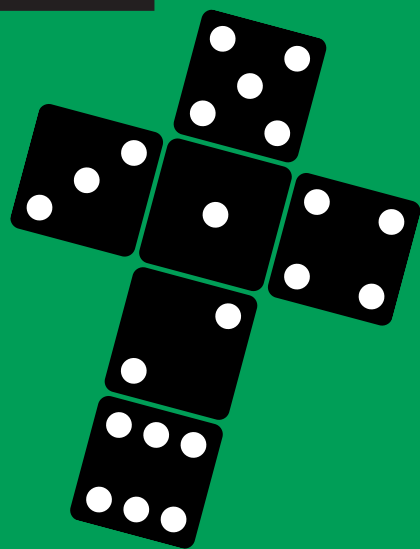


PYTHA GORAS





De GateWay Arch is een boog van 192 meter hoog die de symbolische toegangspoort vormt tot St. Louis in de Verenigde Staten. Hij heeft vrijwel exact de vorm van een omgekeerde kettinglijn (lees het artikel op pagina 22).

BESTAAT ONEINDIG?

Niemand beweert dat je tellend vanaf 1 ooit bij een getal komt waar je niet meer voorbij kan. De verzameling natuurlijke getallen is dus duidelijk niet eindig. Maar bestaat het oneindig grote geheel van alle gehele getallen? Het omgekeerde is net zo problematisch: je kunt een lijnstukje in tweeën delen, de helften weer in tweeën, de kwarten weer in tweeën, enzovoort, enzovoort. Hou je losse punten over als je dit in gedachten oneindig vaak doet? Bestaat elk lijnstuk, ongeacht de lengte, dus uit even veel punten, en zijn dat er even veel als er natuurlijke getallen zijn?

In vroeger eeuwen dacht men dat over zulke gekmakende kwesties geen zinnig woord te zeggen viel, maar later bleek het toch nodig om echt uit te zoeken hoe dat zat. Raar genoeg is het namelijk vaak veel eenvoudiger om met oneindigheid te rekenen dan met eindigheid, als je tenminste alle valkuilen rond dat begrip weet te ontlopen.

In het thema-artikel van deze maand, 'Waslijnkrommen', laten we bijvoorbeeld zien wat de vorm van een hangbrug is. Daar komt een heel simpele formule uit, maar alleen als je doet alsof het wegdek met oneindig veel, oneindig dunne kettingen aan de hoofdkabel is opgehangen.

Een van de redenen dat oneindigheid telkens verwarring wekt, is dat er meerdere soorten van zijn, oneindig veel zelfs. Daarvan krijg je een idee door in dit nummer een bezoek te brengen aan een hotel dat nooit vol is, óók als er geen kamers vrij zijn.

1

INHOUD

2 – 3	Kleine nootjes	20 – 21	Pythagoras Olympiade
4	Journal	22 – 25	Waslijnkrommen
5	Kobon-driehoeken	26 – 27	Problemen – Oplossingen
6 – 7	Kansen en niet-transitiviteit [Omslag: de niet-transitieve dobbelstenen van Bradley Efron]	28 – 31	De tussenwaardestelling
8 – 9	(On)opgelost	31	Oplossingen 16-gaten-puzzel, kleurrijke kaarten
10 – 13	De wiskunde van Phyllis Joris	33	Oplossingen Kleine nootjes nr. 3
14	Verwisselsommen		
15 – 19	Hilbert Hotel volgeboekt?		
19	Symposium Bruno Ernst		

Niveausymbooltjes

Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de wiskunde nodig is, hebben bij de titel een symbool voor de moeilijkheidsgraad. Artikelen met ♦ zijn vanaf de vierde klas te begrijpen. Voor artikelen met ♦♦ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ♦♦♦ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

2

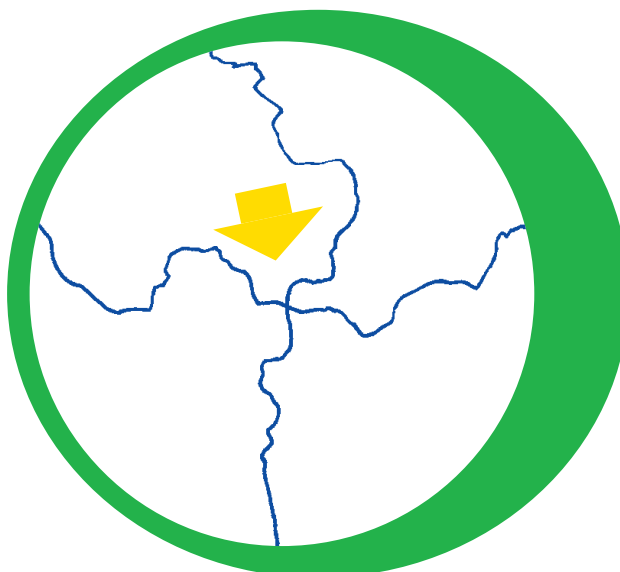


Verhuizen

Leo heeft verhuisdozen van 30 bij 40 bij 50 centimeter, die rechtop moeten staan (de hoogte is 30 cm). De laadruimte van zijn busje is 2 meter lang, 1,30 meter breed en 1,20 meter hoog. Hoeveel dozen kan Leo in zijn busje kwijt?

Landkaart kleuren

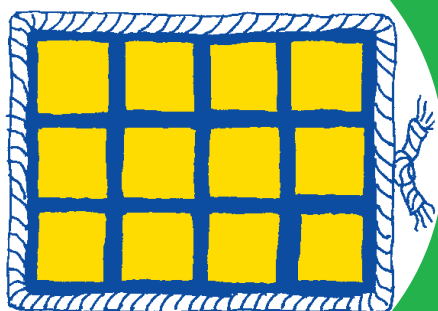
Je wilt de landkaart die je hiernaast ziet inkleuren. Je hebt drie kleuren. Aan weerszijden van een grens wil je geen gelijke kleuren gebruiken. Op hoeveel manieren kun je deze landkaart kleuren?



Getallenrij

Hiernaast zie je de eerste vier getallen van een rij. Hoe gaat de rij verder?

12, 42, 48, 168...



Balken samenbinden

Je hebt twaalf lange balken met een dwarsdoorsnede van 10 bij 10 cm. Als je ze wilt samenbinden, kun je dat doen zoals in het plaatje hiernaast. Je hebt dan een stuk touw van 140 cm nodig (plus iets extra om de uiteinden van het touw vast te maken). Kun je met een andere stapeling van de balken met minder touw toe?

Pythagorassom

De negen verschillende letters in het woord PYTHAGORAS staan voor de cijfers 1 tot en met 9. Vind een oplossing van de som hiernaast. Er zijn meerdere mogelijkheden!

PYT
HAG
ORAS

+

door Alex van den Brandhof

Wiskundig bewijs wetenschappelijke doorbraak 2006

De Rus Grigori Perelman loste een paar jaar geleden het Poincaré-vermoeden, een hardnekkig vraagstuk uit de topologie, op. Zijn bewijs was zo complex, dat wiskundigen een paar jaar nodig hadden om zijn manuscript te controleren. In 2006 was de controle eindelijk klaar. Perelman verdiende met zijn bewijs in augustus 2006 de prestigieuze Fields Medal, maar bedankte voor de eer.

Perelmans bewijs is volgens het Amerikaanse weekblad *Science* de wetenschappelijke doorbraak van het jaar 2006.

Science publiceerde op 22 december een top tien van de wetenschap van het afgelopen jaar. De topprestatie van Perelman heeft geleid tot heftige controverses en dramatische gebeurtenissen: Perelman gaf aan de wiskunde de rug toe te keren, omdat hij 'teleurgesteld is geraakt in de wiskunde'.

Behalve de wiskundige doorbraak komen in de top tien onder andere de volgende resultaten voor: het isoleren van DNA uit Neandertalers, de satellietmetingen die aantoonde dat het Noordpoolijs jaarlijks

procenten slinkt, de vondst van een 375 miljoen jaar oude fossiele overgangsvorm tussen vis en landdier, een onzichtbaarheidsmantel, en een lichtmicroscopie die meer detail biedt dan met licht mogelijk leek.

De omslag van *Science* 22 december 2006

4

Nieuwe priemtweling ontdekt

Een *priemtweling* is een paar priemgetallen die een verschil van precies 2 hebben. De rij priemtwelingen begint zo: (3, 5), (5, 7), (11, 13), Verderop in de rij kom je bijvoorbeeld (599, 601) en (881, 883) tegen.

Op 15 januari 2007 werd de tot nu toe grootste bekende priemtweling ontdekt door Eric Vautier uit Frankrijk: het getallenpaar $2003663613 \times 2^{195000} \pm 1$ bestaat uit twee priemgetallen van elk 51090 cijfers. Dit gebeurde in het kader van *Twin Prime Search*, een project

waaraan iedereen kan meedoen door de rekencapaciteit van zijn computer optimaal te benutten. Het gaat hierbij om het zoeken naar speciale priemtwelingen, namelijk priemtwelingen van de vorm $k \times 2^n \pm 1$.

Een open probleem in de wiskunde is de vraag of de rij priemtwelingen ooit ophoudt. Men vermoedt dat dit niet zo is, maar een bewijs van het bestaan van oneindig veel priemtwelingen heeft nog niemand kunnen vinden.

Bron:
www.twinprimerearch.org

Nieuw bewijs oneindig veel priemgetallen

Een priemgetal is een getal met precies twee delers. Het kleinste priemgetal is 2 en de rij gaat zo verder: 3, 5, 7, 11, 13, 17, Dat er nooit een eind aan deze rij komt, werd al 300 jaar voor Christus bewezen door de Griek Euclides. Grote wiskundigen, waaronder Leonhard Euler en Paul Erdős, hebben nieuwe bewijzen geleverd voor het feit dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Kort geleden werd er opnieuw een bewijs gevonden. Filip Saidak, een Slowaaks wiskundige die tegenwoordig werkzaam is op de universiteit van North Carolina

in Greensboro (VS), publiceerde in de *American Mathematical Monthly* van december 2006 een verrassend eenvoudig en kort bewijs, zie kader.

Bewijs van het bestaan van oneindig veel priemgetallen.

Stel n is een geheel getal groter dan 1. De getallen n en $n + 1$ verschillen slechts 1 en hebben dus geen gemeenschappelijke priemfactoren. Dat betekent dat het getal $N_2 = n(n + 1)$ ten minste twee verschillende priemfactoren heeft. Voor de getallen N_2 en $N_2 + 1$ geldt hetzelfde: zij verschillen slechts 1 en moeten dus ten minste twee verschillende priemfactoren hebben. Het getal $N_3 = N_2(N_2 + 1) = n(n + 1)[n(n + 1) + 1]$ heeft dus minimaal drie verschillende priemfactoren. Dit proces kan eindeloos worden voortgezet: het getal N_k heeft ten minste k priemfactoren. Omdat dit voor elk positief geheel getal k geldt, kan de rij priemgetallen nooit ophouden.

door Maarten Hoeve

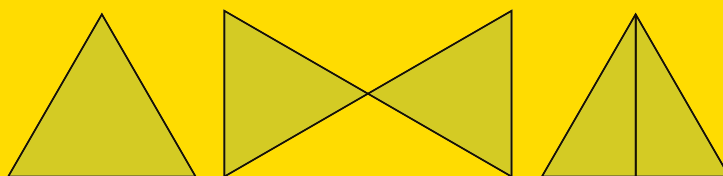
Kobon-driehoeken

De Japanse puzzelexpert Kobon Fulimura bedacht in 1983 het volgende probleem: wat is het grootste aantal niet-overlappende driehoeken dat je kunt maken met n rechte lijnen?

De wiskundige Sabura Tamura bewees dat het er maximaal $\frac{1}{3}n(n-2)$ zijn (afgerond naar beneden als de formule geen geheel getal oplevert). Zijn bewijs was echter niet

'constructief'. Dat wil zeggen: uit zijn bewijs bleek dat het moest kunnen, maar er zat geen recept bij waarmee je zo'n maximale oplossing kunt maken.

Hieronder staan maximale oplossingen voor drie (links) en vier (midden en rechts) lijnen. Ook de laatste figuur bevat maar twee Kobon-driehoeken, omdat de grote overlapt met de twee kleinere.



Puzzelaars over de hele wereld zijn sindsdien bezig geweest met dit probleem. Voor sommige gevallen die al aardig op een leeggeschudde doos tandenstokers beginnen te lijken, is een maximale oplossing bekend. Zie hieronder bijvoorbeeld de 65

Kobon-driehoeken die je kunt maken met 15 lijnen. Deze figuur is ontdekt door Toshitaka Suzuki. Maar voor sommige lagere aantallen lijnen is nog steeds geen maximale oplossing gevonden.



Op internet is van alles over Kobon-driehoeken te vinden, maar het is natuurlijk veel uitdagender om eerst zelf aan de slag te

gaan. Stel je voor: je kunt al eeuwige roem verwerven als het je lukt om met zes lijnen acht Kobon-driehoeken te maken.

Kansen en niet-transitiviteit

Voor een proefwerk heeft Arie een lager cijfer dan Bert en Bert heeft een lager cijfer dan Cees; dan weten we zeker dat Arie een lager cijfer heeft dan Cees.

Katja staat vroeger op dan Leonie en Leonie staat vroeger op dan Marscha; dan staat Katja dus vroeger op dan Marscha.

Peter is langer dan Quirijn en Quirijn is langer dan Robert; dan is Peter dus langer dan Robert.

6

In de voorgaande drie zinnen heb je voorbeelden van *transitieve relaties* gezien. In de wiskunde is een *relatie* de abstractie van wat in het algemeen een verband of betrekking tussen dingen aangeeft. Enkele veelvoorkomende relaties in de wiskunde zijn $<$ (kleiner dan), $=$ (is gelijk aan) en $\Rightarrow$ (implicatie). Omdat uit $a < b$ en $b < c$ volgt dat tevens $a < c$, noemen we de relatie $<$ *transitief*. Ook $=$ en $\Rightarrow$ zijn transitief. Als we de relatie $\approx$ definiëren als 'verschilt minder dan 10 van', dan is $1 \approx 7$ (1 verschilt minder dan 10 van 7) en $7 \approx 16$ (7 verschilt minder dan 10 van 16), maar er geldt *niet* dat $1 \approx 16$ (1 verschilt immers 15 van 16). De relatie $\approx$ is daarom *niet* transitief.

Niet-transitiviteit in de kansrekening

In dit artikel draait het om kansspelletjes, waarbij we de relatie $>$ definiëren als 'heeft een grotere winstkans dan'. We zullen enkele verrassende vondsten doen op het gebied van de transitiviteit van deze relatie.

Een spel met negen kaarten

Negen kaarten uit een kaartspel, aas en 2 tot en met 9, worden in drie setjes gelegd; elk setje bevat drie kaarten. Twee spelers kiezen elk één set kaarten, waarna elke speler blindelings een kaart uit zijn eigen set trekt. Winnaar is degene met de hoogste kaart (hierbij staat aas voor 1).

Stel dat de verdeling van de kaarten is zoals in figuur 1. Als speler 1 voor set A kiest en speler 2 voor set B, dan is de kans dat speler 1 wint gelijk aan

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{9}.$$

Bij de eerste term is de eerste factor de kans dat speler 1 de aas trekt, in welk geval hij het spelletje zeker verliest. Bij de tweede term is de eerste factor de kans dat speler 1 de 6 trekt, in welk geval hij het spelletje met kans $\frac{2}{3}$ wint (speler 2 moet de 3 of de 5 trekken). In de derde term is de eerste factor de kans dat speler 1 de 8 trekt, in welk geval hij het spelletje zeker wint.

Vergelijken we de setjes A en B met elkaar, dan zien we dat set A gunstiger is: met kans $\frac{5}{9}$ win je het spelletje met set A. Er geldt dus dat $A > B$.

Als speler 1 voor set B kiest en speler 2 voor set C, dan kunnen we de winstkans voor speler 1 op soortgelijke wijze berekenen:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

Er geldt dus dat $B > C$.

Kunnen we nu uit $A > B$ en $B > C$ concluderen dat $A > C$? Het antwoord is: nee. Als speler 1 voor set A kiest en speler 2 voor set C, dan is de winstkans voor speler 1 gelijk aan

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Als we de setjes A en C met elkaar vergelijken, dan zien we dat A *ongunstiger* is dan C. Er geldt $A > B > C > A$, waarmee we het kringetje rond zijn!

Opgave 1. Wat voor bijzonders kun je ontdekken aan de verdeling van de kaarten in figuur 1?

Opgave 2. Hoe zit het met de (niet-)transitiviteit als de kaarten anders verdeeld zijn?

Een spel met een typemachine

In het novembernummer van *Pythagoras* beschreven we een spel waarbij lukraak de toetsen A en B van een typemachine worden aangeslagen. Twee spelers kiezen elk een 'woord' (bestaande uit A's en B's); wiens woord als eerste op papier verschijnt, wint. Stel, speler 1 kiest het woord AAB en speler 2 het woord ABA. Als bijvoorbeeld het rijtje BBABBAAB op papier verschijnt, dan wint speler 1.

In het novembernummer hebben we uitgelegd hoe de winstkansen bij dit spel berekend kunnen worden. Voor alle drieletterwoorden zijn de winstkansen weergegeven in figuur 2. Daaruit blijkt dat in het genoemde voorbeeld speler 1 (AAB) met kans $\frac{2}{3}$ van speler 2 (ABA) wint.

Dat er géén sprake is van transitiviteit, blijkt uit de volgende 'woordencykel', waarvan de juistheid uit figuur 2 volgt.

$$AAB > ABB > BBA > BAA > AAB.$$

Bij zowel het kaartspel als het typemachine-spel is bij elke keuze van de ene speler een keuze voor de andere speler te vinden, die de grootste winstkans heeft. Als jouw tegen-speler eerst een combinatie mag kiezen, kun jij *altijd* een betere combinatie kiezen! En andersom natuurlijk.

Een spel met vier dobbelstenen

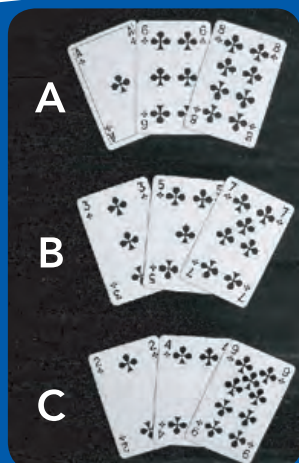
Een spel dat bekend staat als de *niet-transitieve dobbelstenen* van Bradley Efron gaat als volgt. We hebben vier bijzondere dobbelstenen: steen A heeft twee vlakken met elk een 0 en vier met elk een 4; steen B heeft op elk vlak een 3; steen C heeft twee vlakken met elk een 6 en vier met elk een 2; steen D heeft drie vlakken met elk een 1 en drie met elk een 5. Speler 1 kiest een steen. Daarna kiest speler 2 uit de overgebleven stenen een steen. Ieder werpt nu eenmaal zijn steen. Degene met het hoogste aantal ogen wint.

Opgave 3. Laat zien dat speler 2 *altijd* kan winnen met kans $\frac{2}{3}$, door een geschikte keuze te maken.

Literatuur

Meer informatie over niet-transitiviteit in de kansrekening kun je vinden in M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* (1988). Ook op internet is veel te vinden. Zoek in Google met trefwoord "non transitive games".

Figuur 1
Drie sets
van drie
kaarten



Figuur 2
De winst-
kansen voor
speler 1

	AAA	AAB	ABA	ABB	BAA	BAB	BBA	BBB
AAA		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
AAB	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$
ABA	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
ABB	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
BAA	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
BAB	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
BBA	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$
BBB	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	

(On)opgelost

"Wiskunde is als zuurstof. Als het er is, merk je het niet. Als het er niet zou zijn, merk je dat je niet zonder kunt." Dit citaat van de Amsterdamse wiskundige Lex Schrijver kan wel gelden als het motto van het boek *Opgelost, toepassingen van wiskunde en informatica*. Schrijver werd begin jaren negentig benaderd door de Nederlandse Spoorwegen om een optimale dienstregeling te maken. Hoe laat je de Nederlandse treinen zoveel mogelijk passagiers zo snel en punctueel mogelijk vervoeren?

Zo'n optimaliseringsprobleem is een typisch voorbeeld van toegepaste wiskunde: de nieuwe NS-dienstregeling die in december vorig jaar inging, is er rechtstreeks door beïnvloed. Toch is er geen sprake van dat de wiskunde 'de oplossing' produceert voor zo'n probleem in de wereld van alledag. Uiteindelijk bepalen niet-wiskundige aspecten (bijvoorbeeld: hoe vervelend vinden reizigers overstappen?) de speelruimte.

Veel van de veertien hoofdstukken in *Opgelost* laten de wiskunde in deze dienende rol zien. Statisticus John Einmahl rekent voor een vliegveld bij New York uit hoe lang de landingsbaan moet zijn, om de kans dat een vliegtuig 'doorschiet' onder de één op tien miljoen te houden. "Daarvoor hoef ik niets van vliegtuigen af te weten. Wat ik nodig heb, is een lijst met de lengtes van remwegen van vliegtuigen."

Een promovendus van Mark Peletier stort zich op modelberekeningen voor het produceren van kunststofvezels en Gerard Sierksma haalde *De Telegraaf* met een computerprogramma dat advies geeft over de beste opstelling van het Nederlands elftal. "Er zijn mensen die denken dat wij de coaches willen

vervangen door computers. Dat is onzin. De coach moet uiteindelijk beslissen. Hij is tenslotte degene die wordt ontslagen als het slecht gaat."

De hoofdstukken volgen meestal een vast stramien: eerst een algemeen stuk van de auteur, wetenschapsjournalist Bennie Mols, over een aspect van de wiskunde, dan een 'Doe het zelf' (zie pagina 9), een vraagstuk waarmee de lezer zelf aan de slag kan, een tekening of foto met uitleg, en een interview met een deskundige, die ook zijn favoriete formule mag toelichten. Elk hoofdstuk sluit af met een sectie 'onopgelost', want er mag niet vergeten worden dat er voor wiskundigen nog voldoende werk klaar ligt. Er wordt nergens diep op de wiskunde zelf ingegaan, maar achterin staat een uitgebreide lijst met verwijzingen voor wie dat wel wil.

Opgelost biedt dus een breed toegankelijke en aantrekkelijke rondleiding door de hedendaagse wiskunde. Dit zal ook de bedoeling zijn van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), dat deze uitgave financieel ondersteunt. De keerzijde van deze aanpak is een zekere braafheid; zo zijn binnen de informatica over onderwerpen als kunstmatige intelligentie, robotica en expertsystemen de afgelopen decennia verwachtingen gewekt die men telkens niet waar bleek te kunnen maken. Ook de snaartheorie, natuurkunde die zwaar leunt op zeer geavanceerde wiskunde, staat er veel minder florissant voor dan uit het interview met Robbert Dijkgraaf blijkt. Zulke controverses blijven in dit boek natuurlijk buiten beeld.

Bennie Mols, *Opgelost, toepassingen van wiskunde en informatica*. Veen Magazines/CWI, ISBN 978-90-8571-028-8.



Moordmysterie oplossen

De politie heeft drie verdachten van de moord op de actrice Alice Cools gearresteerd: Smeets, Jansen en Winter. Alledrie ontkennen ze de moord. Tijdens het verhoor beweert Smeets dat Cools een vriendin van Jansen was en dat Winter Cools haatte. Jansen beweert dat hij Cools helemaal niet kent, en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was, toen Cools daar werd vermoord. Winter beweert dat hij zowel Smeets als Jansen op de dag van de moord samen met de actrice heeft gezien, en dat of Smeets of Jansen de moord moet hebben gepleegd.

Wie heeft de actrice Alice Cools vermoord?

- Onder de aanname dat alleen een van de drie schuldig is, en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken.
- Onder de aanname dat onschuldigen niet liegen (in dit geval zijn meerdere scenario's mogelijk).

De sectie 'Doe het zelf' uit hoofdstuk 2 van *Opgelost*

Priemgetallen

Over priemgetallen is nog veel onbekend, maar ze hebben ook fraaie eigenschappen die met een beetje doorzetten wél zelf te bewijzen zijn. Stel p is een priemgetal groter dan 3 en n een natuurlijk getal ($n = 1, 2, 3, \dots$). Laat nu zelf zien dat geldt dat $p = 6n - 1$ of $p = 6n + 1$. En gebruik dit resultaat om aan te tonen dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24.

Deel van de sectie 'Doe het zelf' uit hoofdstuk 14 van *Opgelost*

door Marco Swaen

De wiskunde van Phyllis Joris



Sinds afgelopen zomer is de Belgische Phyllis Joris bezig met haar promotieonderzoek aan de Universiteit van Amsterdam. Zij komt uit de omgeving van Leuven en deed op school de richting 'wiskunde en wetenschap' met maar liefst acht uur wiskunde in de week. Wiskunde was altijd een van haar beste vakken. Toch had zij geen speciale interesse in het vak tot zij een lerares trof die bij haar net de juiste snaar wist te raken. Bij die lerares ging het nu eens niet meer om het uitrekenen, maar om het waarom, over hoe je bewijzen levert en over de wiskundige theorie achter de berekeningen. Het was deze lerares die haar op het idee bracht, dat een studie wiskunde misschien wel iets voor haar zou zijn.

Wie een loopbaan als wiskundige aan de universiteit ambieert, heeft aan een studie wiskunde niet genoeg. De academische tradities, die deels nog uit de Middeleeuwen stammen, eisen dat de aspirant-wetenschapper eerst op eigen kracht een volwaardig onderzoek doet en de uitkomsten daarvan presenteert in een *proefschrift*. Pas nadat het proefschrift in het openbaar succesvol verdedigd is, ten overstaan van de specialisten uit het vakgebied, 'promoveer' je en mag je voortaan de titel 'doctor' voeren.

Iemand die bezig is met een promotieonderzoek heet een *promovendus*. Het werk van de promovendus wordt begeleid door een hoogleraar, de *promotor* geheten. Als je een wiskundestudie achter de rug hebt en je wilt gaan promoveren, kun je solliciteren naar een van de promotieplaatsen die de universiteiten bieden. Je krijgt dan vier jaar lang een redelijk inkomen om je geheel aan

je onderzoek te wijden.

In Nederland wordt aan de universiteiten veel wiskundig onderzoek gedaan, terwijl er weinig studenten wiskunde zijn. Daarom wordt een behoorlijk percentage van de promovendi aangetrokken uit het buitenland. Phyllis Joris is zo'n buitenlandse promovendus. Zij studeerde wiskunde in Leuven en behoorde na het eerste jaar tot de 50 procent van de studenten die door mag gaan. In haar laatste studiejaar volgde zij een college over algebraïsche meetkunde dat haar erg aansprak. Het is een vakgebied waarin zich de afgelopen vijftien jaar veel nieuwe ontwikkelingen hebben voorgedaan, met in de eerste plaats natuurlijk het bewijs voor de Laatste Stelling van Fermat van Andrew Wiles. Phyllis doet nu promotieonderzoek in de algebraïsche meetkunde. Haar promotor is prof. Van der Geer, een van de grote specialisten in dit vak.

Afgelopen zomer verhuisde Phyllis naar Amsterdam, samen met haar echtgenoot, die zij leerde kennen in haar studie. Ook haar man had geen enkele moeite als afgestudeerd wiskundige een baan te vinden; op hun net geïnstalleerde antwoordapparaat stonden binnen enkele dagen zeven uitnodigingen voor gesprekken. Hij werkt nu bij Delta Lloyd en is daar betrokken bij de ontwikkeling van financiële producten.

De wiskunde waar Phyllis zich nu mee bezig houdt is zeker geen middelbare-schoolstof, maar na enig zoeken heeft zij toch een mooi onderwerp gevonden om de lezers van *Pythagoras* iets te laten zien van haar vak. Op de volgende bladzijden vertelt zij hoe je met de algebra van polynomen een verrassend paar dobbelstenen kunt vinden, de *dobbelstenen van Sicherman*.



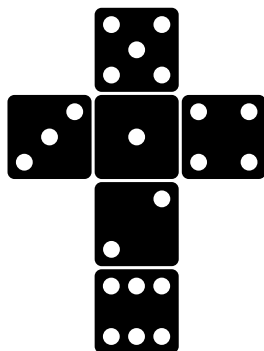
door Phyllis Joris

Unieke Sicherman-stenen

'Gooi met twee dobbelstenen en tel het aantal ogen in de worp op. Wat is dan de kans op tien ogen?' Dit is een van de onvermijdelijke vraagstukjes voor wie met kansrekening begint. Waarschijnlijk heb je een dergelijk vraagstuk wel eens gezien en ken je het schema van figuur 2 met de 36 mogelijke worpen met twee stenen. Van die 36 worpen zijn er 3 die samen tien ogen opleveren, de kans op 'samen tien' is dus $\frac{3}{36}$.

Je kunt ook afwijkende dobbelstenen verzinnen: bijvoorbeeld een steen met op de zijvlakken 1, 4, 5, 6, 6, 6 en een ander met 1, 5, 5, 6, 6, 6. Ook dan kun je weer 'samen tien' gooien, maar nu is de kans $\frac{5}{36}$ (ga dit na door een soortgelijk schema als in figuur 2 op te stellen). In 1978 ging Martin Gardner in zijn beroemde puzzelrubriek in *Scientific American* nog een stap verder: verzin een paar afwijkende stenen, dat toch dezelfde uitkomsten met dezelfde bijbehorende kansen oplevert als een paar gewone dobbelstenen.

Met slim rekenen kun je zo'n paar vinden: één dobbelsteen met de getallen 1, 2, 2, 3, 3, 4 en de tweede dobbelsteen met de getallen 1, 3, 4, 5, 6, 8 op de zijvlakken, zie figuur 3. Martin Gardner vermeldde deze oplossing in zijn rubriek en schreef hem toe aan George Sicherman uit Buffalo (Verenigde Staten), zodat dit paar sindsdien bekend staat als de *Sicherman-dobbelstenen*. Dat



Figuur 1 Een uitslag van een gewone dobbelstenen

een worp met de Sicherman-stenen dezelfde kansverdeling heeft als een paar gewone stenen, blijkt als je het bijbehorende diagram opstelt, zie figuur 4.

Heb je het paar eenmaal gevonden, dan rijst de vraag of er niet meer van zulke alternatieve paren bestaan. Het antwoord is 'nee', althans, als je geen rare dingen toelaat, zoals zijvlakken met 0 of een negatief aantal ogen. Wij gaan dit aantonen door gebruik te maken van algebra, preciezer: door te rekenen met polynomen.

♦♦Rekenen met polynomen

Een *polynoom* of *veelterm* is een uitdrukking zoals $X^2 + 2X - 1$ of $Y^2 - 1$. De polynomen waar wij mee gaan werken, mogen alleen gehele coëfficiënten hebben, en alleen de variabele X . Met een vakterm heet dat: *polynomen uit de ring $\mathbb{Z}[X]$* .

Het vermenigvuldigen van polynomen gaat zoals je verwacht: $(2X + 1)(X^2 - 1)$ levert $2X^3 + X^2 - 2X - 1$ op. Sommige polynomen kun je opsplitsen (ontbinden) in andere. Zo kun je het polynoom $X^2 - 1$ schrijven als $(X - 1)(X + 1)$. Andere, zoals $X^2 + 1$, zijn niet te splitsen; zulke polynomen heten *irreducibele polynomen*.

Het rekenen met polynomen lijkt veel op het rekenen met gewone gehele getallen. De irreducibele polynomen spelen daarbij de rol van priemgetallen. Zoals je weet, kun je elk geheel getal op een unieke manier schrijven als product van priemgetallen.

	1	2	3	4	5	6
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Figuur 2 Een rooster met de mogelijke uitkomsten van een worp met twee gewone dobbelstenen





Op een vergelijkbare manier is elk polynoom op een unieke manier te schrijven als product van irreducibele polynomen.

Vanwaar nu die polynomen? Hoewel je het niet direct zou denken, is er een treffende overeenkomst tussen het rekenen met polynomen en het gooien met een stel dobbelstenen.

We kunnen een dobbelsteen namelijk symbolisch voorstellen als een polynoom, en wel zo dat het gooien met twee stenen een kansverdeling oplevert die precies overeenkomt met het product van de bijbehorende polynomen.

Laten we eens kijken hoe dat gaat. Bij een gewone dobbelsteen hoort het polynoom

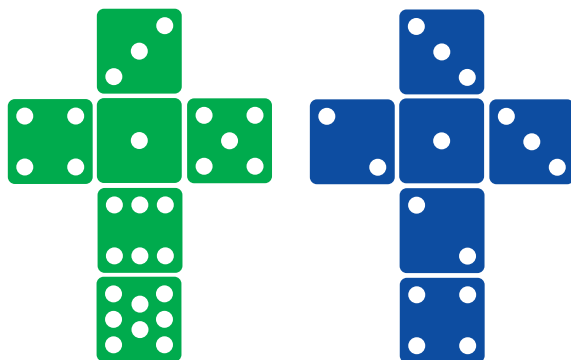
$$X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X.$$

Hierin zie je de mogelijke uitkomsten als de exponenten 1 tot en met 6. Zou de steen in plaats van de 1 een tweede 6 hebben, dan werd zijn polynoom

$$2X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2.$$

Nu gooien we met twee normale dobbelstenen. De kansverdeling die daarbij hoort zagen we al uitgewerkt in figuur 2. Bekijk nu het product van de bijbehorende polynomen:

$$(X^6 + X^5 + \dots + X)(X^6 + X^5 + \dots + X).$$



Figuur 3 Een uitslag van de Sicherman-dobbelstenen

Om dit uit te werken, moeten alle termen uit de linker factor met alle termen uit de rechter factor worden vermenigvuldigd. Dit is eigenlijk hetzelfde als wat gedaan wordt om de tabel in figuur 2 op te stellen. Zo krijg je bijvoorbeeld drie keer een term X^{10} , namelijk als $X^4 \times X^6$, als $X^5 \times X^5$ en als $X^6 \times X^4$. Het resultaat is dus

$$X^{12} + 2X^{11} + 3X^{10} + \dots + 3X^4 + 2X^3 + X^2$$

en komt perfect overeen met de kansverdeling van de worp met twee gewone dobbelstenen.

Als we de getallen op de zijvlakken veranderen, dan krijgen we andere polynomen. Heel wild kunnen die polynomen niet worden. De dobbelsteen heeft zes kanten, waarop de aantallen 1 tot en met 6 voorkomen, dus het polynoom ziet er in het algemeen uit als

$$f(X) = X^{a_1} + \dots + X^{a_6}.$$

Mogelijk zijn diverse a_i 's aan elkaar gelijk, en dan zijn de betreffende termen samengenomen. Ook zou het polynoom geschreven kunnen zijn als het product van een aantal factoren. Maar hoe het ook is toetgetakeld, vul je voor X een 1 in, dan moet het toch hetzelfde opleveren als het oorspronkelijke polynoom, dus $1 + 1 + \dots + 1 = 6$.

	1	2	3	4	5	6
1	1+1	1+2	1+2	1+3	1+3	1+4
2	3+1	3+2	3+2	3+3	3+3	3+4
3	4+1	4+2	4+2	4+3	4+3	4+4
4	5+1	5+2	5+2	5+3	5+3	5+4
5	6+1	6+2	6+2	6+3	6+3	6+4
6	8+1	8+2	8+2	8+3	8+3	8+4

→ samen 10

Figuur 4 Een rooster met de mogelijke uitkomsten van een worp met twee Sicherman-dobbelstenen





Verder eisten we in navolging van Martin Gardner dat het aantal ogen op een zijvlak niet 0 of negatief mag zijn. Ook dat is simpel vast te stellen door invullen. Vul in het polynoom voor X een 0 in, dan levert dat zes keer '0 tot een positieve macht' op, oftewel $0 + 0 + \dots + 0 = 0$. Zo zien we dat het polynoom van een dobbelsteen altijd moet voldoen aan de volgende twee eisen:

$$f(0) = 0 \quad \text{en} \quad f(1) = 6. \quad (*)$$

Met onze nieuw verworven kennis over polynomen richten we onze blik weer naar de Sicherman-stenen. Het zoeken naar een Sicherman-paar komt erop neer dat we twee polynomen $f(X)$ en $g(X)$ moeten vinden waarvan het product gelijk is aan het polynoom dat hoort bij de worp met twee gewone stenen:

$$f(X) \times g(X) = (X^6 + X^5 + \dots + X)^2.$$

De vertaling naar polynomen betaalt nu zijn winst uit. Zoals gezegd kun je polynomen opsplitsen in irreducibele factoren, en die ontbinding is bovendien uniek. De unieke ontbinding van $X + X^2 + \dots + X^6$ in $\mathbb{Z}[X]$ is

$$X(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Onze $f(X)$ en $g(X)$ moeten dus voldoen aan

$$f(X) \times g(X) = X^2(X+1)^2(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

Omdat zo'n ontbinding uniek is, zijn alleen de factoren die aan de rechterkant staan beschikbaar om de polynomen $f(X)$ en $g(X)$ uit op te bouwen. Elke verschillende factor komt in het kwadraat voor, dus we staan voor de taak ze te verdelen over f en g , waarbij elke factor ofwel één keer in beide polynomen terecht komt, ofwel twee keer in één van beide. In elk geval heeft $f(X)$ dus de vorm

$$X^q(X+1)^r(X^2+X+1)^s(X^2-X+1)^t,$$

waarbij de getallen q, r, s en t een 0, een 1 of een 2 zijn. Het polynoom $g(X)$ ziet er net zo uit, maar de exponenten zijn hier $2-q, 2-r, 2-s$ en $2-t$.

Er moet worden voldaan aan twee eisen, zie (*). Op grond van de eis dat $f(1) = 6$ krijgen we

$$6 = 1^q(1+1)^r(1^2+1+1)^s(1^2-1+1)^t = 2^r 3^s.$$

Dit gaat alleen maar goed als de factoren 2 en 3 precies één keer voorkomen, dus $r = 1$ en $s = 1$. De eis $f(0) = 0$ betekent

$$0 = 0^q(0+1)^r(0^2+0+1)^s(0^2-0+1)^t = 0^q.$$

We zien dat q niet 0 kan zijn. Omdat tegelijkertijd $g(0) = 0$ moet gelden, heeft ook $g(X)$ de factor X ten minste één keer nodig. Daarom is $q = 1$.

Ten slotte blijven de twee factoren $(X^2 - X + 1)$ over. Deze kunnen we nu gelijk verdelen over de twee polynomen ($t = 1$), ofwel allebei in één van beide stoppen ($t = 0$ of $t = 2$). Verdelen we de factor eerlijk over beide polynomen, dan krijgen we

$$\begin{aligned} f(X) &= X(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)^1 \\ &= X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X \end{aligned}$$

en dus hebben we een 'normale' dobbelsteen. Geven we beide factoren aan één van de polynomen, bijvoorbeeld aan f , dan krijgen we

$$\begin{aligned} f(X) &= X(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)^2 \\ &= X^8 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X \end{aligned}$$

oftewel de ene steen uit het Sicherman-paar; terwijl de andere

$$\begin{aligned} g(X) &= X(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)^0 \\ &= X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X \end{aligned}$$

de andere steen van het Sicherman-paar oplevert. Daarmee hebben we alle mogelijkheden gehad en kunnen we concluderen dat er geen andere Sicherman-paren bestaan.



In het novembernummer plaatsten we een aantal *verwisselsommen*. Links en rechts van het =-teken moeten dezelfde cijfers staan, maar op verschillende manieren 'verwerkt' door optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen, worteltrekken en dergelijke. Heel flauw zijn natuurlijk verwisselsommen als $12 + 34 = 14 + 32$. We riepen jullie op om je meest interessante vondsten in te sturen.

2

3

7

Verwisselsommen

5

9

Giel van Hinsberg stuurde drie verwisselsommen:

$$\begin{aligned}\sqrt{81} &= 8 + 1 \\ (4 - 2)^{10} &= 1024 \\ 6^{(9-1)/2} &= 1296\end{aligned}$$

Boris Lecompte stuurde een hele lijst fraaie verwisselsommen in. Hij stuurde ons onder andere oplossingen voor alle driecijferige getallen met gelijke cijfers. Verwisselsommen van 111, 222, 666 en 999 zijn:

$$\begin{aligned}\sqrt{12321} &= 123 - 12 \\ \sqrt{49284} &= 89 \times 2 + 44 \\ \sqrt{443556} &= 645 + 3(5 + \sqrt{4}) \\ \sqrt{998001} &= 199 + 800\end{aligned}$$

14

Boris Lecompte liet ook zien dat de getallen 12, 123, 1234, ..., 123456789, 1234567890 allemaal als verwisselsom te schrijven zijn. Voor 12, 1234567 en 1234567890 zien de sommen er achtereenvolgens zo uit:

$$\begin{aligned}\sqrt{144} &= 14 - \sqrt{4} \\ \sqrt{1524155677489} &= 7^7 + 6(4 + (5 \times 5 \times 5(8 + (9 \times 12(4 + 1)))) \\ \sqrt{1524157875019052100} &= 9 \times 10(7^8 + (5 \times 2^2(1 + (5(5^7 + 1401 + 0^{50}))))\end{aligned}$$

8

Dankzij inzendingen van Odette De Meulemeester kun je met verwisselsommen je nieuwe agenda of kalender een wiskundig tintje geven:

$$\begin{aligned}20^0 + 7 &= \sqrt{(7 + 0)^2 + 0!} \\ (2 + 0 + 0) \times 7 &= \sqrt{(7 \times (0! + 0!))^2} \\ 20 + 7^0 &= (2 + (0 \times 0)!) \times 7\end{aligned}$$

1

6

4

Toon Huybrechts, die zichzelf in een brief 'een 66-jarige getallenliefhebber' noemt, wees ons op diverse websites met soortgelijke wisseltrucs. Verwisselsommen (soms met iets andere spelregels) heten daar *Vampiergetallen* (<http://mathworld.wolfram.com/VampireNumber.html>) of *Narcistische getallen* (<http://users.aol.com/s6sj7gt/mikewild.htm>). Een bijzonder geval zijn de *verwisselbreuken* (*dottable fractions*) op <http://users.aol.com/s6sj7gt/dottable.htm>. Een fraai voorbeeld dat Toon Huybrechts ons stuurde, is $103997964977 = 379 \times 409 \times 677 \times 991$: de priemfactorontbinding van dit twaalfcijferige getal bevat precies dezelfde twaalf cijfers!

door **Chris van Dorp** en **Arnout Jaspers**

Het *Hilbert Hotel* is uitgegroeid tot een bekende attractie voor wiskundige dagjesmensen. Het hotel werd bedacht door de Duitse wiskundige David Hilbert (1862-1943), die verbonden was aan de universiteit van Göttingen. Hilbert gebruikte het hotel in zijn colleges om 'ordes van oneindigheid' te illustreren.

Hilbert Hotel volgeboek?

Een reiziger zoekt na een lange dag al de hele avond een kamer, maar alle hotels zijn vol. 'Probeert u het Hilbert Hotel twee straten verderop, daar lukt het altijd nog wel,' adviseert de receptioniste van het zoveelste volgeboekte hotel. De reiziger volgt deze raad op en stapt even later het smalle, maar heel erg lange Hilbert Hotel binnen. Een oude heer verwelkomt de reiziger. 'Heeft u voor vannacht een kamer voor mij?', vraagt de reiziger. 'Op dit moment zijn alle kamers bezet. Maar als u even wacht, heb ik over een paar minuten een kamer voor u vrijgemaakt,' antwoordt de receptionist raadselachtig.

De reiziger kijkt toe hoe de man een microfoon pakt en daardoor de volgende mededeling doet: 'Beste gasten, wilt u zo vriendelijk zijn uw koffers te pakken en te verhuizen naar de kamer waarvan het kamernummer één groter is dan uw huidige kamernummer.' Even later ziet de reiziger de deuren in de lange gang open gaan en kijkt toe hoe de gasten met hun koffers naar de volgende kamer sjokken. De gasten in de eerste kamers hadden hun spullen duidelijk bij elkaar gegraaid. Maar verderop in de gang hadden ze het kennelijk vaker meegemaakt, want daar lopen ze met gepakte koffers rond.

'U kunt terecht in kamer nummer 1,' deelt

de oude heer de reiziger mede. 'Maar waar moet de gast in de laatste kamer heen?', vraagt de reiziger. 'Het Hilbert Hotel heeft geen laatste kamer,' is het antwoord.

In zijn kamer ziet de reiziger een papier met de gebruikelijke voorschriften in geval van brand, maar ook een papier met de volgende merkwaardige mededeling: *'Beste gast, u wordt verzocht aanwijzingen die de receptie via de luidsprekers doorgeeft, altijd op te volgen. De directie.'*

Het Banach Hotel

Het Hilbert Hotel heeft geen laatste kamer omdat de lange gang met kamers nooit ophoudt: er zijn oneindig veel kamers. Zo kan iedereen een kamer doorschuiven zonder dat er 'aan het eind' iemand buiten de boot valt. Door deze operatie maar vaak genoeg te herhalen, kan elke nieuw aangekomen gast worden ondergebracht.

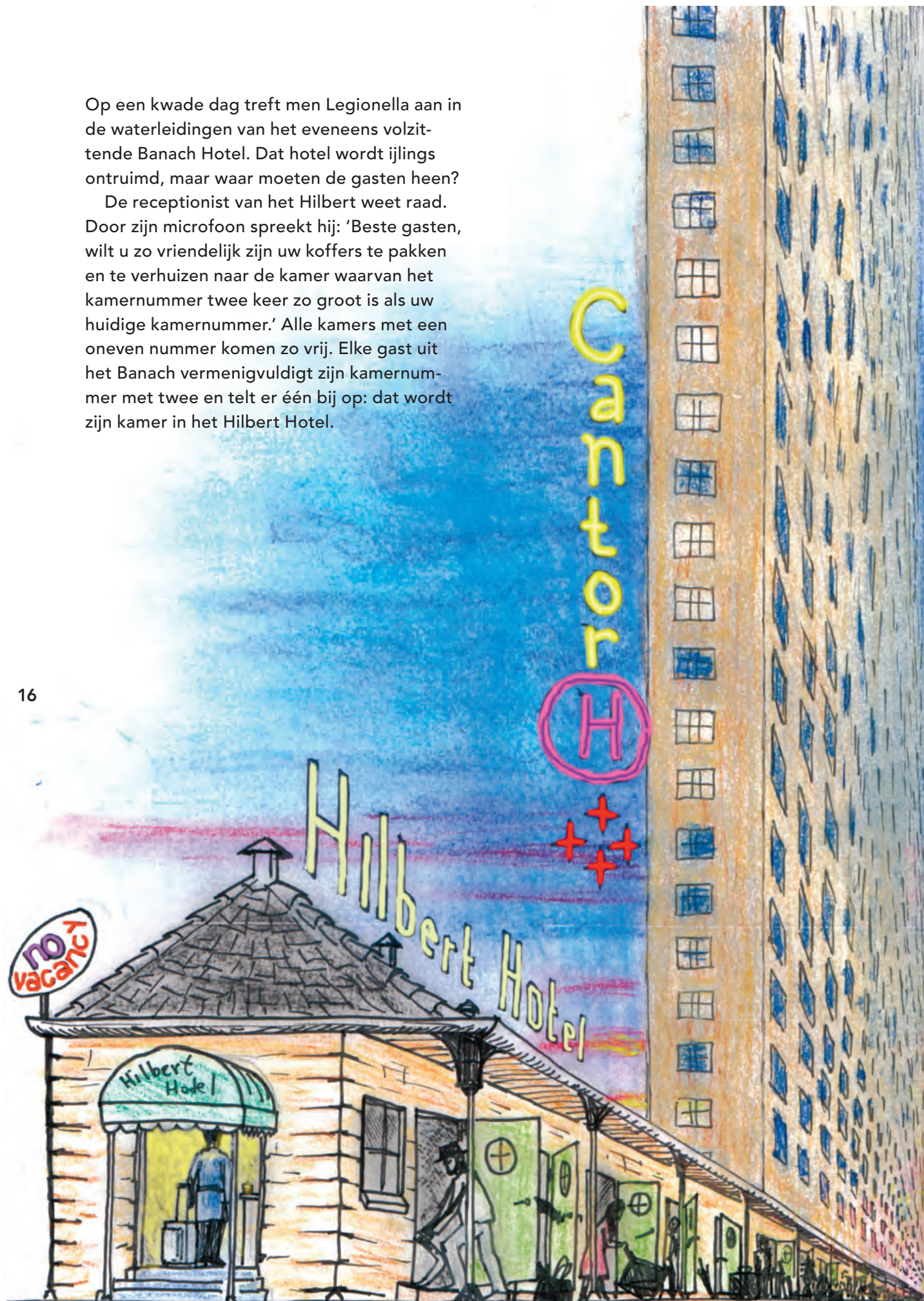
Maar past echt elke groep die bij het hotel arriveert in het Hilbert Hotel, zelfs oneindig grote? Een gevaarlijk incident in het naastgelegen Banach Hotel lijkt dit te bevestigen. Het Banach Hotel is een exacte kopie van het Hilbert Hotel. De gast in kamer n van het Hilbert Hotel kan in kamer n van het Banach hotel kijken, maar niet in andere kamers (een belangrijk gegeven, zoals later blijkt).

15

Op een kwade dag treft men Legionella aan in de waterleidingen van het eveneens volzittende Banach Hotel. Dat hotel wordt ijlings ontruimd, maar waar moeten de gasten heen?

De receptionist van het Hilbert weet raad. Door zijn microfoon spreekt hij: 'Beste gasten, wilt u zo vriendelijk zijn uw koffers te pakken en te verhuizen naar de kamer waarvan het kamernummer twee keer zo groot is als uw huidige kamernummer.' Alle kamers met een oneven nummer komen zo vrij. Elke gast uit het Banach vermenigvuldigt zijn kamernummer met twee en telt er één bij op: dat wordt zijn kamer in het Hilbert Hotel.

16



Het Cantor Hotel

Even verderop ligt het sjieke Cantor Hotel. Dit hotel is net als het Hilbert en het Banach oneindig lang, maar is óók oneindig hoog. Elke kamer van het Cantor Hotel is bezet. Vlak nadat alle gasten het hotel hebben verlaten om een museum te bezoeken, gebeurt er iets vreselijks. In de keuken van het Cantor Hotel ontstaat brand die zich razendsnel uitbreidt. Kort daarna is het hele hotel door de brand verwoest.

Kunnen de gedupeerde Cantor-gasten worden ondergebracht in het Hilbert Hotel? De oude heer van de Hilbert-receptie kan



zijn gasten één keer vragen naar de kamer met het dubbele nummer te gaan, zodat er plaats is voor de gasten van de eerste verdieping van het Cantor. Hij kan het verzoek tien keer herhalen, zodat er plaats is voor de gasten van de volgende tien verdiepingen van het Cantor. Hij kan het verzoek zo vaak herhalen als hij wil, maar... omdat het Cantor Hotel oneindig veel verdiepingen telt, zullen er altijd nog gasten van oneindig veel verdiepingen van het Cantor zijn die geen plek krijgen in het Hilbert. Kan de Hilbert-receptionist met één mededeling door de luidsprekers plaats maken voor alle gasten van het Cantor Hotel?

De oude heer laat zien dat dit inderdaad mogelijk is. Door de microfoon roept hij: 'Beste gasten, wilt u zo vriendelijk zijn uw koffers te pakken. Als u nu in kamer n zit, verhuist u dan naar de kamer met nummer 2^n .' De gast in kamer 1 gaat naar kamer 2, de gast in kamer 2 gaat naar kamer 4, de gast in kamer 3 gaat naar 8, enzovoorts. Alle kamers waarvan het nummer een macht van 2 is, zijn zo bezet, alle overige kamers zijn leeg.

De receptionist geeft elke verdieping van het Cantor Hotel een priemgetal, te beginnen bij 3. De eerste verdieping krijgt dus nummer 3, de tweede verdieping 5, de derde verdieping 7, enzovoorts. De gast die in het Cantor Hotel kamer k had op de verdieping met priemgetal p , krijgt in het Hilbert Hotel de kamer met nummer p^k . Omdat er oneindig veel priemgetallen bestaan (lees ook het Journaal op pagina 4) en oneindig veel machten van elk priemgetal, kan iedereen worden ondergebracht. Geen tweetal gasten zal eenzelfde kamer krijgen, want voor elke a en b geldt dat $p^a \neq q^b$ voor twee verschillende priemgetallen p en q .

De receptionist is erin geslaagd alle Cantor-gasten een kamer te geven in het Hilbert, en er zijn zelfs oneindig veel kamers over: alle kamers waarvan het nummer ten minste twee verschillende priemfactoren heeft (zoals $6 = 2 \times 3$), zijn vrij!

♦♦ Commissies

Toch kent ook de oneindige rekbaarheid van het Hilbert Hotel een grens, zoals bleek toen

de hotelgasten aan het vergaderen sloegen.

Dat vergaderen gebeurt in commissies. Iedere commissie moet een eigen secretaresse hebben. Nu is die vergaderweek werkelijk grondig opgezet, want elke deelverzameling gasten – klein, groot of zelfs oneindig groot – vormt een commissie. De man uit kamer 3 en de vrouw uit kamer 4001 vormen bijvoorbeeld samen een commissie. Alle gasten met een even kamernummer vormen een commissie. Er is een commissie waar alle gasten in zitten en alle gasten hebben ook nog een commissie waar ze alleen zelf in zitten. Het minst populair is de lege commissie. Hier zit helemaal niemand in.

Iedere gast zit daardoor in oneindig veel commissies. De voorzitter van bijvoorbeeld de PR-commissie moet in de vergaderweek nog naar oneindig veel andere vergaderingen. Iedere commissie kampt met dit probleem, vandaar dat iedere commissie een eigen secretaresse heeft, die het zo druk heeft dat ze maar voor één commissie kan werken.

Uiteraard moeten ook de secretaresses ergens worden ondergebracht. In het Banach Hotel misschien, waarvan de waterleidingen inmiddels ontsmet zijn? De inventieve receptionist van het Hilbert probeert een lijst op te stellen van secretaresses en hun kamernummers. Elke commissie is te identificeren door de kamernummers van de commissieleden op te noemen. De vraag 'zit de gast met kamernummer x in deze commissie?' is dus altijd met ja of nee te beantwoorden.

Dwars

Terwijl de receptionist met de ellenlange lijst secretaresses in de weer is, bedenkt hij dat er ook een commissie Dwars moet bestaan met nogal speciale eigenschappen. Stel, zo denkt hij, Chris heeft in het Hilbert Hotel kamernummer 31. Hij zit in, zeg, de activiteitencommissie. Stel dat de secretaresse van de activiteitencommissie toevallig ook kamernummer 31 heeft, maar natuurlijk in het Banach. Als Chris 's ochtends zijn gordijnen open doet, ziet hij de secretaresse van de activiteitencommissie haar haar kammen. Laat dat nu juist de reden zijn, waarom

Chris niet in de commissie Dwars zit.

Sam zit ook in de activiteitencommissie, maar voor zijn lidmaatschap van Dwars maakt dat niets uit. Sam heeft immers een andere kamer dan Chris, en kan dus niet in de kamer van de secretaresse van de activiteitencommissie kijken. Sams lidmaatschap van Dwars hangt er alleen maar van af, of hij in de koffiecommissie zit. Want Sam ziet 's ochtends namelijk de secretaresse van de koffiecommissie een sigaret roken in het raam van haar kamer.

In termen van kamernummers, concludeert de receptionist, is het dus als volgt: *een gast zit in de commissie Dwars als hij in geen enkele commissie zit waarvan de secretaresse hetzelfde kamernummer heeft als hij.*

Met groeiende ongerustheid vervolgt de receptionist zijn redenatie: ook Dwars heeft een secretaresse, die een kamer in het Banach moet krijgen. Stel dat haar kamernummer 27 is. In kamer 27 van het Hilbert, weet ze toevallig, logeert Guus. Nu stelt ze zich voor hoe Guus naar het zaaltje loopt waar Dwars gaat vergaderen. Bij binnenkomst merkt hij dat hij niet in Dwars kan

zitten, want hij herkent de secretaresse: hij heeft haar die ochtend nog haar tanden zien poetsen toen hij de gordijnen open deed. Hij zit dus niet in Dwars. Maar aangezien hij bij geen enkele andere secretaresse naar binnen kan kijken, zit hij in geen enkele commissie waarvan hij de secretaresse door het raam van zijn kamer kan zien. Maar dat betekent dat Guus wél in de commissie Dwars zit.

De enige manier om aan deze tegenspraak te ontsnappen, is te concluderen dat er zo veel secretaresses zijn, dat ze niet allemaal in het Banach Hotel kunnen logeren.

Oneindig veel oneindigheden

De receptionist heeft een belangrijke ontdekking gedaan: er bestaat een verzameling die echt groter is dan de verzameling $\{1, 2, \dots\}$. Er zijn dus ten minste twee soorten oneindigheid. De wiskundige Georg Cantor (1845-1918) beseftte als eerste dat oneindige verzamelingen verschillende 'groottes' kunnen hebben. Hij bewees zelfs dat er oneindig veel 'oneindigheden' bestaan: er is geen 'grootste' oneindigheid die groter is dan alle andere.

Symposium Bruno Ernst

Bruno Ernst, pseudoniem van Hans de Rijck, is tachtig jaar geworden. Hij richtte in 1961 het wiskundetijdschrift *Pythagoras* op. Ook is hij oprichter van de Volkssterrenwacht Simon Stevin, de Nederlandse Zonnewijzerkring en het natuurkundetijdschrift *Archimedes*. Ter ere van zijn verdiensten voor de wetenschapspopularisatie organiseert de Sterrewacht Leiden een middagsymposium op **vrijdag 30 maart** in het J.H. Oort-gebouw, Niels Bohrweg 2, Leiden. Dit is met name bedoeld voor leraren wis- en natuurkunde, maar ook andere belangstellenden zijn welkom.

Programma

12:15-13:15 Ontvangst met koffie

13:15-17:00 Lezingen over o.a.:

- Zwaartekrachtlenzen
- (On)eindigheid
- Escherbetegelingen
- Historie van ontdekkingen
- Exoplaneten
- 46 jaar *Pythagoras*

17:00 Borrel

Toegang gratis, na aanmelding

Meer info en aanmelden: www.strw.leidenuniv.nl/education/brunoernst.php

♦ Pythagoras Olympiade

door Arno Kret, Thijs Notenboom,
Anne de Haan en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

20

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2007.

OPGAVE

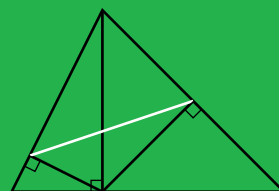
140

In een doos zitten witte en zwarte ballen. Als je blindelings één bal pakt, is de kans dat deze wit is, gelijk aan $\frac{2}{5}$. Als er 108 witte ballen worden toegevoegd aan de doos, wordt de kans op een witte bal $\frac{2}{3}$. Hoeveel zwarte ballen zitten er in de doos?

OPGAVE

141

In een scherphoekige driehoek trekken we een hoogtelijn uit een van de hoekpunten. Vanuit het voetpunt van de hoogtelijn op de tegenoverliggende zijde laten we een loodlijn neer op elk van de andere twee zijden. De voetpunten van die twee loodlijnen verbinden we (het witte lijnstuk in de figuur). Bewijs dat de lengte van dat verbindingslijnstuk onafhankelijk is van de keuze van het eerste hoekpunt.



OPLOSSING

136

Gegeven een gelijkbenige driehoek ABC met $|AC| = |BC|$. Punt D is het midden van AB . Laat nu P een punt zijn op CD en Q een punt op BC , met $Q \neq B$, zodanig dat $|AP| = |PQ|$. Bewijs dat vierhoek $APQC$ een koordenvierhoek is.

Oplossing. Merk op dat P het middelpunt van de cirkel door de punten A , B en Q is. Er geldt dat $|AP| = |PQ|$ (gegeven) en $|AP| = |PB|$ (want CD is de middelloodlijn van AB en P ligt op CD). Daaruit volgt dat P het middelpunt van de cirkel door de punten A , B en Q is. Nu weten we dat $\angle ABQ = \frac{1}{2} \angle APQ$. Omdat $|AC| = |BC|$, geldt bovendien dat $\angle ACB = 180^\circ - 2 \angle ABC = 180^\circ - 2 \angle ABQ$. Dus $\angle ACB + \angle APQ = 180^\circ$. Met de koordenvierhoekstelling kunnen we nu concluderen dat $APQC$ een koordenvierhoek is.

Deze opgave werd goed opgelost door **Guus Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Felix Denis** van het Eijkhagencollege te Landgraaf, **Jurgen van den Heuvel** van het Stedelijk Gymnasium te 's-Hertogenbosch, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Friso Veldhuizen** van het Johannes Fontanus College te Barneveld en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Friso Veldhuizen**.

OPLOSSING

137

Bewijs dat
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i} = 6.$$

Oplossing. Stel
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i},$$
$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$
$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}.$$

Neem het verschil $S - T$:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \\ \hline 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \dots \end{array}$$

Dit verschil is gelijk aan $\frac{1}{2}S$. Omdat $T = 1$, volgt nu dat $S = 2$. Neem vervolgens het verschil $U - S$:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \dots \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots \\ \hline 0 + \frac{2}{4} + \frac{6}{8} + \frac{12}{16} + \frac{20}{32} + \dots \end{array}$$

Neem dan het verschil van $2(U - S)$ en S :

$$\begin{array}{r} \frac{2}{2} + \frac{6}{4} + \frac{12}{8} + \frac{20}{16} + \dots \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots \\ \hline \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \dots \end{array}$$

Dit verschil is gelijk aan U . Omdat $S = 2$, geldt dus $2(U - 2) - 2 = U$, waaruit volgt dat $U = 6$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Wouter Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan de IJssel, **Sjoerd Geevers** van het Jantenbergencollege te Roosendaal, **Jurgen van den Heuvel** van het Stedelijk Gymnasium te 's-Hertogenbosch, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Jurgen van den Heuvel**.

door Jan Guichelaar

♦♦Waslijnkrommen



De Golden Gate brug bij San Francisco is een van de beroemdste voorbeelden van een hangbrug. De grote kabels tussen de twee torens vormen een parabool.

Welke vorm neemt een dunne ketting of slappe waslijn aan die je tussen twee punten ophangt? Tegenwoordig kan elke eerstejaarsstudent wis- of natuurkunde de formule voor zo'n 'kettinglijn' uitrekenen, maar in de zeventiende eeuw is daar jarenlang over gedebatteerd door grote wetenschappers als Christiaan Huygens en Galileo Galilei. Hun handicap was dat Isaac Newton toen de differentiaalrekening nog niet had uitgevonden. Als je de hele waslijn volhangt met nat wasgoed, verandert de kettinglijn in een welbekende kromme: de *parabool*. Kettinglijnen en parabolen vind je overal terug in bruggen en gebouwen, omdat ze met een minimum aan materiaal de sterkste constructie opleveren.

Een hangbrug is te vergelijken met een waslijn vol met nat wasgoed. De draagkracht van de brug wordt geleverd door twee dikke staalkabels (de waslijnen), die zijn bevestigd tussen twee torens aan weerszijden van de brug. Het brugdek (het wasgoed) is met een groot aantal verticale, veel dunnere kabels aan de hoofdkabels opgehangen. In dit artikel tonen we aan dat die hoofdkabels de vorm van een parabool hebben. We gaan er dan wel van uit dat het gewicht van de 'waslijnen' verwaarloosd mag worden vergeleken met het gewicht van het 'wasgoed'.

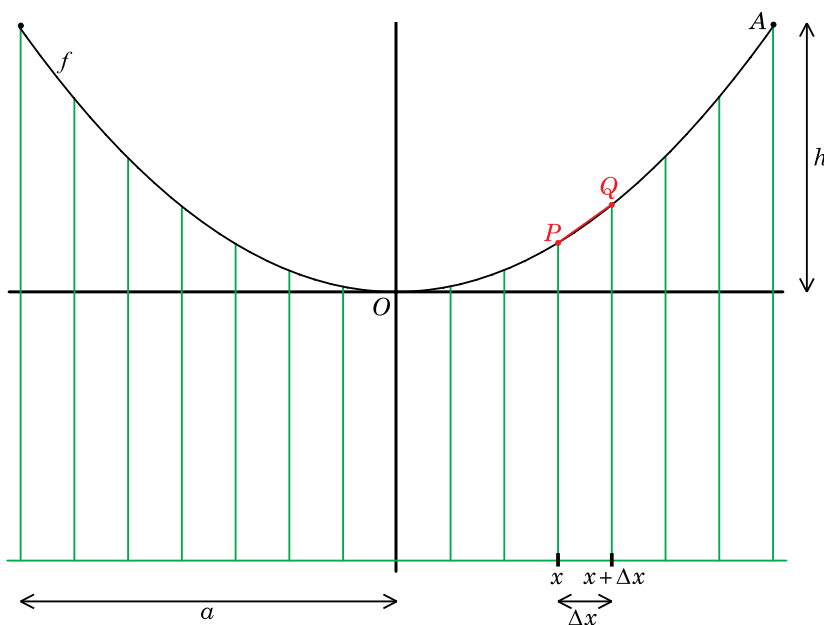
Wiskundig model

Om de berekening zo simpel mogelijk te houden, is het handig om de oorsprong van ons assenstelsel te kiezen in het laagste punt van de kabel, midden boven de waterweg. De breedte van de waterweg noemen we $2a$, de hoogte van de ophangpunten h , zie figuur 1. We willen weten welke functie $f(x)$ de vorm van de kabel beschrijft.

Zoals meestal bij dit soort problemen, kom je tot de oplossing door eerst nauwkeurig te kijken wat er in een heel klein gedeelte

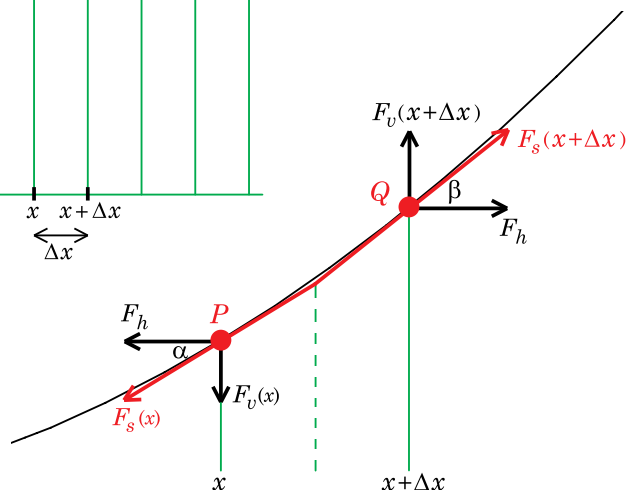
van de kabel aan de hand is. Daarna kun je een vergelijking opstellen waaruit de vorm van de kromme als geheel rolt. Dit is in wezen wat in de differentiaalrekening gebeurt. We kiezen twee punten P en Q vlak bij elkaar op de kabel, met horizontale afstand Δx (delta x , een kleine toename van x). De coördinaten van P en Q zijn dan $P(x, f(x))$ en $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Het kleine stukje kabel PQ zie je uitvergroot in figuur 2. Op dit stukje kabel werken twee spankrachten volgens de raaklijnen aan $f(x)$ in de punten P en Q . De spankracht F_s is afhankelijk van x (in richting en grootte). Bovendien werkt er ook een verticaal gerichte zwaartekracht F_z op, veroorzaakt door het gewicht van het onder Δx hangende stukje brugdek. Deze F_z is recht evenredig met Δx (het brugdek is namelijk overal even breed en dik). In formulevorm: $F_z = d \cdot g \cdot \Delta x$, waarin d de massa van het brugdek in kilogrammen per meter is, en g de versnelling van de zwaartekracht ($9,8 \text{ m/s}^2$). Deze getallen op zich zijn niet belangrijk – ze beïnvloeden de vorm van de kromme niet – alleen de recht-evenredigheid telt.



Figuur 1 Een wiskundig model van de kabels van een hangbrug

Figuur 2 Het stukje kabel PQ van figuur 1 uitvergroot



Horizontale en verticale componenten

De spankrachten kun je ontbinden in een horizontale (h) en een verticale (v) component: in P zijn die $F_h(x)$ en $F_v(x)$ en in Q zijn die $F_h(x + \Delta x)$ en $F_v(x + \Delta x)$. We beschouwen al deze componenten als positieve getallen.

In een toestand van evenwicht moeten de horizontale componenten van de spankracht gelijk zijn, want anders zou dit stukje kabel naar rechts of naar links getrokken worden. Dus de horizontale component van de spankracht is overal gelijk aan F_h , zonder afhankelijkheid van x .

De verticale component van de spankracht in Q (naar boven) is natuurlijk groter dan de verticale component van de spankracht in P (naar beneden). Het verschil moet (als de kabel in evenwicht is) precies gelijk zijn aan de zwaartekracht op het stukje brugdek Δx .

Dus

$$F_v(x + \Delta x) - F_v(x) = d \cdot g \cdot \Delta x \quad (1)$$

Eigenlijk moet je ook nog aantonen dat het stukje PQ niet gaat draaien in de evenwichtsstand. Je moet dan aantonen dat $F_s(x)$, $F_s(x + \Delta x)$ en F_z door één punt gaan. De richting van F_z ligt precies tussen P en Q in $(x + \frac{1}{2}\Delta x)$, want hij gaat door het zwaartepunt van het stukje brugdek. Je kunt zelf proberen aan te tonen dat de draaglijnen van deze drie krachten door één punt gaan.

Afgeleiden

We zijn nu bijna zo ver, dat we een vergelijking kunnen opstellen voor de vorm van de kabel als geheel, de functie $f(x)$.

De afgeleide van $f(x)$, genoteerd als $f'(x)$, geeft de helling van de kabel aan, ofwel de tangens van de hoek α tussen de raaklijn aan de kabel in het punt $(x, f(x))$ en de horizon (de x -as).

We herinneren je nog even aan de definitie van de afgeleide functie:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

In figuur 2 kun je dan zien dat

$$F_v(x) = F_h \cdot f'(x) \quad (2)$$

en

$$F_v(x + \Delta x) = F_h \cdot f'(x + \Delta x) \quad (3)$$

Uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) volgt dat

$$\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{d \cdot g}{F_h}.$$

Hier staat een uitdrukking die sprekend lijkt op de definitie van de afgeleide van f' ! Het verschil is dat hier f' staat in plaats van f .

Dat betekent dat voor $\Delta x \rightarrow 0$ dit de tweede afgeleide $f''(x)$ van f in het punt x voorstelt. We kunnen nu het volgende concluderen:

$$f''(x) = \frac{d \cdot g}{F_h}.$$

Rechts van het $=$ -teken staat een constant getal (de variabele x komt er niet in voor). Van welke functie blijft alleen maar een constante over als je twee keer de afgeleide neemt? Het antwoord is simpel: een polynoom van de tweede graad, dat wil zeggen: een functie van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a \neq 0$.

Omdat de top van de grafiek in de oorsprong van het assentelsel ligt, geldt dat $b = c = 0$. De vorm van de kabel $f(x)$ is dus

$$f(x) = \frac{d \cdot g}{2F_h} x^2.$$

Omdat de kabel in het punt A vastzit op hoogte h , weten we dat

$$F_h = \frac{d \cdot g \cdot a^2}{2h},$$

$$\text{dus } f(x) = \left(\frac{h}{a^2}\right)x^2.$$

De vorm van de kabel is dus een parabool. Zoals het gezond verstand ook verwacht, neemt de spankracht in de kabel toe als het brugdek per meter (d) zwaarder wordt, als de totale overspanning ($2a$) groter wordt, en als de hoogte van de ophangpunten (h) afneemt (want dat komt overeen met een strakker opgehangen kabel).

Zoals vaak het geval is, is deze berekening een vereenvoudiging van de werkelijke situatie. Bij een grote hangbrug, zoals de Golden Gate brug op de foto op pagina 22, zijn de kabels meer dan een meter dik, dus hun gewicht is niet echt verwaarloosbaar ten opzichte van het brugdek. Ook zit er een flinke tussenruimte tussen de verticale kabels waaraan het brugdek hangt, terwijl de berekening doet alsof aan elk stukje Δx een verticale kabel hangt.

Kettinglijn

De parabool was al aan de Oude Grieken bekend, dus ook Huygens en Galilei kenden die. Galilei beweerde dat de vorm van een vrij opgehangen ketting (een waslijn zonder wasgoed er aan, een hangbrug zonder brugdek) eveneens een parabool was. Huygens bewees in 1646 met een subtiële, geometrische redenering dat dit niet waar kon zijn, maar een formule voor de echte kettinglijn kon hij toen nog niet vinden. Dankzij onze verkenning van de differentiaalrekening bij de hangbrug, kunnen wij dat nu wel.

De berekening is grotendeels hetzelfde, ook de tekeningen kunnen weer gebruikt worden. Bij de zwaartekracht moet je wel goed opletten: het gaat nu om de zwaartekracht op het schuine stukje kabel tussen de punten P en Q . Met de stelling van Pythagoras vinden we:

$$\begin{aligned} F_z &= d \cdot g \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f(x)^2} = \\ &= d \cdot g \Delta x \sqrt{1 + (\Delta f(x) / \Delta x)^2}. \end{aligned}$$

De grootte d is nu de massa van de kabel per meter. De horizontale component van de spankracht is om dezelfde reden als bij het brugdek in elk punt weer dezelfde. Het verschil van de verticale componenten van de spankracht in Q en P moet weer gelijk zijn aan de zwaartekracht op het stukje ketting PQ . Dus

$$\begin{aligned} F_v(x + \Delta x) - F_v(x) &= \\ d \cdot g \cdot \Delta x \sqrt{1 + (\Delta f(x) / \Delta x)^2}. \end{aligned}$$

Met het invullen van de functie $f(x)$ krijg je nu:

$$\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{d \cdot g}{F_h} \sqrt{1 + (\Delta f(x) / \Delta x)^2}.$$

Neem weer de limiet voor $\Delta x \rightarrow 0$, dan krijg je de volgende vergelijking:

$$f''(x) = \frac{d \cdot g}{F_h} \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Zonder bewijs vermelden we dat de functie

$$f(x) = \frac{e^{(d \cdot g / F_h)x} + e^{-(d \cdot g / F_h)x}}{2(d \cdot g / F_h)}$$

aan deze differentiaalvergelijking voldoet. Deze functie lijkt qua vorm, ondanks de totaal verschillende formule, sterk op een parabool, vandaar Galilei's misvatting.

Eigen gewicht

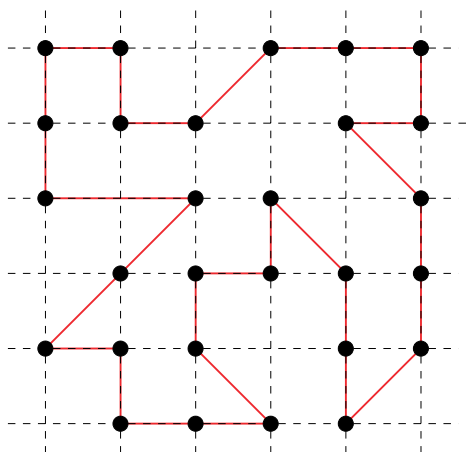
De kettinglijn is de vorm die een ketting of slap touw tussen twee ophangpunten aanneemt als die alleen maar z'n eigen gewicht moet dragen. Omdat het touw een te verwaarlozen stijfheid heeft, kunnen er langs het hele touw alleen trekkrachten in de richting van het touw zelf werken. Daaruit hebben architecten geconcludeerd dat een kettinglijn op z'n kop juist de optimale vorm is om een boog of gewelf te bouwen. Er werken dan namelijk alleen maar drukkrachten in de richting van de boog zelf, dus nergens zijdelingse krachten die de boog willen vervormen of uit elkaar trekken. Er is dus ook geen extra bouw materiaal nodig om die krachten op te vangen. Inderdaad werd deze boogvorm al in de grijze oudheid toegepast om stenen overkappingen te bouwen. Natuurlijk was die bouwwijze toen niet gebaseerd op berekeningen, maar op praktijkervaring. Een modern voorbeeld is de Gateway Arch, een enorme 'toegangspoort' tot de stad St. Louis, zie de binnenkant van het omslag van deze *Pythagoras*.

Problemen

door Dion Gijswijt

Achtentwintigstedentocht

In de figuur zie je 28 punten gemarkeerd op het eenheidsrooster. Er is ook een rondreis aangegeven langs de 28 punten, waarvan de lengte $22 + 7\sqrt{2}$ is. Bestaat er ook een kortere rondreis langs de 28 punten?

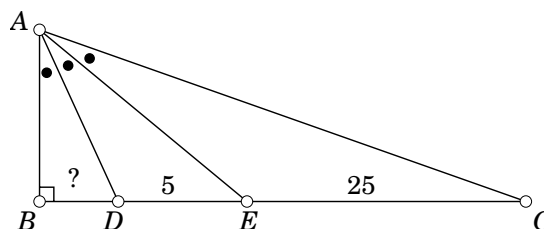


Hilbert Hotel

Het Hilbert Hotel en het Banach Hotel hebben allebei oneindig veel kamers, die zijn genummerd 1, 2, 3, ... (zie pagina 15). Voor iedere *eindige* verzameling kamers van het Hilbert Hotel is een manager aangesteld, die voor deze kamers verantwoordelijk is. Zo is er voor elke kamer afzonderlijk een manager, maar ook één voor kamers 2, 5, 11, één voor kamers 77765, ..., 100009 en er is zelfs een manager die geen enkele kamer voor zijn rekening neemt. Kunnen alle managers worden ondergebracht in het leegstaande Banach Hotel, elk op een eigen kamer?

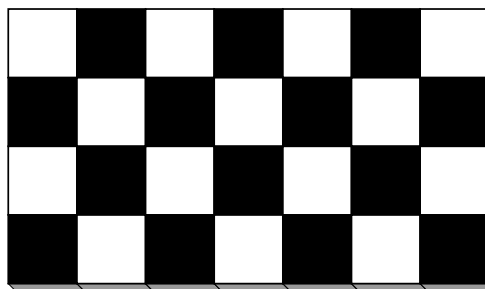
Driedeling

In de figuur zie je een driehoek ABC waarvan hoek B recht is. Op zijde BC liggen punten D en E zó, dat de hoeken BAD , DAE en EAC gelijk zijn. Verder is gegeven dat $|DE| = 5$ en $|EC| = 25$. Bereken de lengte $|BD|$.



Paard

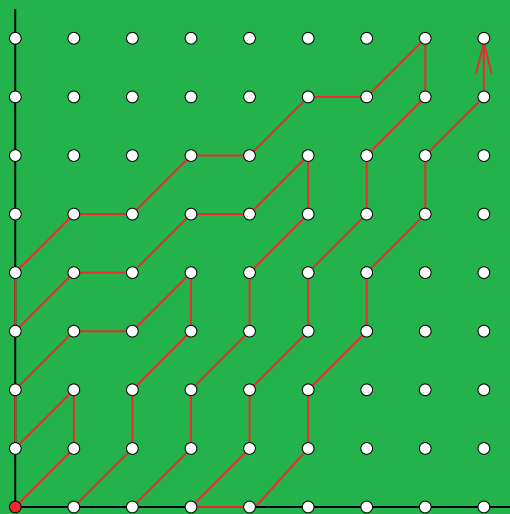
Is het mogelijk om met een paard een rondreis langs alle 28 velden van een 'schaakbord' van 4×7 te maken? Je mag alleen paardensprongen maken, moet ieder vakje precies eenmaal aandoen en terugkeren waar je was begonnen.



Oplossingen

nr. 3

Wandeling



Magisch verschil

Voor iedere i geldt óf $x_i \leq 10$ óf $y_i \leq 10$. Immers, als $x_i, y_i \leq 10$, dan zijn er minimaal 11 getallen kleiner dan of gelijk aan 10. Om eenzelfde reden kunnen x_i en y_i niet beide ten minste 11 zijn.

Er volgt dat in de som

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_{10} - y_{10}|$$

de getallen 11 tot en met 20 elk met een plusteken worden geteld, en de getallen 1 tot en met 10 elk met een minteken. De som is dus altijd

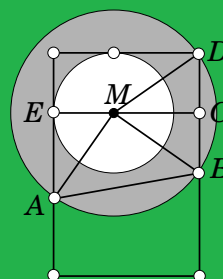
$$(11 - 1) + (12 - 2) + \dots + (20 - 10) = 100.$$

Zeven rovers

Er zijn $\binom{7}{3} = 35$ drietallen rovers. Maak voor elk drietal een apart slot en geef daarvan een sleutel aan de overige vier rovers. Door de kist te sluiten met alle 35 sloten, kan de kist door iedere meerderheid worden geopend, maar niet door een minderheid.

Snede

De driehoeken AEM en BCM hebben gelijke zijden en zijn dus congruent. Daaruit volgt dat $\angle AMB$ gelijk is aan 90° . Dus $|AB| = 10\sqrt{2}$.



door **Klaas Pieter Hart**

De volledigheid van $\mathbf{R}$, de verzameling reële getallen, is de sleutel tot een heleboel stellingen uit de analyse. Zo kun je hem gebruiken om te bewijzen dat veel vergelijkingen een oplossing hebben.

♦♦ De tussenwaarde- stelling

28

In vorige afleveringen hebben we de volledigheid van $\mathbf{R}$, ofwel de getallenlijn, al gebruikt om te bewijzen dat alle n -demachtswortels bestaan en dat 2^x bestaat voor *alle* x . Exact geformuleerd:

De getallenlijn is volledig.

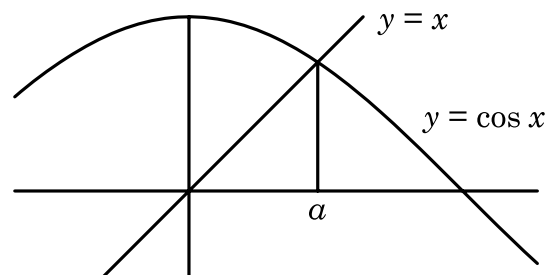
Elke (niet-lege) verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.

Dat wil zeggen: als A een deelverzameling van $\mathbf{R}$ is waarvoor een x bestaat zó dat $a \leq x$ voor alle $a \in A$ (x is een bovengrens), dan is er een bovengrens a^* voor A die kleiner is dan alle andere bovengrenzen.

Vergelijkingen oplossen

We gaan deze eigenschap van de getallenlijn benutten om te bewijzen dat de vergelijking $\cos x = x$ een oplossing heeft. Als je naar de

grafieken van $y = \cos x$ en $y = x$ kijkt, 'zie' je dat er een oplossing is, maar zo'n plaatje is natuurlijk nog geen bewijs.



Bij $x = 0$ ligt x onder $\cos x$ (want $\cos 0 = 1 > 0$) en bij $x = 1$ ligt x boven $\cos x$ (want $\cos 1 < 1$). Je zou dus verwachten dat de grafieken elkaar tussen 0 en 1 snijden en dat er dus een getal a te vinden moet zijn met $\cos a = a$.

Om die verwachting in zekerheid om te zetten, kunnen we twee dingen doen. We kunnen proberen de vergelijking op één of andere manier op te lossen en uit te komen op een uitspraak van de vorm $a = \dots$. Als je dat probeert, zul je merken dat je eigenlijk geen houvast hebt en niet verder komt. Het andere wat we kunnen doen, is *bewijzen* dat zo'n a moet bestaan en een methode aangeven om goede benaderingen van die a te maken.

Een kandidaat a vinden

Bekijk de verzameling $A = \{x : x < \cos x\}$. Die verzameling is niet leeg, want $0 \in A$, en naar boven begrensd: 1 is een bovengrens, want als $x > 1$, dan geldt zeker $x > \cos x$ (omdat altijd $\cos x \leq 1$).

We hebben dus een kandidaat voor a : de kleinste bovengrens van A . Immers, vlak onder a zijn er x -en met $\cos x > x$ en vlak boven a geldt $\cos x < x$; daaruit zou toch moeten volgen dat $\cos a = a$.

Bewijzen dat $\cos a = a$

Om te bewijzen dat $\cos a = a$, hebben we een gonio-formule nodig:

$$\cos x - \cos a = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(x+a)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right)$$

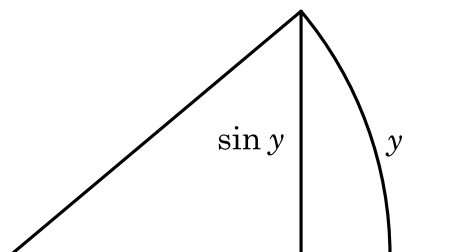
Hieruit kunnen we afleiden dat $\cos x$ dicht bij $\cos a$ ligt als x dicht bij a ligt. De absolute waarde van het verschil is namelijk

$$2 \left| \sin\left(\frac{1}{2}(x+a)\right) \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right) \right|$$

Omdat een sinus nooit groter dan 1 is kunnen we dit afschatten met

$$2 \left| \sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right) \right|$$

Verder geldt altijd $|\sin y| \leq y$, zie het onderstaande plaatje.



We concluderen dat altijd

$$|\cos a - \cos x| \leq |x - a|.$$

Hiermee kunnen we laten zien dat $\cos a \geq a$ en dat $\cos a \leq a$, en dus dat $\cos a = a$.

Neem een willekeurig natuurlijk getal n en kies $x \in A$ zó dat $x > a - 2^{-n}$. We gaan het verschil $\cos a - a$ anders opschrijven, namelijk als de som van drie verschillen: $\cos a - \cos x$, $\cos x - x$ en $x - a$. Omdat $|\cos a - \cos x| \leq |x - a|$, kunnen we afleiden dat de som van die drie verschillen groter is dan $-2 \cdot 2^{-n}$, want $\cos x - x$ is positief en de andere twee termen zijn, in absolute waarde, niet groter dan 2^{-n} . Dus, voor elke n geldt $\cos a - a > -2 \cdot 2^{-n}$. Maar dat betekent dat $\cos a - a$ ten minste zo groot is als de kleinste bovengrens van alle waarden $-2 \cdot 2^{-n}$ en dat is 0. Conclusie: $\cos a - a \geq 0$.

Opgave 1. Laat met eenzelfde redenering zien dat $\cos a \leq a$.

Een algoritme

We kunnen nu een algoritme opstellen om a te benaderen. Wat we doen is het interval $[0, 1]$ halveren, kijken of a in $[0, \frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2}, 1]$ ligt, de helft waarin a ligt halveren, kijken in welke helft a ligt, die helft halveren, enzo-voort, net zo lang tot we tevreden zijn met de nauwkeurigheid die we behaald hebben.

Een maat voor de nauwkeurigheid is de lengte van het interval dat we bij iedere stap vinden. Op stap 0 (als we beginnen) is die lengte $1 - 0 = 1$, op stap 1 is de lengte $\frac{1}{2}$, op stap 2 is hij $\frac{1}{4}$, ..., op stap i is de lengte gelijk aan $(\frac{1}{2})^i$.

Je kunt dit eenvoudig programmeren: kies een nauwkeurigheid ε en stel $a_0 = 0$ en $b_0 = 1$. Herhaal nu telkens het volgende recept:

- stel $m_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + b_{i-1})$ en bereken $\cos m_i$;
- als $\cos m_i = m_i$ STOP en PRINT " m_i is de oplossing"
- als $\cos m_i > m_i$: stel $a_i = m_i$ en $b_i = b_{i-1}$
- als $\cos m_i < m_i$: stel $a_i = a_{i-1}$ en $b_i = m_i$
- als $b_i - a_i < \varepsilon$: STOP

Het eerste 'als' is er natuurlijk om te zien of we niet per ongeluk de oplossing hebben gevonden. Het tweede 'als' kiest de rechterhelft en het derde kiest de linkerhelft. Het vierde 'als' is er om te kijken of we de gewenste nauwkeurigheid hebben bereikt.

Opgave 2. Hoeveel iteraties zijn er nodig als $\varepsilon = \frac{1}{1000}$? En als $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$?

Het bovenbeschreven algoritme staat bekend als de *bisectie-methode* (omdat we telkens een interval in tweeën snijden natuurlijk).

De tussenwaardestelling

Kunnen we uit het bovenstaande verhaal een algemene stelling distilleren? Dat kan zeker en die stelling werd in 1817 geformuleerd en bewezen door de Tsjechische wiskundige Bernard Bolzano in een artikel met de volgende welluidende titel: *"Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege"*.

Hier volgt de stelling, in de formulering van Bolzano zelf.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x , $f(x)$ und $\varphi(x)$, entweder für alle Werthe von x , oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, wenn ferner $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, und $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ist: so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x , für welchen $f(x) = \varphi(x)$ wird.

In het Nederlands vertaald: als twee functies f en φ continu zijn op een interval $[\alpha, \beta]$ en als bovendien geldt dat $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ en $f(\beta) > \varphi(\beta)$, dan heeft de vergelijking $f(x) = \varphi(x)$ ten minste één oplossing tussen α en β .

Hierin is nog één ding ongedefinieerd: wat betekent het dat een functie continu is? Daarvan gaf Bolzano, waarschijnlijk als eerste, een nette definitie.

Nach einer *richtigen Erklärung* versteht man unter der Redensart, *das eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändere*, nur so viel, *dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man ω so klein als man nur immer will, annehmen kan.*

In (losse) vertaling: men zegt dat een functie $f(x)$ zich voor alle waarden van x volgens de wet der continuïteit gedraagt indien voor iedere x het verschil $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner dan een gegeven grootte kan worden gemaakt door ω maar klein genoeg te nemen.

In een wat exactere formulering, die afkomstig is van Weierstrass: bij iedere gegeven grootte ε bestaat een andere grootte δ zó dat telkens als $|y - x| < \delta$, dan is $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

In ons geval hadden we in feite $f(x) = x$ en $\varphi(x) = \cos x$, en de grenzen van het interval zijn $\alpha = 0$ en $\beta = 1$.

De functies f en φ zijn ook inderdaad continu: in beide gevallen kunnen we bij de gegeven grootte ε gewoon $\delta = \varepsilon$ nemen. Immers, we hebben laten zien dat altijd $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$, dus als $|y - x| < \varepsilon$ dan ook $|\cos y - \cos x| < \varepsilon$.

Bewijzen dat een functie continu is, is niet altijd makkelijk, zoals we bij $\cos x$ al gezien hebben: we hadden een gonio-formule nodig en een afschatting van $|\sin y|$. Laten we eens proberen aan te tonen dat de functie g gedefinieerd door $g(x) = x^2$ continu is. Neem een x vast en een grootte ε . Hoe vinden we nu een passende grootte δ ?

Welnu, eerst bekijken we maar eens wat we met $|y^2 - x^2|$ kunnen doen. We kunnen in ieder geval ontbinden:

$$|y^2 - x^2| = |y + x||y - x|.$$

Daar staat al $|x - y|$, maar met nog een variabele factor $|x + y|$ er bij. De δ die we zoeken mag best heel klein zijn, we beperken ons daarom eerste maar eens tot het interval

$[x - 1, x + 1]$. Als y uit dat interval komt, geldt dat $|x + y|$ nooit groter is dan het maximum van $2|x + 1|$ en $2|x - 1|$. Noem dat maximum maar even M , dan concluderen we dat voor y in het interval $[x - 1, x + 1]$ altijd geldt $|y^2 - x^2| \leq M|x - y|$. Nu weten we hoe δ te kiezen: het minimum van 1 en ε/M ! Want dan geldt: als $|x - y| < \delta$, dan zeker $|y^2 - x^2| \leq M|x - y|$ (omdat $|y - x| < 1$) en $M|x - y| < \varepsilon$ (omdat $|y - x| < \varepsilon/M$). Conclusie: $g(x) = x^2$ gedraagt zich volgens de wet der continuïteit.

Neem nu ook nog $\psi(x) = 2$ (constante functie) en $\alpha = 0$ en $\beta = 2$; dan geldt $g(0) < \psi(0)$ en $g(2) > \psi(2)$. Er is dus een oplossing van de vergelijking $g(x) = \psi(x)$ tussen 0 en 2. Dus de stelling van Bolzano geeft ons het bestaan van $\sqrt{2}$.

Waarom 'Tussenwaardestelling'?

Tegenwoordig zul je de Tussenwaardestelling in een wat andere formulering in de boeken tegenkomen.

De tussenwaardestelling.

Als f een continue functie is op een interval $[\alpha, \beta]$, dan neemt f op dat interval elke waarde tussen $f(\alpha)$ en $f(\beta)$ aan.

Hierin maakt het niet uit of $f(\alpha) > f(\beta)$ dan wel $f(\alpha) < f(\beta)$; bij elk getal c tussen die twee waarden is er een a in het interval (α, β) met $f(a) = c$.

Deze versie volgt meteen uit die van Bolzano: vergelijk f maar met de constante functie die overal de waarde c aanneemt.

Het omgekeerde geldt ook: de versie van Bolzano volgt uit de nieuwe: werk met $g = f - \varphi$; dan geldt $g(\alpha) < 0$ en $g(\beta) > 0$, dus 0 ligt tussen $g(\alpha)$ en $g(\beta)$. Er is dus een a tussen α en β met $g(a) = 0$, voor die a geldt natuurlijk $f(a) = \varphi(a)$.

Teruglezen

Herlees het eerste artikel over worteltrekken (jaargang 45, nr. 1) en het artikel over machtsverheffen (jaargang 45, nr. 3). Daar wordt netjes bewezen dat $x \mapsto x^3$ en $x \mapsto 2^x$ continu zijn en ook wordt daar in feite de tussenwaardestelling voor die twee functies gebruikt om het bestaan van $\sqrt[3]{2}$ en van de logaritme te rechtvaardigen.

Opgave 3. Bewijs netjes dat voor elke $n = 1, 2, 3, \dots$ de functie $x \mapsto x^n$ continu is.

31

In de vorige *Pythagoras* stonden de 16-gaten-puzzel en een landkaart die lastig met vier kleuren te kleuren is, zonder dat aangrenzende landen dezelfde kleur hebben. Hier zie je de oplossingen.

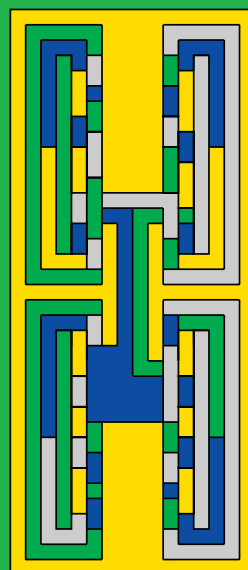
Oplossing 16-gaten-puzzel

Rangschik de houten latjes zoals hieronder. Leg de ene set latjes op de andere set, en alle gaten zijn bedekt.



Oplossing Kleurrijke kaarten

De grote landkaart in het artikel 'Kleurrijke kaarten' kan zo worden ingekleurd met vier kleuren, zonder dat aangrenzende landen dezelfde kleur hebben.



WISKUNDE

de garantie voor een zekere toekomst

“Als consultant Asset & Liability Management bij ORTEC geef ik advies aan pensioenfondsen over het beleid wat ze het beste kunnen voeren. Mijn opleiding tot wiskundige maakt het mogelijk om daarvoor de lange termijn modellen te ontwikkelen.”

drs. Marnix Engels

Ontdek wiskunde op het Studiefestival en de Open dag. Kijk voor meer informatie op www.science.leidenuniv.nl



Universiteit Leiden

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 3

In de tram

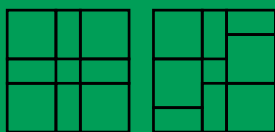
Aafke moet naast de twee meisjes kijken. Niet naast de jongens: als er een meisje zit, is de bewering juist; als er een jongen of niemand zit, is de bewering niet tegengesproken.

Allemaal centen

Alleen bedragen van 25 (Amerika: 1, Europa: 2), 26 (Amerika: 2, Europa: 3), 35 (Amerika: 2, Europa: 3) en 36 (Amerika: 3, Europa: 4) cent.

Tegels leggen

Er zijn vijf patronen met draaisymmetrie. Twee daarvan zijn:



Een bijzondere papegaai

De papegaai is doof.

Een rare rij

Uiteindelijk krijg je steeds:
15, 51, 25, 52, 26, 62, 31, 31, 15, ...

COLOFON

46ste jaargang nummer 4
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur

Arnout Jaspers

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Marco Swaen, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Chris Zaal

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176 E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nrs per jaargang)

€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk

onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), C. van Dorp, student wiskunde aan de UvA (Christiaan.vanDorp@student.uva.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), M. Hoeve, student wiskunde aan de UvA (mhoeve@science.uva.nl), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:

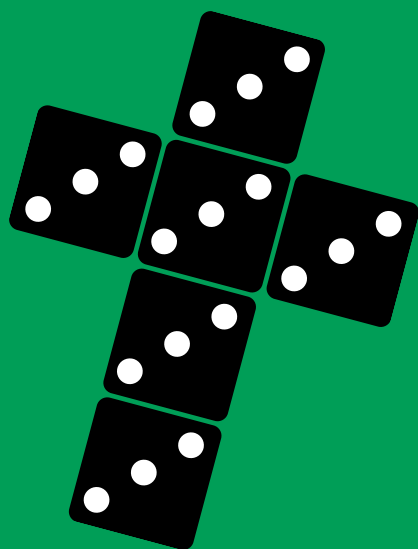
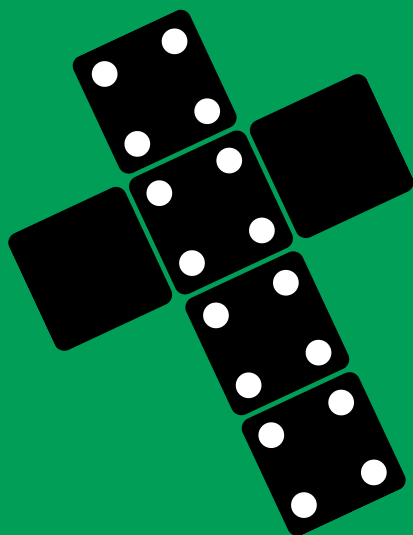


TU/e



TU Delft





Op een elft

Een elft zegt boos: 'Op alles wordt
besnoeid, beknipt en bekort.
Ik, die tot aangenaam verpoos
te Zevenaar een vijver koos,
zal straks, je zult het nog beleven,
een 11 zijn in een 5 te 7.'

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse