

PYTHA GORAS



Boarding

Toegepaste Wiskunde naar

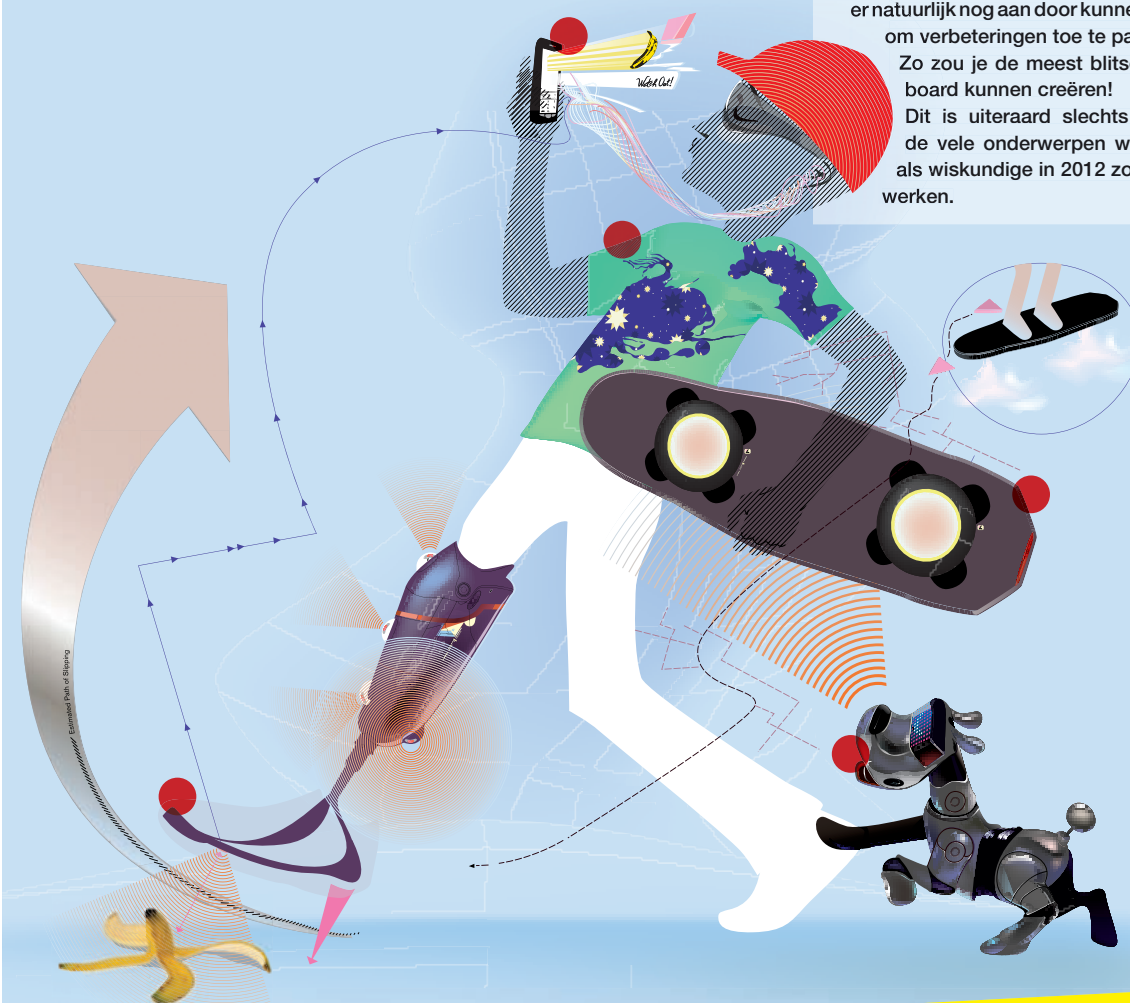
2012!

Een hoverboard is een zwevend skateboard. Voor veel jonge wetenschappers is het de ultieme uitdaging om dat voor elkaar te krijgen. Nog beter is het als het board wordt uitgerust met een ingebouwde routeplanner, een zelfsturend mechanisme en slimme sensoren waarmee je obstakels, zoals een bananenschil, kunt registreren.

Wiskundige dynamische modellen zorgen ervoor dat het hoverboard ieder gevaar soepeltjes voorbij zal zweven. Tijdens je studie zou je de accessoires al gemaakt kunnen hebben en na je afstuderen zou je er natuurlijk nog aan door kunnen werken om verbeteringen toe te passen.

Zo zou je de meest blitse hoverboard kunnen creëren!

Dit is uiteraard slechts één van de vele onderwerpen waaraan je als wiskundige in 2012 zou kunnen werken.



**DUS KOM TOEGEPASTE
WISKUNDE BIJ ONS STUDEREN!**

Bezoek de Last Minute Dag op de Campus op 7 juni a.s.

www.tw.schoolsite.utwente.nl



Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

GELOOF IN STATISTIEK

Het had een som op het vwo-eindexamen wiskunde kunnen zijn: verpleegster X draait 5 op de 12 diensten in een ziekenhuis, en de in totaal 4 dodelijke incidenten vinden allemaal tijdens haar diensten plaats. Hoe groot is de kans dat dit puur toeval is? Toch woedt hierover onder statistici een heftige discussie. Waarom? De getallen waren anders, maar het bewijs tegen Lucia de B., de vermeende seriemoordenares die in 2004 levenslang kreeg, leunde eerst zwaar op zo'n berekening. Daar kwam uit dat de kans op toeval 1 op 342 miljoen was. Andere statistici vinden die berekening onjuist en voor de rechter kregen ze daar zo'n onenigheid over, dat die besloot helemaal geen statistiek meer als bewijs te accepteren.

Het is opmerkelijk dat in de wiskunde 'scholen' voorkomen die het principieel oneens blijven, net als in de kunst of in de godsdienst. Een van de grootste fundamentele tegenstellingen in de wiskunde is die tussen de klassieke en de Bayesiaanse statistiek. Deze controversie ligt niet aan het rekenwerk – dat is immers gewoon controleerbaar – maar is van filosofische aard. Bayesianen interpreteren, anders dan klassieke statistici, een kans als de 'subjectieve graad van geloof in een bepaalde gebeurtenis'.

In dit nummer lees je in 'Lucia de B.: kans op toeval' hoe de klassieke statisticus in deze verpleegsterskwestie te werk gaat. De Bayesianen ontbreken in dit artikel, maar die komen vast in een volgend nummer nog wel eens aan bod.

1

INHOUD

2 – 3	Kleine nootjes	12 – 15	Teken uit!
4 – 5	Journal	16 – 17	Rekenen met medische pixels
6 – 7	Uitslag Rekenprijsvraag	18 – 21	Lucia de B.: kans op toeval
8	Oneindig veel Coster- getallen	22 – 23	Pythagoras Olympiade
9 – 11	Wat is een kromme? [Omslag: de lemniscaat]	24 – 27	Kansen en overlapgetallen
		28 – 29	Problemen – Oplossingen
		30 – 32	Geen piek te hoog
		33	Oplossingen Kleine nootjes nr. 4

Niveausymbooltjes

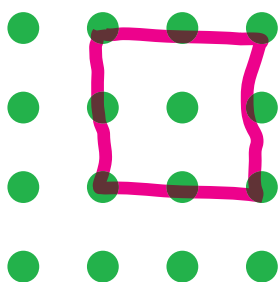
Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de wiskunde nodig is, hebben bij de titel een symbool voor de moeilijkheidsgraad. Artikelen met ♦ zijn vanaf de vierde klas te begrijpen. Voor artikelen met ♦♦ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ♦♦♦ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

Kleine nootjes zijn puzzeltjes die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

Kleine nootjes

2



Hoeveel vierkanten?

Hiernaast zie je zestien roosterpunten. Hoeveel vierkanten kun je maken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn?

Munten

Mike heeft op één na alleen munten van 2 euro. Ook heeft hij op één na alleen munten van 1 euro. Hoeveel geld heeft Mike?



Terug in de tijd?

Schrijf een datum op de volgende manier als reeks van acht cijfers: ddmjjjj. Bijvoorbeeld 2 mei 2013 schrijf je als 02052013. Wat is (of was) de eerste datum in deze eeuw die je ook van achteren naar voren kunt lezen (een zogenaamd *palindroom*)?



ddmmjjjj



?

Product en som

'Ik neem twee gehele, ongelijke getallen onder de 10 in gedachten,' zeg ik. Ik fluister Priscilla het product in het oor en Sjoerd de som. 'Ik weet ze niet,' zegt Priscilla. 'Ik had vier mogelijkheden, maar nu jij ze niet weet, weet ik ze wel,' zegt Sjoerd. Wat zijn de twee getallen?

3

Hoe heet zij?

Een meisje zegt:
'Ik heet 3 keer 1769.'
Hoe heet zij?



door Alex van den Brandhof

Nieuw magisch vierkant

4 Drie middelbare scholieren uit Nijmegen, Jesse Hoekstra (17), Willem Schilte (17) en Petra Alkema (15), hebben een bijzonder magisch vierkant geconstrueerd. Een magisch vierkant is een vierkant van n bij n hokjes waarin de getallen van 1 tot en met n^2 zijn ingevuld, op zo'n manier dat elke kolom, elke rij en de beide diagonalen opgeteld dezelfde uitkomst geven. Het nieuwe vierkant, van 12 bij 12, heeft de magische som 870. Maar het bevat nog tal van andere eigenschappen. De som van alle getallen in iedere 'eenderde rij' en iedere 'eenderde kolom' (vanaf de rand gerekend) is gelijk aan 290, het derde deel van de magische som. Bijvoorbeeld $11 + 110 + 131 + 38 = 290$, maar ook $108 + 39 + 98 + 45 = 290$ en ook $80 + 53 + 92 + 65 = 290$. Verder is het vierkant 'panmagisch': alle diagonalen en alle parallelle gebroken diagonalen, zoals 121, 27, 11, 9, 32, 127, 101, 78, 96, 94, 74, 100, hebben som 870. Verder bevat het vierkant een groot aantal cirkels met gelijke som: iedere uit twaalf getallen bestaande cirkel met het middelpunt op de mid-

delste horizontale lijn heeft als som 870, zoals de cirkel gevormd door de getallen 60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75, 85. Verder heeft iedere cirkel bestaande uit acht getallen, zoals 16, 113, 31, 125, 44, 66, 80, 105, als som 580.

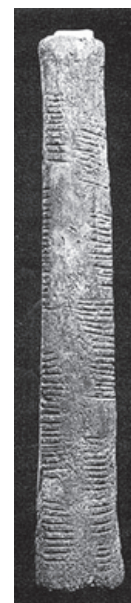
1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Oudste wiskundige geheim ontcijferd

Op 28 februari werd in Brussel het 'tweede been van Ishango' gepresenteerd. Ruim vijftig jaar geleden vond de Belgische archeoloog Jean De Heinzelin bij opgravingen in Ishango, op vijftien kilometer van de evenaar in het Afrikaanse Congo, twee botjes van ruim 20.000 jaar oud. Eén daarvan presenteerde hij destijds. Jarenlang speculeerden wetenschappers over de betekenis van de tekens

op het Ishango-bot. Is het een kalender? Een instrument waarmee de visvangst verdeeld werd? Een toverstokje of wichaarsinstrument? Een rekenkundig spel? Een verzameling priemgetallen? Opheldering over de betekenis kwam er door het tweede botje. Dit wierp een nieuw licht op de betekenis van het 'eerste Ishango-been'. De Heinzelin hield het bestaan van het tweede been geheim

tot vlak voor zijn dood in 1998. De twee been-tjes zouden telstokken zijn van een volk dat niet zoals wij decimaal telde, maar waarschijnlijk met de bases 6 en 10. Het zou gaan om een typisch Afrikaanse telwijze. Zo'n telproces is vergelijkbaar met wat wij in het westen doen als we getallen 'turfen' (tellen met streepjes in groepjes van vijf), omdat dat overeenkomt met onze telbasis 10.



Twee Dutch Bloggies voor Wiskundemeisjes

Ionica Smeets en Jeanine Daems hebben op 20 maart met hun weblog Wiskundemeisjes in twee categorieën een *Dutch Bloggie* gewonnen. De Dutch Bloggies zijn de Nederlandse awards voor weblogs en worden jaarlijks uitgereikt in elf categorieën.

Wiskundemeisjes is winnaar in de categorieën 'beste themalog' en 'best geschreven weblog'. Uit het juryrapport van beste themalog: "Eentje die er met kop en schouders bovenuit stak. Die vooral opviel vanwege originaliteit en creativiteit. Ionica Smeets en Jeanine Daems zijn De Wiskundemeisjes en zij doen alles wat wiskundemeisjes moeten doen. Op hun log keren zij hun formele wetenschap binnenste buiten, gooien het in de lucht en vangen het weer op, maken het persoonlijk, kleden het aan en uit. Ze spelen, schrijven, linken, informeren en amuseren." En uit het juryrapport van best geschreven weblog: "De manier waarop ze de wereld bekijken en beschrijven is origineel. Ze schrijven direct, pakkend en zonder clichés."

Ionica en Jeanine zijn promovendi in Leiden. Jeanine maakt bovendien sinds kort deel uit van de Pythagorasredactie.

Vijfde Abelprijs toegekend

De Abelprijs is dit jaar gewonnen door de 67-jarige Srinivasa S.R. Varadhan. De van oorsprong Indische wiskundige Varadhan ontvangt de prijs, een bedrag van 6 miljoen Noorse kronen (750.000 euro) voor zijn fundamentele bijdragen in de kansrekening, in het bijzonder voor die van de 'theorie van grote afwijkingen' (large deviations). Deze theorie is een onderdeel van de kansrekening waarbij zeldzame, ingrijpende gebeurtenissen worden bestudeerd. Deze theorie verklaart hoe een zeldzame gebeurtenis hoogstwaarschijnlijk optreedt.

Op 22 mei ontvangt Varadhan de prijs uit handen van de koning van Noorwegen. De Abelprijs is vernoemd naar Niels Henrik Abel (1802-1827), de grootste wiskundige van Noorwegen. De prijs, die sinds 2003 jaarlijks wordt uitgereikt, is bedoeld als tegenhanger voor de Nobelprijs, die voor de wiskunde niet bestaat.

5

Penrose-betegelingen in Middeleeuwse Islamitische mozaïeken

In februari verscheen in *Science* een artikel van Peter Lu, natuurkundestudent uit Harvard, en Paul Steinhardt, hoogleraar in Princeton. Ze hebben ontdekt dat in bepaalde Islamitische mozaïeken bijzondere patronen zitten, die lijken op de beroemde *Penrose-betegelingen*. Een Penrose-betegeling is een vlakvulling die niet-periodiek is. Dat betekent dat je een Penrose-betegeling niet zodanig kunt verschuiven dat hij weer op zichzelf terecht komt. Bij bijvoorbeeld een vlakvulling bestaande uit



Girih-patroon in de Groene Moskee in Bursa in Turkije (beeld: W.B. Denny)

rechthoeken kan dat wel: als je alles precies één rechthoek naar rechts verschuift, is het patroon precies hetzelfde.

Peter Lu en Paul Steinhardt hebben Islamitische mozaïeken gevonden met patronen die heel erg lijken op Penrose-betegelingen, zoals het Girih-patroon in de Groene Moskee in Bursa, Turkije. Zij concluderen dat er rond het jaar 1200 een conceptuele doorbraak heeft plaatsgevonden bij het construeren ervan, waardoor dergelijke wiskundig ingewikkeldere patronen verzonden konden worden.

Uitslag Rekenprijsvraag

6



"Eerst dachten de leerlingen dat ik die getallen verzonnen had. Ik heb zelfs een foto van meneer Coster van internet moeten plukken om ze ervan te overtuigen dat hij degene is die deze getallen verzonnen heeft."

Aldus wiskundelerares Van der Linden van Scholengemeenschap Were Di in Valkenswaard. Wie eenmaal overtuigd was, liep een goede kans verslaafd te raken aan het zoeken naar getallen die met alleen +, -, x en :, en twee keer elk cijfer van het getal, zijn op

te bouwen. In totaal ontving de redactie 62 inzendingen, dat is meer dan vorig jaar bij de Zeven-prijsvraag. Daarnaast bleek dat er op internet veel naar gekeken werd, ook door mensen die uiteindelijk niets inzonden.

Coster-klein

De opgave 'Coster-klein' (vind alle Coster-getallen onder de 200, bedoeld voor scholieren in de onderbouw) bleek heel lastig. Er zijn 89 Coster-getallen onder de 200, maar van de veertig inzendingen waren er slechts twee die alle 89 oplossingen bevatten. Op internet zijn programma's te vinden die Coster-getallen zoeken, maar die gingen meestal niet verder dan 100. Daarboven werd het pas echt moeilijk. Het grootste struikelblok bleek $193 = 1 + (9 - 1) \times (9 \times 3 - 3)$ te zijn, gevolgd door $179 = 9 \times 9 + 7 \times 7 \times (1 + 1)$ en $159 = (1 + 1 + 9) \times (5 + 9) + 5$.

Coster-groot

De redactie ontving 22 inzendingen in de categorie 'Coster-groot' (vind een zo groot mogelijk Coster-getal, decimaal uitgeschreven). Hierbij moest men v r boven de 200 zijn. Dirk Kerstens schreef een programma dat doorging tot 1.000.000.

Hij constateerde dat ruim 41% van de getallen 'Coster' is. Helaas zat er nog een klein foutje in zijn programma, want niet  lle oplossingen werden gevonden. Dat geldt bijvoorbeeld voor $799 = 9 \times 9 \times 9 + 9 \times 7 + 7$.

De echt grote Coster-getallen overtroffen elke verwachting: de redactie ontving meerdere inzendingen met meer dan 1000 cijfers. Vaak werd er uitgegaan van iets als $(2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 - 1)^N$, waarbij N groot kan worden gekozen. Men hoopte dat dit getal alle cijfers ongeveer even vaak zou bevatten. Dat klopt inderdaad, waarna vervolgens vrij eenvoudig een Coster-getal te construeren is. Bas Krijgsman en Maarten Roelofsma schreven een programma dat op die manier Coster-getallen van ruim 400.000 cijfers kan bepalen. Fred Schalekamp stuurde een Coster-getal in van ruim 5,5 miljoen cijfers!

De redactie vond de oplossing van D. Boonstra heel origineel. Hij toonde aan dat er 1000 opeenvolgende Coster-getallen te vinden zijn. Hij stuurde het volgende in: $235\,667\,475\,455\,989\,989\,888\,abc = 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times 9 \times 9 \times (5 \times 7 \times 7 \times 7 - 6) \times (8 \times 8 \times (8 \times (5 \times 8 + 6) + 4) + 5) \times (9 \times 9 \times (9 + 9 + 3) \times (4 \times 6 \times 6 \times 9 + 4 + 3) - 4) + 8 - 8 + 5 \times (2 \times 5 \times (a + a) + b + b) + (c + c)/2$. Hierin dienen a , b en c gelezen te worden voor één van de cijfers 0 tot en met 9.

Willekeurig grote Coster-getallen

Al vrij snel bleek dat Coster-getallen willekeurig groot kunnen zijn en dat er elegante constructiemethodes voor bestaan. David de Kloet, student wiskunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam, ontdekte dat als eerste. Zijn methode lees je op pagina 8. Hiermee is meteen bewezen dat er oneindig veel Coster-getallen bestaan.

Albert Hendriks, student informatica aan de Universiteit Utrecht, vond een fraaie oplossing om willekeurig grote Coster-getallen

te construeren op basis van het kleine Coster-getal 45 ($= (4 + 4) \times 5 + 5$). Ook 4545 is een Coster-getal en steeds kan er 45 aan het getal worden toegevoegd terwijl het een Coster-getal blijft. Namelijk

$$4545 = 5 \times (4 + 5) \times (4 \times 5 \times 5 + 4/4).$$

$$454545 = 5 \times (4 + 5) \times ((4 \times 4 \times 5 \times 5 + 4) \times 5 \times 5 + 4/4).$$

$$45454545 = 5 \times (4 + 5) \times (((4 \times 4 \times 5 \times 5 + 4) \times 4 \times 5 \times 5 + 4) \times 5 \times 5 + 4/4).$$

Albert Hendriks presenteerde zijn constructiemethode (inclusief bewijs) voor een getal met n keer 45 achter elkaar geplakt op de weblog www.wiskundemeisjes.nl, maar stuurde niets op naar de redactie van *Pythagoras*.

Ook Arjen Stolk, promovendus wiskunde in Leiden, en Helmut Postl uit Oostenrijk vonden een recept om willekeurig grote Coster-getallen te maken.

Prijswinnaars

De twee scholen die een volledige oplossing van Coster-klein instuurden, Scholengemeenschap Were Di uit Valkenswaard en KSO Glorieux uit Ronse (België), winnen het Pythagoras-verrassingspakket.

Voor Coster-groot besloot de jury de prijzen – o.a. het boek *Opgelost* van Bennie Mols (een uitgave van Veen Magazines / Centrum voor Wiskunde en Informatica) – uit te reiken aan David de Kloet uit Amsterdam, Arjen Stolk uit Leiden en D. Boonstra uit Amstelveen.

Op www.pythagoras.nu vind je de oplossingen tot en met 200, en tevens een programma gebaseerd op de ideeën van Albert Hendriks waarmee hele grote Coster-getallen kunnen worden gegenereerd. Op www.matcos.nl/costergetallen is nog veel meer te lezen over Coster-getallen.

door David de Kloet

♦ Oneindig veel Coster-getallen

Coster-getallen kunnen willekeurig groot worden. David de Kloet, student wiskunde aan de VU in Amsterdam, beschrijft zelf zijn constructiemethode.

Coster-getallen zijn getallen die te maken zijn met alleen +, −, × en : door ieder cijfer uit het getal precies twee keer te gebruiken. In dit artikeltje bewijzen we dat voor elke $n > 1$ het volgende getal 'Coster' is:

$$\frac{8 \times 10^{9n} + 6 \times 10^{6n} + 4}{9}.$$

Uit welke cijfers bestaat zo'n getal? Om dit te bepalen, schrijven we het getal als de som van machten van 10. Hiervoor maken we gebruik van de meetkundige reeks voor $\frac{1}{9}$:

$$\frac{1}{9} = 0,11111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i}.$$

We krijgen daarmee voor ons getal

$$\begin{aligned} \frac{8 \times 10^{9n} + 6 \times 10^{6n} + 4}{9} &= 8 \times \sum_{i=1}^{\infty} 10^{9n-i} + 6 \times \sum_{i=1}^{\infty} 10^{6n-i} + 4 \times \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} \\ &= 8 \times \sum_{i=6n}^{9n-1} 10^i + (8+6) \times \sum_{i=0}^{6n-1} 10^i + (8+6+4) \times \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} \\ &= 8 \times \sum_{i=6n}^{9n-1} 10^i + (10+4) \times \sum_{i=0}^{6n-1} 10^i + (18) \times \frac{1}{9} \\ &= 8 \times \sum_{i=6n}^{9n-1} 10^i + \sum_{i=1}^{6n} 10^i + 4 \times \sum_{i=0}^{6n-1} 10^i + 2 \\ &= 8 \times \sum_{i=6n+1}^{9n-1} 10^i + (8+1) \times 10^{6n} + (4+1) \times \sum_{i=1}^{6n-1} 10^i + 4 + 2 \\ &= 8 \times \sum_{i=6n+1}^{9n-1} 10^i + 9 \times 10^{6n} + 5 \times \sum_{i=1}^{6n-1} 10^i + 6. \end{aligned}$$

Voor $n = 2$ is het Coster-getal van David de Kloet:

$$\begin{aligned} 88888955555555556 = & \\ 8 & \left((8 \times (8 \times 5 \times 5 \times 5) \times \right. \\ & (8 \times 5 \times 5 \times 5) + 6) \times \\ & (8 \times 5 \times 5 \times 5) \times \\ & (8 \times 5 \times 5 \times 5) \times \\ & (8 \times 5 \times 5 \times 5) \times \\ & (8 \times 5 \times 5 \times 5) + \\ & (9 - 5) : 9 + (5 - 5) \times \\ & \left. (8 \times 8 \times 8 + 5 + 6) \right) \end{aligned}$$

Dit getal bestaat dus uit $3n - 1$ achten, gevolgd door een negen, $6n - 1$ vijven en een zes. We gebruiken dus $6n - 2$ achten, 2 negens, $12n - 2$ vijven en 2 zessen om ons getal te maken:

$$\begin{aligned} ((8 \times (8 \times 5 \times 5 \times 5)^n + 6) \times (8 \times 5 \times 5 \times 5)^{2n} + (9 - 5)) : 9 &+ \\ (5 - 5) \times (8^{3n-3} + 5^{3n-5} + 6) &= \\ ((8 \times 1000^n + 6) \times 1000^{2n} + 4) : 9 + 0 &= \\ (8 \times 10^{9n} + 6 \times 10^{6n} + 4) : 9. & \end{aligned}$$

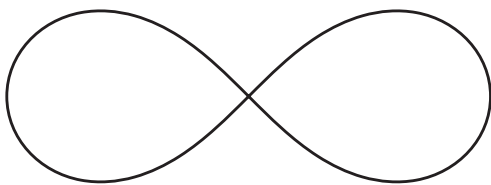
Het machtsverheffen gebruiken we hier alleen als notatie. Met $(8 \times 5 \times 5 \times 5)^{2n}$ bedoelen we dus eigenlijk het uitgeschreven product en gebruiken daarvoor dus ook $2n$ achten en $6n$ vijven. In totaal gebruiken we hier dus $1 + n + 2n + 3n - 3 = 6n - 2$ achten, $3n + 6n + 1 + 2 + 3n - 5 = 12n - 2$ vijven, 2 negens en 2 zessen.

De enige voorwaarde hierbij is dat $3n - 3$ en $3n - 5$ niet negatief zijn. Dat betekent dat n groter dan 1 moet zijn. We hebben nu dus voor iedere $n > 1$ een ander Coster-getal, waarmee is aangetoond dat er oneindig veel Coster-getallen bestaan.

Wat een kromme is lijkt duidelijk: cirkels, ellipsen, lemniscaten, dat zijn voorbeelden van krommen. Als je echter stellingen over 'alle krommen' wilt formuleren en bewijzen, zit je met een probleem: hoe spreek je wiskundig precies af wat op het eerste gezicht duidelijk lijkt?

♦ Wat is een kromme?

In mijn boekenkast staat een Duits boek uit 1932 dat *Kurventheorie* heet, 'Krommentheorie' dus. Het is geschreven door Karl Menger (1902-1985), een van de grondleggers van deze theorie. Voor hij, op bladzijde 80, de definitie van 'kromme' geeft, heeft hij al een heel hoofdstuk gewijd aan allerlei eerdere pogingen de notie 'kromme' vast te leggen. Dat begint met eenvoudige voorbeelden. Een cirkel of een lemniscaat, zie figuur 1, is wel een kromme; een oppervlak, zoals een vierkant of een driehoek, en een lichaam, zoals een kubus, willen we zeker *niet* als kromme accepteren. De vraag is dan meteen al hoe we verschil kunnen maken tussen deze twee groepen.



Figuur 1 De lemniscaat

Een kromme is kleiner dan een vierkant?

De eerste poging die Menger beschrijft komt neer op 'een kromme is kleiner dan een vierkant'. Hoewel intuïtief aantrekkelijk, want een kromme *is* veel dunner dan bijvoorbeeld een vierkant, wordt deze ogenblikkelijk naar de prullenmand verwezen. In de negentiende eeuw had Georg Cantor (1845-1918) namelijk al laten zien dat het gesloten

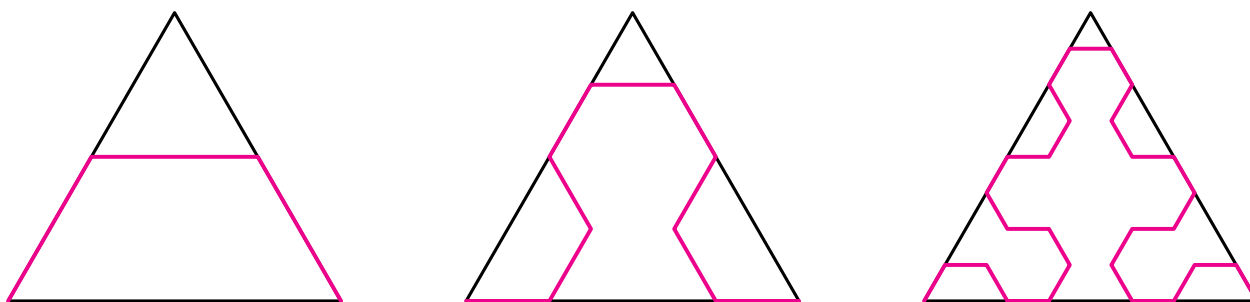
interval $I = [0, 1]$ net zo groot is als het (volle) vierkant $V = [0, 1] \times [0, 1]$ in die zin dat beide verzamelingen even veel punten hebben. Wat daarmee bedoeld wordt, is dat er een functie $f : I \rightarrow V$ bestaat die *injectief* is, dat wil zeggen: uit $x \neq y$ volgt $f(x) \neq f(y)$, en *surjectief*, dat wil zeggen: voor elk punt $(u, v) \in V$ is er een $x \in I$ met $f(x) = (u, v)$. Je kunt de getallen in I en de punten in V zó aan elkaar koppelen dat bij elk getal precies één punt hoort en omgekeerd bij elk punt precies één getal. Dat is nog best lastig om te doen, maar kennelijk niet onmogelijk.

Je kunt een kromme doorlopen

De functie die Cantor gebruikte om het bovenstaande te bewijzen is niet erg mooi, hij is bijvoorbeeld niet continu. De volgende poging om 'kromme' te definiëren nam daarom de continuïteit in de definitie mee. Een kromme is 'iets waar je langs kunt lopen'; in wiskundige termen: je kunt een kromme *parametriseren*. Denk maar aan een cirkel, bijvoorbeeld de cirkel om $(0, 0)$ met straal 1: die kun je beschrijven met de functie $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (neem $[0, 2\pi]$ als domein). De lemniscaat kan zo ook beschreven worden:

$$t \mapsto \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right).$$

Met andere woorden: we noemen een verzameling K een kromme als er een continue functie $f : [a, b] \rightarrow K$ is die surjectief is.



Figuur 2 De constructie van de driehoek van Sierpinski

Het probleem is echter dat de Italiaanse wiskundige Giuseppe Peano (1858-1932) in 1890 nou net zo'n parametrisering van het vierkant V had gemaakt. Hoe dat in zijn werk gaat, staat in het aprilnummer van *Pythagoras* uit 2005.

Continua

Nadat hij deze definities terzijde had geschoven, ging Menger wat anders te werk. Hij begon een lijst te maken van eigenschappen die een 'kromme' toch wel zou moeten hebben. De eerste paar eigenschappen waren heel basaal.

Een kromme K moet een *gesloten* verzameling zijn, dat wil zeggen: als (x, y) niet op K ligt, dan heeft (x, y) een positieve afstand tot K . Bijvoorbeeld, een cirkel is gesloten: als (x, y) niet op de cirkel C om $(0, 0)$ met straal 1 ligt, dan geldt $x^2 + y^2 > 1$ of $x^2 + y^2 < 1$, de afstand van dat punt tot C is dan $|\sqrt{x^2 + y^2} - 1|$ en dat is positief. Aan de andere kant: als je $(1, 0)$ uit C weglaat, is het resultaat C' niet gesloten: de afstand van $(1, 0)$ tot C' is nul.

Een kromme K moet *samenhangend* zijn, dat wil zeggen: niet te schrijven als $K = F \cup G$ met F en G allebei gesloten en $F \cap G = \emptyset$. Dat is voor een verzameling als een cirkel of een lemniscaat uit een plaatje duidelijk, maar om het netjes aan te tonen, is een stuk lastiger.

Verder wilde Menger ook nog dat krommen *begrensd* zouden zijn, daarmee bedoelde hij begrensd in de driedimensionale ruimte. Een kromme is dus in ieder geval een samenhangende, gesloten en begrensde verzameling; zo'n verzameling wordt een *continuüm* genoemd.

We zijn er nog niet: ook een kubus en een vierkant zijn continua; de vraag is nu welke continua we krommen zullen gaan noemen.

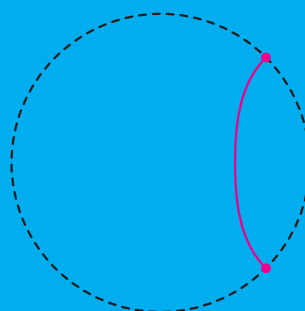
Is een hyperbool een kromme?

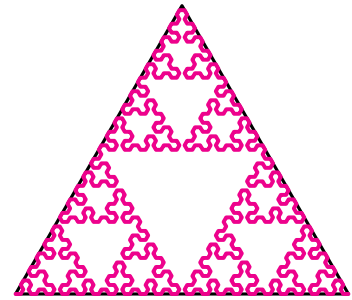
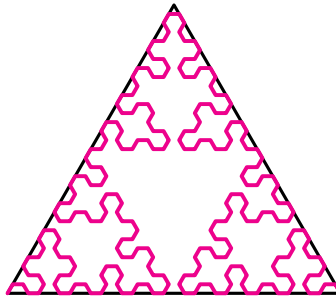
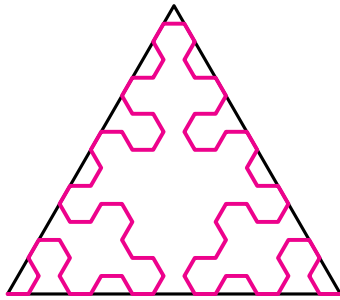
Een hyperbool bestaat uit twee *losse* stukken (de takken) en is daarom niet *samenhangend*. Dat betekent dat een hyperbool als kromme afvalt. Dat is niet erg; je kunt in dat geval de losse stukken gewoon apart bestuderen.

Maar een hyperbooltak voldoet niet aan Mengers voorwaarde dat een kromme *begrensd* moet zijn. Daarmee valt een hyperbooltak alsnog af om in aanmerking te komen voor de benaming 'kromme'. Dat was een doelbewuste keuze van Menger, omdat met gesloten en begrensde verzamelingen beter te werken is dan met alleen maar gesloten verzamelingen. Met een kunstgreep kun je nog wel wat doen: de afbeelding

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

krimpt het hele platte vlak in tot de cirkelschijf $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Zo'n hyperbooltak is wél begrensd. Het enige probleem is dat deze tak niet gesloten is. Dat probleem kunnen we eenvoudig oplossen: we nemen de twee randpunten erbij. Op die manier is de tak een kromme geworden, en blijkt het eigenlijk een gebogen lijnstukje te zijn.





De echte definitie

Hoe kwam Menger dan tot de uiteindelijke definitie van kromme? Hij ging op zoek naar iets dat eenvoudig was en toch sterk genoeg om de bekende krommen te vangen en de bekende niet-krommen uit te sluiten. Het idee was om naar randen van omgevingen te kijken. Als je naar een punt op een cirkel of de lemniscaat kijkt, en je neemt omgevingen die klein genoeg zijn (bijvoorbeeld kleine cirkelschijfjes of, in de ruimte, kleine bolletjes), dan hebben hun randen met de kromme maar een eindig aantal punten gemeen. Aan de andere kant, als je naar een oppervlak of een kubus kijkt, dan heeft de rand veel meer met je figuur gemeen en kun je er zelfs grote samenhangende stukken in terugvinden.

Na heel wat denkwerk kwam Menger tot de volgende definitie: een kromme is een continuüm waarin elk punt willekeurig kleine omgevingen heeft waarvan de rand *geen enkel continuüm met meer dan één punt bevat*.

Hoewel er veel dingen onder de definitie vallen die we, in het dagelijks leven, niet als kromme zouden herkennen, is het voor de ontwikkeling van een goede theorie uiteindelijk de beste gebleken.

Een ongewone kromme

Zoals reeds opgemerkt, vallen 'gewone' krommen onder Mengers definitie omdat je om elk punt altijd kleine omgevinkjes met eindige rand kunt maken en die randen vallen in losse punten uiteen.

Een bekend voorbeeld van een kromme in de zin van Menger die er niet zo gewoon uitziet, is de *driehoek van Sierpinski*. Die driehoek zie je tegenwoordig vaak als voor-

beeld van een *fractal*, maar Waclaw Sierpinski (1882-1969) dacht zelf helemaal niet in die termen; hij wilde laten zien dat je onder de naam 'kromme' wel heel bijzondere verzamelingen kon laten vallen.

De constructie van zijn kromme lijkt erg veel op die van een *vlakvullende kromme*. We plannen een wandeling door een gelijkzijdige driehoek, van het punt linksonder naar het punt rechtsonder. Net als bij de vlakvullende kromme beginnen we eenvoudig, zie het eerste plaatje in figuur 2.

Daarna passen we de wandeling telkens aan door de basiswandeling geschaald langs elke rechte lijn te leggen, zoals je in de vervolgplaatjes van figuur 2 kunt zien. Door dit oneindig vaak te herhalen, krijgen we een wandeling die de hele driehoekskromme van Sierpinski doorloopt.

Het is ook een kromme in de zin van Menger: de drie hoekpunten hebben willekeurig kleine omgevingen waarvan de rand uit twee punten bestaat – we zeggen dat zo'n punt orde twee heeft; de punten waar de kleinere driehoeken samenkomen hebben orde vier en alle andere punten hebben orde drie.

Sierpinski nam daarna twee kopieën van zijn kromme en plakte die bij de drie hoekpunten aan elkaar. De ruimtelijke figuur die je zo krijgt is een kromme waarin elk punt orde drie of vier heeft (de aan elkaar geplakte hoekpunten hebben nu orde vier). Dat is toch wel iets anders dan bij een 'gewone' kromme: daar heeft bijna elk punt 'gewoon' orde twee.

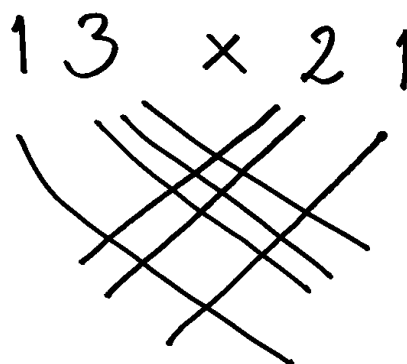
Reken uit!

Vermenigvuldigen zonder rekenmachine, hoe doe je dat ook alweer? Ben je het vergeten, probeer dan eens deze methode. Minder werk en wel zo leuk!

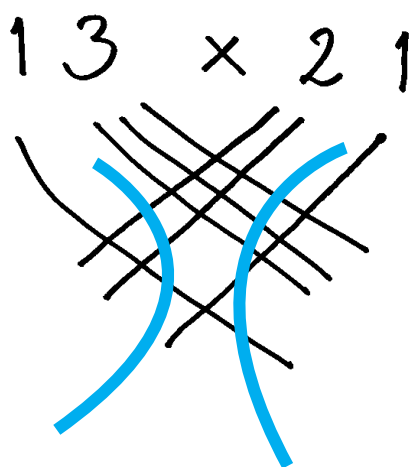
Te berekenen:

$$13 \times 21$$

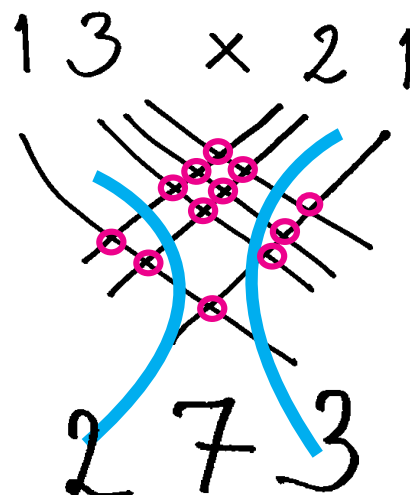
Trek schuin 1 lijn en daarboven nog 3. Trek dwars daarop 2 lijnen en daaronder 1.



Houd de snijpunten uit elkaar.

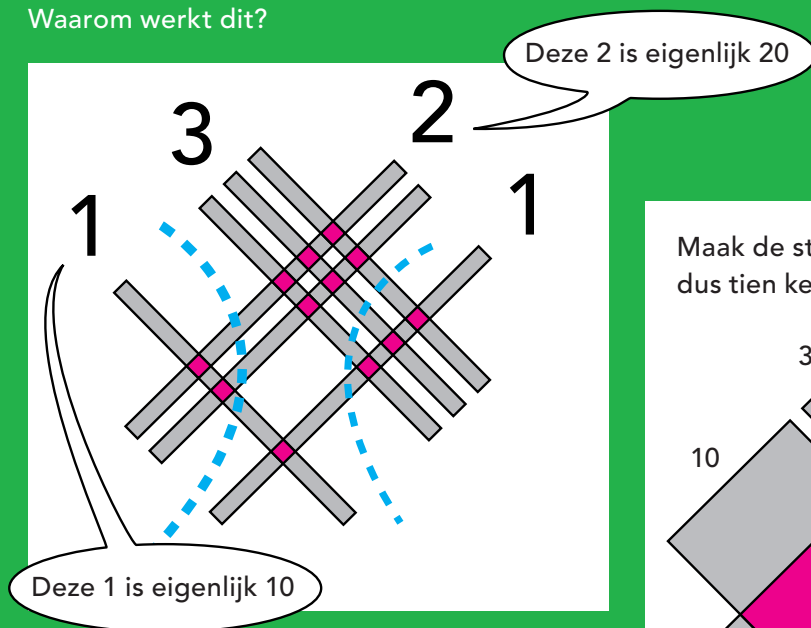


Tel de snijpunten per vak en zet die aantallen eronder.

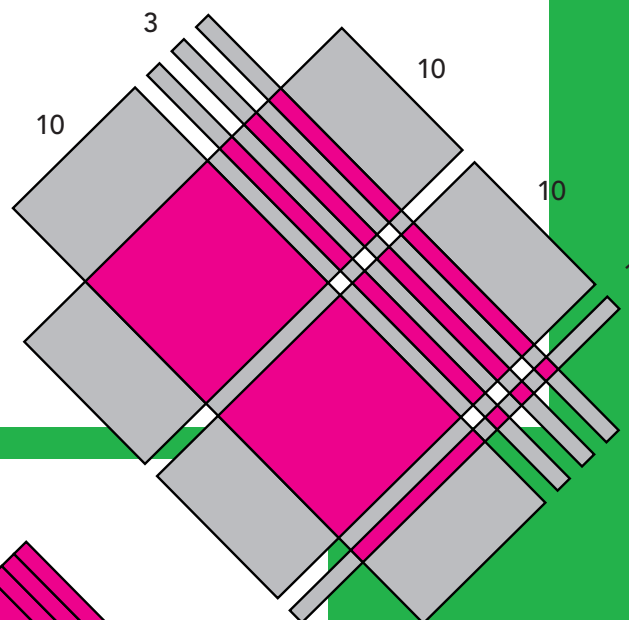


Je ziet: $13 \times 21 =$

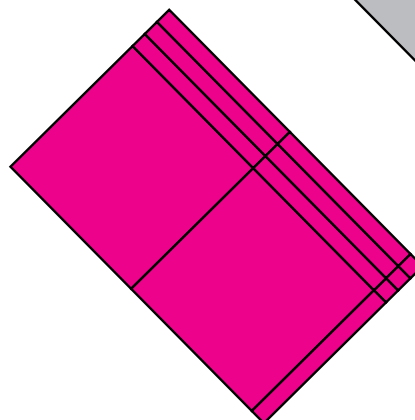
Waarom werkt dit?



Maak de strepen voor de tienvouden dus tien keer zo breed.

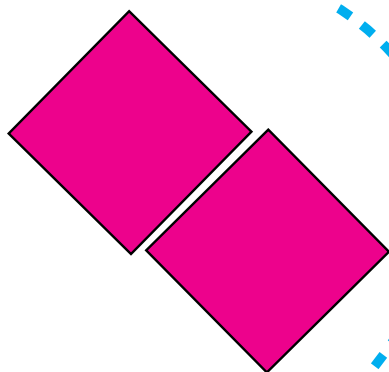


Hoeveel hokjes is
dus deze rechthoek
van 13 bij 21?

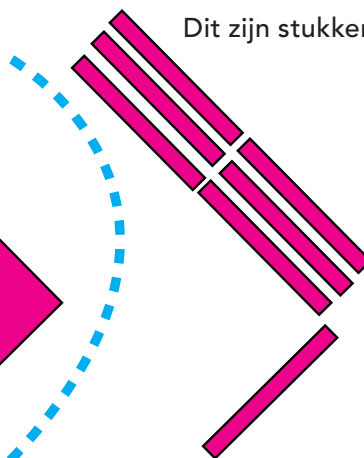


Even tellen...

Dit zijn stukken van honderd



Dit zijn stukken van tien



Dit zijn eenheden



Dus 2 keer honderd, 7 keer tien en 3 keer één: 273.

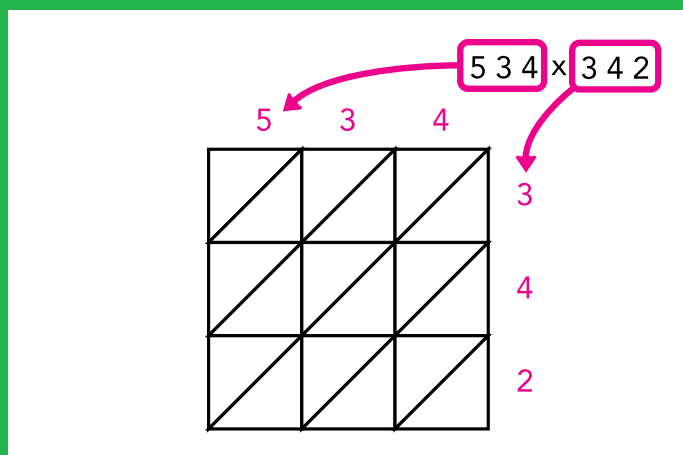
Grotere getallen vermenigvuldigen

Het vermenigvuldigen door lijntjes trekken werkt minder goed als we hogere cijfers hebben, dan wordt het tellen van de snijpunten veel werk en bovendien moeten we gaan 'doorgeven'.

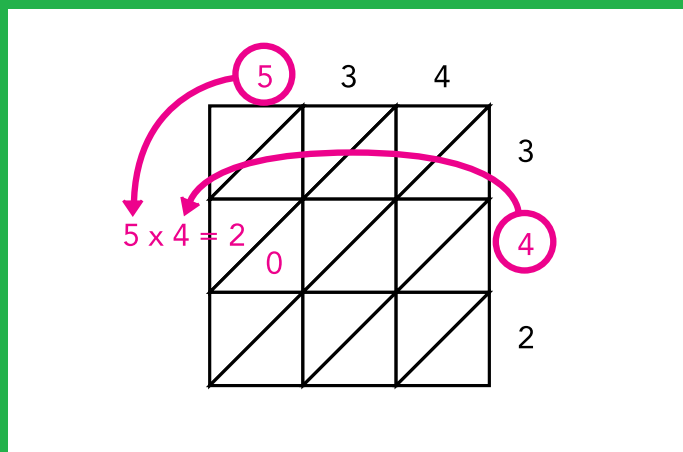
In zo'n geval kun je beter de tafels tot 10 gebruiken om op elk kruispunt het aantal snijpunten te berekenen. Dat levert een bekende vermenigvuldigingstechniek op die ontwikkeld werd door Arabische wiskundigen in de dertiende eeuw. De Arabieren noemden de methode 'op het rooster', de

Italianen die de methode overnamen noemden het vermenigvuldiging 'per gelosia' oftewel 'met jaloezie'. Het schijnt dat het rooster hen deed denken aan een tralievenster waardoor iemand z'n partner in de gaten houdt.

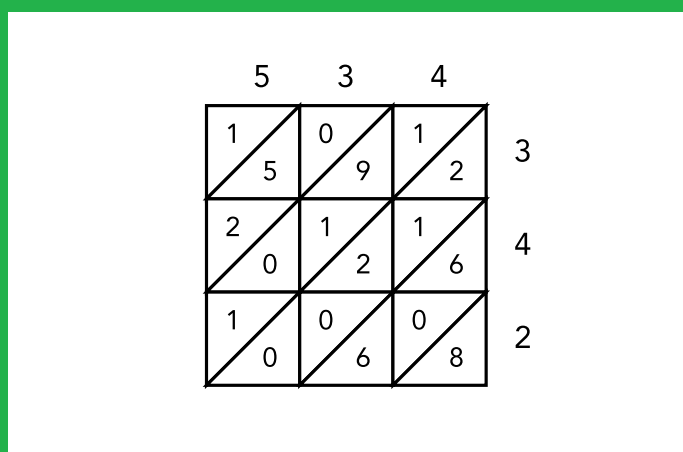
De roostervermenigvuldiging is minstens zo handig als onze manier met 'onder elkaar schrijven'. In sommige landen, waaronder Turkije, leren kinderen het roostervermenigvuldigen op de basisschool. Als voorbeeld vermenigvuldigen we 534 met 342 'op het rooster'.



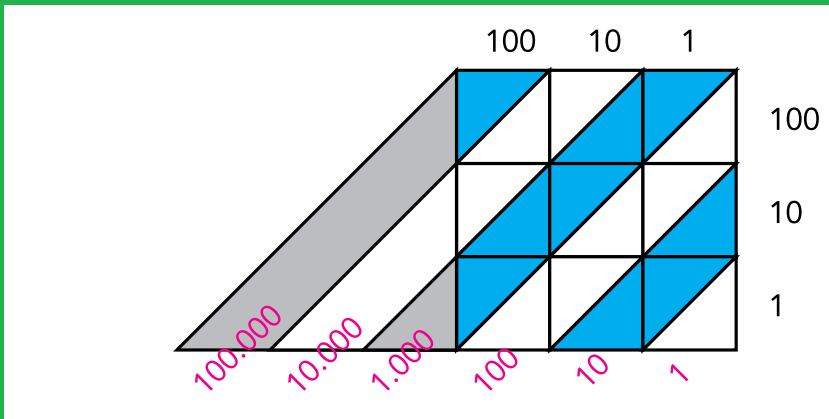
Zet de twee getallen verticaal en horizontaal langs het rooster.



Zet nu in elk vakje het product van de twee bijbehorende cijfers. Zet het tientallencijfer linksboven, het eenheidencijfer rechtsonder.

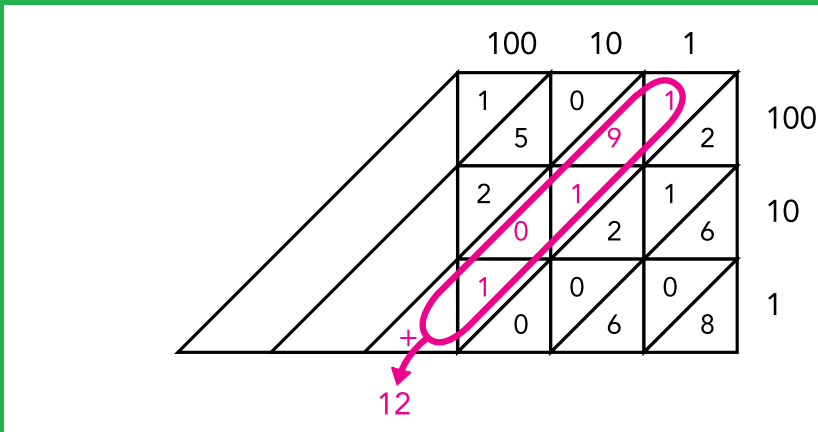


Vul zo het hele rooster in.

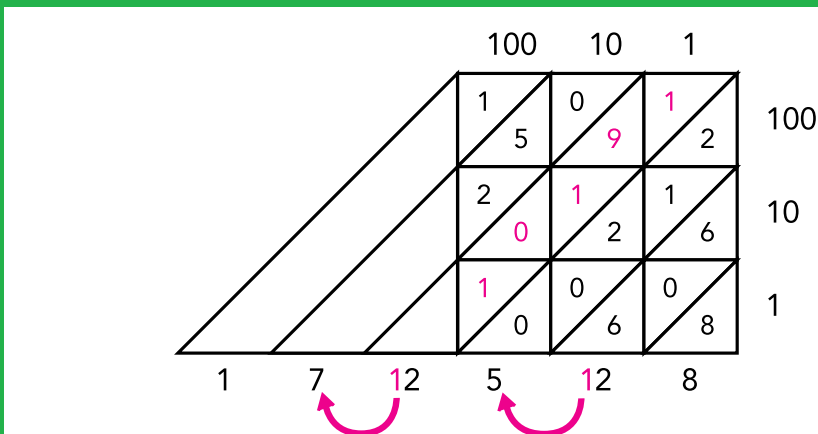


Je kunt het rooster opgedeeld zien in zes diagonale banen van linksonder naar rechtsboven. Cijfers in verschillende diagonalen horen bij verschillende machten van 10.

De juiste macht van tien ($10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, enzovoorts) vind je door te tellen vanaf 0, rechtsonder beginnend.



Tel in elke diagonaal de cijfers op.

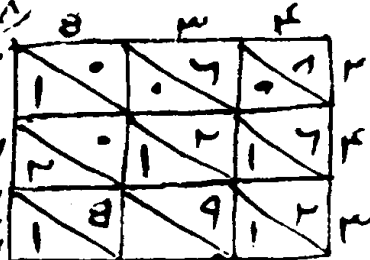


De uitkomst is: 1 8 2 6 2 8

Het totaal in een diagonaal kan hoger zijn dan 9 (hier bijvoorbeeld 12). Je moet dan het linkercijfer 'doorgegeven' aan de volgende diagonaal.

15

في النصف الآخر من صورة الملائمة أيضا في السنة
 وأفضل كد لك حتى يخرج المطلوب وكلما كان ولسمون
 ومائة وأن قل لك اضرب أربعة وملايين وعشما مائة
 في أسس وكلما كان أربعين ومائة فاقول ولا هكذا
 هم اضرب الأربعة
 في الأثنين يخرج لك ثمانية
 ضرب في نصف المربع إلى عقد
 البمين هم اضرب أيضا
 الأربعة في الأربعة يخرج
 لك ستة عشر فضع السنة



Een fragment uit een zestiende-eeuwse kopie van *Kashf al mahjub min 'ilm al ghubar'* (Onthulling van de geheimen der rekenkunst) van Abu'l Hasan ibn Ali al Qalasadi.

Rekenen met medische pixels



Röntgenfoto van een hand



16

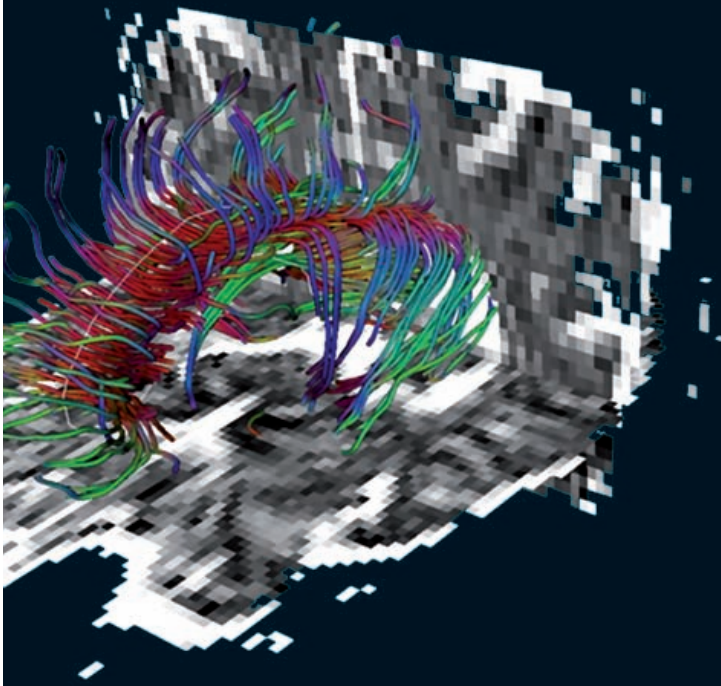
De röntgenfoto is al meer dan een eeuw oud, en sinds het eind van de twintigste eeuw worden in ziekenhuizen ook scans gemaakt met MRI (magnetic resonance imaging) en computer tomografie. Daarbij wordt het hoofd of de hele romp van de patiënt virtueel in plakjes gesneden en per plakje doorgelicht. Als je al die plakjes in de computer weer op elkaar stapelt, heb je een driedimensionaal beeld van het inwendige van de patiënt.

Zo'n beeld bestaat uit bijvoorbeeld $500 \times 500 \times 500$ beeldpunten (pixels). Elke pixel correspondeert met een getal, de helderheid van die pixel. Al die getallen bij elkaar zijn te beschouwen als punten in een vierdimensionale grafiek: drie assen voor lengte, breedte, hoogte en nog een voor de pixelwaarde. Soms is er nog een vijfde dimensie: de tijd, als de scan een film maakt van, bijvoorbeeld, een kloppend hart.

Door slimme wiskunde toe te passen op alle pixels in die grafiek, kun je veel meer informatie uit zo'n scan halen en zelfs virtueel op reis gaan door het lichaam van de patiënt, op zoek naar een tumor of andere kwaal. Maar dat is pas sinds een paar jaar mogelijk, dankzij snelle computers die zo'n scan met miljoenen pixels helemaal doorre-

kenen. Zo neemt de computer een deel van het werk van de arts over.

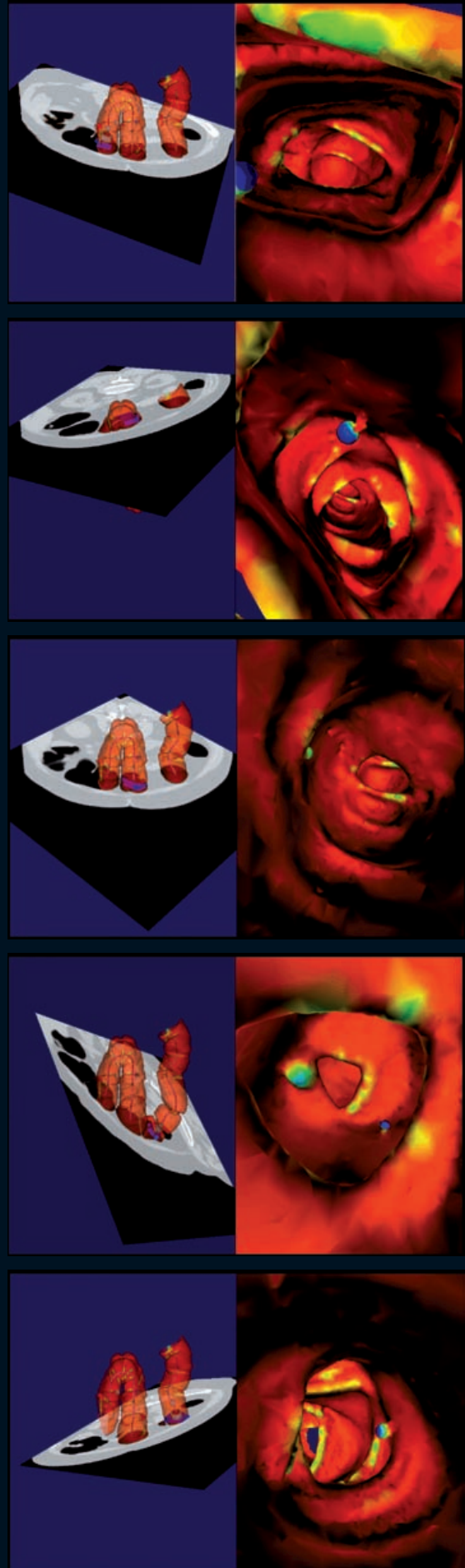
Veel van die wiskunde is geavanceerder dan je op school zult tegenkomen, maar een vrij simpel voorbeeld is het opsporen van randen in een opname. Dat kan door de eerste afgeleide van de grafiek te nemen. Immers, waar de helderheid het snelst verandert, ligt waarschijnlijk een rand tussen twee onderdelen van het lichaam, bijvoorbeeld de darmen in de buikholte. De röntgenfoto van de hand laat zien welk effect het nemen van de tweede afgeleide op een beeld heeft: die maakt vooral de sterkste rondingen zichtbaar. Dit principe is toegepast in de 'virtuele endoscoop' (de serie foto's). Eerst is een tomografie gemaakt van de romp van de patiënt, waaruit de computer de dikke darm kan losmaken. Vervolgens schuift die virtueel een kijkvenster door de hele darm, berekent op elk punt de tweede afgeleide van het darmoppervlak en geeft die een kleur, afhankelijk van hoe scherp de ronding is. De arts kijkt met de computer mee en ziet in blauw verdachte uitstulpingen (poliepen) opdoemen. Tot nu toe moest zo'n onderzoek altijd met een echte endoscoop gedaan worden, een piepklein kijkertje op een flexibele slang, bepaald geen pretje voor de patiënt.



MRI-hersenscan

Een ander voorbeeld is de MRI-hersenscan. De opname zelf bestaat uit een blokkendoos vol pixels (daarvan is slechts één horizontale en één verticale laag in de afbeelding te zien). De MRI-scan levert echter voor elke pixel ook informatie over de magnetische eigenschappen van dat stukje hersenweefsel. Door de magnetische informatie van al die pixels aan elkaar te koppelen en wiskundig te verwerken, 'ziet' de computer hoe de zenuwbanen in de hersenen lopen, dus welke delen van de hersenen met elkaar verbonden zijn. Dat is in een gewone MRI-scan niet te zien en helpt om erachter te komen hoe de hersenen werken.

Al deze beelden komen van de afdeling Biomedische Beeld Analyse onder leiding van prof. Bart ter Haar Romeny van de Technische Universiteit Eindhoven. Wiskundigen en studenten zijn hier volop bezig om nog slimmere manieren van beeld-analyse te ontwikkelen. Ze kijken daarbij ook naar hoe ons brein zelf dat doet. Hoe herkent ons brein een gezicht uit honderden andere, of onderscheidt het allerlei voorwerpen die chaotisch op een hoop liggen? Ook onze hersencellen blijken daarvoor ingenieuze wiskunde te gebruiken. Maar er valt nog veel te ontdekken op dit gebied.



Virtuele endoscoop van een dikke darm

door **Sam van Gool** en **Arnout Jaspers**

De zaak Lucia de B. is hét voorbeeld van een moordzaak waarvoor statistiek in de rechtszaal werd gebruikt. De verpleegster had verdacht vaak dienst als er onverwacht patiënten overleden. Maar wat is precies 'verdacht vaak'? Statisticus Henk Elffers rekende aan deze zaak en concludeerde dat de kans dat er zo veel incidenten 'toevallig' plaatsvinden tijdens de diensten van een enkele verpleegkundige slechts 1 op 342 miljoen is. Deze kans is zo extreem klein, dat we toeval volgens Elffers kunnen uitsluiten. Achteraf kwam er veel kritiek op zijn rol in de rechtszaak en formeel heeft die volgens de rechters niet eens meegeteld bij het tot levenslang veroordelen van Lucia de B. Een commissie bestudeert nu of de zaak heropend moet worden.



Speelde Lucia de B. voor eigen rechter met patiënten, of was ze slachtoffer van een gerechtelijke dwaling?

Lucia de B.: kans op toeval

In de nacht van 4 september 2001 sterft in het Haagse Juliana Kinderziekenhuis (JKZ) volkomen onverwacht een baby van een half jaar oud. Artsen denken eerst aan een natuurlijke dood, maar beginnen daar al snel aan te twijfelen: in het bijzijn van Lucia de B., de verpleegster die ook in de nacht van 4 september dienst had, overlijden opvallend veel kinderen. De directeur van het ziekenhuis doet aangifte.

In de periode van 343 dagen tot aan de nacht van 4 september waren er acht kinderen op de medium-care afdeling, waar Lucia de B. werkte, in acuut levensgevaar gekomen. Steeds had Lucia dienst en vaak was zij ook degene die aan de alarmbel trok als het misging met een van deze kinderen. Het grote probleem bij de zaak Lucia de B.

was het gebrek aan direct bewijs. Niemand heeft haar met eigen ogen patiënten kwaad zien doen en in de meeste gevallen was, na zo'n lange tijd, niet meer te achterhalen wat de eventuele onnatuurlijke doodsoorzaak geweest kon zijn. Was de hele zaak geen bizarre speling van het lot, wilde de officier van justitie weten.

De vraag werd voorgelegd aan Henk Elffers, statisticus bij het Nederlands Studiecentrum Criminaliteit en Rechtshandhaving (NSCR). Uit de berekening van Elffers (zie pagina 20 en 21) bleek dat de kans dat alle acht incidenten (onder een incident wordt hier een sterfgeval of reanimatie verstaan) in het JKZ bij één en dezelfde verpleegkundige plaats hadden, ongeveer 1 op 300.000 was. Eerder had Lucia nog op twee andere

afdelingen in een ander ziekenhuis gewerkt, waar zij ook bij relatief veel onverwachte sterfgevallen betrokken bleek. Door ook dat in de berekening mee te nemen, kwam hij uit op een kans van 1 op de 342 miljoen, een getal dat daarna een heel eigen leven is gaan leiden in de discussies over deze zaak.

Vonnis

"De uitkomsten van statistische berekeningen zoals verricht door dr. H. Elffers kunnen op zichzelf beschouwd geen wettig en overtuigend bewijs opleveren," schreven de rechters van de rechtbank in Den Haag op 24 maart 2003 in hun vonnis. Hoewel de rechters in het vonnis erkennen dat er een zeer waarschijnlijk verband is tussen Lucia's aanwezigheid en het overlijden van patiënten, bewijst dit volgens hen nog niet dat Lucia schuldig is. Er kan een heel andere reden voor de samenhang zijn: mogelijk nam zij altijd de patiëntjes in de slechtste toestand onder haar hoede, of was er een andere verpleger, waarmee Lucia altijd samenwerkte, die moorden pleegde.

Henk Elffers legt in zijn werkkamer in Amsterdam Zuid uit dat zijn rol ook bij een eventuele heropening van de zaak Lucia de B. is uitgespeeld: "De weg van statistiek in de rechtszaal is in Nederland voorlopig dichtgetimmerd." Hij staat nog steeds achter de inhoud van zijn rapport, maar is het er mee eens dat alternatieve verklaringen voor het verband tussen Lucia's aanwezigheid en het overlijden van patiënten niet uit te sluiten zijn.

"Rechters hebben moeite met de 'gekwantificeerde onzekerheid' die statistiek biedt," zegt Elffers. Juist doordat een statisticus de onzekerheid van zijn resultaten in een exact getal uitdrukt, willen rechters zoiets niet als 'bewijs' laten gelden. Dat is eigenlijk heel vreemd, want ook voor allerlei andere soorten bewijs, zoals verklaringen van een ooggetuige of van een arts, geldt dat ze er soms volkomen naast zitten. Die 'faalkans' wordt echter zelden in een getal uitgedrukt, zodat men onbewust vaak aanneemt dat die kans nul is. Elffers: "Het is knullig gefor-

Bij toeval veroordeeld?

De redenering van Elffers (zie pagina 20 en 21) lijkt op het eerste gezicht onweerlegbaar, maar na de veroordeling van Lucia de B. is er van allerlei kanten kritiek gekomen op dit statistische argument. Zelfs internationaal heeft de zaak de aandacht getrokken. Er zijn drie soorten tegenwerpingen te onderscheiden:

1. de data kloppen niet;
2. de berekening deugt niet;
3. zelfs een toevalskans van 1 op 342 miljoen zegt niets over schuld.

De schrijver Maarten 't Hart beroept zich op argument 3. Hij stelde in een ingezonden stuk in *NRC Handelsblad* van 7 oktober 2006 dat 'er geen enkele aanleiding is om te denken dat in geval van die overleden kinderen tijdens de diensten van Lucia

de B. aan iets anders gedacht moet worden dan toeval, coïncidentie'. 't Hart draagt het voorbeeld aan van een New Yorkse serveerster, die twee jaar achter elkaar een miljoen dollar won met een kraslot. De kans dat dat gebeurt, is maar 1 op de 300 miljard. Zijn redenering is: af en toe gebeuren er nu eenmaal dingen waarop de kans heel erg klein is.

Zuiver is die vergelijking om meerdere redenen niet. Ten eerste zijn er miljoenen mensen die dagelijks lootjes krassen, dus dat komt in de loop der jaren neer op miljarden gebeurtenissen, waarvan er dan allicht een paar zeer uitzonderlijk zullen zijn. Dat is niet vergelijkbaar met een handvol onverklaarde sterfgevallen per jaar op een

ziekenhuisafdeling waarvan er hoogstens enige duizenden in de hele wereld zijn.

Ten tweede is er in het geval van de krasloten *a priori* (van te voren) geen reden om aan te nemen dat er iets anders aan de hand is dan toeval. Maar dat zou niet meer gelden als je erachter kwam dat er bij het bedrijf dat de krasloten maakt twee winnende loten gestolen zijn. Als dan ook nog eens blijkt dat de winnende serveerster tot twee jaar terug bij dat bedrijf werkte, lijkt er reden genoeg om haar te verdenken.

De vergelijking met Lucia de B. is duidelijk. Als uit onafhankelijk medisch onderzoek blijkt dat er op die afdeling moorden gepleegd worden en aan het licht komt dat Lucia dan steeds dienst had, dan is er reden te over voor serieuze verdenking.

muleerd dat de statistiek er niet toe doet. Statistiek doet er wel toe, maar is nu eenmaal geen beslissende factor." Elffers is overigens "onder de indruk van de moeite die de rechters hebben gedaan om de statistiek te begrijpen. In de rechtszaal had ik het gevoel dat ik de rechters echt iets bij kon brengen, het leken net ijverige studenten."

Volgens Elffers is statistiek in strafzaken het beste in een vroeg stadium te gebruiken, zoals aanvankelijk ook in de zaak Lucia de B. De politie wil uitzoeken of het de moeite waard is om verder onderzoek te verrichten, en vraagt een statisticus of hun intuïtie klopt: is het meemaken van acht sterfgevallen echt 'vreemd'? Uit Elffers' berekening bleek dat dat zo was. Pas daarna zijn de lijken opgegraven en is er lijkschouwing gedaan. Ook al speelt statistiek geen beslissende rol in het vonnis, dat kan wel degelijk zo zijn tijdens het onderzoek.

♦ Rekenen aan toeval

Om te kunnen rekenen aan een zaak zoals de 'zaak Lucia de B.', formuleert de onderzoeker altijd vooraf een *nulhypothese* H_0 en kiest een *onbetrouwbaarheidsdrempel* α . Elffers nam als nulhypothese 'er is geen verband tussen het dienst hebben van Lucia de B. en het vóórkomen van een incident'. De *alternatieve hypothese* H_1 luidt dan 'er is wel een verband'. De nulhypothese wordt verworpen als de kans die uit de berekening rolt onder de onbetrouwbaarheidsdrempel komt, waarvoor Elffers koos $\alpha = 0,0001$. De grootte van α volgt niet uit een berekening, maar is een vooraf gemaakte keuze van de onderzoeker: hoe zeker wil ik van m'n zaak zijn? In de sociale wetenschappen legt men de lat vaak veel lager, namelijk $\alpha = 0,05$, om conclusies te trekken over statistische verbanden.

Als H_0 waar is, dan zijn de sterfgevallen willekeurig verdeeld over de diensten van alle verplegers die op die afdeling van het ziekenhuis werken. Je kunt de situatie dan

Voor deze redenering is het dus essentieel dat er kan worden bewezen dat de patiënten op onnatuurlijke wijze overleden zijn.

De wetenschapsfilosoof Ton Derksen schreef een boek over de zaak Lucia de B., waarin hij ook dat aanvecht. Volgens hem zijn er bij de lijkschouwing van de twee baby's waarbij de rechtbank moord bewezen achtte, wezenlijke fouten gemaakt. Die baby's kunnen volgens Derksen best een natuurlijke dood gestorven zijn, of door fouten van de behandelend artsen overleden zijn.

Ook de tegenwerpingen 1 en 2 brengt hij in stelling. Volgens hem zijn er ten eerste fouten gemaakt bij het verzamelen van de data. Omdat de verdenking pas rees lang na het overlijden van de

meeste patiënten, moesten die gegevens achteraf verzameld worden, door mensen die toen wisten dat Lucia de B. verdacht werd. Dan loop je een groot risico op selectief omgaan met de data ('Lucia had toen geen dienst, dus dan zal het wel geen verdacht incident geweest zijn,' of 'Lucia had toen dienst, dus was er toch niet iets aan de hand met dat 'natuurlijk' overlijden?'). Elffers verwerpt de suggestie dat er selectief geregistreerd is met grote stelligheid. Maar als er, bijvoorbeeld, op die afdeling van het JKZ slechts een paar incidenten waren opgetreden buiten Lucia's diensten om, dan was de kans op toeval volgens Elffers' berekening al veel hoger uitgevallen. In dat verband is het opmerkelijk dat op die afdeling van het JKZ in een

vergelijkbare periode voordat Lucia er kwam werken, juist méér kinderen zijn overleden dan toen Lucia er wel werkte. "Het is heel vreemd dat er juist minder patiënten overlijden als er een seriemoordenaar rondloopt," aldus wiskundige Peter Grünwald in het gerenommeerde tijdschrift *Nature*.

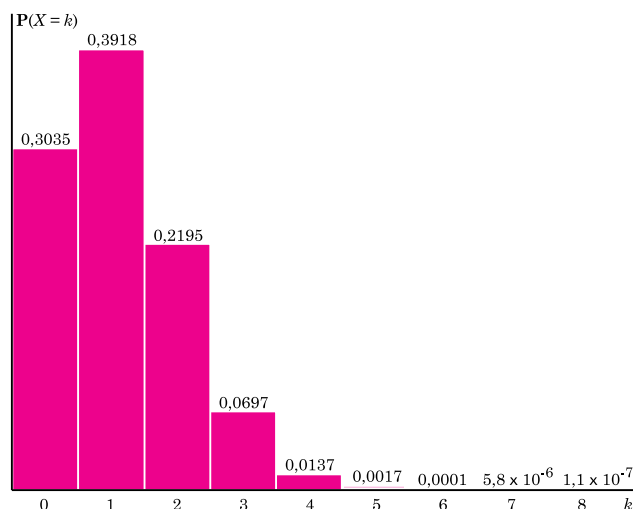
Onder statistici woedt zelfs nog discussie over tegenwerping 2, de toepasbaarheid van de door Elffers gevolgde berekening. Mag je eigenlijk wel doen alsof incidenten op een medium-care afdeling net witte en zwarte balletjes in een vaas zijn? En onder welke voorwaarden mag je kansen, berekend voor drie ziekenhuizen, zonder meer met elkaar vermeingvuldigen om de totale kans op toeval voor die ene persoon te vinden?

simuleren met een vaasmodel. Er zijn in totaal 1029 diensten gedraaid, in 8 diensten vond een incident plaats. Dat komt overeen met een vaas met daarin 8 zwarte ballen (de diensten waarbij een incident plaatsvond) en 1021 witte ballen (de diensten waarbij geen incident plaatsvond). Het optreden van een incident komt dan overeen met het trekken van een zwarte bal uit deze vaas. Lucia had 142 keer dienst; in het vaasmodel betekent dit dat er 142 knikkers worden getrokken. We noemen hierbij X het aantal zwarte ballen dat bij deze trekking wordt aangetroffen. Er geldt:

$$P(X = k) = \frac{\binom{8}{k} \binom{1021}{142-k}}{\binom{1029}{142}}.$$

Het bijbehorende kanshistogram zie je hiernaast.

Uit dit model volgt dat $P(X = 8) = 0,000000110572$. Maar hier zit, zoals Elffers het zelf noemt, een 'addertje onder het gras'. Wat hier in feite uitgerekend wordt, is de kans dat een van tevoren aangewezen verpleegkundige



(namelijk de verdachte) die 142 van de 1029 diensten voor haar rekening neemt, alle 8 incidenten meemaakt. Maar dat is niet helemaal fair; ze is alleen maar aan deze berekening onderworpen omdat ze was opgevangen vanwege het frequent voorkomen van incidenten tijdens haar diensten. Daarom is het eerlijker, aldus Elffers, om de kans uit te rekenen dat iemand van de verpleegkundigen op de afdeling 8 incidenten meemaakt. Aangezien er 27 verpleegkundigen op de afdeling zijn, moet de kans van 1 op 9 miljoen met 27 vermenigvuldigd worden, resulterend in een kans kleiner dan 1 op 300.000. Deze waarde geeft in ieder geval een getal dat ten minste gelijk is aan de gezochte kans.

Later zijn ook de gegevens van twee andere ziekenhuizen waar Lucia had gewerkt verzameld. Elffers berekende op dezelfde manier nog twee kansen en vermenigvuldigde ze alledrie met elkaar, waardoor de berucht geworden kans van 1 op de 342 miljoen ontstaat dat het allemaal toeval is. De nulhypothese kan volgens Elffers in ieder geval verworpen worden, omdat de kans op toeval voor het eerste ziekenhuis alléén al ver onder de 0,0001 ligt.

Literatuur

- M. van Hintum, M. Husken, F. Vuijst, 'Dossier Lucia de B.', *Vrij Nederland*, www.vrijnederland.nl/web/show/id=56220
- T. Derksen, *Lucia de B., reconstructie van een gerechtelijke dwaling*. Veen Magazines, 2006.
- M. 't Hart, 'Een hedendaags heksenproces, Pleidooi voor de heropening van de Zaak Lucia de B.', *NRC Handelsblad*, 7 oktober 2006
- M. Buchanan, 'Statistics: Conviction by numbers', *Nature*, vol. 445 no. 7125 (18 januari 2007)
- M. van Lambalgen en R. Meester, 'Wat zeggen al die getallen eigenlijk? De statistiek in het proces tegen Lucia de B.' *Nieuwe Wiskrant*, 24-4 (juni 2005)

En hoe presenteert je dergelijke berekeningen aan de rechtbank met zo min mogelijk kans op misverstand?

Henk Elffers probeert momenteel samen met een paar van zijn critici, de wiskundigen Richard Gill, Peter Grünwald en Willem van Zwet, een gezamenlijk artikel voor een internationaal tijdschrift over statistiek te schrijven waarin deze zaken grondig behandeld worden.

♦ Pythagoras Olympiade

door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

22

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juni 2007.

OPGAVE

142

Bij een spelshow worden op een scherm n verschillende prijzen getoond. Je wordt voor n deuren geplaatst; achter deze deuren staan die prijzen. Je moet raden welke prijs achter welke deur zit. Na de eerste poging zegt de spelleider hoeveel prijs-deur-combinaties je goed had gegokt, en geeft je vervolgens de mogelijkheid om je keuzes nog te veranderen. Je wint alle prijzen als je alle prijs-deur-combinaties goed hebt gegokt, anders win je niets. Wat is de kans dat je met de prijzen naar huis gaat?

OPGAVE

143

De drie getallen a , b en c zijn geheel. Bovendien is ook $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ een geheel getal. Laat zien dat a , b en c kwadraten van gehele getallen zijn.

OPLOSSING

138

Zij $\triangle ABC$ een driehoek en M het midden van zijde AB . Plaats de punten D en E op zijde BC zo, dat $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{1}{3}|BC|$. Stel nu dat $\angle MAE = \angle AMC$. Hoe groot is dan $\angle BAC$?

Oplossing. Verleng BA aan de kant van A met een lengte van $\frac{1}{2}|AB|$ en noem het nieuwe eindpunt F , dan geldt dat $|FA| = |AM| = |MB|$. Teken ook het lijnstuk FC . Omdat gegeven is dat $|CE| = |ED| = |DB|$, zijn $\triangle MBD$, $\triangle ABE$ en $\triangle FBC$ gelijkvormig. Dus $\angle BFC = \angle BAE = \angle MAE = \angle AMC$, zodat $\triangle FMC$ gelijkbenig is ($|FC| = |MC|$). Omdat A het midden is van FM , is CA de middelloodlijn van de gelijkbenige driehoek FMC . Dus CA staat loodrecht op AB , waaruit volgt dat $\angle BAC = 90^\circ$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Richard Both** van het Corderius College te Amersfoort, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Joris Goethals** van het Onze Lieve Vrouwe College te Assebroek, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Edward Vanhaute** van de Edugo Campus De Toren te Oostakker en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Richard Both**.



OPLOSSING

139

Laat k een natuurlijk getal zijn. Bekijk de getallen $a_k = 3k^2 + k + 1$. Definieer b_k als de som van de cijfers van a_k . Wat is de minimale waarde van b_k ?

Oplossing. Omdat $a_k = 3k^2 + k + 1 = k(3k + 1) + 1$, en k óf $3k + 1$ even zal moeten zijn, is a_k altijd oneven. Dit betekent dat $b_k = 1$ alleen voor kan komen als $a_k = 1$, maar $a_1 = 5$ en de rij is stijgend, dus a_k zal nooit 1 worden.

Omdat a_k oneven is, kan $b_k = 2$ alleen voorkomen als $a_k = 10^n + 1$ voor $n \geq 1$. Dit betekent dat $k(3k + 1) = 10^n = 2^n \cdot 5^n$. Omdat k en $3k + 1$ geen gemeenschappelijke delers kunnen hebben, en $3k + 1$ groter is dan k , moet nu gelden dat $k = 1$ en $3k + 1 = 10^n$, óf dat $k = 2^n$ en $3k + 1 = 5^n$. Het eerste is onwaar, want $a_1 = 5$. In het tweede geval geldt $3 \cdot 2^n + 1 = 5^n$, hetgeen alleen geldt voor $n < 2$. Maar ook $n = 1$ werkt niet, omdat $3 \cdot 2^1 \neq 5^1$. Dit betekent dat ook $b_k = 2$ niet voor kan komen. Omdat $b_8 = 3$ moet de minimale waarde van b_k nu wel gelijk aan 3 zijn.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Alexander van Hoorn**.

door **Jonas van Praag** en **Michel Mandjes**

Over een aap die lukraak op de toetsen van een typemachine slaat, hebben we de laatste tijd veel geschreven in *Pythagoras*. In het artikel 'Een aap en een typemachine' uit het novembernummer ging het om de kans dat de aap eerder ABRACADABRA typt dan ABCDEFGHIJK. De methode die werd besproken is erg tijdrovend: er moeten grote stelsels vergelijkingen worden opgelost. Voor Jonas van Praag, fellow bij adviesbureau McKinsey & Company, en Michel Mandjes, hoogleraar Toegepaste Kansrekening aan de Universiteit van Amsterdam, was dat een aanleiding om te zoeken naar een efficiëntere manier om deze kans te berekenen. In dit artikel presenteren we hun methode.



illustratie
Suus van den Akker

24

♦♦Kansen en overlapgetallen

Hoe lang duurt het gemiddeld voordat een gegeven woord op papier verschijnt, als een aap willekeurig toetsen van de typemachine aanslaat? Deze vraag stond centraal in het tweedelige artikel 'Onverwachte verwachtingen' uit het februari- en het aprilnummer van onze vorige jaargang. De verwachting van het aantal aanslagen dat de aap moet doen, noemen we de *verwachte stoptijd*. In kader 1 staat de regel voor het bepalen van de verwachte stoptijd.

Wij gebruiken hier een typemachine met slechts een A en een B, dus we hebben $z = 2$ toetsen. Voor het rekenwerk maakt het weinig uit of de typemachine meer toetsen heeft.

Hoe lang zal de aap naar verwachting met de woorden AABB en BABB bezig zijn? We noteren deze woorden met W_1 respectievelijk W_2 . Het aantal aanslagen dat hij moet doen tot W_1 optreedt noteren we met T_1 , en net zo voor T_2 . Het *verwachte aantal aanslagen* noteren we met $\mathbf{E}(T_1)$ en $\mathbf{E}(T_2)$. De letter **E** komt van het Engelse woord *expectation*.

Met behulp van de regel in kader 1 kunnen we deze verwachtingen berekenen. Omdat in het geval van W_1 slechts voor $k = 4$ er gelijkheid is, geldt $\mathbf{E}(T_1) = 2^4 = 16$. Voor W_2 ligt dit anders: ook voor $k = 1$ is er gelijkheid, waarmee we $\mathbf{E}(T_2) = 2^4 + 2^1 = 18$ vinden.

Overlapgetallen

Voor het vervolg van dit verhaal hebben we een nieuw begrip nodig, namelijk het *overlapgetal* van een woord ten opzichte van een ander woord. Hoe je het overlapgetal van twee woorden kunt uitrekenen, kun je lezen in kader 2. We schrijven $W_1 * W_2$ voor het overlapgetal van W_2 met W_1 en $W_2 * W_1$ voor het overlapgetal van W_1 met W_2 .

Het overlapgetal van een woord met zichzelf bestaat ook: $W_1 * W_1$ is het overlapgetal van W_1 met zichzelf. Als je goed kijkt naar de manier waarop het overlapgetal wordt uitgerekend, zie je dat dit precies dezelfde berekening is als de regel uit kader 1. Er geldt dus: $W_1 * W_1 = E(T_1)$ en $W_2 * W_2 = E(T_2)$.

Welk woord verschijnt als eerste?

Met behulp van het overlapgetal kun je uitrekenen wat de kans is dat een bepaald woord eerder voorkomt dan een ander woord. Je moet je daarbij realiseren dat dit geen direct verband hoeft te houden met de verwachting van het aantal benodigde toetsaanslagen: we weten dat $E(T_1) = 16$ en $E(T_2) = 18$, maar het is geenszins zeker dat AABB eerder op papier verschijnt dan BABB. De aap kan bijvoorbeeld het rijtje AABABB typen, waarmee BABB 'wint'!

We zullen nu uitleggen hoe we tot formules komen om deze 'winstkansen' uit te rekenen. We beginnen weer met een woord W_1 en een woord W_2 . We houden daarbij de bekende woorden AABB en BABB in gedachte, maar de afleiding geldt natuurlijk ook bij andere woorden.

Eerst introduceren we $T_{\min}$: het *minimum* van de twee aantallen ingedrukte toetsen T_1 en T_2 . Je kunt $T_{\min}$ interpreteren als het aantal toetsaanslagen totdat W_1 of W_2 optreedt. Nu kunnen we de *verwachte* hoeveelheid aanslagen totdat W_1 zich voordoet splitsen:

$$E(T_1) = E(T_{\min}) + E(T_1 - T_{\min}) \quad (1)$$

Met andere woorden: de te verwachten hoeveelheid aanslagen totdat W_1 optreedt, kunnen we zien als de som van de te verwachten hoeveelheid ingedrukte toetsen totdat óf

1

Algemene regel voor het bepalen van verwachte stoptijden

Gegeven een woord van n letters uit een alfabet van z letters. Als de eerste k letters van dit woord gelijk zijn aan de laatste k letters van dit woord, levert dat een term z^k op voor de verwachte stoptijd van dat woord, voor $k = 1, \dots, n$.

Merk op dat voor $k = n$ zowel de eerste k letters als de laatste k letters gewoon het hele woord is; de verwachte stoptijd van elk n -letterwoord bevat derhalve een term z^n .

W_1 óf W_2 zich voordoet, plus een eventueel verschil tussen $T_{\min}$ en T_1 . Als W_1 als eerste optreedt, is T_1 gelijk aan $T_{\min}$, maar als W_2 als eerste optreedt, is $T_1 - T_{\min}$ groter dan 0.

Nu gaan we met behulp van *voorwaardelijke verwachtingen* (zie kader 3) $E(T_1 - T_{\min})$ splitsen in twee gevallen: het geval dat W_1 eerder optreedt dan W_2 (dus $T_1 < T_2$) en het geval dat W_2 eerder optreedt dan W_1 (en dus $T_2 < T_1$). Dit kunnen we opschrijven als

$$\begin{aligned} E(T_1 - T_{\min}) = & \\ & E(T_1 - T_{\min} \mid T_1 < T_2) \times P(T_1 < T_2) \\ & + E(T_1 - T_{\min} \mid T_1 > T_2) \times P(T_1 > T_2). \end{aligned} \quad (2)$$

$E(T_1 - T_{\min} \mid T_1 < T_2)$ is dus de verwachting van het aantal aanslagen tussen $T_{\min}$ en T_1 , gegeven dat T_1 kleiner is dan T_2 (dat W_1 als eerste op het papier verschenen is). We gebruiken hier dat we verwachtingen mogen splitsen in gewogen sommen van voorwaardelijke verwachtingen. We wegen elk stuk dan met de kans op de voorwaarde. Je ziet dat inderdaad alle mogelijkheden in de voorwaarden zijn afgedekt: immers, als je maar lang genoeg wacht, moet één van beide woorden W_1 of W_2 als eerste op papier staan!

Hier is dus $P(T_1 < T_2)$ de kans dat de aap minder aanslagen nodig heeft om W_1 te typen dan om W_2 te typen, kortom: de kans dat W_1 eerder getypt wordt dan W_2 .

2

Het overlapgetal

Neem de woorden $W_1 = AABB$ en $W_2 = BABB$. Het *overlapgetal* $W_2 * W_1$ bereken je als volgt. Bekijk het laatste symbool van W_2 en het eerste symbool van W_1 . Als deze gelijk zijn, bevat het overlapgetal een term 2 ($= 2^1$). In dit geval zijn deze echter niet gelijk (B respectievelijk A). Nu kijken we naar de twee laatste symbolen van W_2 en de twee eerste symbolen van W_1 . Als deze allebei hetzelfde zijn, bevat het overlapgetal een term $2^2 = 4$. Maar ook dit is hier niet het geval. Zo gaan we door. We krijgen:

BABB	AABB	ongelijk	0
BABB	AABB	ongelijk	0
BABB	AABB	ongelijk	0
BABB	AABB	ongelijk	0
totaal:			0

Er geldt dus: $W_2 * W_1 = 0$. We kunnen natuurlijk ook $W_1 * W_2$ bepalen:

AABB	BABB	gelijk	2^1
AABB	BABB	ongelijk	0
AABB	BABB	ongelijk	0
AABB	BABB	ongelijk	0
totaal:			2

Dus $W_1 * W_2 = 2$. Reken zelf na dat $W_1 * W_1 = 16$ en $W_2 * W_2 = 18$.

Als de typemachine niet twee, maar z toetsen heeft, vervang je de 2 in de berekening door z .

Voor $P(T_1 > T_2)$ geldt natuurlijk het omgekeerde. Wat ook duidelijk is, is dat $P(T_1 < T_2)$ en $P(T_2 < T_1)$ samen 1 moeten zijn.

Kijk eens wat preciezer naar $E(T_1 - T_{\min} | T_1 < T_2)$. Je moet dit lezen als het verwachte verschil van T_1 en $T_{\min}$, als je al weet dat T_1 kleiner is dan T_2 . Dan is T_1 natuurlijk gelijk aan $T_{\min}$, dus het verschil tussen T_1 en $T_{\min}$ is altijd 0! Dat betekent dat het eerste stuk van vergelijking (2) wegvalt:

$$E(T_1 - T_{\min}) = E(T_1 - T_{\min} | T_1 > T_2) \times P(T_1 > T_2). \quad (3)$$

Wat betekent die *andere* voorwaardelijke verwachting, $E(T_1 - T_{\min} | T_1 > T_2)$? Omdat we hier kijken naar het geval dat W_2 eerder op papier staat dan W_1 , kunnen we hier $T_{\min}$ lezen als T_2 . Dan is $E(T_1 - T_2 | T_1 > T_2)$ natuurlijk hetzelfde als het verwachte aantal aanslagen dat we nog moeten wachten totdat W_1 is getypt, gerekend vanaf het verschijnen van W_2 . Dit schrijven we op als $E(T_{1|2})$. Dus (3) komt overeen met

$$E(T_1 - T_{\min}) = E(T_{1|2}) \times P(T_1 > T_2).$$

Als we dit nu uiteindelijk invullen in vergelijking (1), krijgen we

$$E(T_1) = E(T_{\min}) + E(T_{1|2}) \times P(T_1 > T_2). \quad (4)$$

Volgens eenzelfde redenering kun je nagaan dat ook $E(T_2) = E(T_{\min}) + E(T_{2|1}) \times P(T_2 > T_1)$, of, vanwege het feit dat $P(T_1 < T_2)$ en $P(T_2 < T_1)$ samen 1 zijn:

$$E(T_2) = E(T_{\min}) + E(T_{2|1}) \times (1 - P(T_1 > T_2)). \quad (5)$$

Uiteindelijk willen we $P(T_1 > T_2)$ en $P(T_2 > T_1)$ bepalen, maar in de vergelijkingen (4) en (5) komen (naast $E(T_1)$ en $E(T_2)$) de voorwaardelijke verwachtingen $E(T_{1|2})$ en $E(T_{2|1})$ én $E(T_{\min})$ voor, waarvan we wel weten wat ze betekenen, maar nog niet hoe we ze moeten uitrekenen...

Stel je nu eens voor dat we $E(T_{1|2})$ en $E(T_{2|1})$ kunnen bepalen. Dan zitten er in de twee vergelijkingen (4) en (5) nog twee onbekenden: $P(T_1 > T_2)$ en $E(T_{\min})$. Maar je weet dat je twee vergelijkingen met twee onbekenden kunt oplossen! We krijgen:

$$P(T_1 > T_2) = \frac{E(T_1) + E(T_{2|1}) - E(T_2)}{E(T_{2|1}) + E(T_{1|2})} \quad (6)$$

en

$$E(T_{\min}) = \frac{E(T_2) - E(T_{2|1})}{E(T_{2|1}) + E(T_{1|2})} \frac{E(T_2) + E(T_{1|2}) - E(T_1)}{E(T_{2|1}) + E(T_{1|2})}$$

Men heeft met een aantal diepe wiskundige stellingen kunnen bewijzen dat deze voorwaardelijke verwachtingen $E(T_{1|2})$ en $E(T_{2|1})$ niet zo ingewikkeld zijn om te bepalen. Hier komen de overlapgetallen, die we eerder introduceerden, namelijk van pas. Er geldt $E(T_{1|2}) = W_1 * W_1 - W_2 * W_1$ en $E(T_{2|1}) = W_2 * W_2 - W_1 * W_2$. Met deze kennis kunnen we dus formule (6) gebruiken om uit te rekenen welk woord de grootste kans heeft om als eerste door de aap getypt te worden!

Met $W_1 = AABB$ en $W_2 = BABB$ vinden we

$$\begin{aligned} E(T_{1|2}) &= W_1 * W_1 - W_2 * W_1 \\ &= 16 - 0 = 16 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} E(T_{2|1}) &= W_2 * W_2 - W_1 * W_2 \\ &= 18 - 2 = 16. \end{aligned}$$

Nu we dit weten, kunnen we dus ook de oplossing voor vergelijking (6) uitrekenen. De kans dat W_2 wint, is

$$\begin{aligned} P(T_1 > T_2) &= \frac{E(T_1) + E(T_{2|1}) - E(T_2)}{E(T_{2|1}) + E(T_{1|2})} \\ &= \frac{16+16-18}{16+16} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

De kans is dus het grootst dat we $W_1 = AABB$ als eerste op het papier zien.

Abracadabra

De kans dat de aap op een typemachine met de 26 letters van het alfabet eerder ABRA-CADABRA typt dan de eerste elf letters van het alfabet op rij, kan met deze formules makkelijk worden uitgerekend. Grote stelsels vergelijkingen hoeven niet te worden opgelost!

3

De voorwaardelijke verwachting

Bij een *voorwaardelijke verwachting* is al enige informatie over het toevals-experiment bekend. Stel, AA staat al op het papier. Je kunt je wel voorstellen dat dan de verwachting van het aantal nog benodigde aanslagen om $W_1 = AABB$ te realiseren, kleiner is dan als er nog helemaal niets op papier staat. We noteren dit met $E(T_1|L_1 = A, L_2 = A)$, waar we de bekende informatie (de voorwaarde) achter de verticale streep zetten.

$L_1 = A$ betekent dat de eerste letter een A is geworden.

Een belangrijke eigenschap van een gewone (onvoorwaardelijke) verwachting is dat je hem als een *gewogen gemiddelde* van voorwaardelijke verwachtingen kunt schrijven. Hierbij moeten de voorwaardelijke verwachtingen alle mogelijke gevallen 'afdekken' en zijn de gewichten de kansen op elke voorwaarde. Bekijk het volgende voorbeeld:

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E(T_1|L_1 = A) \times P(L_1 = A) + \\ &\quad + E(T_1|L_1 = B) \times P(L_1 = B). \end{aligned}$$

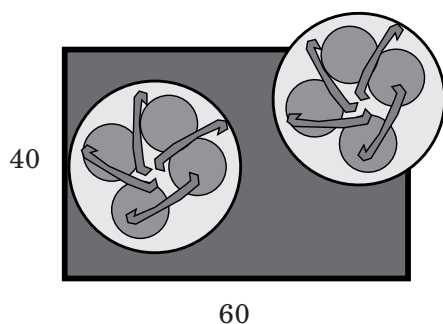
Hier is $E(T_1)$, het verwachte aantal aanslagen totdat AABB op papier staat, gesplitst in twee voorwaardelijke verwachtingen. Hier is als voorwaarde de uitkomst van de eerste letter gekozen. Uiteraard zijn er ook andere voorwaarden te kiezen.

Problemen

door Dion Gijswijt

Pizza's

Bij croissanterie Jolie willen ze ronde pizza's gaan verkopen. Ze hebben een bakplaat van 40 bij 60 centimeter waarop ze twee pizza's tegelijk willen bakken. Als de pizza's een doorsnede van 30 centimeter hebben, gaat dat gemakkelijk. Maar wat is de grootste mogelijke diameter van de pizza's? (Rob Elfrink)



Traplopen

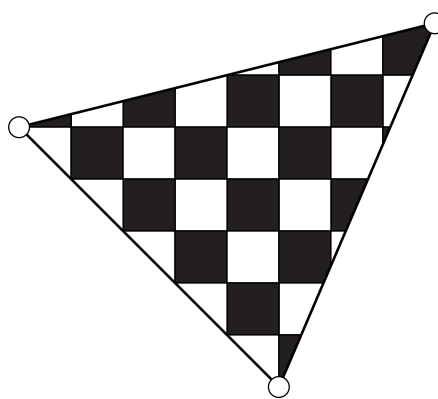
Anne loopt iedere dag de trap op. De trap heeft dertien treden en ze neemt stappen van één of twee treden tegelijk. Ze wil het zo doen dat ze geen twee dagen precies dezelfde treden overslaat. Kan ze dat een jaar lang volhouden?

Kaasblokjes

Hans heeft een groot kubusvormig blok kaas. Hij wil de kaas in $8 \times 8 \times 8 = 512$ even grote kaasblokjes snijden. Hoeveel keer moet hij minimaal snijden? Hij mag de brokken die bij het snijden ontstaan opstapelen om zo meerdere brokken in één keer in tweeën te snijden.

Zwart-wit

Bevat de driehoek in de figuur meer zwart of meer wit?



Optelketens

Stel dat je een rekenmachine hebt die wel kan vermenigvuldigen, maar niet kan machtsverheffen. En stel ook dat je een getal x hebt waarvoor je x^{100} wilt berekenen. Je hoeft dan niet 99 keer te vermenigvuldigen! Je kunt het ook met maar 8 keer vermenigvuldigen af, door achtereenvolgens te berekenen:

$$x^1 (= x), x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}, x^{64}, x^{96}, x^{100}.$$

Elk getal in de rij krijg je door twee eerder berekende getallen te vermenigvuldigen, bijvoorbeeld $x^{100} = x^{96} \cdot x^4$ en $x^4 = x^2 \cdot x^2$. Het bijbehorende rijtje exponenten 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 100 heet een *optelketen* voor 100 van *lengte* 8. Kun je een optelketen maken voor 23 van lengte 6?

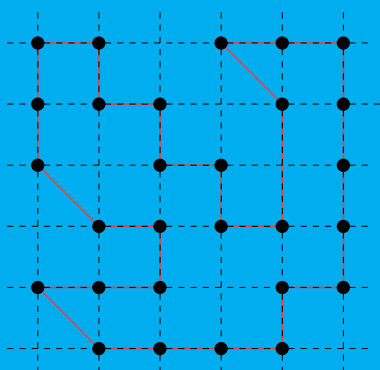
Kun je ook een optelketen maken voor $65535 = 2^{16} - 1$ van lengte 19?

Oplossingen

nr. 4

Achtentwintigstedentocht

In de figuur zie je de kortste route, met lengte $26 + 3\sqrt{2}$.



Driedeling

Omdat de driehoeken AGC en ABD gelijkvormig zijn, volgt dat

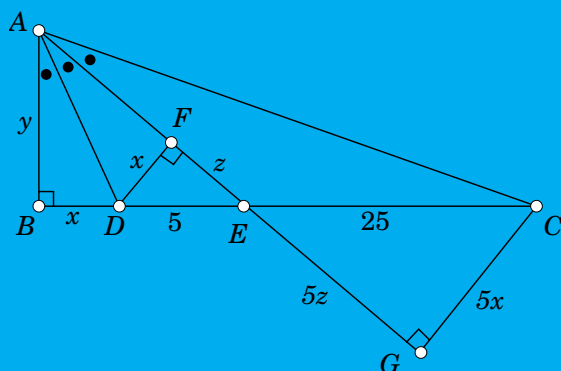
$$\frac{5x}{6z + y} = \frac{x}{y}$$

en dus $2y = 3z$.

Omdat de driehoeken DFE en ABE gelijkvormig zijn, geldt

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{y + z} = \frac{3}{5}$$

dus $x = 3$.



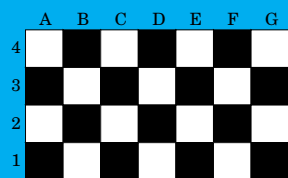
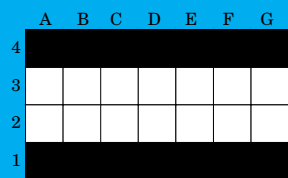
Hilbert Hotel

Alle managers kunnen als volgt worden ondergebracht in het Banach Hotel: geef de manager van kamers $n_1, n_2, \dots, n_k$ kamernummer $2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$. Dus de manager zonder kamers krijgt nummer 0, de manager met kamers 2, 3, 11 krijgt nummer $2^2 + 2^3 + 2^{11} = 2060$, enzovoorts.

Paard

Zo'n rondreis is niet mogelijk. Stel dat er een wél een tour langs alle 28 velden zou zijn. We mogen wel aannemen dat het paard in A1 begint. Bekijk de bovenste tekening. Omdat het paard van elk zwart veld alleen naar een wit veld kan springen, en er even veel zwarte als witte velden zijn, moet het paard in zijn rondreis om en om op een zwart en een wit veld staan. Dus de velden na 0, 2, 4, 6, ..., 26 sprongen zijn allemaal zwart.

Bekijk nu de 'normale' schaakbordkleuring in het onderste plaatje. Ook hier geldt dat het paard na 0, 2, 4, ..., 26 sprongen op een zwart veld staat. Maar dan kunnen we concluderen dat beide kleuringen dezelfde 14 zwarte velden hebben! Dat is duidelijk niet correct, dus er is geen rondreis.



door **Hans Melissen**

Geen piek

30

Volgens Jaaps berekening kan de laatste klimmer via 20 kampen de top van de Annapurna bereiken. In dit systeem liggen de meeste kampen vrij laag, aan de voet van de berg, en komen 15 van de 21 teamleden niet eens tot halverwege de top.

te haag



Tegenwoordig lijkt het beklimmen van de hoogste bergen in de Himalaya een peulenschil: jaarlijks zwerven tientallen teams rond op het 'dak van de wereld'. Aangemoedigd door al deze activiteiten wil ook Jaap Weifelaar van de Schaarwoudense Alpinistenvereniging (SAV) in de zomervakantie een expeditie gaan uitrusten. Hij heeft zijn oog laten vallen op de Annapurna, die een hoogte heeft van 8091 meter. Vanuit het Nepalese stadje Pokhara op een hoogte van 827 meter moet er dus 7264 meter geklommen worden.

Jaap realiseert zich dat een goede planning voor het slagen van de expeditie zeer belangrijk is. Uit eerdere ervaringen opgedaan in het Zuid-Limburgse hooggebergte weet Jaap dat een bergbeklimmer voor elke honderd meter stijging gemiddeld één kilo aan materiaal, zoals touw en haken, nodig heeft. Elke klimmer kan maximaal twintig kilo aan materiaal meenemen. Een snel rekensommetje leert dat één alpinist met zijn materiaal maximaal 2000 meter omhoog kan klimmen, lang niet genoeg om de top te halen. Gelukkig weet Jaap hoe professionele expedities dit probleem oplossen. Ze richten tussentijds kampen in en gaan met een steeds kleinere groep verder omhoog. Maar waar moeten die kampen liggen en uit hoeveel leden moet de expeditie bestaan?

Kampen aanleggen

Jaap ziet vrijwel meteen in dat tussen twee kampen altijd minder dan 2000 meter hoogteverschil zal liggen. Immers, hoeveel bergbeklimmers ook uit een kamp vertrek-

ken, 2000 meter hoger zijn ze allemaal door hun materiaal heen en kan niemand nog verder omhoog.

Er zit dus niets anders op dan het met meer kampen te proberen, denkt Jaap. Laten we het eens proberen met twee kampen en drie klimmers. In het eerste kamp, dat op hoogte x ligt, blijft één klimmer achter. Er is dan $60 - 3x/100$ kilo materiaal omhoog gebracht. In het beste geval is dit gelijk aan de maximale hoeveelheid materiaal waarmee twee klimmers verder kunnen, dus 40 kilo. Dit is zo als $x = 666,66...$ meter.

Hoeveel hoger moeten deze twee klimmers een tweede kamp aanleggen? Optimaal is, als de laatste klimmer van daaruit met 20 kilo materiaal verder kan. In het tweede kamp komt $40 - 2x/100$ kilo materiaal aan; dit is gelijk aan 20 als $x = 1000$. Dus het tweede kamp komt op $666,66 + 1000 = 1666,66$ meter hoogte. Van daaruit komt de laatste klimmer nog 2000 meter hoger, tot 3666,66 meter.

Maar nu ontvouwt zich een patroon voor Jaap. Met meer klimmers laat je telkens één klimmer achter op het moment dat het resterende materiaal door de overige klimmers meegenomen kan worden. Als je met n klimmers start, is er op hoogte x in totaal $20n - nx/100$ kilo materiaal over; dat moet gelijk zijn aan $20(n - 1)$. Dit klopt als $x = 2000/n$. Het eerste kamp moet dus op hoogte $2000/n$ liggen. Vanuit dit kamp gaan we verder met $n - 1$ klimmers, die volledig bepakkt zijn. Dat betekent dat het tweede kamp $2000/(n - 1)$ meter hoger moet liggen, het derde weer $2000/(n - 2)$ meter hoger, enzovoort. De hoogte (in meters) die de laatste klimmer bereikt, is dus

$$2000\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right).$$

Door een aantal waarden voor n in te vullen, vindt Jaap dat hij met een team van 21 SAV-leden een hoogteverschil van 7290 meter kan overbruggen, genoeg voor de Annapurna. Overigens is dit een wel heel simpel model om een hoge berg te beklimmen: Jaap gaat er bijvoorbeeld van uit dat zijn klimmers hun eigen voedsel niet mee omhoog (en deels ook weer omlaag) hoeven te nemen. Probeer zelf eens een model door te rekenen, waarbij elke klimmer ook nog, zeg, voor elke 1000 meter stijging en daling één kilo voedsel en drinken nodig heeft om gezond en wel terug te komen in Pokhara.

Ook zullen de eerste paar klimmers met Jaaps systeem weinig voldoening aan de expeditie beleven: de eerste klimmer blijft al op $2000/21 \approx 95$ meter boven Pokhara achter, de tweede na 195 meter, de derde na 300 meter, enzovoort.

De Annapurna is een van de hoogste bergen op aarde, dus veel meer teamleden zal Jaap niet nodig hebben om de allerhoogste, de Mount Everest, te bestijgen. Die is volgens de nieuwste metingen 8844 meter hoog, dus als we weer in Pokhara beginnen is dat 8017 meter klimmen. Daarvoor heb je aan 31 teamleden genoeg, leert enig verder rekenen.

♦♦ De Sahara oversteken

Voor bergbeklimmen is Jaaps methode nog met een rekenmachientje te behapstukken. Maar stel, je vat het wilde plan op om met deze methode te voet de Sahara over te steken, een afstand van 1500 kilometer. In plaats van 2000 meter klimmen, kan elk teamlid nu met 15 kilo bepakking maximaal 30 kilometer lopen (in die hitte geen geringe prestatie). De afstand (in kilometers) die je dan met n expeditieleden aflegt, is

$$30\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right).$$

Wanneer is n groot genoeg om 1500 kilometer ver te komen? Als je dit probeert uit te rekenen door telkens kleinere breuken $1/k$ aan het totaal toe te voegen, zul je al snel merken dat dit niet opschiet. Gelukkig heeft de beroemde wiskundige Leonhard Euler al in de achttiende eeuw een korte formule gevonden die voor grote waarden van n een heel nauwkeurige benadering van deze reeks geeft:

$$30\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \approx 30\left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}\right).$$

De eerste term, $\ln n$, geeft globaal aan hoe hard de som groeit. Dit is een logaritme, dus hij groeit heel langzaam naarmate n toeneemt, maar kan wel willekeurig groot worden. Dat betekent in theorie, dat elke afstand, hoe groot ook, zo te overbruggen is. De tweede term, γ , is de zogeheten 'constante van Euler-Mascheroni', vaak ook kortweg 'constante van Euler' genaamd. Er geldt dat $\gamma = 0,5772156\dots$. De laatste twee termen worden kleiner naarmate n groter wordt. Deze drie dienen om het resultaat nauwkeuriger te maken, maar de Sahara-expeditie heeft die niet eens nodig. Want hoe groot zou die expeditie ruwweg moeten zijn? Daarvoor moet de logaritme van n ongeveer $1500/30 = 50$ zijn, ofwel: n is ongeveer $e^{50} \approx 10^{21}$: een veel en veel groter getal dan het aantal mensen op aarde! Je kunt echt beter gaan vliegen over de Sahara.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 4

Verhuizen

Er kunnen op de laadvloer twee rijen van vier dozen in de lengte en één rij van vijf dozen in de breedte staan. In totaal zijn dat $4 \times (8 + 5) = 52$ dozen.

Landkaart kleuren

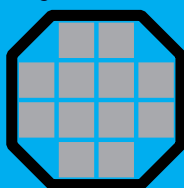
Als de kaart linksboven en de kaart rechtsonder dezelfde kleur hebben ($3 \times 1 = 3$ mogelijkheden), zijn er voor rechtsboven en linksonder nog $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden. Als linksboven en rechtsonder verschillende kleur hebben ($3 \times 2 = 6$ mogelijkheden), is er voor rechtsboven en linksonder nog maar 1 mogelijkheid. In totaal zijn er dus $3 \times 4 + 6 \times 1 = 18$ mogelijkheden.

Getallenrij

De rij kan op een heleboel manieren verder gaan. Het volgende getal kan bijvoorbeeld 1722 zijn (getal van achter naar voren lezen en met 2 vermenigvuldigen). Een andere mogelijkheid is 1632 (laatste cijfer vooraan zetten en met 2 vermenigvuldigen).

Balken samenbinden

Ja, je kunt de balken met minder dan 140 cm samenbinden op de volgende manier:



Pythagorassom

Een oplossing is:

$$\begin{array}{r} 795 \\ 468 \\ \hline 1263 \end{array} +$$

COLOFON

46ste jaargang nummer 5
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur

Arnout Jaspers

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Jeanine Daems,
Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Marco Swaen,
René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Chris Zaal

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176 E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nrs per jaargang)

€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België),
€ 26,00 (overig buitenland), € 17,25
(leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 10,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 12,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combi-

natorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), S.J. van Gool, student wiskunde aan de UvA (sgool@science.uva.nl), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), D.S. de Kloet, student wiskunde aan de VU (dskloet@gmail.com), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), prof.dr. M. Mandjes, hoogleraar toegepaste kansrekening aan de UvA (mmandjes@science.uva.nl), dr. J.B.M. Melissen, docent informatietechnologie aan de TU Delft (j.b.m.melissen@tudelft.nl), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), msc. J.A. van Praag, fellow bij McKinsey & Company (jonas@vanpraag.com), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), dr. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:





Op elf duizendpoten

Het spel – u ziet het als u kijkt –
heeft nu zijn hoogtepunt bereikt.
Maar wat is dat? Er wordt gefloten!
Een strafschoot voor de duizendpoten!
Daar komt het schot. Gejuich! Gejoel!
Vijfhonderd ballen in het doel!

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse