemand elkaar verstond, maar toch iedereen elkaar begreep. En niemand kan mij nog wijs maken dat wiskundigen niet kunnen voetballen!

In de dagen na de tests bekeken we de langste grot van Slovenië, zwommen we in de enorm zoute Adriatische zee, bewonderden we een prachtig onderhouden kasteel en wandelden we kilometers over houten plankjes door een vijftig meter hoge riviervallei. Het was een hele ervaring om met vijfhonderd mensen van over de hele wereld in olympiade-shirts overal heen te gaan.

Bij het grote sporttoernooi waren de Nederlanders door een administratieve fout bij het voetballen ingedeeld, in plaats van bij het volleyballen. We hebben enorm ons best gedaan, maar zoals het echte Nederlanders betaamt, werden we met strafschoppen uitgeschakeld.

In de trein op weg naar huis keken we terug op een veelbewogen week. We hebben veel leuke en gekke mensen ontmoet: Nieuw-Zeelanders die zo snel Engels praatten dat ze alleen elkáár verstonden. Armenen die een zweefduik naast de bal maakten en de landing vergaten. Pakistanen die op de bal stonden en uitvonden dat die toen goed rolde. Oostenrijkers die de hefboomwet op achterover klappende stoelen toepasten, met zichzelf erin. En natuurlijk waren er de Nederlanders, die het volleybalnet in vlogen en ontdekten dat dit iets te veel meeveerde, een nieuw wiskundig kaartspel bedachten en dit aan veertien andere landen leerden, en wuppies meebrachten, die iedereen wilde hebben.

En de Olympiade? Bij de sluitingsceremonie bleek China het winnende land. Helaas geen medailles voor Nederland dit jaar, maar wel vijf eervolle vermeldingen.

Op 28 juni werd het team dat naar Slovenië ging gehuldigd door de minister van Onderwijs, Maria van der Hoeven

Ontspanning in Slovenië: een potje 'bunchen'

Drie Olympiade-opgaven

1. Een B-opgave uit de eerste ronde 2005
Binnen een vierkant $ABCD$ ligt een punt P. Punt E is het midden van de zijde CD. Gegeven is $|AP| = |BP| = |EP| = 10$. Wat is de oppervlakte van vierkant $ABCD$?

2. Een opgave uit de tweede ronde 2006
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8$. Wat is het kleinste getal k groter dan 6 waarvoor geldt: $1 + 2 + \cdots + k = k + (k + 1) + \cdots + n$, met n een geheel getal groter dan k?

3. Een opgave uit de Internationale Olympiade 2006
Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

Aanwijzingen en antwoorden

1. Begin met het maken van een schets van het vierkant en de lijnstukken AP, BP en EP. Noem de loodrechte projectie van punt P op zijde AD punt Q. Hoe kun je AQ uitdrukken in PQ? Met de stelling van Pythagoras kun je de opgave nu oplossen. Het antwoord is 256.

2. Wat is de formule voor de som van een rekenkundige rij? Schrijf $k + (k + 1) + \cdots + n$ als $(1 + \cdots + n) - (1 + 2 + \cdots + (k - 1))$. Voor n en n^2 kun je nu voorwaarden bedenken waaraan voldaan moet worden, waarna je het antwoord ($k = 35$) snel kunt vinden.

3. Herschrijf de vergelijking als volgt: $2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1)$. Waarom geldt nu $y = 2^{x-1} \cdot m \pm 1$, met m oneven? Bewijs dat m alleen de waarde 3 kan hebben. Dit leidt tot de oplossingen voor (x, y): $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$, $(4, -23)$.

door **Matthijs Coster**

Aftelbare magie

De Nijmeegse wiskundige Arno van den Essen publiceerde in oktober 2006 een veelzijdig boek over magische vierkanten en sudoku's. Het is toegankelijk zonder voorkennis van wiskunde, maar de lezer die dieper wil graven vindt achterin ook bewijzen en afleidingen voor sommige formules. Achter de inmiddels alledaagse sudoku zit veel meer wiskunde dan de gemiddelde invuller vermoedt.

Een *magisch vierkant* is een vierkant van n bij n hokjes, ingevuld met de getallen 1 tot en met n^2, zodanig dat de som van alle rijen en kolommen (en meestal ook de twee diagonalen) gelijk is. Het boek begint met een van de oudst bekende voorbeelden, de *Lo Shu* uit 2800 voor Christus, zie figuur 1. Hier heeft elke rij, kolom en diagonaal som 15.

Er zijn magische vierkanten van iedere afmeting. Albrecht Dürer maakte in 1514 de gravure *Melancholia*, waarin hij een 4x4 magisch vierkant verwerkte, zie figuur 2. Let op hoe vernuftig het jaartal waarin de gravure is gemaakt weer opduikt onderin het magische vierkant.

Paardensprong, kwadraten, alpha-magisch

Daarna brengt Van den Essen ook veel ingewikkelder magische vierkanten ter sprake. Je kunt springend met een paard (twee naar voren, één opzij) de velden van het magische vierkant nummeren van 1 tot en met n^2. Kan deze nummering een magisch vierkant opleveren? In 2003 toonde Awani Kumar aan dat zo'n magisch vierkant van 12x12 velden bestaat, zie figuur 3.

In een ander hoofdstuk wordt gezocht naar vierkanten die magisch zijn als je alle getallen die op de velden staan kwadrateert. In figuur 4 zie je zo'n vierkant. Het kleinste *magische* vierkant dat na kwadrateren *nog steeds* magisch is, heeft 8x8 velden.

Ook grappig is het zoeken naar *alpha-magische vierkanten*. Die hebben de volgende eigenschap: als je de getallen uitschrijft (64 wordt vierenzestig), dan vormen de aantallen letters opnieuw een magisch vierkant. Zulke vierkanten zijn uiteraard in maar één taal magisch. Een Nederlands voorbeeld zie je in figuur 5.

Nieuwe vondst

Magische vierkanten zijn ook vandaag nog een terrein van actief onderzoek, zowel door professionele wiskundigen als door amateurs. Zo slaagde Van den Essen er na 250 jaar als eerste in om te reconstrueren hoe Benjamin Franklin schijnbaar moeiteloos zijn magische vierkanten met vele extra magische eigenschappen in elkaar zette. In 1737 construeerde Franklin het magische vierkant in figuur 6.

Hier is de som van alle getallen in iedere halve rij of kolom (van de rand af gerekend) gelijk aan 130 (en dus is de som van alle getallen in iedere rij of kolom gelijk aan 2 x $130 = 260$). Het vierkant voldoet niet aan de twee diagonaaleisen, maar in plaats daarvan geldt het volgende: ieder van de vier 'gebroken' diagonalen, zoals die gevormd door de getallen $52, 3, 5, 54, 10, 57, 63, 16$, heeft als som 260. Maar er is meer: ook alle parallelle gebogen diagonalen, zoals die gevormd door $61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1$ enzovoorts, hebben als som 260. Dan nog is niet alle magie beschreven: ook hebben alle

2x2-deelvierkanten de eigenschap dat de som van hun getallen gelijk is aan 130.

Sudoku's

Het laatste hoofdstuk is gewijd aan sudokupuzzels, die in de wiskundige categorie 'Latijnse vierkanten' vallen. Ook dit hoofdstuk bevat leuke wetenswaardigheden. Zoals in *Pythagoras* een jaar geleden (jaargang 45 nr. 3) ook al in een artikel over sudoku's stond, is tot op heden nog nooit een sudoku gevonden met minder dan zeventien beginwaarden. Ook Van den Essen komt daar niet onder.

Behalve de gewone sudoku's, behandelt Van den Essen in zijn boek ook de zogenoemde *vormsudoku's*, waarbij het wél lukt om sudoku's te maken met minder dan zeventien beginwaarden. Bij vormsudoku's moeten de cijfers 1 tot en met 9 niet in 3x3 blokken, maar in grilliger vormen worden ingevuld. In het boek staat een vormsudoku van Bob Harris waarvoor slechts acht beginwaarden volstaan! Je ziet deze sudoku in figuur 7.

Arno van den Essen, *Magische vierkanten, de wonderbaarlijke geschiedenis van wiskundige puzzels, van Lo-Shu tot Sudoku.*
Veen Magazines, 2006, ISBN 978 90 8571 052 3.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figuur 1 De Lo-Shu, het meest elementaire magische vierkant

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figuur 2 Het magische vierkant van Albrecht Dürer

1	70	107	112	5	66	103	116	9	64	99	118
108	111	2	69	104	115	6	65	100	117	10	63
71	106	109	4	113	102	67	8	61	98	119	12
110	3	72	105	68	7	114	101	120	11	62	97
73	142	35	40	77	140	17	60	93	122	13	58
36	39	74	141	32	41	92	121	16	59	96	123
143	34	37	76	139	78	55	18	125	94	57	14
38	75	144	33	42	31	126	91	56	15	124	95
81	136	29	44	79	138	19	54	89	128	21	52
28	45	80	137	30	43	90	127	20	53	88	129
135	82	47	26	133	84	49	24	131	86	51	22
46	27	134	83	48	25	132	85	50	23	130	87

Figuur 3 Het 'paardensprong-magische' vierkant van Awani Kumar

11	77	8	49
59	28	23	61
17	31	79	32
68	29	41	37

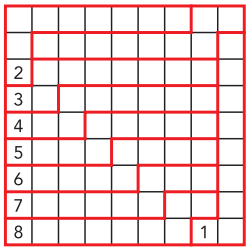
Figuur 4 Een 4x4 vierkant dat magisch is na kwadrateren

64	2	123
122	63	4
3	124	62

Figuur 5 Een Nederlands 'alpha-magisch' vierkant

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figuur 6 Het supermagische vierkant van Franklin



Figuur 7 Een vormsudoku met slechts 8 beginwaarden

Cadeau-actie

De eerste twintig lezers van *Pythagoras* die hun naam en postadres insturen, krijgen een gratis exemplaar van dit boek. Stuur je gegevens naar: Veen Magazines, Antwoordnummer 40310, 3040 VB Rotterdam, o.v.v. 'Magische Vierkanten'. (NB: je gegevens mogen daardoor ook gebruikt worden voor soortgelijke boekaanbiedingen door Veen Magazines).

door **Marco Swaen**

DE WISKUNDE VAN WOUTER BERKELMANS

Stel je voor: op school gaat de wiskunde je aardig af en je besluit wiskunde te gaan studeren. Dan, in de collegebanken, merk je dat het toch wel flink aanpoten is om de complex geadjungeerden, de karakteristieke polynomen en inductie-bewijzen meester te worden. Zul je dan niet vreemd opkijken als naast je een jongen van veertien zit die met al die nieuwe stof nauwelijks moeite heeft?

Dit is ongeveer wat vorig jaar de eerstejaarsstudenten wiskunde op de Vrije Universiteit in Amsterdam overkwam. Want dat jaar begon daar de veertienjarige Wouter Berkelmans aan zijn studie wiskunde.

Twee jaar geleden zat Wouter Berkelmans in de tweede klas van het gymnasium en was inmiddels door de schoolwiskunde heen. Voor hem zat er geen uitdaging meer in het boek, niet in de pluspagina's of de verrijkingsstof en zelfs niet in de boeken van de eindexamenklas. In overleg met de Vrije Universiteit is toen geregeld dat hij colleges mocht komen volgen. Zo werd hij de jongste wiskundestudent in Nederland. Hij liep colleges en deed tentamens. Het laagste cijfer dat hij haalde was een 8. Op dit moment volgt hij colleges uit het tweede jaar, terwijl hij zich ook voorbereidt om in mei examen wiskunde B12 te doen.

Behalve als jongste student viel Wouter ook op als jongste deelnemer in de Nederlandse afvaardiging naar de Internationale Wiskunde Olympiade in Slovenië. Dit jaar kwam hij als (jongste) winnaar tevoorschijn van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Uitzonderlijk getalenteerd

Een en ander maakt duidelijk dat Wouter beschikt over een uitzonderlijk talent voor wiskunde. Ontmoet je Wouter, dan merk je van die uitzonderlijkheid niet veel. In het vrije klimaat op het Amsterdamse Barlaeus-gymnasium is hij noch een opvallende, noch een onopvallende figuur. Hij heeft zo zijn vrienden, zijn eigen muziek- en kledingstijl, en heeft hobby's zoals de anderen. Pas als je hem een wiskundig vraagstuk voorlegt, raak je verbluft van het gemak waarmee hij de gedachtestappen aaneenrijgt en de scherpe blik waarmee hij de diverse mogelijkheden inschat en overziet.

Zijn talent voor wiskunde, of in elk geval: de snelle ontwikkeling van dat talent, komt niet uit de lucht vallen. Zijn beide ouders hebben een beta-achtergrond en zijn actief in de stichting *Vierkant voor Wiskunde* die zich beijvert jongeren in Nederland voor wiskunde enthousiast te maken. Onze lezers kennen *Vierkant* vast van de wiskundekampen, de wiskunde-doeboekjes en de puzzelkalender. Wouter en zijn jongere broer Guus hebben van jongs af aan heel wat puzzels opgelost. Zo hing er op het prikbord in de keuken altijd wel een vraagstuk voor de jongens, en geregeld bracht vader of moeder hun nieuwe handigheidjes bij om wiskundige puzzels aan te pakken.

Tijdens de rekenlessen op de basisschool hield Wouter zich bezig met de Vierkant-puzzelkalender. Daarin wordt voor elke week wat wiskunde uitgelegd met zeven vraagstukken, voor elke dag één, oplopend in moeilijkheidsgraad.

Wiskunde doen

Geleidelijk ging bij Wouter het oplossen van puzzels over in het zelf bedenken van stellingen en het leveren van bewijzen. Zo bedacht hij op twaalfjarige leeftijd een variant op de stelling van Pythagoras, om een zijde te berekenen in driehoeken met een hoek van 60 graden. Op de volgende twee pagina's lees je hier meer over.

Wij vroegen Wouter naar zijn plannen voor de toekomst. Zijn hart ligt bij de wiskunde en hij wil daar zeker verder in. Hem zou het geweldig lijken als hij naar een van de grote universiteiten in de Verenigde Staten zou kunnen, zoals Princeton, om daar samen te kunnen studeren en werken met de besten in ons vak.

Voorlopig echter is zijn aandacht bij de colleges op de Vrije Universiteit, en de praktische opdracht die hij voor wiskunde doet: te bewijzen dat elk priemgetal p behalve 5 een deler is van het $(p-1)$-de danwel $(p+1)$-de Fibonacci-getal.

Fragment van de Vierkant-puzzelkalender, juni 1999. Meer informatie over *Vierkant voor wiskunde* kun je vinden op www.vierkantvoorwiskunde.nl

MAANDAG 19 JULI

Pas de truc van figuur 1b toe om een formule voor de oppervlakte van een driehoek te vinden.

DONDERDAG 22

Bereken de oppervlakte van het kleine vierkant.

ZATERDAG 24

De twee driehoeken ABC en DEF in figuur 4b zijn even groot.
Welk ingeschreven vierkant is het grootst?

DINSDAG 20

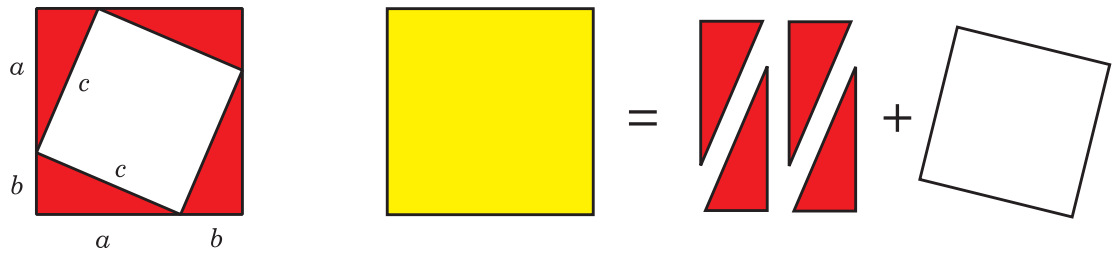
Eén van de hoekpunten van het rechter vierkant in figuur 4a gaat door het middelpunt van het linker vierkant.
Bereken de oppervlakte van het gearceerde deel.

ZONDAG 25

Bereken de oppervlakte van het kleine vierkant.

WOENSDAG 21

VRIJDAG 23



Figuur 1 Een vierkant wordt opgesplitst. Het grote (gele) vierkant heeft zijden $a + b$, het kleine (witte) vierkant heeft zijde c, de vier rechthoekige driehoekjes hebben rechthoekszijden a en b. Dus: $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$, ofwel $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, waaruit de stelling van Pythagoras volgt: $a^2 + b^2 = c^2$.

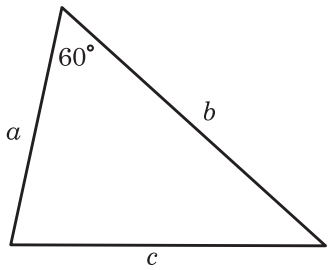
De stelling van Wouter (12 jaar)

Voor de stelling van Pythagoras bestaan wel meer dan 300 verschillende bewijzen. Soms brengt zo'n bewijs iemand weer op een nieuw idee, voor een nieuw bewijs, of een variant op de stelling.

Een van de eenvoudigste bewijzen voor de stelling berust op de opdeling van het vierkant zoals in figuur 1. Met de driehoeken en een ingesloten vierkant wordt een groter vierkant gevormd. De oppervlakte van de diverse delen moet samen de oppervlakte van het hele vierkant vormen, en zo komt tevoorschijn dat $a^2 + b^2 = c^2$.

Dit bewijs bracht Wouter Berkelmans toen hij twaalf jaar was op het idee voor een variant van Pythagoras, voor driehoeken met een hoek van 60 graden, zie figuur 2. Zijn stelling luidt:

Stelling. Gegeven een driehoek ABC met $\angle C = 60°$. Dan geldt: $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.



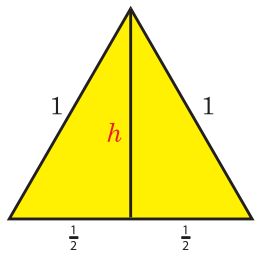
Figuur 2

Feitelijk is dit een bijzonder geval van de cosinusregel. Maar Wouter had voor zijn stelling geen cosinusregel nodig, sterker nog: hij had nog nooit van sinus of cosinus gehoord.

Neem in plaats van een vierkant een gelijkzijdige driehoek. Dan krijg je het plaatje in figuur 3. Hierin komt drie keer een driehoek voor met zijden a, b en c en ingesloten door a en b een hoek van 60 graden.

Net als bij het vierkant zullen we nu weer de afzonderlijke oppervlakten berekenen. De combinatie daarvan moet dan een betrekking opleveren voor a, b en c.

Voor de oppervlakte van een driehoek geldt de formule: opp = $\frac{1}{2}$ x basis x hoogte. Neem eerst een gelijkzijdige driehoek met zijde 1. Trek de hoogtelijn, dat is ook de middellijn, zie figuur 4.



Figuur 4

We berekenen de hoogte met Pythagoras: $h^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, dus

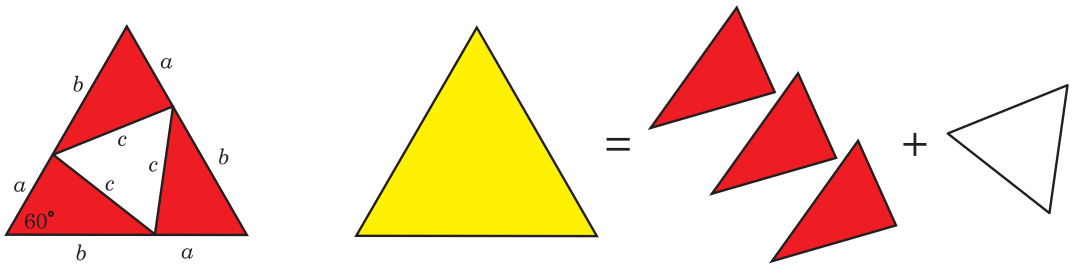
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(Opmerking: Op zich hoef je deze waarde niet te bepalen, voor het bewijs is het genoeg in te zien dat h zich vast verhoudt tot de zijde.)

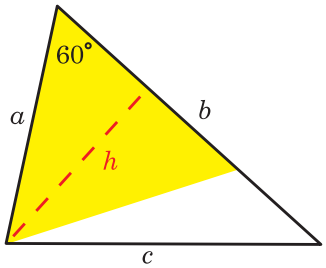
Is de zijde van de gelijkzijdige driehoek a, dan wordt de hoogte ook a maal zo groot. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a is dus

$$\tfrac{1}{2} \times a \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3}a = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}a^2.$$

Neem nu een driehoek met slechts één hoek van 60 graden. Teken de gelijkzijdige driehoek daarin, zie figuur 5.



Figuur 3



Figuur 5

De hoogte van de driehoek is dan gelijk aan de hoogte in de gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijde a is, dus $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$. De oppervlakte is dan

$$\tfrac{1}{2} \times b \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3}a = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}ab.$$

Nu tellen we de oppervlaktes op, links van de afzonderlijke driehoeken, rechts van de hele:

$$3 \times \tfrac{1}{4}\sqrt{3}ab + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}c^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}(a+b)^2.$$

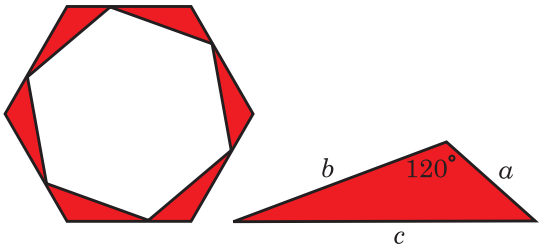
Hieruit volgt dat

$$3ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

en dus

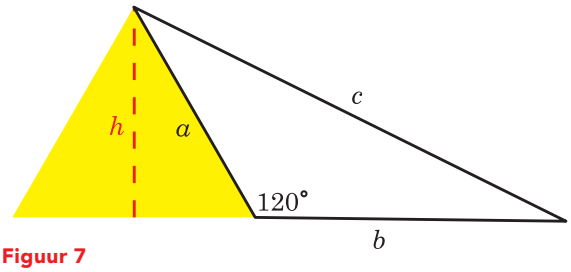
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Zouden andere veelhoeken ook nieuwe varianten van de stelling opleveren? De zeshoek geeft in elk geval ook een mooi resultaat. Het plaatje voor de zeshoek zie je in figuur 6.



Figuur 6

Hierin zit zes keer een driehoek met zijden a, b en c, en tussen de zijden a en b een hoek van 120 graden. Voor de oppervlakte van zo'n driehoek geldt dezelfde formule als voor de driehoek met een hoek van 60 graden, zie figuur 7. Pas namelijk a af op b en vorm zo een gelijkzijdige driehoek. Je ziet dat de hoogte van de driehoek dan samenvalt met die van de gelijkzijdige driehoek. Dus de hoogte is $\frac{1}{2}\sqrt{3}a$.



Figuur 7

De oppervlakte van de driehoek is dus weer

$$\tfrac{1}{2} \times b \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3}a = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}ab.$$

De zeshoek bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken. Een zeshoek met zijde a heeft dus oppervlakte

$$6 \times \tfrac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}a^2.$$

Tel nu weer de oppervlakte van de zeshoek op beide manieren, dan krijg je:

$$6 \times \tfrac{1}{4}\sqrt{3}ab + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}c^2 = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(a+b)^2,$$

waaruit volgt dat

$$ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

en dus

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

door **Arnout Jaspers**

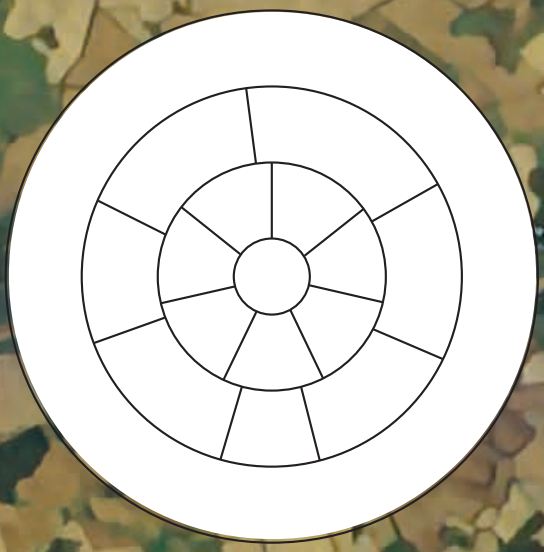
Kleurrijke kaarten

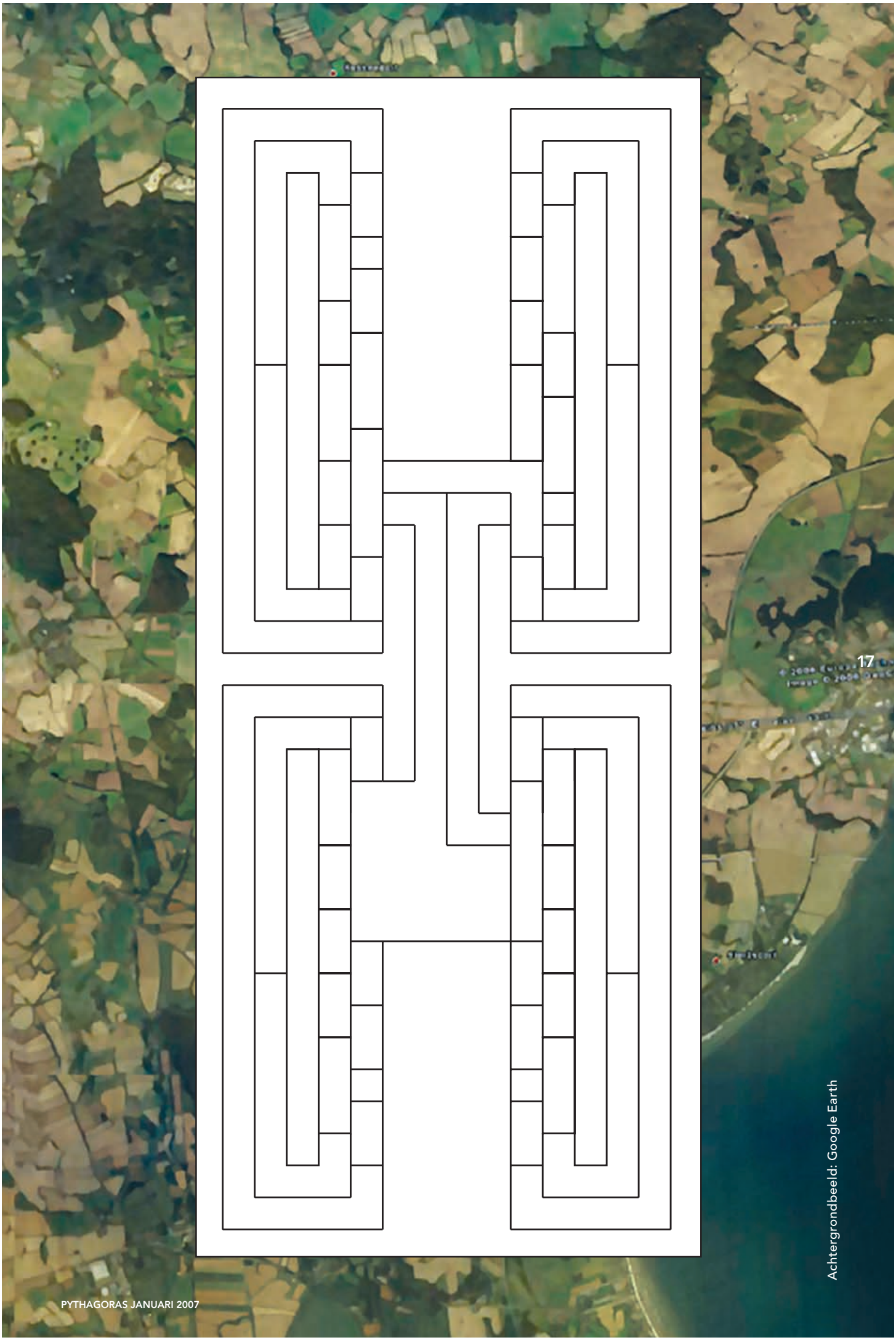
De landkaarten in een atlas gebruiken meestal wel zes of acht kleuren, wat wiskundig bekeken verspilling is. Al anderhalve eeuw geleden merkte een kaartenmaker op, dat je blijkbaar altijd aan vier kleuren genoeg hebt om ervoor te zorgen dat geen twee buurlanden dezelfde kleur hebben. Onder 'buurlanden' verstaan we landen die over een zekere lengte een grens gemeenschappelijk hebben, dus niet landen die alleen maar op één punt contact maken. Ook mag een land niet uit twee of meer losse delen bestaan, zoals de Verenigde Staten, dat een losliggend deel Alaska heeft.

Deze 'vierkleuren-stelling' was makkelijk te formuleren, maar het bewijs bleek heel moeilijk. Pas in 1976 bewezen twee wiskundigen, Kenneth Appel en Wolfgang Haken, dat je voor geen enkele kaart in het platte vlak vijf kleuren nodig hebt. Ze gebruikten toen als eersten een computer bij een bewijs. Daarmee maakten ze een lijst van bijna 2000 configuraties – een soort elementaire bouwstenen waaruit elke landkaart is op te bouwen – en rekenden die door.

Sceptici keurden dit computerbewijs af, want wie zegt dat het computerprogramma dat de gecompliceerde berekeningen uitvoerde, zelf geen fouten bevatte? In de jaren die volgden, werden vernuftige methoden gevonden om de juistheid van zo'n computerprogramma te verifiëren. Maar toch: een bewijs dat voor 100 procent met de hand kan worden gevolgd, is er niet. Mensen die de computer wantrouwen, ook al zijn zij ervan overtuigd dat het *programma* klopt, vinden daarom dat de vierkleuren-stelling eigenlijk nog steeds niet bewezen is. Misschien is dat wel terecht, want zijn de kaarten op deze pagina's wel met vier kleuren in te kleuren?

De kleine ronde kaart zal na wat proberen nog wel lukken, maar hoe zit het met de grote?





Achtergrondbeeld: Google Earth

door **Birgit van Dalen** en **Ionica Smeets**

Vorig jaar werd in het artikel 'De wiskunde van Hendrik Lenstra' al aangekondigd dat alle scholieren van Nederland mee kunnen gaan rekenen aan het abc-vermoeden. Het is bijna zover: binnenkort wordt de website Reken mee met abc (www.rekenmeemetabc.nl) geopend!

'Reken mee met

Het abc-vermoeden gaat over gehele, positieve getallen a, b en c waarvan de grootste gemene deler gelijk is aan 1 en waarvoor geldt dat $a + b = c$. We ontbinden de drie getallen in priemfactoren en vermenigvuldigen alle *verschillende* priemfactoren met elkaar. Dit product noemen we het *radicaal* r.
Stel bijvoorbeeld dat $a = 7$ (priem), $b = 20 = 2 \times 2 \times 5$ en $c = 27 = 3 \times 3 \times 3$. Dan is het radicaal $r = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. We zien dat dit radicaal een stuk groter is dan c, wat meestal het geval is.

Als het radicaal juist kleiner is dan c, noemen we die a, b en c een 'abc-drietal'. Een voorbeeld van een abc-drietal is $a = 5$ (priem), $b = 27 = 3 \times 3 \times 3$ en $c = 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Het radicaal is $r = 5 \times 3 \times 2 = 30$, en dat is kleiner dan 32 (de waarde van c).

Oneindig veel abc-drietallen
Het is niet moeilijk om te bewijzen dat er oneindig veel abc-drietallen bestaan. Neem $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$, waarbij n een willekeurig natuurlijk getal is. Het getal 1 (a) heeft geen priemfactoren. Het getal 9^n (c) bestaat alleen maar uit priemfactoren 3. Verder geldt dat $8 = 2^3$ een deler is van $9^n - 1$ (b). Dat betekent dat het product van de verschillende priemfactoren van b ten hoogste $b/4$ is. Voor het radicaal r van het tripel geldt nu het volgende: $r \leq 3b/4 < c$, oftewel: $(1, 9^n - 1, 9^n)$ is een abc-drietal voor elk natuurlijk getal n.

Goed drietal
Het radicaal van het abc-drietal $(5, 27, 32)$ is 30, dat is maar nauwelijks kleiner dan c. Als het radicaal *veel* kleiner dan c is, noemen we het abc-drietal 'goed'. We meten de *kwaliteit* van een abc-drietal door te bekijken tot welke macht q je r moet verheffen om c te krijgen: $r^q = c$. Voor het niet zo erg goede drietal $(5, 27, 32)$ is q ongeveer gelijk aan $1{,}019$.

Het abc-vermoeden zegt iets over die kwaliteit q. Er zijn twee versies van het abc-vermoeden, een 'zwakke' en een 'sterke'. We weten nog van geen van beide of ze waar zijn (daarom heet het een vermoeden), maar als de sterke versie waar is, is de zwakke zeker ook waar. Andersom hoeft dat nog niet te gelden – vandaar de namen sterk en zwak.

Ondanks jaren zoeken is nog nooit een abc-drietal gevonden met een kwaliteit hoger dan $1{,}63$. Het is dus niet zo gek om te vermoeden dat er een *bovengrens* voor de kwaliteit bestaat, dat wil zeggen: er is een getal g zodat voor alle abc-drietallen geldt dat $q < g$. Dit is precies wat de zwakke versie van het abc-vermoeden zegt.

De sterke versie van het abc-vermoeden zegt dat er voor elke willekeurige grens h (een getal groter dan 1) hoogstens eindig veel abc-drietallen zijn met een kwaliteit hoger dan h. Met andere woorden, de oneindig veel abc-drietallen hebben bijna allemaal (met 'bijna allemaal' bedoelen we 'allemaal, op een eindig aantal na') een kwaliteit tussen 1 en h.

Gevolgen van het abc-vermoeden
Als het abc-vermoeden waar is, legt het een zeer sterke beperking aan de abc-drietallen op. Want zelfs als je een h neemt die maar een heel klein beetje groter is dan 1, bijvoorbeeld $h = 1{,}0001$, dan nog geldt dat oneindig veel abc-drietallen een kwaliteit tussen 1 en $1{,}0001$ hebben, en slechts eindig veel een kwaliteit groter dan $1{,}0001$.

Veel wiskundigen zijn gefascineerd door het abc-vermoeden omdat het zo simpel te formuleren is, terwijl een bewijs ervan inhoudt dat allerlei andere, zeer moeilijke of onopgeloste problemen óók in één klap zijn opgelost. Een voorbeeld is de fameuze Laatste Stelling van Fermat, die in 1994 – na eeuwen zoeken – met veel moeite is bewezen door Andrew Wiles. Als hij had mogen aannemen dat het sterke abc-vermoeden geldt, had zijn bewijs op de achterkant van een envelop gepast.

Abc-jacht
Er zijn diverse methoden om te zoeken naar abc-drietallen. De meeste gebruiken een slimme truc om alleen drietallen met een hoge kwaliteit te vinden. *Reken mee met abc* gaat voor het eerst systematisch zo veel mogelijk abc-drietallen in kaart brengen, zodat meer bekend wordt over hun eigenschappen.

Iedereen met een computer kan helpen met zoeken. Je kunt in je eentje meedoen, met je hele klas of zelfs met je hele school! Op je computer draait dan een programma dat mogelijke drietallen narekent en de vondsten met een bericht naar de abc-server stuurt.

Op www.rekenmeemetabc.nl vind je meer achtergrondinformatie. We leggen daar bijvoorbeeld uit hoe je slim kunt zoeken naar abc-drietallen met een hoge kwaliteit. We loven ook een prijs uit voor het beste profielwerkstuk over een onderwerp dat samenhangt met het abc-vermoeden!

Pythagoras Olympiade

door Arno Kret, Thijs Notenboom, Anne de Haan en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je *naam*, ook je *adres*, *school* en *klas*.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 28 februari 2007.

OPGAVE 138

Opgave 138
Zij ΔABC een driehoek en M het midden van zijde AB. Plaats de punten D en E op zijde BC zo, dat $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{1}{3}|BC|$. Stel nu dat $\angle MAE = \angle AMC$. Hoe groot is dan $\angle BAC$?

OPGAVE 139

Laat k een natuurlijk getal zijn. Bekijk de getallen $a_k = 3k^2 + k + 1$. Definieer b_k als de *som* van de cijfers van a_k. Wat is de minimale waarde van b_k?

OPLOSSING 134

Veronderstel dat $n > 1$ een geheel getal is. Bestaat er een hoek α met $0° < \alpha < 90°$, zó dat $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ beide een n-de macht zijn van een rationaal getal? En hoe zit dat als $n = 1$?

Oplossing. Voor $n > 1$ is dat niet mogelijk. We bewijzen dat uit het ongerijmde. Stel dat $\sin\alpha = (\frac{a}{b})^n$ en $\cos\alpha = (\frac{c}{d})^n$ met a, b, c en d gehele getallen. Dan geldt

$$\frac{a^{2n}}{b^{2n}} + \frac{c^{2n}}{d^{2n}} = 1,$$

zodat

$$a^{2n} + c^{2n} = (bd)^{2n}.$$

Volgens de Laatste Stelling van Fermat is dit echter niet mogelijk voor $n > 1$.
Voor $n = 1$ is het wel mogelijk. Neem bijvoorbeeld $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ en $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Milo van Holsteijn** van de RSG Pantarijn te Wageningen, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Nick Schmidts** van het Onze-Lieve-Vrouwecollege te Assebroek, **Jan Verbakel** uit Eindhoven, **Siebe van Vooren** van het Onze-Lieve-Vrouwecollege te Assebroek en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar **Nick Schmidts**.

OPLOSSING 135

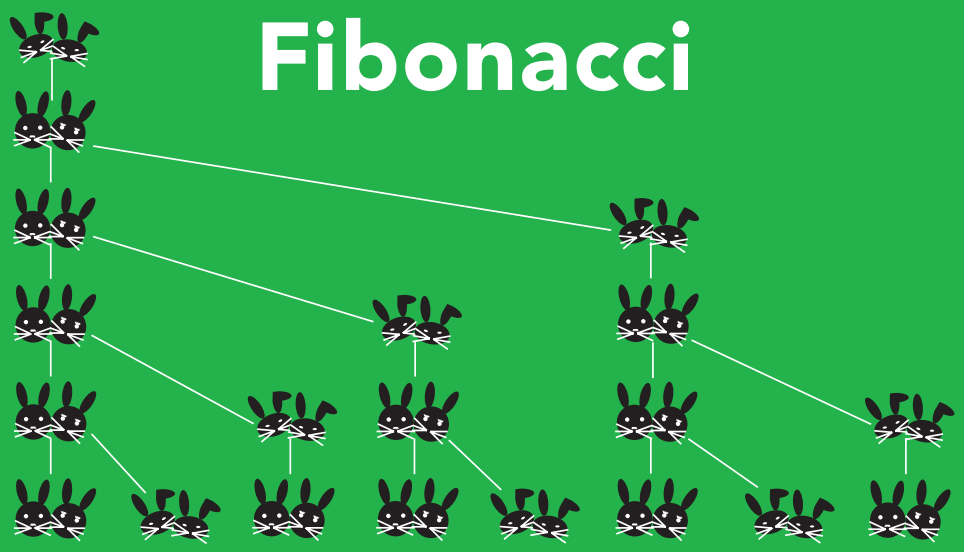
Is het mogelijk om de getallen 1, 2, 3, ..., 121 in de hokjes van een rooster van 11 bij 11 vierkantjes te schrijven onder de volgende voorwaarden:
1. Twee getallen die precies 1 schelen staan in twee vierkantjes die één zijde gemeenschappelijk hebben;
2. De kwadraten 1, 4, 9, ..., 121 staan in dezelfde kolom.

Oplossing. Dit kan niet. Omdat alle kwadraten in één kolom moeten staan, moet de getallen-slang precies bij ieder kwadraat deze kolom passeren. Dit betekent dat alle getallen tussen een even kwadraat en het volgende kwadraat aan de ene kant van deze kolom moeten komen. De getallen tussen een oneven en het daaropvolgende even kwadraat komen aan de andere kant van de kwadratenkolom. Het tellen van deze getallen geeft echter dat er aan één kant 50 en aan de andere kant 60 getallen moeten staan. Dit zijn geen elfvouden, en deze getallen passen dus niet in een geheel aantal kolommen.

Deze opgave werd goed opgelost door **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Milo van Holsteijn** van de RSG Pantarijn te Wageningen, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Nick Schmidts** van het Onze-Lieve-Vrouwecollege te Assebroek, **Jan Verbakel** uit Eindhoven en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar **Yvette Welling**.

door **Alex van den Brandhof**

De getallen van Fibonacci



In de Duitse stad Unna staat een toren waarop van onder naar boven in neonlicht een getallenreeks prijkt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987. Wie langs de toren loopt, gaat vanzelf zoeken naar een verband in de reeks. Een wiskundige zegt meteen: 'Ha! De getallen van Fibonacci.' De toren, die in de binnenkant van het omslag van deze *Pythagoras* is te zien, is van de Italiaanse kunstenaar Mario Merz (1925-2003), die in de jaren zeventig werd gefascineerd door de rij van Fibonacci.

De getallenrij werd voor het eerst beschreven in het rekenboek *Liber Abaci* uit 1202, van de hand van Leonardo Pisano, die beter bekend staat onder zijn bijnaam Fibonacci. In het boek komt de volgende opgave voor (vrij vertaald): *Een man plaatst één konijnenpaar in een afgesloten ruimte. Hoeveel konijnenparen zullen er na een jaar in het hok zitten, aangenomen dat elke maand elk paar een nieuw paar krijgt dat vanaf de tweede maand vruchtbaar is?*

Het antwoord kun je vinden door het uitschrijven van de aantallen per maand. Een onvruchtbaar konijn is de volgende maand een vruchtbaar konijn, een vruchtbaar konijn is er de volgende maand ook weer met een onvruchtbare nakomeling erbij. In het plaatje hierboven zie je (van boven naar beneden) de aantallen konijnenparen voor de eerste zes maanden. Noem het aantal konijnenparen in de n-de maand F_n. De aantallen konijnenparen kun je vinden door de aantallen van de voorgaande twee maanden bij elkaar op te tellen, ofwel: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 3$, en $F_1 = F_2 = 1$.

Fibonacci is overal

De Fibonacci-getallen kom je niet alleen in dit puzzeltje of in Unna tegen. Fibonacci komen we tegen in groente- en fruitsoorten, een Amerikaanse accountant vond in 1939 een verband tussen Fibonacci en het gedrag van de aandelenmarkt, een Hongaarse musicoloog ontdekte in 1957 de rij van Fibonacci in Bartóks *Muziek voor snaren, slagwerk en celesta*, en zo kunnen we nog wel even doorgaan. In hoeverre deze verbanden serieus genomen moeten worden, daar mag een ieder het zijne over denken.

Vast staat dat in de wiskunde de Fibonacci-getallen vaak op onverwachte plekken opduiken. In deze *Pythagoras* vind je hier twee voorbeelden van. In 'De wiskunde van Wouter Berkelmans' (pag. 12) lees je wat priemgetallen met Fibonacci te maken hebben. En in het hiernavolgende artikel 'Twee apen en twee typemachines' kun je lezen over het verband tussen Fibonacci en een aap die op een tweelettertypemachine twee gelijke letters achter elkaar wil typen.

Er bestaat een wetenschappelijk tijdschrift waarin nog veel meer verrassende Fibonacci-eigenschappen staan: *The Fibonacci Quarterly.*

door **Alex van den Brandhof**

Twee apen hebben elk een typemachine. Zij slaan lukraak op de toetsen van hun eigen typemachine. Hoe groot is de kans dat een gegeven woord bij aap 1 eerder op het papier verschijnt dan een (ander of hetzelfde) gegeven woord bij aap 2?

◆Twee apen en twee typemachines

illustratie
Suus van den Akker

In het vorige nummer van *Pythagoras* berekenden we de kans dat één aap met één typemachine een gegeven woord eerder typt dan een ander gegeven woord. In dit artikel bekijken we de volgende situatie.

Er zijn twee apen, elk met een eigen typemachine. Om de zaken niet al te gecompliceerd te maken, gaan we uit van typemachines met slechts twee toetsen: een A en een B. Kies twee 'woorden', bijvoorbeeld AB en AA. De apen beginnen op de toetsen te slaan, even snel en onafhankelijk van elkaar. Aap 1 stopt hiermee zodra hij AB op zijn papier heeft staan. Aap 2 stopt zodra hij AA heeft getypt.

Wat is de kans dat aap 1 eerder stopt dan aap 2? En wat is de kans dat aap 2 eerder klaar is? En ten slotte: wat is de kans dat de apen *tegelijkertijd* stoppen?
Om dergelijke kansen te berekenen, hebben we voor beide apen de *kansverdeling* nodig van het aantal letters dat moet worden getypt totdat het gekozen woord verschijnt.

De kansverdeling van aap 1

Eerst bepalen we de kansverdeling van N, het aantal aanslagen dat nodig is voor het woord AB. Als de aap n aanslagen nodig heeft om uiteindelijk AB te typen, hoe ziet het rijtje aanslagen er dan uit?

Dat rijtje mag beginnen met een serie B's, maar zodra er een A verschijnt, kunnen er alleen nog maar A's volgen tot aan de laatste aanslag, die uiteraard een B moet zijn.
De mogelijke rijtjes zijn dus ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$):

$$\underbrace{\mathrm{B}\cdots\mathrm{B}}_{k\times}\,\underbrace{\mathrm{A}\cdots\mathrm{A}}_{n-k-1\times}\,\mathrm{B}.$$

Dit zijn in totaal $n-1$ mogelijke rijtjes. Elk rijtje treedt met kans $(\frac{1}{2})^n$ op.
Voor $p_n = \mathbf{P}(N = n)$ geldt dus, voor $n \geq 1$:

$$p_n = (n-1)(\tfrac{1}{2})^n.$$

Dat met deze formule inderdaad een kansverdeling wordt vastgelegd, dat wil zeggen:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1,$$

kun je nagaan met de formules die in het artikel '(On)eindige reeksen' (zie pagina 26) worden besproken.

De kansverdeling van aap 2

Nu onderzoeken we de kansverdeling van M, het aantal aanslagen dat nodig is voor het woord AA. Als de aap n aanslagen nodig heeft om uiteindelijk AA te typen, hoe ziet het rijtje aanslagen er dan uit?

De laatste twee letters van het rijtje zijn natuurlijk A's. Daarvóór mogen geen twee A's naast elkaar staan, dus eventuele A's eerder in het rijtje moeten steeds alleen staan, tussen B's. Korte rijtjes die aan deze eis voldoen, kunnen we eenvoudig uitschrijven. Elk rijtje moet eindigen met AA, bij de rijtjes hieronder is dat steeds in groen aangegeven:

- lengte 2: AA;
- lengte 3: BAA;
- lengte 4: ABAA, BBAA;
- lengte 5: ABBAA, BABAA, BBBAA.

Om nu de mogelijke rijtjes van lengte 6 te maken, kunnen we uitgaan van die van lengte 5 en van lengte 4.

Bij een rijtje van lengte 5 moet na de laatste zwarte letter een B worden geplaatst, om een rijtje van lengte 6 te krijgen (een A mag niet: dan eindigt het rijtje met drie A's in plaats van twee).

Bij een rijtje van lengte 4 moeten na de laatste zwarte letter de letters AB worden geplaatst, om een rijtje van lengte 6 te krijgen (AA en BA mogen natuurlijk niet; BB mag wel, maar het zo verkregen rijtje hadden we al via de rijtjes van lengte 5).

Alle mogelijke rijtjes van lengte 6 krijgen we dus door elk rijtje van lengte 5 en 4 op een handige manier aan te vullen. Net zo kunnen we alle rijtjes van lengte 7 maken via de rijtjes van lengte 6 en 5.

Als we het aantal rijtjes van lengte n aangeven met m_n, geldt dus het volgende *recursieve verband*:

$$m_n = m_{n-1} + m_{n-2},\ m \geq 3.$$

Dit is de beroemde *rij van Fibonacci*, waarover je kunt lezen op pagina 22. De startwaarden zijn hier $m_1 = 0$ en $m_2 = 1$. Er zijn immers géén rijtjes van lengte 1 die eindigen met AA, en er is precies één rijtje van lengte 2, namelijk AA. De precieze afleiding van het recursieve verband lees je in kader 1.

Voor de rij van Fibonacci bestaat ook een *directe formule*. Voor onze startwaarden luidt die formule als volgt:

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Over deze formule schreef Klaas Pieter Hart een stukje in *Pythagoras* 40-1 (oktober 2000).

Omdat er in totaal 2^n rijtjes ter lengte n bestaan, geldt dus voor $q_n = \mathbf{P}(M = n)$ de volgende formule, voor $n \geq 1$:

$$q_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Ook hier geldt:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = 1,$$

zoals je weer kunt nagaan met de formules in '(On)eindige reeksen'.

De kansen

Nu we de kansverdelingen voor beide apen hebben vastgesteld, kunnen we uitrekenen wat de kans is dat aap 1 eerder AB typt dan dat aap 2 AA typt. Stel, aap 2 doet n aanslagen. Dan moet aap 1 *minder* dan n aanslagen doen. De betreffende kans krijgen we door alle kansen te sommeren met lengte n voor aap 2 en lengte $k < n$ voor aap 1:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1} p_k \cdot q_n\right) = \frac{65}{121}.$$

Op dezelfde manier kunnen we de kans dat aap 2 eerder AA typt dan dat aap 1 AB typt, berekenen:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1} q_k \cdot p_n\right) = \frac{39}{121}.$$

De kans dat de apen even veel aanslagen doen totdat aap 1 AB typt en aap 2 AA, is gelijk aan

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n \cdot q_n = \frac{17}{121}.$$

Deze sommen heb ik met *Maple* berekend, maar met wat ijver en geduld moet het ook lukken door de formules op de volgende pagina's te gebruiken. In kader 2 staan de kansen voor alle situaties met tweeletter-woorden.

Langere woorden of meer letters

Hoe bereken je kansen op dit soort situaties als de apen een langer woord kiezen, bijvoorbeeld AAB respectievelijk AAA? Of als het aantal toetsen op de typemachines groter dan twee is? Mocht je zelf aan het rekenen slaan, dan horen wij graag je resultaten.

2

aap 1 \ aap 2	AA	AB	BA	BB
AA	$\frac{11}{25}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{11}{25}$
AB	$\frac{65}{121}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{65}{121}$
BA	$\frac{65}{121}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{65}{121}$
BB	$\frac{11}{25}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{39}{121}$	$\frac{11}{25}$

a. De kans dat aap 1 zijn woord eerder typt dan dat aap 2 zijn woord typt.

aap 1 \ aap 2	AA	AB	BA	BB
AA	$\frac{3}{25}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{3}{25}$
AB	$\frac{17}{121}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{17}{121}$
BA	$\frac{17}{121}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{17}{121}$
BB	$\frac{3}{25}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{3}{25}$

b. De kans dat aap 1 en aap 2 even veel aanslagen doen om hun woord op papier te laten verschijnen.

1

Fibonacci en de typende aap

We noteren met m_n het aantal rijtjes ter lengte n bestaande uit A's en B's, waarbij AA alléén op de laatste twee plaatsen voorkomt. Voor $n \geq 3$ geldt dat die rijtjes eindigen met BAA.

Voor m_n kunnen we een *recursief verband* opstellen. Behalve m_n voeren we in: m_n^{BA}, het aantal rijtjes ter lengte n dat eindigt met BA en waarbij nooit AA voorkomt, en m_n^{B}, het aantal rijtjes ter lengte n dat eindigt met B en waarbij nooit AA voorkomt.
Dan geldt:

$$m_n = m_{n-1}^{\mathrm{BA}}, \qquad (1)$$

$$m_n^{\mathrm{BA}} = m_{n-1}^{\mathrm{B}}, \qquad (2)$$

$$m_n^{\mathrm{B}} = m_{n-1}^{\mathrm{B}} + m_{n-1}^{\mathrm{BA}}. \qquad (3)$$

De vergelijkingen (1) en (2) geven

$$m_n = m_{n-2}^{\mathrm{B}} \qquad (4)$$

en de vergelijkingen (2) en (3) geven

$$m_n^{\mathrm{B}} = m_{n-1}^{\mathrm{B}} + m_{n-2}^{\mathrm{B}}. \qquad (5)$$

Ten slotte geven (4) en (5) nu

$$m_{n+2} = m_{n+1} + m_n.$$

De startwaarden zijn $m_1 = 0$ en $m_2 = 1$.

door **Jan Guichelaar**

Zoals je misschien wel weet, kan een reeks uit oneindig veel termen bestaan en toch een eindige som hebben. Als je $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... bij elkaar optelt, zul je nooit boven de 1 uitkomen. In dit artikel berekenen we sommen van enkele reeksen. De formules die we voor deze sommen vinden, kun je toepassen bij het artikel 'Twee apen en twee typemachines' op pagina 23.

◆◆(On)eindige reeksen sommeren

Deel een lijnstuk van lengte 1 in twee gelijke stukken. Deel één van die stukken opnieuw in twee gelijke stukken. Van de twee verkregen stukken deel je er weer één in tweeën en zo ga je eindeloos verder. Op die manier krijg je lijnstukjes met de lengtes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, enzovoorts. Bij elkaar vormen al die lijnstukjes het lijnstuk waarmee je begon, zodat we kunnen concluderen dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$.

De meetkundige reeks

De reeks $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ is een voorbeeld van een reeks die veel voorkomt in de wiskunde: de *meetkundige reeks*

$$r + r^2 + r^3 + \cdots$$

waarbij r de *reden* van de reeks is. In de voorbeeldreeks is de reden gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Om de som van een reeks met oneindig veel termen uit te rekenen, is het vaak handig om te doen alsof je die som S al weet, en daarmee dan te gaan vermenigvuldigen, optellen en aftrekken. Als je dat slim doet, vallen bijna alle termen tegen elkaar weg en blijft er een uitdrukking over waar S uit rolt.

Met S_n noteren we de som van de eerste n termen van een meetkundige rij, dus

$$S_n = r + r^2 + \cdots + r^n.$$

Om een vaste uitdrukking voor S_n te vinden, schrijven we $(1-r)S_n$ uit:

$$\begin{aligned}(1-r)S_n = \quad & 1 \times (r + r^2 + \cdots + r^n \qquad\quad) + \\ & -1 \times (\quad\; r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1})\end{aligned}$$

De rode termen vallen twee aan twee tegen elkaar weg, zodat geldt:

$$(1-r)S_n = r - r^{n+1},$$

ofwel

$$S_n = \frac{r(1-r^n)}{1-r}.$$

Als $|r| < 1$, dan kunnen we n naar oneindig laten gaan. De waarde van r^n wordt dan 0. We noemen deze som S:

$$S = \frac{r}{1-r}.$$

Moelijkere reeksen

We bekijken nu een algemenere vorm:

$$S_{p,n} = 1^p r^1 + 2^p r^2 + 3^p r^3 + \cdots + n^p r^n.$$

Hier is p een vast gekozen getal. Voor $p = 0$ is deze reeks de zojuist besproken meetkundige reeks. We nemen nu $p = 1$. Om de som te bepalen, schrijven we $(1-r)^2 S_{1,n} = (1-2r+r^2)S_{1,n}$ uit:

$$\begin{aligned}(1-r)^2 S_{1,n} = \; & 1 \times (r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n) + \\ & -2 \times (r^2 + 2r^3 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1}) + \\ & +1 \times (r^3 + \cdots + (n-2)r^n + (n-1)r^{n+1} + nr^{n+2})\end{aligned}$$

Elk drietal termen dat recht onder elkaar staat, is samen 0 (rekening houdend met de voorfactoren 1, –2 en 1). Hierdoor vallen de rode termen weg, en houden we alleen de zwarte termen over. Zo krijgen we

$$(1-r)^2 S_{1,n} = r + 2r^2 - 2r^2 - 2nr^{n+1} + (n-1)r^{n+1} + nr^{n+2},$$

ofwel

$$S_{1,n} = \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1}}{(1-r)^2}.$$

Voor $|r| < 1$ kunnen we weer de limiet nemen voor $n \to \infty$:

$$S_1 = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

We gebruiken hier dat kr^k nul wordt, als k oneindig groot wordt (mits $|r| < 1$), omdat de macht r^k 'harder' naar nul gaat dan k naar oneindig. Dit wordt hier niet bewezen, maar met je rekenmachine kun je er wel een goed idee van krijgen, door bijvoorbeeld $r = \frac{1}{2}$ te nemen en voor steeds grotere waarden van k het product kr^k uit te rekenen.

Als laatste bekijken we het geval $p = 2$.
We schrijven $(1-r)^3 S_{2,n} = (1-3r+3r^2-r^3)S_{2,n}$ uit:

$$\begin{aligned}&(1-r)^3 S_{2,n} = \\ & 1 \times (r + 2^2r^2 + 3^2r^3 + 4^2r^4 + \cdots + n^2r^n) + \\ & -3 \times (r^2 + 2^2r^3 + 3^2r^4 + \cdots + (n-1)^2r^n + n^2r^{n+1}) + \\ & +3 \times (r^3 + 2^2r^4 + \cdots + (n-2)^2r^n + (n-1)^2r^{n+1} + n^2r^{n+2}) + \\ & -1 \times (r^4 + \cdots + (n-3)^2r^n + (n-2)^2r^{n+1} + (n-1)^2r^{n+2} + n^2r^{n+3})\end{aligned}$$

Opnieuw worden de rode termen samen 0 en houden we de twaalf zwarte termen over. Om S_2 (de limietwaarde voor $n \to \infty$) te berekenen, zijn wederom alleen de zes linker termen nodig. De zes rechter termen worden immers weer allemaal nul, omdat de machten r^k het winnen van k^2 en k (mits $|r| < 1$). Zo krijgen we

$$S_2 = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}.$$

Ten slotte

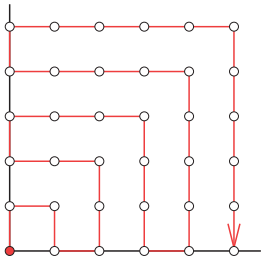
We kunnen zo eindeloos verder gaan. Voor elke waarde van p kun je voor de som een uitdrukking vinden in r. Probeer zelf eens zo'n uitdrukking te vinden voor $p = 3$ en $p = 4$.

˙Problemen

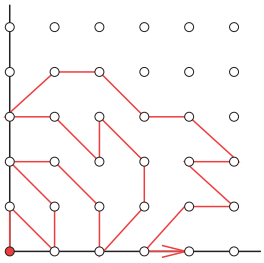
door **Dion Gijswijt**

Zeven rovers
Zeven rovers hebben een grote buit die ze veilig willen stellen in een kluis. Om de kluis te sluiten, gebruiken ze meerdere sloten en niet iedereen krijgt de sleutel van elk slot. Omdat ze elkaar voor geen goud vertrouwen, doen ze het zo, dat een meerderheid van de zeven rovers altijd de kist kan openen, maar een minderheid nooit. Hoe kunnen ze deze taak volbrengen?

Wandeling
In de figuur zie je hoe je alle roosterpunten in het positieve kwadrant één voor één kunt aflopen door telkens een stap horizontaal of verticaal te zetten.



Kun je ook zo'n wandeling maken waarbij je afwisselend een stap horizontaal/verticaal zet en een stap diagonaal? Hieronder zie je een mislukte poging.



Magisch verschil
Verdeel de getallen 1 tot en met 20 in twee groepen van tien. Laat

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$$

de getallen in de eerste groep zijn en

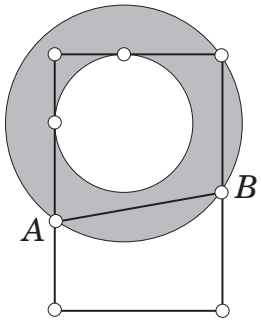
$$y_1 > y_2 > \cdots > y_{10}$$

de getallen in de tweede groep. Wat is de grootste waarde die de som

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_{10} - y_{10}|$$

kan hebben?
Een voorbeeld: als we $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 18, 19, 20\}$ en $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$ nemen, dan wordt de som $14 + 12 + 9 + 5 + 1 + 4 + 9 + 12 + 15 + 19 = 100$.

Snede
In de figuur zie je twee cirkels met hetzelfde middelpunt. Een rechthoekige strip raakt de kleine cirkel. Als de straal van de grote cirkel 10 is, wat is dan de lengte van AB?

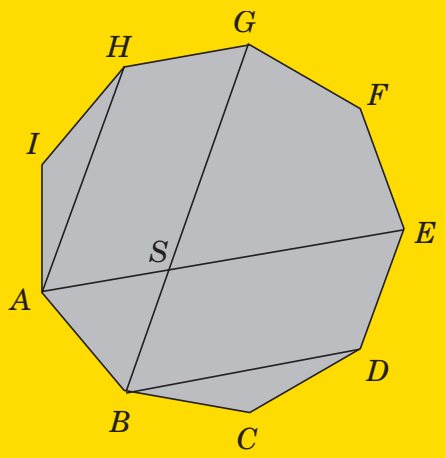


Oplossingen

Koerier

Omdat A schrijft naar D, D naar E en E weer naar A, moet minstens een van deze personen tweemaal worden bezocht. Het aantal bezoeken dat nodig is, is dus minstens 6. En 6 is ook voldoende: $D \to E \to A \to B \to C \to D$.

Regelmatige negenhoek

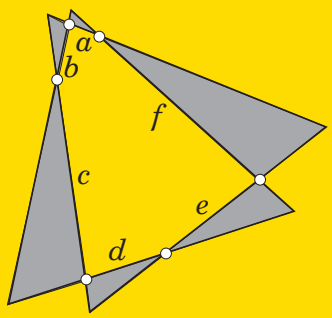


We bewijzen dat $|AB| + |BD| = |AE|$. Omdat AH parallel is aan BG en AS parallel is aan GH, is $ASGH$ een parallellogram en geldt $|AS| = |GH| = |AB|$. Net zo is $BDES$ een parallellogram en geldt $|SE| = |BD|$.

Muntjes

De kans dat Kristine vaker *kop* gooit dan Monique, is gelijk aan de kans dat zij vaker *kop* gooit dan Monique *munt* gooit. Dat gebeurt precies dan wanneer minstens vier van de zeven munten *kop* zijn. De kans daarop is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Zeshoek



Merk op dat de zes gekleurde driehoekjes gelijkvormig zijn. Van zo'n driehoekje met basis x is de oppervlakte evenredig met x^2 en de omtrek evenredig met x. Er zijn dus getallen α en β zó, dat $\alpha(a^2 + c^2 + e^2) = \alpha(b^2 + d^2 + f^2)$ en $(\beta - 1)(a + c + e) + b + d + f = (\beta - 1)(b + d + f) + a + c + e$. Dus

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

en

$$a + c + e = b + d + f.$$

Oftewel: $a^2 + 193 = 185 + b^2$ en $a + 19 = b + 17$ en dus $a = 1$ en $b = 3$.

De elliptische kromme in je telefoon

door **Reinier Bröker**

In de zomer van 2005 verkocht Nokia zijn miljardste mobiele telefoon. De eerste werd in 1982 verkocht en woog ongeveer 15 kilo. Dat de technologie een grote stap voorwaarts heeft gemaakt, blijkt wel uit het feit dat de huidige telefoons slechts een paar honderd gram wegen. In dit artikel lichten we een aspect van deze technologie eruit: de beveiliging van persoonsgegevens.

In iedere telefoon is een unieke identificatiecode ingebouwd. Als je iemand belt, dan wordt deze code verstuurd naar de telefoonaanbieder, bijvoorbeeld KPN of Vodafone. Zo kan de aanbieder zien naar wie hij de rekening voor het gesprek moet sturen. Het is van groot belang dat het versturen van de identificatiecode 'veilig' gebeurt. Als iemand deze code onderschept, dan kan hij voortaan op jouw kosten bellen!

We willen de identificatiecode eerst versleutelen voordat de telefoon hem verzendt naar de aanbieder. Er zijn veel manieren om informatie te versleutelen. In telefoons wordt tegenwoordig gebruik gemaakt van *elliptische krommen*. Een elliptische kromme is een wiskundig object dat speciale eigenschappen heeft die ons in staat stellen om snel en makkelijk informatie te versleutelen.

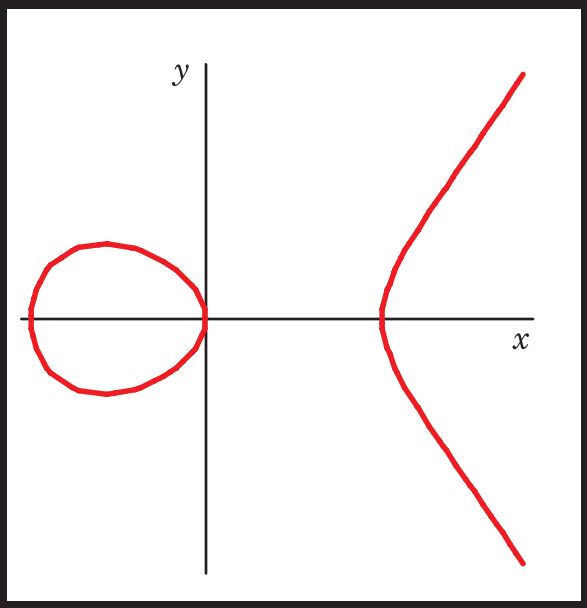
Elliptische krommen

Er zijn vele manieren om te zeggen wat een elliptische kromme precies 'is'. Een 'goede' definitie zou een diepgaand wiskundecollege vereisen. Voor ons is een elliptische kromme echter niets meer dan een vergelijking van de vorm

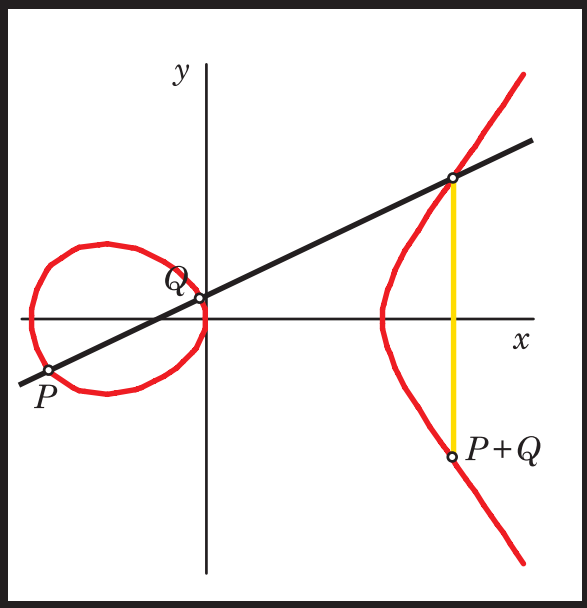
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

In deze vergelijking zijn x en y onbekenden, en a en b zijn bijvoorbeeld reële getallen. Als we $a = -1$ en $b = 0$ nemen, dan krijgen we een kromme waarvan de grafiek eruit ziet als in figuur 1.

We zien dat de kromme uit twee delen bestaat: een soort ellips aan de linkerkant en een kromme lijn aan de rechterkant. Van een hoger standpunt bezien is die kromme lijn



Figuur 1 De grafiek van $y^2 = x^3 - x$



Figuur 2 De som van twee punten op een kromme

eigenlijk ook een soort ellips, maar een van zijn punten kunnen we niet zien in dit plaatje. Oneindig hoog op de y-as ligt nog een punt, meestal O genaamd.

Een van de wonderlijke eigenschappen van een elliptische kromme is dat je twee punten op de kromme kunt 'optellen'. In figuur 2 zie je nogmaals de kromme van figuur 1, maar nu hebben we ook twee punten P en Q op de kromme geprikt. Als we een rechte lijn door P en Q tekenen, dan zien we dat deze lijn de kromme in een uniek derde punt snijdt. Dit snijpunt spiegelen we in de x-as en het resulterende punt noemen we de *som* $P + Q$.

Dit is natuurlijk slechts een definitie van '$P + Q$', maar er blijkt dat deze definitie een aantal mooie eigenschappen heeft. Als we bijvoorbeeld vanuit P een lijn naar O tekenen, dan moeten we wel een verticale lijn door P tekenen. Deze verticale lijn snijdt de kromme in een uniek punt. Om de som $P + O$ te krijgen, moeten we dit punt nog spiegelen in de x-as. We zien dat $P + O = P$, ofwel: O is een soort 'nul-element' voor de optelling. Ook hebben we $P + Q = Q + P$: onze optelwet is symmetrisch in P en Q.

Wie van bovenstaand plaatje een kunstwerk wil maken, kan proberen te bewijzen dat ook $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ geldt. De eigenschappen van deze optelwet op een elliptische kromme doen sterk denken aan de optelling van natuurlijke getallen. Wiskundigen zeggen nu dat de punten op een elliptische krommen een (*abelse*) *groep* vormen.

Terug naar versleuteling

Iedere mobiele telefoon bevat tegenwoordig een elliptische kromme en een punt P op deze kromme. Concreet betekent dit dat er een paar getallen in een chip gebrand zijn. Deze kromme en het punt P zijn niet geheim: de hele wereld mag ze weten. De telefoon kiest nu een willekeurig geheel getal t en berekent het punt tP. Met tP bedoelen we het punt dat we krijgen als we t keer het punt P bij zichzelf optellen (optellen in de zin van de vorige paragraaf!). De telefoon verstuurt nu tP naar de telefoonaanbieder en houdt t strikt geheim.

KPN (of een andere aanbieder) weet ook welke kromme en welk punt er in de telefoon geprogrammeerd zijn. Ze kiezen een willekeurig geheel getal u. KPN berekent nu het punt uP en stuurt dat terug naar de telefoon. De telefoon weet nu zijn eigen geheime getal t, maar ook het punt uP. Ergo: hij kan het punt $(tu)P$ berekenen. KPN weet zijn eigen geheime getal u, maar ook het punt tP. Ook zij kunnen dus $(ut)P = (tu)P$ uitrekenen. Merk op dat de telefoon niet zijn geheime getal t aan KPN hoeft te sturen, evenmin als KPN zijn geheime getal u aan de telefoon stuurt.

Zowel de telefoon als KPN weet nu het punt $(tu)P$. Zo'n punt bestaat uit een x- en

een y-coördinaat. Als we nu de x-coördinaat optellen (gewoon als getal) bij de identificatiecode, dan krijgen we iets dat er voor de buitenwereld als een random getal uitziet. Dit getal wordt door de telefoon verstuurd. KPN krijgt dit binnen en trekt de x-coördinaat van $(tu)P$ er weer vanaf om de identificatiecode te krijgen. Zo weet KPN welke telefoon er gebeld heeft en dus naar wie de rekening verstuurd moet worden.

Is dit veilig?

Wanneer is bovenstaande algoritme 'veilig'? Ofwel: wat gebeurt er als iemand het dataverkeer tussen telefoon en aanbieder onderschept? Kan hij dan de identificatiecode alsnog achterhalen? De enige situatie waarin hij dit zou kunnen doen, is als ook hij het punt $(tu)P$ weet.

Degene die een bericht onderschept, weet een boel: hij weet de elliptische kromme, het punt P en de punten tP en uP. Om $(tu)P$ uit te rekenen, zal hij echter ofwel het geheime getal t ofwel het geheime getal u moeten achterhalen. Het blijkt dat dit voor geschikte elliptische krommen erg moeilijk is.

'Moeilijk' betekent hier dat alle wiskundigen ter wereld de afgelopen twintig jaar nog geen snelle manier hebben gevonden om dit te doen. De tijd die een aanvaller nodig zou hebben, zou met gemak meer kunnen zijn dan de leeftijd van het heelal. Lichtelijk onpraktisch dus. Dit betekent echter niet dat het probleem om t of u te achterhalen volgende week ook nog 'moeilijk' is. Dat nog niemand iets slims bedacht heeft, betekent niet dat er niet iemand uit Zimbabwe op zou kunnen staan die uitlegt hoe het simpel kan. In zekere zin berust de veiligheid van dit systeem op de onkunde van wiskundigen!

De ene elliptische kromme is geschikter dan de andere. De kromme uit dit artikel zou ik niemand willen aanraden die zelf zijn eigen telefoon wil bouwen. Deze kromme is volstrekt niet veilig, dus je kunt hoge telefoonrekeningen verwachten. De truc is voor de coëfficiënten a en b in de vergelijking geen reële getallen, maar getallen 'modulo p' te nemen. Hier is p een priemgetal van ongeveer 200 cijfers. Een getal modulo p bekijken is niets anders dan de rest te nemen bij deling door p. Zo is 17 gelijk aan 2 modulo 5. Getallen modulo p kun je net als natuurlijke getallen optellen en vermenigvuldigen. Als je een elliptische kromme modulo p neemt, dan krijg je in het algemeen een veilig systeem om de identificatiecode te versturen.

Elektronisch stemmen

Elliptische krommen worden niet alleen gebruikt bij mobiele telefoons. Ook bij bijvoorbeeld internetbetalingen worden elliptische krommen gebruikt. Hier willen we namelijk ook informatie uitwisselen via een 'onveilig medium'.

Onlangs is in Denemarken een proef begonnen met elektronisch stemmen. Hier wil je niet alleen maar informatie veilig versturen, maar je wilt ook graag de informatie 'ondertekenen'. Met een digitale handtekening kun je een uitgebrachte stem koppelen aan een persoon. Zo dwing je af dat het onmogelijk wordt dat iemand zich als jou voordoet om persoon X meer stemmen te geven.

Elliptische krommen blijken bij uitstek geschikt om deze digitale handtekeningen te maken. Iedere inwoner van (een deel van) Denemarken krijgt een punt op een kromme thuisgestuurd dat hij vervolgens moet gebruiken bij het stemmen. Wellicht dat het in de brief van de Deense overheid geen punt op een elliptische kromme heet (niet iedereen heeft immers voldoende wiskundecolleges gevolgd...), maar het idee is hetzelfde. De proef in Denemarken was uiterst geslaagd en men verwacht dat elektronisch stemmen op grotere schaal ingevoerd gaat worden.

Een groot voordeel van elektronisch stemmen is natuurlijk dat er niets meer mis kan gaan bij het tellen van de stemmen. Ook is de einduitslag van de verkiezingen direct bekend. De soap van zes jaar geleden in Florida had hiermee voorkomen kunnen worden! Hadden ze in de VS meer kennis gehad van elliptische krommen, dan had de wereld er wellicht heel anders uitgezien.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 2

Munt ruilen
Saar had munten van 1 en 2 euro en van 2 en 50 cent (totaal € 3,52), Suus had munten van 1, 2, 5, 10, 20, en 50 cent (totaal € 0,88). Saar ruilt haar 2 centmunt voor die van 50 cent van Suus. Dan heeft Saar € 4,00 en Suus € 0,40.

Weegprobleem
Noem de drie gewichtjes a, b en c. Weeg a en b in de eerste weging en a en c in de tweede weging. In een paar gevallen moet je dan nog b en c wegen in een derde weging.

De letter 'e'
Als je een woord invult, moet je 'elf' invullen (en niet 'tien'). Als je cijfers invult, moet je '10' invullen.

Daklozenkrant
Walter heeft, doordat hij de krant teruggeeft, de dakloze 2 euro gegeven.

Even en oneven data
De eerste oneven datum na 02.02.2000 is 11.11.3111 en de laatste even datum voor 19.11.1999 is 28.08.888.

COLOFON

46ste jaargang nummer 3
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail
info@pythagoras.nu
Internet
www.pythagoras.nu
Hoofdredacteur
Arnout Jaspers
Eindredacteur
Alex van den Brandhof
Redactie
Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Marco Swaen, René Swarttouw, Chris Zaal
Bladmanager
Chris Zaal
Vormgeving
Sonja en Esther, Amsterdam
Druk
Giethoorn Ten Brink, Meppel
Uitgever
Koninklijk Wiskundig Genootschap
Verantwoordelijk uitgever
Chris Zaal

Redactiesecretariaat
Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij
René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176 E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nrs per jaargang)
€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. R.M. Bröker, onderzoeker aan de Universiteit van Calgary (reinier@math.ucalgary.ca), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), B. van Dalen, student wiskunde aan de UL (birgit@vierkantvoorwiskunde.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), drs. I. Smeets, aio multidimensionale kettingbreuken en wiskundige algoritmes aan de UL (smeets@math.leidenuniv.nl), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu).

Sponsors
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

Op een eend

Een eend die bij Pythagoras
de leer der zielsverhuizing las,
schreef aan zijn achternicht te Strijp:
'Als ik 's mans stelling goed begrijp
dan zegt hij, maar hij zegt het mooier:
wie dood is wordt voortdurend dooier.'

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse