

PYTHA GORAS

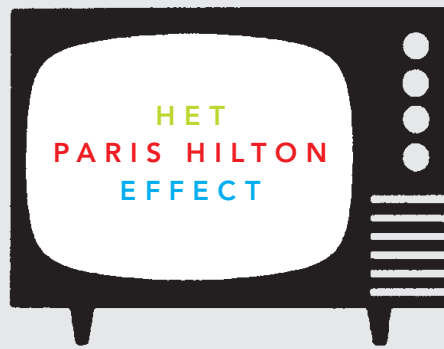


Van viervlak naar ster

Ruimte meetkunde wordt zoveel interessanter als je de figuren echt kunt vastpakken, helemaal als je de figuren zelf in elkaar hebt gezet. Het bouwplatenboekje van *Pythagoras* vormt daarvoor een mooie aanleiding. Het bevat de bouwplaten voor negen veelvlakken die samen een serie vormen. De kleinste figuur kun je zien als een viervlak waarvan de vier zijvlakken helemaal naar binnen gedeukt zijn. Vervolgens worden die deuken minder diep, komen dan precies vlak te liggen zodat je een echt viervlak krijgt. Maar daar stopt het niet: de zijvlakken komen naar buiten als piramides en vormen sterpunten die steeds verder naar buiten steken.

Het bouwplatenboekje kost € 2,50, exclusief verzendkosten. De verzendkosten (minimaal € 1,18) hangen af van het aantal bestelde boekjes. Een bestelformulier is te vinden op www.pythagoras.nu.





Geklaag dat 'die jeugd van tegenwoordig niets meer leert' is van alle tijden. Zeker over wiskunde doen tegenwoordig gruwelverhalen de ronde. Eerstejaars studenten in de bètavakken klagen zelf ook dat ze zonder wiskundebijles de colleges niet kunnen volgen.

Als de tekenen niet bedriegen, is dat tij aan het keren. Presteren mag weer. De Wiskunde Kangoeroe Wedstrijd was dit jaar met 83000 deelnemers in Nederland en Vlaanderen groter dan ooit en wiskundetalent kan je een celebritystatus opleveren. Daar kunnen de drie Nijmeegse scholieren die met hun 'meest magische vierkant ooit' alle tv-journaals haalden over meepraten. In dit nummer slaan we hun profielwerkstuk juist even over en publiceren een onderdeel uit het profielwerkstuk over schuifpuzzels en de Rubik-kubus dat ex eaquo met hen de Van Melsenprijs won. Beide teams deden het ook in Sint Petersburg uitstekend: ze wonnen daar de gedeelde tweede prijs op de International Conference for Young Scientists.

Ook present in dit nummer is Terence Tao, voorheen wonderkind en Olympiade-winnaar, nu voor de media de 'Mozart van de wiskunde'. Zoals hij zelf zegt: 'Je wordt steeds beroemder vanwege je beroemd-zijn, het Paris Hilton effect.'

1

Niveausymbooltjes

Artikelen in Pythagoras waarvoor bovenbouwkennis van de wiskunde nodig is, hebben bij de titel een symbool voor de moeilijkheidsgraad. Artikelen met ♦ zijn vanaf de vierde klas te begrijpen. Voor artikelen met ♦♦ heb je kennis uit de vijfde of zesde klas nodig. Artikelen met ♦♦♦ gaan net iets verder dan de middelbare-schoolstof.

INHOUD

2 – 3	Kleine nootjes	16 – 19	Lees dit niet!
4 – 7	Schuifpuzzels en pariteit	20 – 24	De onmogelijke driedeling
7	Eerste cijfer laatste cijfer	25	Journal
8 – 11	De wiskunde van Terence Tao	26 – 27	Problemen – Oplossingen
12 – 13	Pythagoras Olympiade	28 – 32	Een nukkig kluisjesprobleem [Omslag: in welk kluisje zit welke portemonnee?]
14 – 15	Slim snoeien in oneindigheid	33	Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

**Kleine nootjes zijn puzzeltjes
die weinig of geen wiskundige
voorkennis vereisen om opgelost
te kunnen worden.**

**De antwoorden vind je in het
volgende nummer van *Pythagoras*.**

Kleine nootjes

2

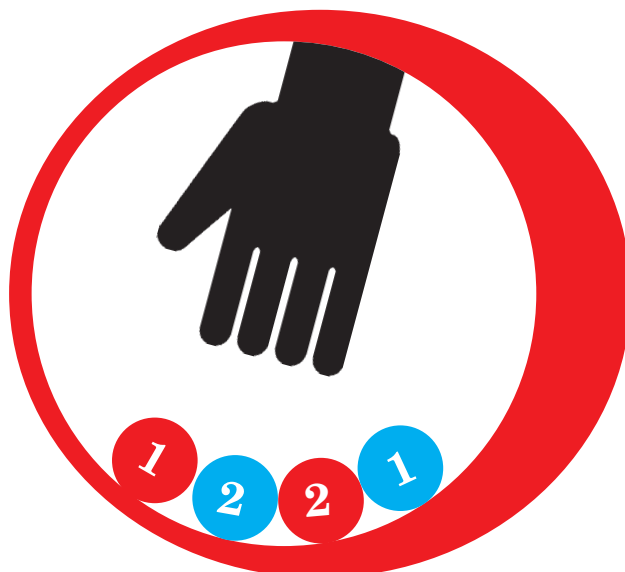


Zuinig autorijden

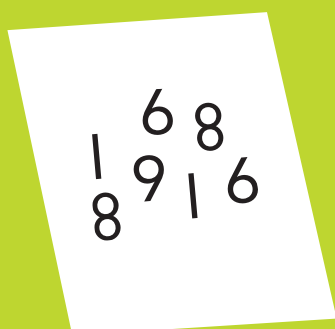
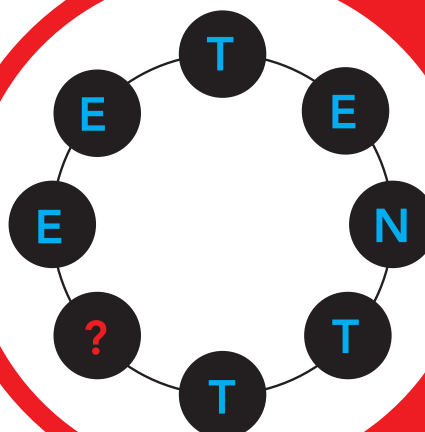
Jos rijdt met zijn nieuwe auto eerst 40 kilometer 'één op twaalf' (dat wil zeggen: 12 kilometer op 1 liter benzine) en daarna 100 kilometer 'één op vijftien'. Eén op hoeveel rijdt Jos over het hele traject?

Een rode bal

In een bak zitten vier ballen: twee rode met daarop de getallen 1 en 2, en twee blauwe met daarop eveneens 1 en 2. Gonnie trekt een bal, zegt 'het is een rode' en houdt hem achter haar rug zonder hem mij te tonen. Ik trek nu een bal. Hoe groot is de kans dat ik de rode bal waarop 1 staat trek?

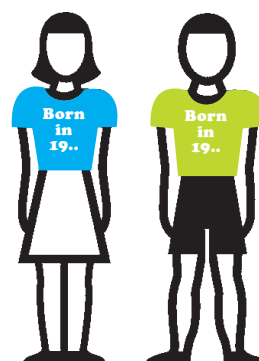


Honger en dorst?
Welke letter hoort op
het vraagteken?



Samen 20
Kies van het blaadje papier dat
je op het plaatje ziet, op twee ver-
schillende manieren enkele cijfers
die bij elkaar opgeteld 20 leveren.

Hoe oud?
Ik ben nu drie keer zo oud als jij
was, toen ik zo oud was als jij nu
bent. Als jij twee keer zo oud zult
zijn als ik nu ben, zullen we samen
130 jaar oud zijn. Hoe oud zijn
wij nu?



door **Bruno van Albeda, Valentijn Karemaker**
en **Brigitte Sprenger**



Brigitte Sprenger, Valentijn Karemaker en Bruno van Albeda
(foto: Dick van Aalst/Radboud Universiteit Nijmegen)

De Van Melsenprijs wordt jaarlijks uitgeschreven door de Radboud Universiteit Nijmegen. Profielwerkstukken op het gebied van de bètavakken dingen mee naar de prijzen. Misschien was het niet zo verrassend dat de makers van het 'meest magische vierkant ooit', dat in april zelfs de voorpagina van diverse kranten (en het Journaal van de vorige *Pythagoras*) haalde en op tv kwam, dit jaar wonnen. Maar dit 'magische' team moest de eerste prijs wel delen met drie scholieren die schuifpuzzels wiskundig analyseerden. In dit artikel presenteren we enkele resultaten uit hun zestig pagina's tellende profielwerkstuk.

De titel van dit stukje is weergegeven in een 5 bij 5 schuifpuzzel. Zo'n puzzel kun je makkelijk zelf maken met de blokjes van een Scrabble-spel. De twee laatste letters staan hier verkeerd om: 'pariteti' moet 'pariteit' zijn. Kun je door middel van het *schuiven* van stukjes (via het lege vakje, dat zich in de

beginstand rechtsonder bevindt) de titel goed krijgen?

Schuifpuzzels werden eind negentiende eeuw een rage, dankzij de *14-15-puzzel* van de Amerikaan Sam Lloyd. In de jaren tachtig van de vorige eeuw was de *Rubik-kubus*, een driedimensionale variant, een grote hit.

Dergelijke puzzels zijn te beschouwen als 'permutators': blokjes die je volgens vaste regels kunt veranderen van volgorde. Sommige puzzels zitten zodanig in elkaar dat ze met geen mogelijkheid om te vormen zijn naar de 'normale' toestand. Met behulp van een eenvoudig te verifiëren eigenschap, *pariteit*, kun je zonder moeite uitproberen bepalen of een puzzel oplosbaar is.

Permutaties

Permutaties zijn verwisselingen die binnen een verzameling worden uitgevoerd. Die verzameling bestaat uit elementen die van alles kunnen voorstellen en heet bijvoorbeeld X . Als je verzameling X permuteert, verwijst je elk element in die verzameling naar een bepaalde plaats in die verzameling. Een element hoeft niet per se naar een nieuwe plaats te verhuizen, hij mag ook op zijn plek blijven staan.

De verzameling $X = [123456]$ ziet er na uitvoering van een zekere permutatie uit als $[135462]$. De elementen 1 en 4 veranderen hier niet van plaats. De uitgevoerde permutatie kan worden opgeschreven als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Meestal worden permutaties in *cykel-notatie* opgeschreven. De permutatie van het voorbeeld wordt in cykel-notatie (2356) . Alleen de elementen die daadwerkelijk van plaats veranderen, worden erin opgenomen. In het voorbeeld komen 1 en 4 dus niet voor in de cykel-notatie.

De permutatie (1234) wil zeggen: 1 gaat naar 2, 2 gaat naar 3, 3 gaat naar 4 en 4 gaat naar 1. Dit wordt cyclisch genoemd omdat het laatste element naar het eerste gaat.

Een permutatie hoeft niet uit één cykel te bestaan. Zo bestaat de permutatie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

uit de cyclen (123) en (56) . Een cykel die uit twee elementen bestaat, bijvoorbeeld (12) , heet een *transpositie* of *paarverwisseling*.

Beschrijving van een schuifpuzzel

Schuifpuzzels zijn twee- of driedimensionaal en bestaan uit een aantal puzzelstukken. Tweedimensionale schuifpuzzels bestaan uit vierkante stukken of stukken van andere vormen, zoals rechthoeken, die in een raamwerk liggen. In dat raamwerk zit een lege plek, zodat je de stukken kunt verschuiven over de ondergrond.

Vaak staat er op een schuifpuzzel een plaatje, dat verdeeld is over de verschillende vakjes. Het plaatje kan door elkaar gehaald worden, en vervolgens is het doel om het plaatje er weer 'heel' uit te laten zien. In dit artikel bekijken we vierkante schuifpuzzels waarbij de stukken eveneens vierkantjes zijn.



In 2000 kreeg elke deelnemer van de Kangoeroe Wedstrijd deze schuifpuzzel

Pariteit

Om van een puzzel te kunnen vaststellen of deze oplosbaar is, hebben we het begrip *pariteit* nodig. Met het woord 'eindpositie' bedoelen we de permutatie waarbij de puzzel is opgelost (zoals het rechter plaatje bij de foto's van de Kangoeroepuzzel).

Definitie 1. Gegeven de eindpositie en een permutatie σ . Tel het aantal transposities, steeds vergeleken met de eindpositie. Dan is de *pariteit* $p(\sigma)$ van deze permutatie gelijk aan 0 indien het aantal transposities even is, en gelijk aan 1 indien het aantal transposities oneven is.

In onderstaande figuur is links de eindpositie te zien en rechts de permutatie, bestaande uit één transpositie: (42) . Dus $p(\sigma) = 1$. Het grijze vakje is het lege vakje.

1	2
3	4

1	4
3	2

Definitie 2. Gegeven de eindpositie en een permutatie σ . Tel $\Delta x + \Delta y$, de verplaatsing van het lege vakje in horizontale richting plus de verplaatsing in verticale richting. Dan is de **pariteit** $p(\Delta x + \Delta y)$ van de verplaatsing van het lege vakje gelijk aan 0 indien $\Delta x + \Delta y$ even is, en gelijk aan 1 indien $\Delta x + \Delta y$ oneven is.

In bovenstaande figuur is $\Delta x + \Delta y = 0 + 1 = 1$ (het lege vakje is in horizontale richting niet verplaatst en in verticale richting één naar boven). Dus $p(\Delta x + \Delta y) = 1$.

Definitie 3. Gegeven de eindpositie en een permutatie σ . De **pariteit** P is dan gelijk aan $p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$ (modulo 2).

'Modulo 2' wil zeggen dat de uitkomst altijd 0 of 1 is: 0 indien de uitkomst even is en 1 indien de uitkomst oneven is. Dus $1 + 1 = 0$ (modulo 2).

Voor bovenstaande figuur geldt dat $P = 1 + 1 = 0$.

We geven nog een voorbeeld; zie onderstaande figuur. Links stelt de eindpositie voor.

1	2	4	1
3	4	3	2

Er zijn twee transposities ((42) en (41)), dus $p(\sigma) = 0$. Het lege vakje is in horizontale richting één naar links verplaatst en in verticale richting één naar boven, in totaal twee stappen. Dus $p(\Delta x + \Delta y) = 0$. Conclusie: $P = 0 + 0 = 0$.

Behoud van pariteit

Bij de twee zojuist gegeven voorbeelden gold $P = 0$. Als je de pariteit bij nog meer voorbeelden uitrekent, zul je merken dat de pariteit altijd even blijft na legale zetten, dat wil zeggen: zetten die daadwerkelijk kunnen in de schuifpuzzel. We gaan nu bewijzen dat er in schuifpuzzels behoud van pariteit is.

Na één zet is er altijd één transpositie gedaan (het lege vakje wordt met een ander vakje verwisseld). Dat betekent dat $p(\sigma) = 1$. Het lege vakje wordt altijd of één plaats naar

boven of beneden, of één plaats opzij geschoven. Bij één plaats opzij geldt $\Delta x = 1$ en $\Delta y = 0$, bij één plaats in verticale richting geldt $\Delta x = 0$ en $\Delta y = 1$. Dus er geldt altijd $p(\Delta x + \Delta y) = 1$. Conclusie: na één zet is $P = 1 + 1 = 0$.

Bij meerdere zetten geldt eveneens dat $P = 0$, omdat er dan meerdere keren na elkaar één zet wordt gedaan. De pariteit van de puzzel blijft dus altijd even.

Gevolgen van behoud van pariteit

We hebben nu voor de 2 bij 2 schuifpuzzel bewezen dat de pariteit altijd hetzelfde blijft, hoeveel zetten je ook doet. Dit heeft verschillende gevolgen. Bij schuifpuzzels die een andere vorm hebben, algemeen gezegd bij alle m bij n schuifpuzzels met $m \cdot n - 1$ beweegbare stukjes, geldt deze regel ook. Stel je immers voor dat je in een grotere schuifpuzzel één zet doet. Nog steeds geldt dat $p(\sigma) = 1$, omdat één zet nog steeds één transpositie is. Verder is ook $p(\Delta x + \Delta y) = 1$, omdat in alle tweedimensionale schuifpuzzels het lege vakje óf in de x -richting óf in de y -richting één vakje opschuift. Dus voor elke tweedimensionale schuifpuzzel is de pariteit na elk aantal zetten gelijk aan 0.

De 14-15-puzzel

De 14-15-puzzel is een 4 bij 4 schuifpuzzel, zie onderstaande figuur. Je moet uitgaande van de linker situatie door middel van schuiven de rechter situatie proberen te bereiken. Zal dat ooit lukken?

1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12
13	15	14		13	14	15	

Het rechter plaatje is de eindpositie. Er geldt $p(\sigma) = 1$, want er is één transpositie, namelijk (14 15). Verder is $p(\Delta x + \Delta y) = 0$, want het lege vakje is op dezelfde plaats gebleven. Dus $P = 1 + 0 = 1$. We hebben hier dus te maken met een oneven situatie van de puzzel. En uit het behoud van pariteit volgde juist dat oneven situaties niet met

legale zetten te bereiken zijn! De 14-15-puzzel is dus onoplosbaar.

En om terug te komen op de beginvraag van dit artikel: om dezelfde reden is de schuifpuzzel in de titel niet om te vormen tot 'SCHUIFPUZZELS & PARITEIT'.

Meerdimensionale schuifpuzzels

We hebben nu voor tweedimensionale schuifpuzzels van willekeurige grootte bewezen dat 'behoud van pariteit' geldt. Maar met een kleine aanpassing kun je de formule ook geschikt maken voor meerdimensionale puzzels. *Peter's black hole* bijvoorbeeld is een driedimensionale schuifpuzzel. Dat betekent dat het lege vakje in één zet óf in de x -richting, óf in de y -richting, óf in de z -richting kan bewegen, maar per zet maar in één van deze richtingen en met één stapje. Een zet is daarom ook nog steeds één transpositie, namelijk een verwisseling van twee kubusjes. Voor de pariteit van driedimensionale schuifpuzzels

geldt dan $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$; deze waarde is weer altijd 0 of 1. Net als in het tweedimensionale geval zijn alle even situaties te bereiken en de oneven niet.



Peter's black hole

De prijswinnende profielwerkstukken zijn beschikbaar gesteld door het EXO-steunpunt van de Radboud Universiteit Nijmegen. Dit steunpunt helpt docenten en scholieren bij het maken van profielwerkstukken voor de bètavakken. Kijk voor meer informatie op www.ru.nl/exo.

door Frank Roos

Eerste cijfer laatste cijfer

87 → 2097152 → 4

Kies een startgetal van (ten minste) twee cijfers, bijvoorbeeld 35. Verhef het eerste cijfer tot de macht van het laatste cijfer: $3^5 = 243$. Ga hiermee door totdat je een getal van één cijfer overhoudt: $2^3 = 8$.

Omdat de middelste cijfers in een getal van meer dan twee cijfers niet meedoen bij dit machtsspelletje, weten we eigenlijk alles al als de series van de startgetallen 10 tot en met 99 bekend zijn. Maar ook die hoeft je niet allemaal op te schrijven om bepaalde conclusies te trekken.

44 → 256 → 64 → 1296 → 1

29 → 512 → 25 → 32 → 9

Vragen

1. Waarom eindigen verreweg de meeste rijen op 1?
2. Welke eindcijfers komen het minste voor?
3. Er zijn ook bijzondere series die nooit eindigen, omdat ze in een lus terecht komen: je krijgt een herhaling van steeds hetzelfde getal. Welk getal is dat, en welke startgetallen komen allemaal in die lus terecht?
4. Er is één startgetal met de langste serie (zonder lus) van allemaal. Welk getal is dat?

Zijn er nog meer interessante wetenswaardigheden bij dit spelletje? Laat het ons weten via post@pythagoras.nu.

door Arnout Jaspers

De wiskunde van Terence Tao

8

Terence Tao is het schoolvoorbeeld van een **wonderkind**. Toen hij **twee** was begon hij met lezen en op z'n **zesde** schreef hij z'n eerste **computerprogrammaatje**. De eerste keer dat hij meedeed aan de internationale finale van de **Wiskunde Olympiade**, op z'n **elfde**, haalde hij een **bronzen medaille**, de jaren daarna **zilver** en **goud**. Vorig jaar won Tao naast de **Fields Medal** (de 'Nobelprijs voor wiskunde') diverse andere prijzen, zoals de **Mac Arthur Fellow Ship** en de **SASTRA Ramanujan-prijs**. In april was hij even in Leiden, om samen met een ander **supertalent**, **Ben Green**, de **Ostrowskiprijs** in ontvangst te nemen. Die kregen ze voor het bewijs dat er regelmatige rijen **priemgetallen** van elke willekeurige lengte bestaan. De prijs werd uitgereikt tijdens het jaarlijkse **Nederlands Mathematisch Congres**, waar Tao ook een lezing gaf.

Terence Tao is 31 jaar en professor aan UCLA, een universiteit in Los Angeles. Zoals hij in april op vrijdag de dertiende aantrad om een lezing te geven in een Leidse collegezaal – tenger, blauwe sweater, witte sportschoenen – zou je net zo makkelijk geloven dat hij een derdejaars student is. Meteen na de introductie begint hij zonder pardon vergelijkingen op het bord te kalken en binnensmonds tegen zijn krijtje te praten. Hij kan het zich veroorloven om een slecht spreker te zijn, want iedereen hangt toch wel aan z'n lippen.

Vandaag heeft hij het over iets heel anders dan priemgetallen, namelijk over hoe je uit heel weinig data toch nauwkeurig een beeld van bijvoorbeeld een patiënt in een medische scanner kunt reconstrueren. Dat is althans de praktische toepassing van het wiskundige probleem dat hij aanpakt.

Grappig is wel dat hij de werking van zo'n scan verkeerd aan de zaal uitlegt, die dat voor zoete koek slikt. Dat geeft ook niet, omdat een wiskundige altijd de abstractie van een praktisch probleem analyseert. Hoe dat precies zit met de schroefjes en de moertjes en of er elektronen danwel neutronen door de patiënt heen gaan, hoeft hij allemaal niet te weten.

Oud vermoeden

De Ostrowskiprijs die Tao en Ben Green de dag ervoor hebben opgehaald, wordt iedere twee jaar uitgereikt door een jury met vertegenwoordigers van de universiteiten van Basel, Jeruzalem, Waterloo en de

academies van wetenschappen van Dene-marken en Nederland. Tao en Green kregen de prijs omdat ze een oud vermoeden over priemgetallen eindelijk hebben bewezen. Priemgetallen zijn alleen deelbaar door 1 en door zichzelf, en liggen schijnbaar onregelmatig 'uitgestrooid' tussen alle overige getallen die wel echte delers hebben.

Maar mensen kunnen het nooit laten om in een ogenschijnlijke chaos toch naar patronen te zoeken, dus dat is in de priemgetallen ook door tallozen geprobeerd. Zoals je in de figuren op pagina 11 ziet, duiken er wel allerlei patronen in de verdeling van de priemgetallen op, maar die bestrijken altijd maar een klein gebied. Daarbuiten wordt het patroon dan weer onderbroken.

Het is duidelijk dat er rijtjes priemgetallen voorkomen met een vast verschil: 5, 11, 17, 23, 29 heeft bijvoorbeeld verschil 6 en is vijf getallen lang. Zo'n rij wordt ook wel een *rekenkundige rij* genoemd. Overigens mogen er wel priemgetallen overgeslagen worden; in het bovenstaande rijtje komen de priemgetallen 7, 13 en 19 niet voor.

De rij 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 is tien priemgetallen lang met verschil 210. Je kunt dat ook schrijven als $199 + 210k$ ($k = 0, \dots, 9$).

Al in 1770 vroeg de Franse wiskundige Lagrange zich af of er een grens zit aan de lengte van rekenkundige priemrijen. Er zijn namelijk wel oneindig veel priemgetallen, maar ze worden steeds schaarser naarmate ze groter worden.

De eerste echte stap vooruit werd pas

Priempatronen

Het speuren naar patronen in de verdeling van priemgetallen is al eeuwenoud. Als je een regelmatig patroon vindt dat zich over alle getallen uitstrekt, heb je in feite een formule gevonden om priemgetallen mee te maken. Maar die heeft nog niemand kunnen vinden en bestaat waarschijnlijk ook niet.

Zet de natuurlijke getallen in een twaalf hokjes brede strook, die naar beneden oneindig lang doorloopt. In figuur 1 zijn zeventien rijen getekend en de eerste vijftien natuurlijke getallen zijn ingevuld.

De hokjes waar een priemgetal staat, zijn ingekleurd. Elke verticale kleurstrook is dus een rij priemgetallen met verschil 12 (bijvoorbeeld 5, 17, 29, 41, 53). De groene

hokjes geven een rijtje priemgetallen met verschil 4. En de blauwe hokjes geven rijen priemgetallen met verschil 6.

Snap je waarom de kolommen waarin 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 en 12 staan, na de eerste rij wit blijven? Hoe verandert dat als je de natuurlijke getallen in een strook van tien of zeven hokjes breed neerzet?

Als je de natuurlijke getallen op een andere manier neerzet, duiken weer andere patronen op. In figuur 2 beginnen we in het midden met 1 en tellen dan met de klok mee in een spiraalvorm verder. De eerste twintig getallen zijn ingevuld. Je vindt op deze manier een diagonaal met priemgetallen (de rode hokjes). Helaas houdt die op bij de rand van het plaatje: het volgende getal op de diagonaal zou zijn $287 = 7 \times 41$.

10

gezet in 1939, toen de Nederlander Johannes van der Corput bewees dat er oneindig veel rekenkundige priemrijen van lengte drie bestaan. In 1975 bewees de Hongaar Szemerédi dat elke oneindig grote verzameling getallen die naar het oneindige toe niet al te snel uitdunt (de technische term is 'met positieve Banach-dichtheid') willekeurig lange rekenkundige rijen moet bevatten.

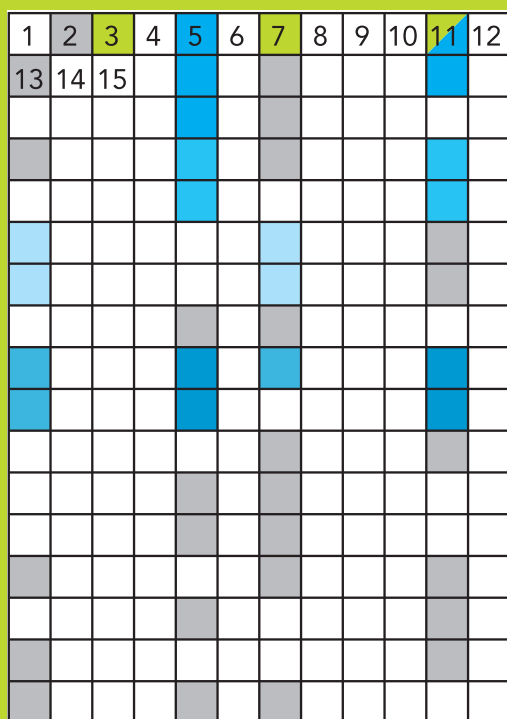
Daar kun je je intuïtief nog wel iets bij voorstellen: de verzameling van alle gehele getallen bevat uiteraard rekenkundige rijen met elk verschil en van elke lengte die je maar wilt. Als je uit die verzameling een klein gedeelte weghaalt, bijvoorbeeld alle priemgetallen, geldt dat nog steeds. Want alle even getallen behalve 2 zitten er nog in, alle drievouden behalve 3, alle viervouden, enzovoort. Uit deze verzameling kun je ook nog alle getallen weglaten die uit meer dan twee priemfactoren bestaan, en zo zijn er nog wel meer manieren van uitdunnen te bedenken.

Helaas werkt het andersom niet: als je juist alle samengestelde getallen weghaalt, zodat alleen de priemgetallen overblijven, heb je de gehele getallen zo drastisch uitgedund dat de stelling van Szemerédi niet meer toepasbaar is.

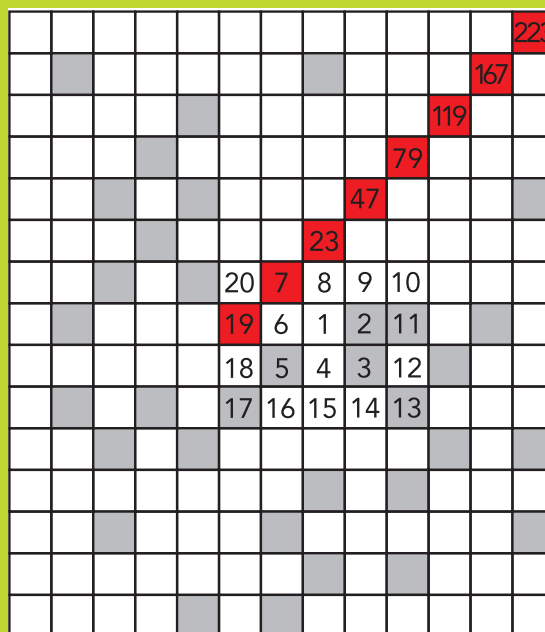
Tao en Green bedachten echter een slimme sluiproute. Ze bewezen eerst dat de stelling van Szemerédi nog wel geldt voor een verzameling die bestaat uit alle priemgetallen en een speciale categorie samengestelde getallen die relatief weinig priemfactoren hebben. Vervolgens bewezen ze dat de priemgetallen ten opzichte van die verzameling wel voldoende langzaam uitdunnen om de stelling van Szemerédi toe te kunnen passen. Dus bevatten de priemgetallen rekenkundige rijen van elke willekeurige lengte en is een eeuwenoud priemgetallenprobleem nu opgelost.

Een beetje jammer is wel dat hun redenering geen methode oplevert om lange rekenkundige rijen te maken. Het is een zogeheten *niet-constructief bewijs*. De langste rekenkundige rij priemgetallen die nu bekend is, $56211383760397 + 44546738095860k$, heeft maar 23 termen en is vooral dankzij veel brute computerkracht gevonden (niet door Tao en Green, overigens).

Het resultaat van Tao en Green zegt ook niets over het verschil (k) van een rij met een zekere lengte, of hoeveel priemgetallen die rij van begin tot eind overslaat. De langst bekende rekenkundige rij *opeenvolgende*



Figuur 1



Figuur 2

priemgetallen van dit moment werd gevonden in 1998 en bestaat uit tien termen:

$$\begin{aligned}
 &100.996.972.469.714.247.637. \\
 &786.655.587.969.840.329.509. \\
 &324.689.190.041.803.603.417. \\
 &758.904.341.703.348.882.159. \\
 &067.229.719 + 210k
 \end{aligned}$$

met $k = 0, 1, \dots, 9$.

Specialistisch

Het echte bewijs van Tao en Green omvat 48 pagina's specialistische wiskunde die veel te moeilijk is voor dit blad (en voor de schrijver van dit artikel). Dat gold eigenlijk ook wel voor de lezing die hij in Leiden hield, alleen specialisten zullen die helemaal hebben kunnen volgen.

In een interview vergeleek Tao zijn vak eens met bergbeklimmen: hoeveel kracht en uithoudingsvermogen je ook hebt, het belangrijkste is toch dat je een begaanbare route naar de top vindt. Juist daarom wordt Tao door zijn collega's mateloos bewonderd: vraagstukken die al tijden lang muurvast zitten, weet hij weer in beweging te krijgen door een nieuwe aanpak te verzinnen. Dat vergt een speciaal talent dat los staat van

supersnel ingewikkelde berekeningen kunnen doen, al is Tao ook daar heel goed in.

Na de lezing is er buiten in het prachtige lenteweer een borrel voor alle aanwezigen. Tao laat zich nog een half uurtje in beslag nemen door deze en gene en dwaalt dan, zo lijkt het, onwillekeurig af van de groep en slentert in z'n eentje weg. Blijkbaar vindt hij het welletjes geweest en gaat hij lopen naar het nabijgelegen hotel Holiday Inn. Vijftig meter verderop blijft hij een tijd lang vertederd staan kijken hoe een moedereend haar stoet jonkies veilig over de busbaan loodst.

Meer weten?

Tijdens Tao's bezoek aan Leiden interviewden de wiskundemeisjes Jeanine Daems en Ionica Smeets hem voor hun weblog, zie www.wiskundemeisjes.nl. Op Tao's website (www.math.ucla.edu/~tao) vind je van alles over wie hij is en wat hij doet – en niet doet. Hij wordt overstelpt met verzoeken om lezingen, baantjes, interviews en steunverklaringen en verontschuldigt zich bij voorbaat dat hij op al die verzoeken niet in zal gaan (en ja, er staat ook bij dat hij je niet met je huiswerk helpt). 'You start getting famous for being famous,' zei Tao ooit in *The New York Times*, 'the Paris Hilton effect.'

♦ Pythagoras Olympiade

door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer tref je twee opgaven aan, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

12

Hoe in te zenden

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas. Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 september 2007.

OPGAVE

144

Laat n een positief geheel getal zijn, waarvan de eerste vier cijfers 1137 zijn. Bewijs dat we de cijfers van n zo kunnen verwisselen dat het nieuwe getal deelbaar is door 7.

OPGAVE

145

Gegeven is een roosterbord van 9 bij 9 vakjes. Op ieder vakje zit een vlo. De vlooiën zijn zo afgericht dat ze alleen schuin naar voren of naar achteren springen en wel precies één hokje. Wanneer we in onze handen klappen, springen alle vlooiën één keer (naar een diagonaal aangrenzend hokje).

- Hoeveel hokjes zijn er nu minimaal leeg?
- Hoeveel hokjes zijn er nu maximaal leeg?

OPLOSSING

140

In een doos zitten witte en zwarte ballen. Als je blindelings één bal pakt, is de kans dat deze wit is, gelijk aan $\frac{2}{5}$. Als er 108 witte ballen worden toegevoegd aan de doos, wordt de kans op een witte bal $\frac{2}{3}$. Hoeveel zwarte ballen zitten er in de doos?

Oplossing. Laat t het totaal aantal ballen in de doos zijn en w het aantal witte ballen. Dan weten we dat $\frac{w}{t} = \frac{2}{5}$, dus $w = \frac{2}{5}t$ (1). Bovendien weten we dat na het toevoegen van 108 witte ballen geldt dat $\frac{w+108}{t+108} = \frac{2}{3}$, oftewel $3w + 3 \cdot 108 = 2t + 2 \cdot 108$ (2). Substitueren van (1) in (2) geeft $\frac{6}{5}t + 108 = 2t$. Hieruit volgt dat $\frac{4}{5}t = 108$, oftewel $t = 135$. Omdat in de beginsituatie $\frac{3}{5}$ van de doos gevuld is met zwarte ballen, moeten er $\frac{3}{5} \cdot 135 = 81$ zwarte ballen in de doos zitten.

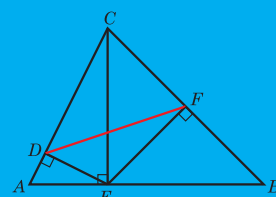
Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Jan Boogert** van het Driestar College te Gouda, **Richard Both** van het Corderius College te Amersfoort, **Joost Broens** van het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt te Amersfoort, **E.C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Barend Doornenbal** van de Gomarus SG te Gorinchem, **Nathalie Geerlings** van het Elzendaalcollege te Boxmeer, **Loes de Graaf** van het Sint-Norbertusinstituut te Duffel (België), **Jan Haenen** van het Porta Mosana College te Eijsden, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Meike Hopman** van het Stedelijk Gymnasium te Nijmegen, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Nathalie Geerlings**.

OPLOSSING

141

In een scherphoekige driehoek trekken we een hoogtelijn uit een van de hoekpunten. Vanuit het voetpunt van de hoogtelijn op de tegenoverliggende zijde laten we een loodlijn neer op elk van de andere twee zijden. De voetpunten van die twee loodlijnen verbinden we. Bewijs dat de lengte van dat verbindingslijnstuk onafhankelijk is van de keuze van het eerste hoekpunt.

Oplossing. Er zijn meerdere manieren om het gestelde te bewijzen. We geven hier een bewijs dat



gebruik maakt van de *sinusregel*. Definieer A, B, C, D, E en F zoals in de figuur. Omdat $\angle CDE + \angle CFE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, is vierhoek $CDEF$ een koordenvierhoek met CE als middellijn. De straal van de omgeschreven cirkel van $CDEF$ is dus de helft van de hoogtelijn uit C . De lengte van de koorde DF is gelijk aan de lengte van de middellijn maal de sinus van de omtrekshoek, dus $|DF| = |CE| \cdot \sin \angle C$. Omdat de oppervlakte O van de driehoek gelijk is aan $\frac{1}{2}|AB| \cdot |CE|$, is dus $|CE| = \frac{2O}{|AB|}$ en daarom geldt $|DF| = \frac{2O \cdot \sin \angle C}{|AB|}$. De sinusregel zegt dat

$$\frac{|BC|}{\sin \angle A} = \frac{|AC|}{\sin \angle B} = \frac{|AB|}{\sin \angle C}.$$

Hieruit volgt dat de lengte van het verbindingslijnstuk onafhankelijk is van de keuze van het eerste hoekpunt.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **E.C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo. De boekenbon gaat naar **Yvette Welling**.



ON

In *Pythagoras* hebben we het met enige regelmaat over reeksen met oneindig veel (positieve) termen. Zo'n reeks kan **convergeren** (de som van alle termen is eindig), of **divergeren** (de som van alle termen is oneindig). Kun je een divergente reeks convergent maken door de helft van alle termen te schrappen, of alleen elke tiende term te laten staan? Meestal helpt dat niets en blijft de som van de termen oneindig groot. Toch bestaat er een slimme snoeimethode die de oneindigheid wel in toom houdt.

In het vorige nummer zagen we in het artikel 'Geen piek te hoog' de *harmonische reeks* opduiken uit het plan van een bergbeklimmer om met zijn team in etappes naar de top van de Annapurna te gaan. Deze reeks,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n},$$

divergeert, dat wil zeggen: wordt willekeurig groot als je n maar groot genoeg neemt. H_n blijkt wel enorm traag op te lopen: hij passeert de waarde 10 bij $n = 23$, de waarde 20 bij $n = 486$, maar de waarde 30 pas bij ongeveer tien biljoen en dat wordt alleen maar erger voor nog grotere waarden van H_n . Leonhard Euler vond de volgende korte formule die voor grote waarden van n een heel nauwkeurige benadering van de harmonische reeks geeft:

$$H_n \approx \ln n + 0,5772.$$

Omdat H_n zo traag oploopt, zou je kunnen denken dat als je maar een klein deel van de termen weglaat, de harmonische reeks convergent wordt, dat wil zeggen:

nooit boven een zekere grens uitkomt. Dat blijkt niet zo te zijn: bijvoorbeeld de 'gehalveerde reeks' $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ (alle termen van H_n waarvan de noemer even is, worden geschrapt) divergeert ook, net als $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$, ondanks dat hier negentig procent van alle termen uit H_n geschrapt is.

Een nog sterker voorbeeld is de deelreeks van H_n waarin alleen priemgetallen voorkomen:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{p_n}$$

(p_n is het n -de priemgetal). Zelfs deze reeks blijkt te divergeren, zoals – wederom – Euler voor het eerst aantoonde. En dat, terwijl het percentage geschrapte termen in deze reeks steeds dichterbij de honderd procent nadert naarmate n groter wordt! De volgende benadering geldt voor grote waarden van n :

$$P_n \approx \ln(\ln n) + 0,2615.$$

Divergentie is dus een stuk hardnekkiger dan je op het eerste gezicht misschien zou denken.

Cijfers snoeien

Welk schrapmechanisme kan de harmonische reeks dan wel beteugelen? Als we kunnen aantonen dat de overgebleven deelreeks begrensd is (dat wil zeggen: nooit boven een bepaald getal komt), zijn we waar we wezen willen. Iemand is ooit op het briljante idee gekomen om alle noemers te schrappen waarin een bepaald cijfer (bijvoorbeeld de 3) voorkomt, dus:



EINDIGHEID

$$H_{\min 3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots \\ + \frac{1}{29} + \frac{1}{40} + \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{44} + \dots \\ + \frac{1}{298} + \frac{1}{299} + \frac{1}{400} + \frac{1}{401} + \dots$$

Voor het eerste cijfer van een noemer n zijn dus 8 van de 9 mogelijkheden gebruikt (omdat de nul als eerste cijfer niet meedoet), voor de volgende cijfers van n zijn dat er 9 van de 10. Aanvankelijk lijkt dat weinig zoden aan de dijk te zetten, want voor noemers kleiner dan 10 (de eencijferige noemers) wordt maar één term van de negen geschrappt (ongeveer 11%) en van de negentig tweecijferige noemers achttien (20%).

Maar bij heel grote waarden van n is er een merkbaar verschil! En grote waarden maken op den duur de dienst uit, want daar zijn er veel meer van, om het zo maar even uit te drukken. Om een voorbeeld te geven: de kans dat een willekeurig 20-cijferig getal geen enkele 3 bevat, is volgens de complementregel uit de kansrekening (bedenk dat het eerste cijfer geen nul kan zijn):

$$\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{19} \approx 0,1.$$

De kans dat een willekeurig 100-cijferig getal geen enkele 3 bevat, is

$$\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{99} \approx 0,00002.$$

Het sommeren van reeksen zoals $H_{\min 3}$ is typisch een klus voor een pc of grafische rekenmachine. Maar hoe veel termen je de computer ook laat optellen, het bewijst nog niet dat de gehele reeks (oneindig veel termen) begrensd blijft. We kunnen zo'n reeks echter wel afschatten.

Bekijk de som van de 8 keer 9 tweecijfe-

rige getallen uit $H_{\min 3}$:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{99}.$$

Het is duidelijk dat alle termen kleiner dan $\frac{1}{10}$ zijn, zodat deze som kleiner is dan $8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}$.

Voor de gehele reeks $H_{\min 3}$ geldt:

$$H_{\min 3} < 8 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots \\ = 8 \cdot \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{9}{10}} = 72.$$

Bij de laatste stap is de formule voor de som van een oneindige meetkundige rij gebruikt. Er is dus een bovengrens (72), waarmee bewezen is dat de harmonische reeks zonder drieën convergeert.

Limiet

De waarde waarnaar deze reeks convergeert, de limiet, is slechts met zware computers en geavanceerde software enigszins nauwkeurig te benaderen, omdat zulke reeksen extreem traag convergeren. In het boek *Gamma, Exploring Euler's Constant* van R. Baillie vinden we dat de harmonische reeks zonder drieën convergeert naar 20,56987... Je kunt natuurlijk ook een ander cijfer dan 3 weglaten uit de harmonische reeks. Je vindt dan telkens een andere limiet:

$$H_{\min 0} \approx 23,10$$

$$H_{\min 1} \approx 16,18$$

$$H_{\min 2} \approx 19,26$$

$$H_{\min 3} \approx 20,57$$

$$H_{\min 4} \approx 21,33$$

$$H_{\min 5} \approx 21,83$$

$$H_{\min 6} \approx 22,21$$

$$H_{\min 7} \approx 22,49$$

$$H_{\min 8} \approx 22,73$$

$$H_{\min 9} \approx 22,92$$

Kun je beredeneren waarom het schrappen van alle nullen vergeleken met het schrappen van alle enen zoveel verschil maakt?





Stel je voor dat je een wat vreemd geklede man tegenkomt op straat. Opeens zegt hij tegen je: 'Ik lieg nu!' Geloof je hem? Op het eerste gezicht denk je misschien: 'Ja, waarom niet?', maar het is verstandig even goed na te denken.

Stel dat de man de waarheid spreekt, dan klopt zijn bewering, dus liegt hij! Maar als de man niet de waarheid spreekt, dan liegt hij inderdaad, en dan is zijn bewering dus toch waar. Dus als hij liegt, spreekt hij de waarheid, en als hij de waarheid spreekt, liegt hij.

Deze bizarre situatie staat bekend als de *leugenaarsparadox*. Volgens het woordenboek is een paradox een 'schijnbare tegenspraak'. De strijdigheid wordt meestal veroorzaakt doordat de situatie of bewering in strijd is met je verwachting, je intuïtie. In dat

geval lost de paradox vanzelf op als je beter snapt hoe het zit. Een bekend voorbeeld uit de wiskunde is de *wachttijdparadox*, waarover in *Pythagoras* 43-1 (september 2003) een artikel verscheen ('De wiskunde van het wachten').

In de wiskunde verstaan we onder een paradox echter niet altijd een schijnbare tegenspraak. De leugenaarsparadox is een voorbeeld van een echte tegenspraak: de bewering is tegelijkertijd waar en onwaar. Dat is iets wat we in de wiskunde altijd willen vermijden (en in het echte leven trouwens ook, want een bewering die zowel waar als onwaar is, is natuurlijk erg verwarrend).

Zelfverwijzing

Laten we nog eens kijken naar de man die



In Sevilla is maar één kapper. Die kapper knipt iedereen die niet zichzelf knipt. Knipt de kapper zichzelf? Deze *paradox van Russell* lijkt misschien een woordspelletje, maar hij deed de wiskunde op z'n grondvesten wankelen. Dingen naar zichzelf laten verwijzen is vragen om moeilijkheden, maar kan ook prachtige puzzels opleveren. Zoals hoe je je kind uit de kaken van een arglistige krokodil redt of de juiste weg vindt in een land vol leugenaars.

in zijn bewering beweert dat hij liegt. Waar komt de tegenspraak hier precies vandaan? Mensen zeggen heel vaak dat ze liegen of gelogen hebben, en meestal is dat gewoon waar. Een kind dat een koekje heeft gestolen en dat ontkent krijgt vanzelf de vraag: 'Sta je nu te liegen?' Toch levert dit geen probleem op, zelfs niet als het antwoord 'Ja!' is, omdat 'nu' hier slaat op de *vorige* uitspraak.

Als je van een bewering beweert dat hij niet waar is, is er dus niets aan de hand. Zelfs als de bewering wél waar is, is er geen vuiltje aan de lucht: dat betekent gewoon dat je het mis hebt, dus dan heb jij een onware bewering gedaan. Geen paradox te kennen!

Waarin zit nu het verschil met de leugenaarsparadox? Het belangrijke verschil is dat

de man die beweert dat hij nu liegt eigenlijk zegt: 'Deze bewering is niet waar.' Hij beweert met zijn bewering iets dat over die bewering zélf gaat. Daar precies komt het probleem vandaan. Je kunt over allerlei beweringen ongestraft uitspraken doen: of de zon schijnt, of je buurman een leugenaar is, of je vriendje gelijk heeft, maar zodra je over de bewering waarmee je iets zegt een uitspraak doet, begeef je je op glad ijs.

Er zijn veel meer voorbeelden te bedenken waarbij deze *zelfverwijzing* een rol speelt. Waarschijnlijk heb jij ook wel eens op een muur zien staan: 'Lees dit niet!' Het is een gebod om iets niet te doen wat je al gedaan moet hebben om het gebod überhaupt te kennen. Of je kunt je een website voorstellen waarop alleen maar staat: 'Deze pagi-

Deze zin bevat vijf woorden.

na is expres leeg gelaten.' Niets houdt je tegen om zo iets op een muur te schrijven of zo'n website te bouwen. Deze zinnen zijn grammaticaal correct en er is op het eerste gezicht niets te zien dat zo'n zin anders maakt dan elke andere zin die je op een muur kan schrijven. Maar er ontstaat wel iets raars.

De paradox van Russell

Als je in de wiskunde een tegenspraak tegenkomt heb je meestal een fout gemaakt, of je hebt iets aangenomen dat niet waar is, maar heel soms zit er een dieper probleem in de wiskunde. In dat geval moet er in de wiskunde zelf iets veranderd worden om deze rare situatie te vermijden.

Dat was het geval met de *paradox van Russell*.

Deze paradox heeft ook met zelfverwijzing te maken en hij lijkt erg op een

Vierentwintigletterwoord

iets toegankelijker paradox, die van de barbier (kapper) van Sevilla. De barbier van Sevilla woont in Sevilla en scheert iedere man in Sevilla die zichzelf niet scheert. Scheert de barbier van Sevilla zichzelf? Deze vraag leidt tot precies zo'n paradox als 'Deze bewering is niet waar'. Maar in dit geval zijn er verschillende oplossingen te verzinnen. De barbier van Sevilla kan een vrouw zijn! Of misschien bestaat de barbier van Sevilla gewoon niet.

Een echt probleem ontstond in de eerste jaren van de twintigste eeuw in de wiskunde, toen de Engelse wiskundige en filosoof Bertrand Russell (1872-1970) een moeilijke vraag stelde aan zijn collega Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925). De vraag had betrekking op verzamelingenleer, en in het bijzonder op de vraag of een bepaalde verzameling zichzelf bevat of niet.

Je kunt veel verzamelingen verzinnen, bijvoorbeeld de verzameling van dobbelstenen – die verzameling noemen we X – of de verzameling Y van alles dat geen dobbelsteen is. De verzameling van dobbelstenen

bevat alleen dobbelstenen en geen verzamelingen, dus verzameling X bevat zichzelf niet. Verzameling Y bevat alles dat geen dobbelsteen

is. Verzameling Y zelf is duidelijk geen dobbelsteen, dus dat betekent dat verzameling Y zichzelf wel bevat. Hier is nog geen probleem te zien.

Maar bekijk nu de verzameling V , die bestaat uit *alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten*. Bevat die verzameling zichzelf? Als

V zichzelf niet bevat, dan zit V inderdaad in de verzameling van verzamelingen die zichzelf niet bevatten, dus dan zit V in V . Dan

bevat V zichzelf wel! Maar andersom, als V zichzelf wel bevat, dan is V een element van de verzameling verzamelingen die zichzelf niet bevatten, dus dan is V zo'n verzameling die zichzelf niet bevat.

Op dat moment ontstond een groot probleem in de verzamelingenleer. Hier had Russell een verzameling die volstrekt duidelijk en legaal gedefinieerd was, en toch ontstond er een echte tegenspraak. Er moest een oplossing verzonden worden.

In het geval van de barbier van Sevilla konden we bijvoorbeeld besluiten dat de barbier van Sevilla helemaal niet bestaat. Russell verzond eenzelfde soort oplossing: hij veranderde de verzamelingenleer zó dat de verzameling V niet meer kan bestaan, of in ieder geval geen legale verzameling meer is. Hij zocht strengere eisen waaraan je blijkbaar moet voldoen als je een verzameling beschrijft. Hij verdeelde de verzamelingen in *niveaus*, en een verzameling van een be-

De bewering op de andere kant van deze kaart is waar.

De bewering op de andere kant van deze kaart is onwaar.

De kaartparadox van de Engelse wiskundige Philip E.B. Jourdain (1879-1919)

Deze zin eindigt op een .

Deze zin bevat letters.
Deze zin bestaat uit letters.

Slechts een van beide zinnen kun je met een uitgeschreven getal kloppend maken. Welke?

paald niveau mag alleen verzamelingen van een lager niveau bevatten. Daardoor kan

Homogene en heterogene woorden

Een *homogeen* woord is een woord dat naar zichzelf verwijst. Een *heterogeen* woord is een woord dat niet naar zichzelf verwijst. Het woord 'kort' is een kort woord, en dus homogeen. Het woord 'lang' is geen lang woord, en dus heterogeen. 'Nederlands' is een Nederlands woord, en dus homogeen. Maar 'Engels' is geen Engels woord, en dus heterogeen. Is 'heterogeen' een heterogeen woord?

een verzameling nooit in zichzelf zitten.

Hier zien we dus dat een paradox die in de wiskunde opeens tevoorschijn kwam, ervoor zorgde dat basisprincipes van de wiskunde aangepast moesten worden. Ook tegen Russells nieuwe theorie kwamen bezwaren, want men vond het te veel een onnatuurlijke oplossing voor een toevallig opgedoken probleem. De verzamelingenleer is nu op iets andere principes gebaseerd, waarin Russells paradox ook niet meer opduikt.

Raadsels

Paradoxen en zelfverwijzing zijn echter niet alleen maar lastig. Er zijn situaties te bedenken waarin je zelfverwijzing of paradoxen handig kunt gebruiken. Misschien kun je zelf een oplossing bedenken voor de volgende situaties.

Een krokodil van eer

Een hongerige krokodil zwemt rustig in een rivier. Opeens komt er een lekker hapje langskruipen: een peuter! De krokodil vangt de peuter en wil hem lekker op gaan eten, maar dan komt zijn moeder aanrennen: 'Nee! Eet mijn kind niet op!' De krokodil heeft een klein beetje medelijden met de moeder. Daarom zegt hij: 'Nou goed, ik heb een voorstel. Ik ben een krokodil van eer en

ik houd me altijd aan mijn woord. Als u raadt wat ik met uw kind ga doen, dan krijgt u hem levend terug. Als u het fout heeft, dan eet ik hem op!' Kan de moeder haar kind nog redden? Wat is het slimste dat ze kan raden?

De arme, slimme student

Deze vraag stamt uit het oude Griekenland. De beroemde filosoof Protagoras belooft een arme student dat hij hem zal lesgeven in het recht. De student hoeft pas te betalen op het moment dat hij voor het eerst een rechtszaak wint. De student besluit na zijn studie echter dat hij eigenlijk liever helemaal geen advocaat wil worden! Protagoras wordt natuurlijk erg boos, want zo zal hij nooit geld zien. Wat kan hij het beste doen?

Zelfverwijzende getalrijen

Ook een rij getallen kan over zichzelf praten. Neem als voorbeeld de rij
3, 4, 4, 5.

Dan is de *inventaris* van die rij:
1, 3, 2, 4, 1, 5.

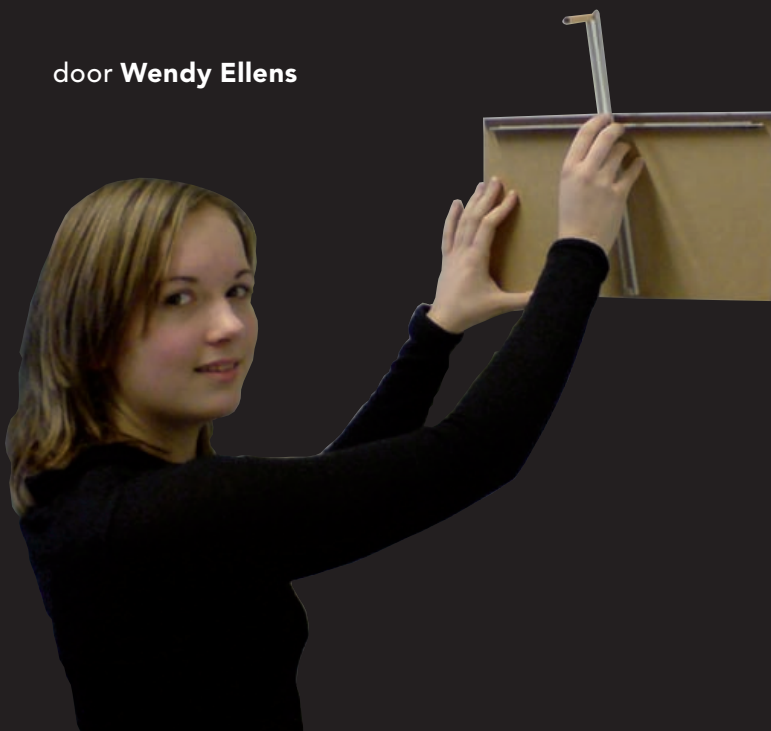
In woorden: deze rij bevat 1 getal 3, 2 getallen 4, 1 getal 5.

Ook van deze rij kun je de inventaris opschrijven:

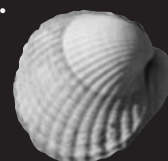
2, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5
(deze rij bevat 2 getallen 1, 1 getal 2, 1 getal 3, 1 getal 4, 1 getal 5).

De inventaris hiervan is
5, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5

Je voelt de vraag misschien al aankomen: kun je zelfverwijzende getalrijen vinden, dus die gelijk zijn aan hun eigen inventaris? We verklappen alvast dat het inderdaad kan, maar dat er geen zelfverwijzende getalrijen van lengte vier en zes bestaan. Wat is de kortst mogelijke zelfverwijzende rij? Is er een langste? Of kun je een recept voor een zelfverwijzende getalrij vinden, waarin alle getallen 1, ..., n ten minste één keer voorkomen? In het volgende nummer van *Pythagoras* komen we hier op terug.



Wendy Ellens is tweedejaars wiskundestudent aan de Universiteit Leiden en studentambassadeur bij de studievoorziening aan middelbare scholieren. In dit artikel legt ze uit waarom je een willekeurige hoek niet met passer en liniaal in drieën kunt delen. Maar met een eenvoudig hulpstuk is het wél mogelijk, dat is al in de tweede eeuw voor Christus door de Griek Nicomedes aangetoond.



♦ De onmogelijke driedeling

Klassieke problemen

De Oude Grieken hebben vanaf circa 500 voor Christus de basis van de meetkunde en veel andere wetenschappen gelegd. In de meetkunde was een belangrijk doel om allerlei geometrische figuren te construeren met alleen een passer en een blanco liniaal, dus zonder maatstreepjes erop. Daarmee konden zij evenwijdige en loodrechte lijnen tekenen, een hoek of een lijnstuk in tweeën delen, driehoeken en rechthoeken met zijden van een gegeven lengte construeren, en nog veel meer. Maar ze stuitten daarbij op drie problemen die klassiek geworden zijn:

1. de *kwadratuur van een cirkel* (gegeven een cirkel, construeer een vierkant met dezelfde oppervlakte);
2. de *verdubbeling van een kubus* (construeer een kubus met een twee maal zo groot volume als een gegeven kubus);
3. de *driedeling (trisectie) van een hoek* (deel een willekeurig gegeven hoek op in drie gelijke hoeken).

Het lukte de Grieken, en talloze wiskundigen na hen, niet om deze drie problemen op te lossen met passer en liniaal. Zij vermoedden daarom dat het niet mogelijk was, maar het

bleek moeilijk dit vermoeden te bewijzen. Om te bewijzen dat een figuur wél met passer en liniaal te construeren is, is het voldoende om een algoritme (stappenplan) te geven dat in een eindig aantal stappen de gevraagde figuur construeert. Maar hoe bewijs je nu dat een figuur níét met passer en liniaal te tekenen is?

Pas in de negentiende eeuw is dit bewezen voor deze drie klassieke problemen. Dat lukte door met coördinaten te gaan werken, iets wat de Oude Grieken volkomen onbekend was. Zo kon elk van de drie problemen 'vertaald' worden in een algebraïsche vergelijking. Het probleem is oplosbaar met passer en liniaal als de oplossing van de gevonden vergelijking correspondeert met het snijpunt van twee lijnen, twee cirkels of een lijn en een cirkel.

De Duitse wiskundige Ferdinand von Lindemann (1852-1939) bewees zo dat de kwadratuur van een cirkel onmogelijk is. Dat het niet mogelijk is om een kubus te verdubbelen, bewees de Fransman Pierre Wantzel (1814-1848).

De driedeling van een hoek

Wantzel bewees ook dat de driedeling van een hoek met passer en liniaal niet mogelijk

is, en dat laten we hier meer in detail zien. We hebben het steeds over een 'willekeurige' hoek, want er zijn wel degelijk hoeken die wél met passer en liniaal in drieën te delen zijn. Een gestrekte hoek (180°) bijvoorbeeld kunnen we in drieën delen door een gelijkzijdige driehoek op een van de benen te construeren.

Het vinden van de vergelijking die bij de trisectie van de hoek hoort, is niet heel voor de hand liggend. Stel dat de gegeven hoek α is. Dan zoeken we de hoek γ , zodat geldt: $3\gamma = \alpha$. Met behulp van goniometrische formules kunnen we $\sin \alpha$ in termen van $\sin \gamma$ schrijven:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \\ \sin 3\gamma &= \\ \sin 2\gamma \cos \gamma + \sin \gamma \cos 2\gamma &= \\ 2 \sin \gamma \cos \gamma \cos \gamma + \sin \gamma (1 - 2 \sin^2 \gamma) &= \\ 2 \sin \gamma (1 - \sin^2 \gamma) + \sin \gamma - 2 \sin^3 \gamma &= \\ 2 \sin \gamma - 2 \sin^3 \gamma + \sin \gamma - 2 \sin^3 \gamma &= \\ 3 \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma\end{aligned}$$

Als we nu x voor $\sin \gamma$ invullen en c voor $\sin \alpha$, dan krijgen we de volgende vergelijking: $c = 3x - 4x^3$. De op te lossen vergelijking is dus

$$4x^3 - 3x + c = 0.$$

Deze vergelijking hoort niet voor alle c bij het snijpunt van lijnen en/of cirkels. We kunnen dit inzien door te beseffen dat het snijpunt van twee lijnen de oplossing van een lineaire vergelijking is en dat het snijpunt van twee cirkels – of een lijn en een cirkel – de oplossing is van een kwadratische vergelijking. Het polynoom $4x^3 - 3x + c = 0$ heeft graad 3 en is niet voor alle c te schrijven als het product van polynomen met een lagere graad. Deze vergelijking correspondeert dus niet met het snijpunt van lijnen en/of cirkels. Daarom is $\sin \gamma$ niet altijd te construeren uit $\sin \alpha$. Hieruit volgt dat het ook niet mogelijk is om hoek γ te tekenen met passer en liniaal als hoek α bekend is.

In kader 1 (zie pagina 22) kun je hiervan een *bewijs door contrapositie* (een bewijsprincipe dat is gebaseerd op het feit dat 'als

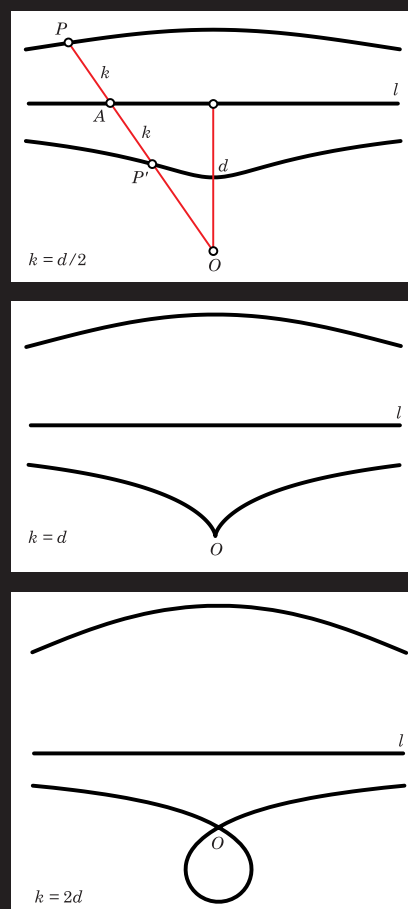
A dan B' gelijkwaardig is met 'als niet- B dan niet- A ') lezen.

De conchoïde van Nicomedes

Toch hebben de Oude Grieken een manier bedacht om met een ander hulpstuk dan passer en liniaal een willekeurige hoek in drieën te delen. Al in de tweede eeuw voor Christus bedacht Nicomedes deze methode. De kromme die hij voor deze methode gebruikte, was een *conchoïde*. De naam conchoïde komt van het Griekse woord $\kappa\omicron\nu\chi\eta$ wat schelp betekent – waarschijnlijk vonden de Grieken de conchoïde lijken op de doorsnedes van schelpen.

Wat is een conchoïde nu eigenlijk?

Definitie. Het punt O , de lijn l en de afstand k zijn gegeven. Laat A een willekeurig punt op l zijn, dan zijn P en P' de twee punten die op de lijn door O en A liggen, met afstand k tot A . De conchoïde is nu de verzameling van alle punten P en P' .



Figuur 1 De conchoïde van Nicomedes voor verschillende verhoudingen van d en k

De vorm van de conchoïde hangt af van de afstand d van O tot l in verhouding tot de afstand k : als k kleiner dan d is, krijg je een kromme als in figuur 1a. Figuur 1b hoort bij $k = d$ en een kromme als in figuur 1c krijg je als k groter dan d is.

Voor de driedeling van een hoek gebruiken we de bovenste helft van een conchoïde met $k > d$. Het is niet mogelijk om de conchoïde op de bovenstaande manier punt voor punt te construeren; je zou nooit

alle punten kunnen tekenen. We hebben dus een apparaatje nodig dat de bovenste helft van de kromme in één keer tekent, een *conchoïdograaf*. Ik heb zelf zo'n instrument gemaakt, zie figuur 2.

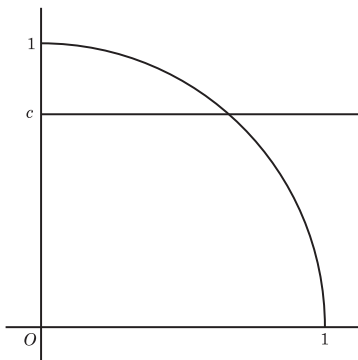
Driedeling met behulp van de conchoïdograaf

Nu zijn we eindelijk op het punt gekomen dat we een willekeurige hoek in drieën kunnen delen op Nicomedes' manier. In kader 2

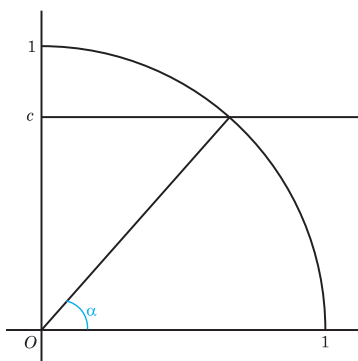
1

Stelling. Als γ uit α te construeren is, is $x = \sin \gamma$ uit $c = \sin \alpha$ te construeren.

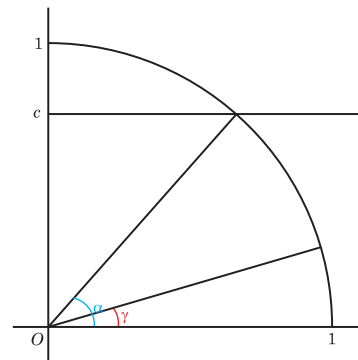
Bewijs.



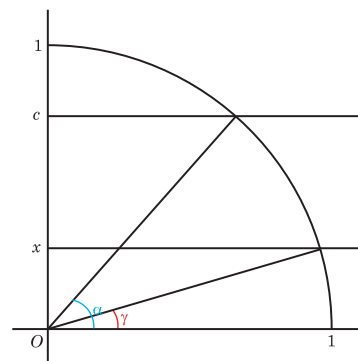
Laat $c = \sin \alpha$ gegeven zijn. We tekenen nu een assenstelsel met een lijn evenwijdig met de x -as op hoogte c . Ook construeren we de eenheidscirkel met als middelpunt de oorsprong.



We tekenen de lijn door de oorsprong die de cirkel snijdt in het snijpunt van de horizontale lijn met de cirkel. Hoek α is de hoek die deze lijn met de x -as maakt.



Stel nu dat we hoek γ kunnen construeren als we hoek α weten.



In dit geval kunnen we $x = \sin \gamma$ construeren door een lijn evenwijdig met de x -as (een van de benen van hoek γ) te tekenen die door het snijpunt van het andere been met de cirkel gaat.



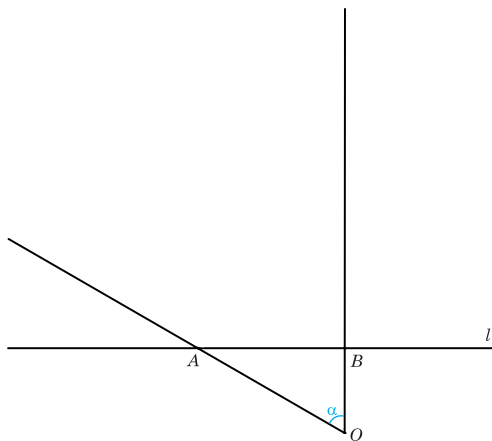
Figuur 2 Een conchoïdograaf

lees je de constructiemethode om een gegeven hoek α in twee hoeken, één van $\alpha/3$ en één van $2\alpha/3$, te delen. Het bewijs dat de gevonden hoek inderdaad eenderde van de gegeven hoek is, vind je in kader 3.

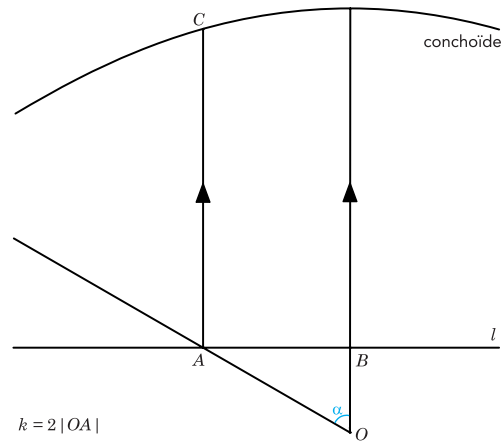
Om ten slotte de gegeven hoek α in drie gelijke hoeken te delen, hoeft alleen nog maar de bissectrice van de hoek ter grootte $2\alpha/3$ geconstrueerd te worden en dát is eenvoudig te doen met passer en liniaal.

2

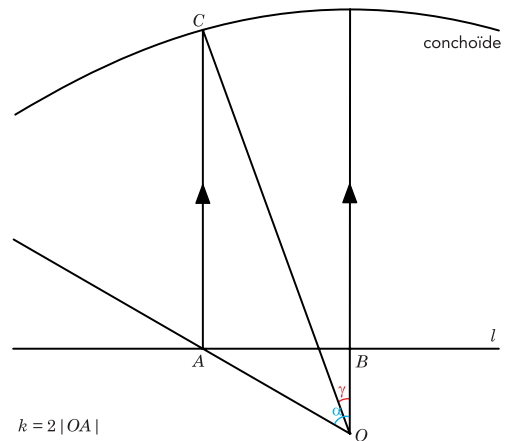
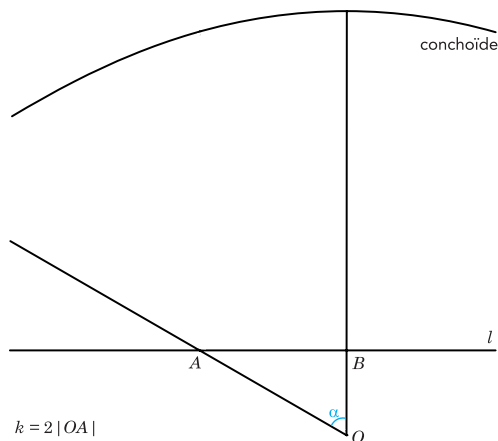
Constructie van de driedeling van een hoek met een conchoïdograaf. Laat α een willekeurig gegeven hoek zijn. We construeren hoek γ met $\gamma = \alpha/3$ in vier stappen.



We nemen een punt A op een van de benen en tekenen de lijn l door A loodrecht op het andere been. Het snijpunt met dit been noemen we B en het hoekpunt O .



De lijn parallel aan OB door A snijdt de conchoïde in C .



Teken de conchoïde op l en O met $k = 2|OA|$.

Hoek BOC is de gezochte hoek γ .

Vals spelen?

Nicomedes heeft met behulp van de conchoïde het derde klassieke probleem opgelost. Is dit nu vals spelen? Ik vind van niet. Nicomedes heeft slechts een extra instrument, de conchoïdograaf, toegevoegd om een figuur te construeren die met de bestaande instrumenten, passer en liniaal, niet te construeren is.

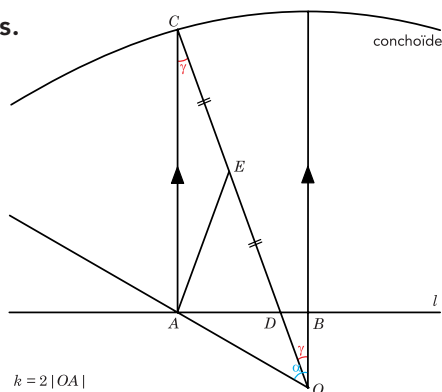
In het dagelijks leven zoeken we voortdu-
rend naar nieuwe instrumenten om proble-

men op te lossen die tot dan toe niet op te lossen waren. En ook in de wiskunde wordt af en toe een nieuw axioma ingevoerd als de oude niet meer voldoen. De Oud-Griekse wiskundigen wisten niet alleen een willekeurige hoek in drieën te delen, ze hebben ook middelen gevonden om de twee andere klassieke problemen op te lossen. Toch knap, vooral als je bedenkt dat de wiskundigen in die tijd niet beschikten over de boeken, computers en opleidingen van nu.

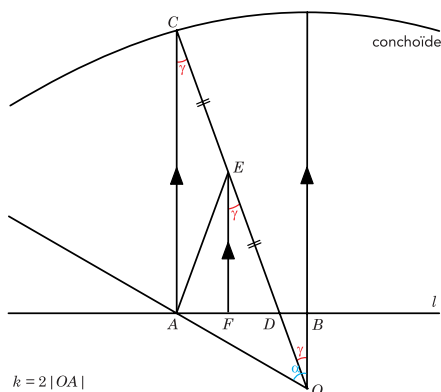
3

Stelling. De met behulp van de conchoïde van Nicomedes geconstrueerde hoek BOC is een derde van de gegeven hoek AOB .

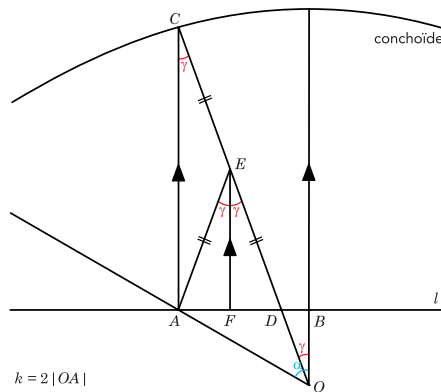
Bewijs.



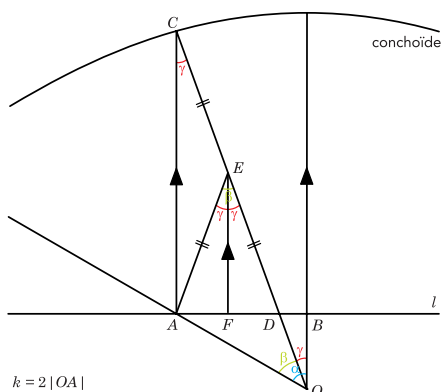
Laat D het snijpunt van OC met AB , en E het midden van CD zijn. Dan geldt: $|CE| = |DE| = |OA|$. Omdat AC en OB evenwijdig zijn, geldt $\angle ACD = \angle BOD = \gamma$.



De lijn loodrecht op l door E snijdt l in F . Nu geldt $\triangle DEF \sim \triangle DCA$, want de driehoeken hebben twee even grote hoeken, dus $\angle DEF = \angle DCA = \gamma$. Uit de gelijkvormigheid volgt ook dat $|AD| = 2|FD|$ (want er geldt $|CD| = 2|DE|$) en dus geldt $|AF| = |DF|$.



Er geldt: $\triangle AFE \cong \triangle DFE$ (want $\angle DFE = \angle AFE$ en de aanliggende zijden zijn even lang), dus geldt ook: $|AE| = |DE| = |OA|$ en $\angle AEF = \angle DEF = \gamma$.



Als we schrijven $\angle AOE = \beta$, dan geldt:
 $\beta = \angle AOE = \angle AEO = 2\gamma$. Voor α geldt nu:
 $\alpha = \beta + \gamma = 3\gamma$, waarmee aangetoond is dat
 $\gamma = \alpha/3$.

door Alex van den Brandhof

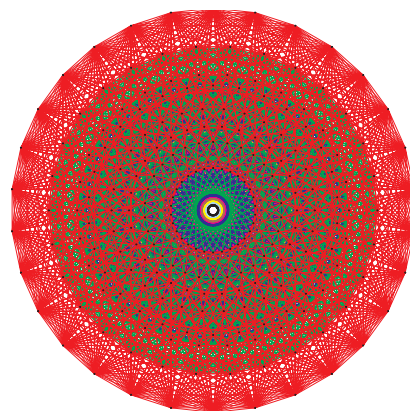
Superberekening aan E8

Wiskundigen hebben het gecompliceerde 248-dimensionale object genaamd E8 in kaart gebracht. Dat gebeurde in het kader van het grootschalige project 'Atlas of Lie Groups and Representations', waarbij gezocht wordt naar representaties van zogeheten *Liegroepen*, abstracte wiskundige objecten die voor het eerst werden bestudeerd door de Noorse wiskundige Sophus Lie (1842-1899).

Het kostte de wiskundigen enkele jaren om de achterliggende wiskunde in hanteerbare

software te verwerken en een supercomputer moest 77 uur rekenen om de belangrijke data over de structuur van E8 aan de wereld te openbaren.

Voor de oplossing was een geheugen van 60 gigabyte nodig. Ter vergelijking: met dezelfde hoeveelheid gigabytes kun je MP3-bestanden voor 45 dagen onafgebroken muziek opslaan. De E8-berekening resulteerde in een matrix van 453.060 bij 453.060, samen de zogeheten 'karaktertabel van E8'. De ruim 205 miljard waarden in de ma-

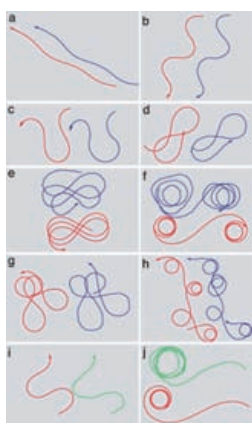


Een tweedimensionale weergave van het achtdimensionale wortelstelsel voor E8 bestaande uit 240 vectoren

trix zijn geen recht-toe-rechtaan getallen, maar veeltermen met soms grote coëfficiënten. Op www.kennislink.nl kun je een artikel over de E8 lezen.

Het wiskundige spoor van een bacterie

Wiskundigen hebben eenvoudige formules gevonden waarmee de bewegingen van *listeria monocytogenes*, een ziekteverwekkende bacterie, beschreven kunnen worden. Sinusvormen, cirkels, slaloms, figuren in de vorm van het cijfer 8: alle sporen kunnen in één paar vergelijkin-



gen met twee variabelen worden gegoten. In het plaatje zijn de rode sporen van het wiskundige model, de blauwe en groene sporen zijn de werkelijke sporen.

Zegels om te verzamelen



Op 15 april 1707 werd Leonhard Euler, een van 's werelds grootste wiskundigen ooit, in Basel (Zwitserland) geboren. Zijn driehonderdste geboortedag gaat in de wiskundewereld niet onopgemerkt voorbij. Zo heeft het Eulerarchief, een online verzameling van de teksten van Leonhard Euler, een stevige update gekregen, en wordt er deze zomer een veertiendaagse 'Eulertoer' georganiseerd, waarbij zijn geboorteplaats en de twee steden waar hij lange tijd werkzaam is

geweest, Berlijn en St. Petersburg, worden bezocht. Mocht je deze zomer op vakantie gaan naar Zwitserland, verstuur je ansichtkaarten dan met een Eulerpostzegel, die Zwitserland heeft uitgegeven.

Als je gewoon in Nederland blijft, gebruik voor je kaarten dan de speciale Zomerpostzegels. Deze zegels, met het thema 'Strandpret van toen', werden ontworpen door onder andere Pythagorasvormgever Sonja van Hamel.

Problemen

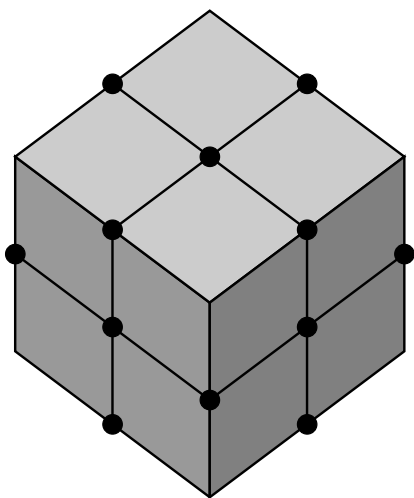
door Dion Gijswijt

Verdeling

Teken een vierkant en verdeel dat in elf kleinere vierkanten. De vierkanten hoeven niet allemaal verschillend van grootte te zijn, en hoeven ook niet allemaal dezelfde grootte te hebben. Voor welke getallen n kun je een vierkant verdelen in n kleinere vierkanten?

Rondwandeling

Een mier loopt over het oppervlak van een kubus met zijdelengte 2. Hij wil een rondwandeling maken langs 18 gemarkeerde punten: de zes middens van de zijvlakken en de twaalf middens van de ribben. Wat is de lengte van een kortste rondwandeling?

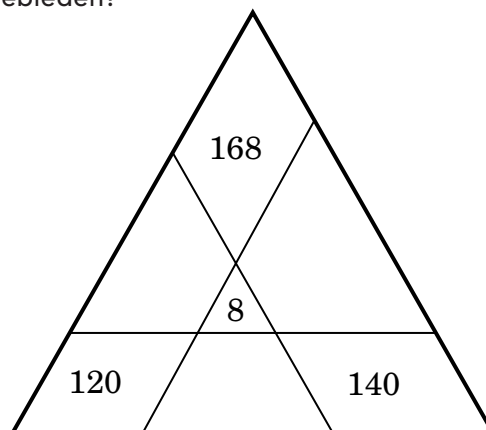


Verschillen

Kies zeven getallen uit 0 tot en met 15, zó dat elk van de getallen 1 tot en met 15 het verschil is van twee van de gekozen getallen.

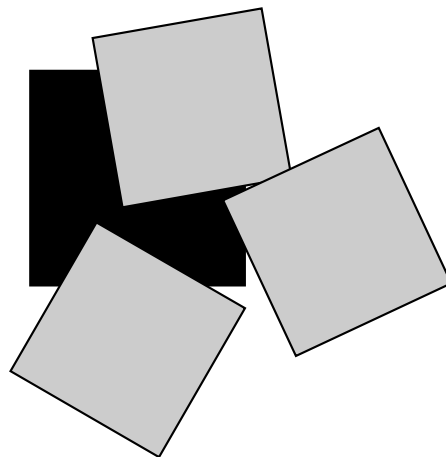
Gelijkzijdige driehoek

In de figuur zie je een gelijkzijdige driehoek die in zeven gebieden is verdeeld door drie lijnen evenwijdig met de drie zijden. Van vier gebieden is de oppervlakte gegeven. Wat is de oppervlakte van de resterende drie gebieden?



Overdekking

Is het mogelijk om met drie vierkanten met zijde 4 een vierkant met zijde 5 volledig te bedekken?

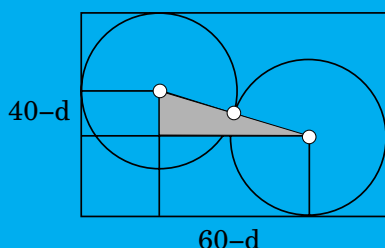


Oplossingen

nr. 5

Pizza's

De diameter is maximaal als de pizza's in tegenoverliggende hoeken aan de rand grenzen en tevens aan elkaar. Voor de diameter d geldt dan: $d^2 = (40 - d)^2 + (60 - d)^2$. Uitwerken geeft $d^2 - 200d + 5200 = 0$. Oplossen geeft twee oplossingen waarvan alleen $d = 100 - \sqrt{4800} \approx 30,718$ centimeter kan.



Traplopen

Laat a_n het aantal manieren zijn om naar trede n te komen. Dan is $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Voor iedere n geldt dat $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, want om op trede $n + 2$ te komen, was de laatste stap óf een kleine stap vanaf trede $n + 1$, óf een grote stap vanaf trede n . We krijgen zo de Fibonacci-getallen: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Dus $a_{13} = 377$, oftewel: Anne kan het 377 dagen volhouden, ruim een jaar.

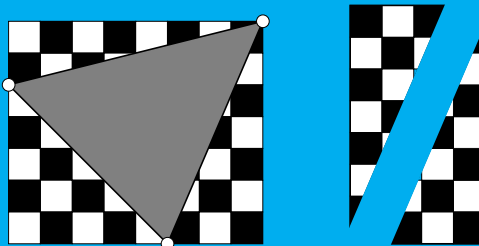
Kaasblokjes

Bij iedere keer snijden, wordt een aantal van de stukken kaas in tweeën gedeeld. Het aantal stukken kaas na k keer snijden is dus ten hoogste 2^k . Hans moet daarom *minimaal* 9 keer snijden.

Gelukkig voor Hans kan het ook écht in 9 keer. In driemaal snijden kan hij 8 stukken van $8 \times 8 \times 1$ maken. Na nog driemaal snijden heeft hij 64 stukken van $8 \times 1 \times 1$. Ten slotte, na nog driemaal snijden heeft hij 512 kaasblokjes van $1 \times 1 \times 1$.

Zwart-wit

De driehoek heeft even veel zwart als wit. Het vierkant van 7×8 heeft immers even veel zwart als wit (28 eenheidsvierkantjes) en elk van de drie rechthoekige driehoeken heeft ook even veel zwart als wit (ga dit zelf na).



Optelketens

Een optelketen voor 23 van lengte 6 is 1, 2, 3, 5, 10, 20, 23.

Binair geschreven is 65535 gelijk aan 1111111111111111 (zestien enen). Een getal bij zichzelf optellen (verdubbelen) komt binair geschreven neer op het toevoegen van een 0 aan het eind van dit getal. We kunnen nu deze rij maken: 1, 10, 11, 110, 1100, 1111, 11110, 111100, 1111000, 11110000, 11111111, 111111110, ..., 1111111100000000, 1111111111111111.

De portemonnees van tien personen zitten willekeurig opgeborgen in tien kluisjes. Een voor een mag elke persoon, onder het toezicht van een strenge bewaker, in vijf van de tien kluisjes kijken, maar hij mag niet z'n eigen portemonnee meenemen als hij die aantreft. Elk onderling zoek is verboden. De eigenaars krijgen alleen terug als ze nummer van 'hun' noemen aan de bewaker. Met deze spelregels lijkt het vrijwel uitgesloten dat alle eigenaren raak gokken en dus hun portemonneesterug krijgen. Toch kunnen ze, door vooraf een strategie af te spreken, hun kans op succes van minder dan 0,1 procent vergroten tot ruim dertig procent. Het geheim zit 'm in het feit dat iedere portemonnee identificeerbaar is.



28

◆ **E e n n u k k i g**
k l u i s j e s p r o b l e e m

In het Amerikaanse tijdschrift *The Mathematical Intelligencer* stond vorig jaar een fascinerend probleem onder de naam *Locker Puzzle*. Bij dit probleem gaat het erom hoe tien personen hun portemonnee met waardevolle inhoud terug kunnen krijgen.

In een afgesloten ruimte staan tien genummerde kluisjes (k_1 tot en met k_{10}). De portemonnees, alle voorzien van een identiteitskaart, van de tien personen zitten in die kluisjes: elk kluisje bevat precies één portemonnee. De tien personen weten niet welke portemonnee in welk kluisje zit.

De spelregels zijn als volgt. De tien personen mogen één voor één naar de ruimte met de tien kluisjes. Elke persoon mag maximaal vijf kluisjes inspecteren, in de hoop zijn eigen portemonnee aan te treffen. Als iemand zijn eigen portemonnee vindt, mag hij deze *niet* in zijn zak steken.

Iedereen moet de kluisjesruimte achterlaten exact zoals hij deze aantrof: tien gesloten kluisjes met in elk kluisje precies één portemonnee.

De kluisjesruimte moet via een andere deur worden verlaten. Iemand die aan de beurt is geweest om vijf kluisjes te inspecteren, kan op geen enkele manier communiceren met de overige personen.

De tien personen krijgen hun portemonnee alleen terug als *iedereen* zijn eigen portemonnee heeft aangetroffen. Zodra er ook maar één persoon is die zijn eigen portemonnee niet heeft gevonden, krijgt geen van allen zijn portemonnee terug.

De tien personen kunnen voordat de eerste de kluisjesruimte betreedt, met elkaar overleggen. Kunnen zij een strategie bedenken waarbij de kans op het terugkrijgen van de portemonnee niet verwaarloosbaar is?

Zonder strategie weinig kans

Als de tien personen besluiten om elk lukraak vijf kluisjes te openen, heeft elke persoon kans $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ om zijn eigen portemonnee aan te treffen. De kans dat alle tien personen hierin slagen, is gelijk aan $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0,00098$: een wel heel erg kleine succeskans. Het is te hopen dat onder de tien personen een slimmerik zit die raad weet!

Een stap in de goede richting

Al gauw komt een van de tien personen met een idee. Ze nummeren zichzelf: 1 tot en met 10. Ze spreken het volgende af: de personen 1, ..., 5 openen de kluisjes $k_1, \dots, k_5$ en de personen 6, ..., 10 openen de kluisjes $k_6, \dots, k_{10}$. We noteren met p_i de portemonnee van persoon i .

Persoon 1 gaat als eerste naar binnen. De kans dat zijn portemonnee in een van de kluisjes $k_1, \dots, k_5$ ligt, is gelijk aan $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Maar nu komt het. Als hierna persoon 2 naar binnen gaat, is de kans dat hij óók zijn portemonnee aantreft in een van de kluisjes $k_1, \dots, k_5$, gelijk aan $\frac{4}{9}$. Het gaat hier namelijk om een *voorwaardelijke* kans: de kans dat p_2 in één van de kluisjes $k_1, \dots, k_5$ zit, *gegeven* dat p_1 in één van deze kluisjes zit. Het succes van persoon 1 beïnvloedt de kans dat persoon 2 succes heeft!

Dit systeem zetten we voort. Als persoon 3 naar binnen gaat, is de kans dat hij zijn portemonnee aantreft in één van de kluisjes $k_1, \dots, k_5$, *gegeven* dat de personen 1 en 2 beiden hun portemonnee hebben aangetroffen in één van de kluisjes $k_1, \dots, k_5$, gelijk aan $\frac{3}{8}$. Voor de personen 4 en 5 zijn de (voorwaardelijke) kansen respectievelijk $\frac{2}{7}$ en $\frac{1}{6}$.

De kans dat de eerste vijf personen op deze manier slagen, is dan gelijk aan $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{242}$.

Vervolgens gaat persoon 6 naar binnen en opent, zoals afgesproken, de kluisjes $k_6, \dots, k_{10}$. De kans dat hij in een van deze kluisjes zijn eigen portemonnee aantreft, *gegeven* dat de personen 1, ..., 5 allemaal zijn geslaagd, is gelijk aan 1! Want als de situatie zo is dat $p_1, \dots, p_5$ zich in $k_1, \dots, k_5$ bevinden, moet het wel zo zijn dat $p_6, \dots, p_{10}$ in de kluis-

jes $k_6, \dots, k_{10}$ liggen. Dus ook voor de personen 7, 8, 9 en 10 is succes verzekerd.

De kans dat bij deze strategie alle tien de personen hun portemonnee aantreffen, is dus gelijk aan

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^5 = \frac{1}{242} \approx 0,00413.$$

Deze kans is ruim vier keer zo groot als wanneer de personen elk willekeurig vijf kluisjes openen. Maar om te spreken van een behoorlijke kans op succes, nee. Bestaat er een strategie waarbij de succeskans aanzienlijk vergroot wordt? Als je eerst zelf wilt proberen een oplossing te vinden, lees dan nu nog niet verder.

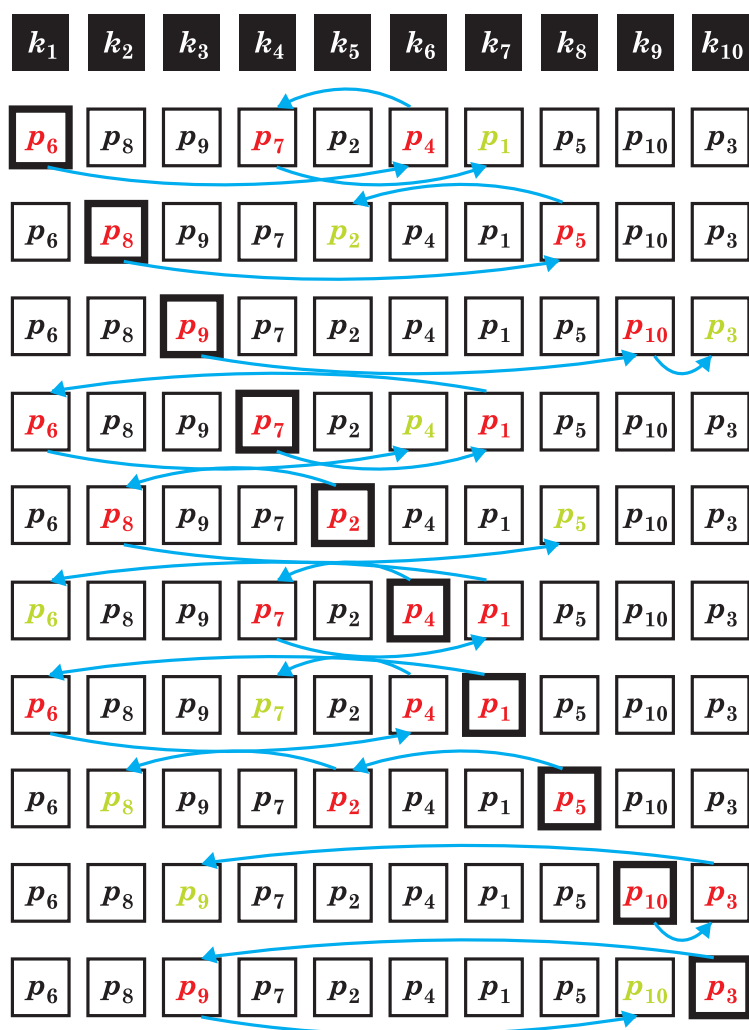
Een vernuftige strategie

Gelukkig is een van de tien personen een wiskundige, die een strategie voorstelt die met een opmerkelijk grote kans tot succes leidt. De kracht van deze strategie zit hem in het feit dat de kansen op succes voor de verschillende personen in hoge mate gecorreleerd zijn.

De strategie is als volgt. Persoon i opent als eerste kluisje k_i . Als hij meteen zijn eigen portemonnee aantreft, kan hij de ruimte meteen weer verlaten. Als hij niet zijn eigen portemonnee aantreft, kijkt hij in de portemonnee (die voorzien is van een identiteitskaart) wiens eigendom het is. Stel hij vindt portemonnee p_j ($j \neq i$), dan opent hij vervolgens kluisje k_j . Zit in dit kluisje zijn eigen portemonnee, dan is hij klaar. Zit in dit kluisje portemonnee p_m ($m \neq i$), dan opent hij als derde kluisje k_m . Zo gaat hij door tot hij maximaal vijf kluisjes heeft geopend.

We bekijken een concreet voorbeeld. Stel, de kluisjes $k_1, \dots, k_{10}$ bevatten achtereenvolgens de portemonnees $p_6, p_8, p_9, p_7, p_2, p_4, p_1, p_5, p_{10}, p_3$. Persoon 1 opent als eerste k_1 en treft hierin p_6 aan. Vervolgens opent hij dus k_6 met als resultaat p_4 . Dan opent hij k_4 en vindt p_7 . Hierna opent hij k_7 , waarin hij zijn eigen portemonnee vindt. Een vijfde (en laatste) kluisje hoeft hij dus niet meer te openen.

In figuur 1 zie je voor alle tien personen uitgetekend welke kluisjes er achtereenvolgens worden geopend. In dit specifieke voorbeeld



Figuur 1 Bij deze verdeling zijn er drie cycli: (6, 4, 7, 1), (8, 5, 2) en (9, 10, 3). Van boven naar beneden is voor alle personen (1 tot en met 10, persoon 1 bovenaan) aangegeven welke kluisjes er worden open gemaakt. Persoon i begint met het openen van k_i ; dit kluisje heeft in de figuur een vetgedrukte rand.

vinden de personen 1, 4, 6 en 7 hun portemonnee steeds bij het vierde kluisje. Dat is geen toeval. De personen 1, 4, 6 en 7 inspecteren dezelfde kluisjes en vinden hun eigen portemonnee steeds bij het vierde te openen kluisje, doordat zij in dezelfde cykel zitten. De andere zes personen zitten in een andere cykel. De personen 2, 5 en 8 zitten met zijn drieën in een cykel (en treffen hun eigen portemonnee dus steeds bij het derde kluisje aan) en de personen 3, 9 en 10 zitten met zijn drieën in een cykel. Omdat er in dit voorbeeld geen cykel ter lengte 6 of groter is, treffen alle personen hun portemonnee aan.

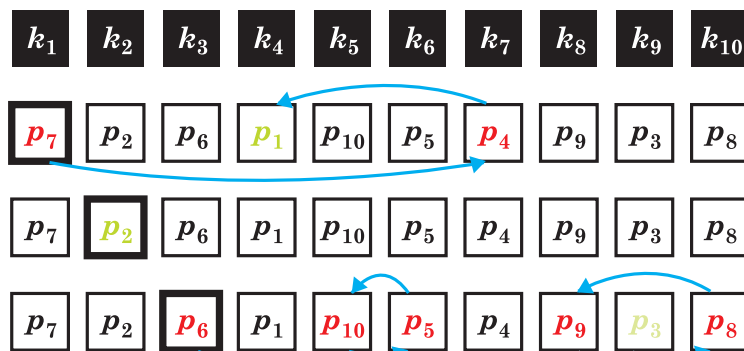
Figuur 2 geeft een andere mogelijke verdeling van de portemonnees over de tien kluisjes. Zoals uit deze figuur blijkt, treft persoon 2 meteen zijn eigen portemonnee aan: hij zit in een cykel ter lengte 1. De personen 1, 4 en 7 zitten in een cykel ter lengte 3 en vinden hun eigen portemonnee dus steeds bij de derde kluis. Maar de personen 3, 5, 6, 8, 9 en 10 treffen hun portemonnee niet aan bij de eerste vijf kluisjes die ze volgens de strategie moeten openen. Ze zouden hun eigen portemonnee pas bij de zesde kluis vinden. Dat komt doordat zij met zijn zessen in één cykel zitten.

Figuur 3 ten slotte geeft een van de 'slechtste' situaties weer: een cykel ter lengte 10. Alle personen zouden pas bij de tiende kluis hun portemonnee vinden (gesteld dat ze na het vijfde geopende kluisje verder mochten).

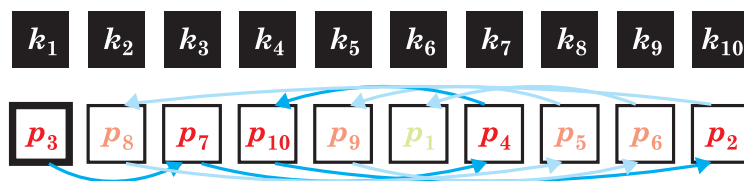
De succeskans

Wat is bij de strategie uit de vorige paragraaf de kans dat alle tien personen hun portemonnee aantreffen? Om deze kans te bepalen, tellen we het aantal mogelijke verdelingen van de portemonnees over de kluisjes waarin een cykel ter lengte 6 of groter voorkomt. We beginnen met het aantal verdelingen met een cykel ter lengte 6.

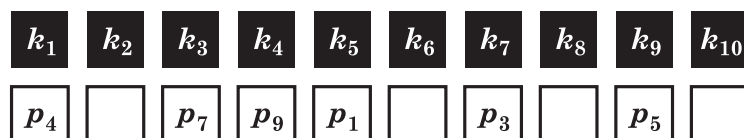
Kies eerst de zes portemonnees die in de cykel zitten. Dat kan op $\binom{10}{6} = 210$ manieren. Op hoeveel manieren kunnen deze zes portemonnees in de kluisjes worden geplaatst? Dat kan op $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ manieren. Maar lang niet alle manieren leveren een cykel ter lengte 6 van de betreffende portemonnees op. Stel dat de portemonnees p_1, p_3, p_4, p_5, p_7 en p_9 in zes kluisjes moeten worden gestopt. Om een cykel te krijgen, kunnen alleen de kluisjes k_1, k_3, k_4, k_5, k_7 en k_9 worden gebruikt.



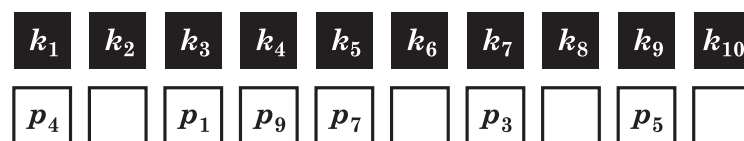
Figuur 2 Bij deze verdeling zijn er drie cycli: (7, 4, 1), (2) en (6, 5, 10, 8, 9, 3). Van boven naar beneden is voor de personen 1, 2 en 3 aangegeven welke kluisjes er worden open gemaakt.



Figuur 3 Bij deze verdeling is er slechts één cykel: (3, 7, 4, 10, 2, 8, 5, 9, 6, 1). Hier is aangegeven welke kluisjes persoon 1 open maakt.



Figuur 4 (7, 3) en (4, 9, 5, 1) zijn cycli



Figuur 5 (4, 9, 5, 1) is een cykel

In totaal zijn er $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ manieren om de portemonnees over die zes kluisjes te verdelen. Toch geeft nog steeds niet elk van deze manieren een cykel ter lengte 6. In figuur 4 zie je een voorbeeld van een verdeling van p_1, p_3, p_4, p_5, p_7 en p_9 over de kluisjes k_1, k_3, k_4, k_5, k_7 en k_9 , zodanig dat er één cykel ter lengte 2 (7, 3) en één cykel ter lengte 4 (4, 9, 5, 1) is.

cycli ter lengte 1.

Al met al kunnen we nu concluderen dat het totale aantal manieren om de portemonnees te verdelen waarbij een cykel ter lengte 6 voorkomt, gelijk is aan

$$\binom{10}{6} 5! \cdot 4! = \frac{10! \cdot 5! \cdot 4!}{6! \cdot 4!} = \frac{10!}{6}.$$

Hoeveel verdelingen van p_1, p_3, p_4, p_5, p_7 en p_9 over de kluisjes k_1, k_3, k_4, k_5, k_7 en k_9 waarbij een cykel ter lengte 6 wordt gevormd, zijn er dan wél? Voor k_1 zijn er 5 mogelijkheden: portemonnee p_i voor $i = 3, 4, 5, 7, 9$ kan in k_1 worden gestopt. Stel, in k_1 komt portemonnee k_7 . Dan zijn er voor k_7 nog 4 mogelijkheden, namelijk portemonnee p_i voor $i = 3, 4, 5, 9$. Stel, in k_7 komt portemonnee p_4 . Dan zijn er voor k_4 nog 3 mogelijkheden, namelijk portemonnee p_i voor $i = 3, 5, 9$. Zo gaan we door; in de laatste van de zes te vullen kluisjes komt portemonnee p_1 .

Het totaal aantal manieren om de zes portemonnees over de zes kluisjes te verdelen, is dus $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. In figuur 5 zie je een voorbeeld van een verdeling zodanig dat er een cykel ter lengte 6 is (4, 9, 5, 7, 3, 1).

Ten slotte moeten nog de vier resterende portemonnees willekeurig worden verdeeld over de vier nog lege kluisjes. Dit kan op $4! = 24$ manieren. Het maakt hierbij immers niet uit of de verdeling één cykel ter lengte 4 oplevert, of twee cycli ter lengte 2, of één cykel ter lengte 3 en één ter lengte 1, of één cykel ter lengte 2 en twee ter lengte 1, of vier

Dus in $\frac{1}{6}$ deel van de in totaal $10!$ mogelijkheden bevat de verdeling een cykel ter lengte 6, ofwel: de kans dat een willekeurige verdeling van de portemonnees over de kluisjes een cykel ter lengte 6 bevat, is gelijk aan $\frac{1}{6}$.

Op precies dezelfde manier kunnen we uitrekenen wat de kans is dat een verdeling een cykel ter lengte 7 bevat. (Het argument gaat niet op als we het aantal verdelingen met een cykel ter lengte 5 of minder willen bepalen, omdat een verdeling dan meer dan één van dergelijke cyclen kan bevatten.) Een willekeurige verdeling van de portemonnees over de kluisjes bevat met kans $\frac{1}{7}$ een cykel ter lengte 7. In het algemeen geldt: de kans dat een verdeling een cykel ter lengte n bevat, is voor $n = 6, 7, 8, 9, 10$ gelijk aan $\frac{1}{n}$.

De kans op een cykel ter lengte 6 of groter, is dus gelijk aan

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} \approx 0,6456.$$

De kans dat alle tien personen hun portemonnee aantreffen, is gelijk aan de kans dat de verdeling van de tien portemonnees over de tien kluisjes géén cykel bevat die langer is dan 5. Deze kans is gelijk aan

$$1 - \frac{1627}{2520} = \frac{893}{2520} \approx 0,3544.$$

De tien personen hebben met deze strategie dus een kans van ruim 35% dat ze hun portemonnee terug krijgen!

Honderd personen

Als we hetzelfde probleem voorleggen aan een groep van honderd personen (met even zo veel kluisjes), waarbij elke persoon ten hoogste vijftig kluisjes mag openen, is de kans dat ze alle honderd hun portemonnee terug krijgen bij het hanteren van de hier besproken strategie gelijk aan

$$1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}\right) \approx 0,3118.$$

Deze kans is kleiner dan in het geval van tien personen, maar nog steeds boven de 30%, behoorlijk groot dus.

♦♦♦Limietgeval

Omdat de succeskans bij honderd personen niet zo veel kleiner is dan bij tien personen, rijst de vraag of bij een toenemend aantal personen de succeskans naar nul daalt, of altijd boven een zekere vaste grenswaarde blijft.

Stel dat er $2n$ personen (en kluisjes) zijn, en elke persoon maximaal n kluisjes mag openen. De succeskans is dan gelijk aan

$$1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

De waarde van $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ kunnen we 'inklemmen' tussen $\int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx$ en $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$, er geldt:

$$\begin{aligned} \ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) &= \int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

Dat betekent dat $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \rightarrow \ln 2$ voor $n \rightarrow \infty$, ofwel: de succeskans bij een groep van $2n$ personen gaat voor $n \rightarrow \infty$ naar $1 - \ln 2 \approx 0,3069$. De kans dat een groep personen bij het hanteren van de hier besproken strategie erin slaagt om de portemonnees terug te krijgen, komt dus nooit onder de 30%, hoe groot de groep ook is.

De beste strategie?

Hoe goed de hier besproken strategie ook is, je gaat je vanzelf afvragen of het misschien nóg beter kan. Zou er een strategie bestaan waarbij voor iedereen vanaf persoon 2 succes is gegarandeerd, als gegeven is dat persoon 1 succes heeft? Als zo'n strategie zou bestaan, zou de totale succeskans maar liefst 50% zijn, want ieders individuele succes hangt dan alleen van persoon 1 af. Zo'n strategie bestaat echter niet, de hier besproken strategie is optimaal. Een bewijs hiervan geven we niet. Geïnteresseerden kunnen het vinden in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 28, no. 1, 2006.

Oplossingen Kleine nootjes nr. 5

Hoeveel vierkanten?

Er zijn 18 vierkanten (negen van 1×1 , vier van 2×2 , één van 3×3 en vier van $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$).

Munten

Mike heeft één munt van 2 euro en één munt van 1 euro, dus hij heeft in totaal 3 euro.

Terug in de tijd?

De datum is 10 februari 2001: 10022001.

Product en som

Het zijn 4 en 6. Priscilla ($24 = 3 \times 8 = 4 \times 6$) weet het niet. Sjoerd ($10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$) sluit 1×9 , 2×8 en 3×7 uit, dus weet het: 4 en 6. Bij andere getallen schrijfbaar als vier sommen, kan Sjoerd er maar twee van de vier uitsluiten.

Hoe heet zij?

Reken 3×1769 uit op je rekenmachine en draai hem om. Dan lees je: LOES.

COLOFON

46ste jaargang nummer 6
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs-commissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

E-mail

info@pythagoras.nu

Internet

www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur

Arnout Jaspers

Eindredacteur

Alex van den Brandhof

Redactie

Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Marco Swaen, René Swarttouw, Chris Zaal

Bladmanager

Chris Zaal

Vormgeving

Sonja en Esther, Amsterdam

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever

Chris Zaal

Redactiesecretariaat

Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Lezersreacties en kopij

René Swarttouw, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam. E-mail rene@pythagoras.nu

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176 E-mail shop@pythagoras.nu

Abonnementsprijs (6 nrs per jaargang)

€ 20,35 (Nederland), € 22,95 (België), € 26,00 (overig buitenland), € 17,25 (leerlingabonnement Nederland), € 20,00 (leerlingabonnement België), € 10,00 (bulkabonnement Nederland), € 12,00 (bulkabonnement België). Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu),

drs. J. Daems, promovendus wiskunde aan de UL (jdaems@math.leidenuniv.nl), W. Ellens, student wiskunde aan de UL (wendy_ellens@hotmail.com), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), drs. H. Pfaltzgraff, voormalig docent wiskunde en conrector op het Zaanlands Lyceum te Zaandam (henk@henkshoekje.com), F. Roos, docent natuurkunde te Tolbert (fd_r@yahoo.com), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), dr.ir. R.F. Swarttouw, docent wiskunde aan de VU (rene@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Sponsors

Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen:



Op een ree

Een ree bereidde voor de grap
gezeefde karnemelksepap.
Doch zelden zeefde deze ree
daar meer van dan een fles of twee.
Zij sprak: 'Ik kan er toch niet even
zo een twee drie vier vijf zes zeven!'

Kees Stip (1913-2001) / Uitgeverij Liverse

