PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Alice nog steeds in Wonderland

Pygram-prijsvraag

Wiskundige gipsmodellen

Euler: de blinde ziener

47ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2007

Verruim je mogelijkheden

Wiskunde in Leiden

Universiteit Leiden

www.studereninleiden.nl

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

BLAD EN STEEL

"Deze bijl is meer dan honderd jaar oud. Hij was oorspronkelijk van m'n overgrootvader en ik gebruik hem nog steeds. Alleen, m'n grootvader heeft er een nieuwe steel aan gezet en m'n vader heeft het blad vervangen."

Pythagoras begint met dit nummer aan z'n 47ste jaargang, een eerbiedwaardige leeftijd voor een tijdschrift. In die tijd is het blad al eens van eigenaar, formaat en drukker veranderd, vele redacteuren zijn gekomen en gegaan en hetzelfde geldt natuurlijk voor de abonnees. Een tijdschrift is in de meest letterlijke zin van het woord een idee, dat zich voortplant via de hersens van een telkens wisselende groep mensen en telkens een andere materiele verschijningsvorm kiest. Ook de nieuwe lay-out van dit nummer en de ingrijpende verbouwing van de website vallen onder dit principe. Hoe vaak blad en steel in de loop der tijd ook vervangen worden, *Pythagoras* hakt nog steeds met hetzelfde bijltje.

Traditiegetrouw hebben we ook deze jaargang een thema gekozen, 'wiskunde en kunst', en we lanceren weer een grote prijsvraag, ditmaal geïnspireerd door het Tangram. Maar we presenteren in dit nummer ook nieuwe rubrieken als 'Miskunde' en de Sangaku op de achterkant, en we starten een serie over grote wiskundigen uit het verleden. Als redactie kwamen we al gauw tot de conclusie dat de wiskunde zo'n rijk verleden heeft, dat die serie wel meer dan een jaargang door gaat lopen. En het idee 'Pythagoras' heeft zo'n rijke toekomst dat we nog vele jaargangen vooruit kunnen.

INHOUD

2 Kleine nootjes
4 Pygram-prijsvraag
7 Miskunde: Verdwenen Armenen
8 Wiskunde in wonderland
14 Journaal
16 Beeldende wiskunst
20 Pythagoras Olympiade
22 Magische blokken
24 Zelfverwijzinnen en inventarijen
26 Problemen - Oplossingen
28 Leonhard Euler (1707-1783): de blinde ziener
33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

NIVEAUBALKJES
Sommige pagina's hebben onder het paginanummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

LETTERGETALLEN

Hoeveel verschillende getallen zijn er van de vorm ABABAB, waarbij A en B verschillende cijfers zijn?

KOEKOEKSKLOK

Mijn koekoeksklok slaat één keer om 1 uur, twee keer om 2 uur, drie keer om 3 uur, enzovoorts, en bovendien slaat hij elk half uur één keer. Om kwart voor een heel uur begin ik te luisteren.
Na een aantal volle uren heb ik de koekoek 38 keren gehoord.
Hoe laat ben ik gaan luisteren?

GROOTSTE DOOSJE

Jan heeft 95 vierkantjes van 1 bij 1.
Hij wil een doos met afmetingen *a*, *b* en *c* aan alle zes de kanten beplakken met de vierkantjes.
Welke afmetingen heeft de doos met het grootste volume dat Jan kan beplakken?

G8-TOP

Op de G8-top in Berlijn zitten de acht regeringsleiders aan het diner aan een ronde tafel. Elke leider zit naast zijn of haar echtgenoot en vrouwen en mannen wisselen elkaar af. Verder is de schikking willekeurig.
Hoe groot is de kans dat Wladimir Poetin van Rusland naast Angela Merkel van Duitsland zit? En wat is de kans dat zij tegenover elkaar zitten?

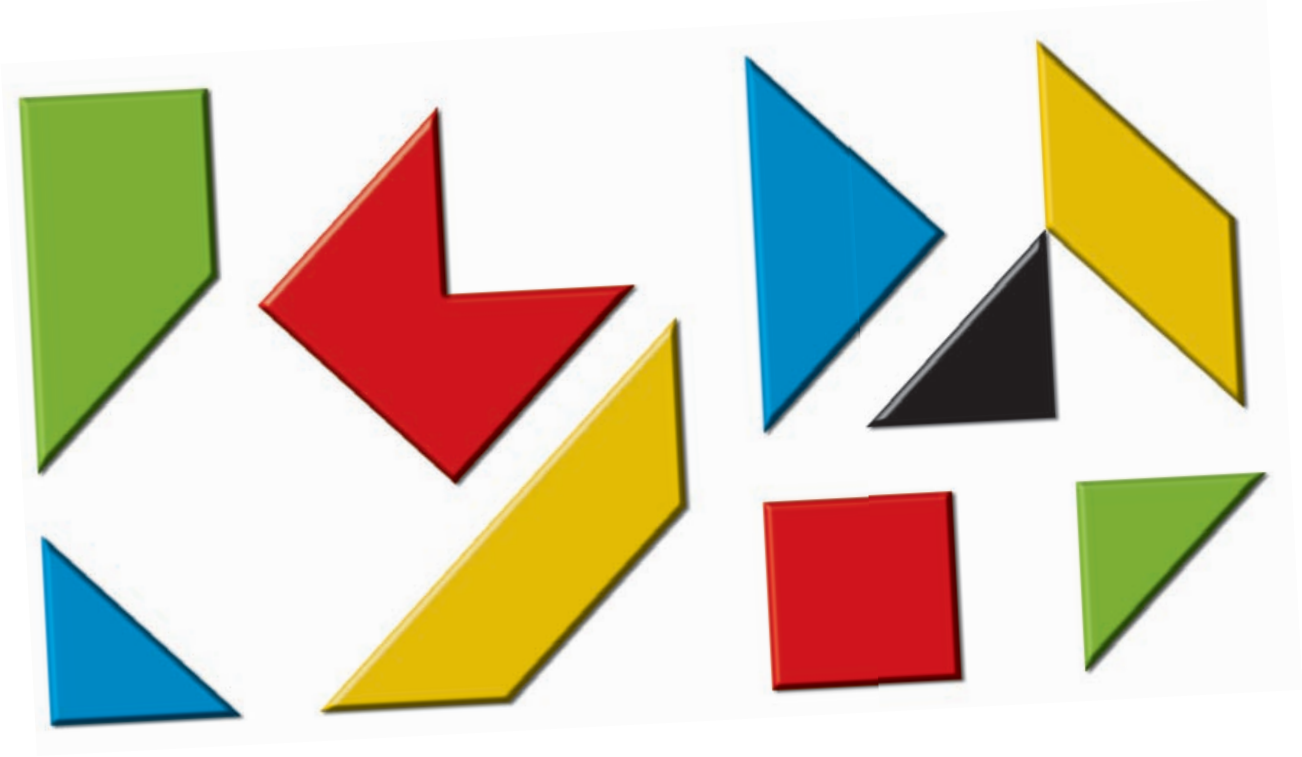
EEN, TWEE, DRIE, VIER, VIJF, ZES, ZEVEN,...

Welke cijfers komen op de plaatsen X en Y in de volgende rij? 3, 4, X, 4, 3, 3, 5, 4, Y, 4, 3, 6, 7, 8, 7, 7, 9, ...

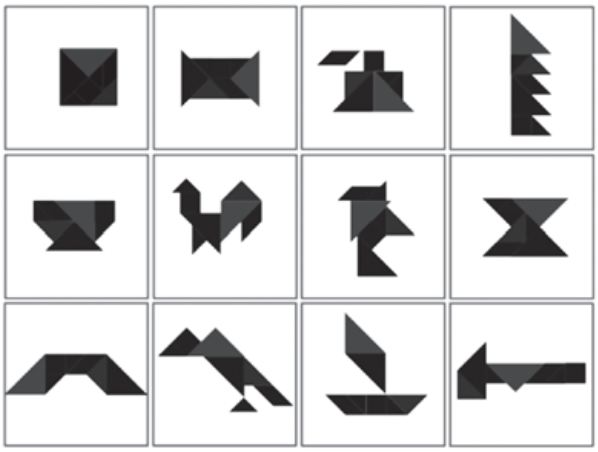
De Pythagorasprijsvraag 2007 haakt dit keer aan bij ons jaarthema: wiskunde en kunst. We lieten ons inspireren door *Tangram*, de eeuwenoude geometrische puzzel uit China. Redacteur Matthijs Coster bedacht een variant, *Pygram*, waarop je zowel je wiskundige als artistieke creativiteit kunt botvieren. Je hebt daarvoor tot het eind van de kerstvakantie de tijd. Later deze jaargang publiceert de deskundige jury de fraaiste inzendingen en de winnaars.

■ door Matthijs Coster

PYGRAM-PRIJSVRAAG



Tangram is een rechtlijnige opdeling van een vierkant in zeven stukken. Met die zeven stukjes is een verbazingwekkende variatie aan figuren te maken, waarin je met enige fantasie mensen, dieren en allerlei voorwerpen kunt herkennen. Een voorbeeld van wat daarmee zoal mogelijk is, zie je hieronder.



Mogelijke figuren die met Tangram te maken zijn

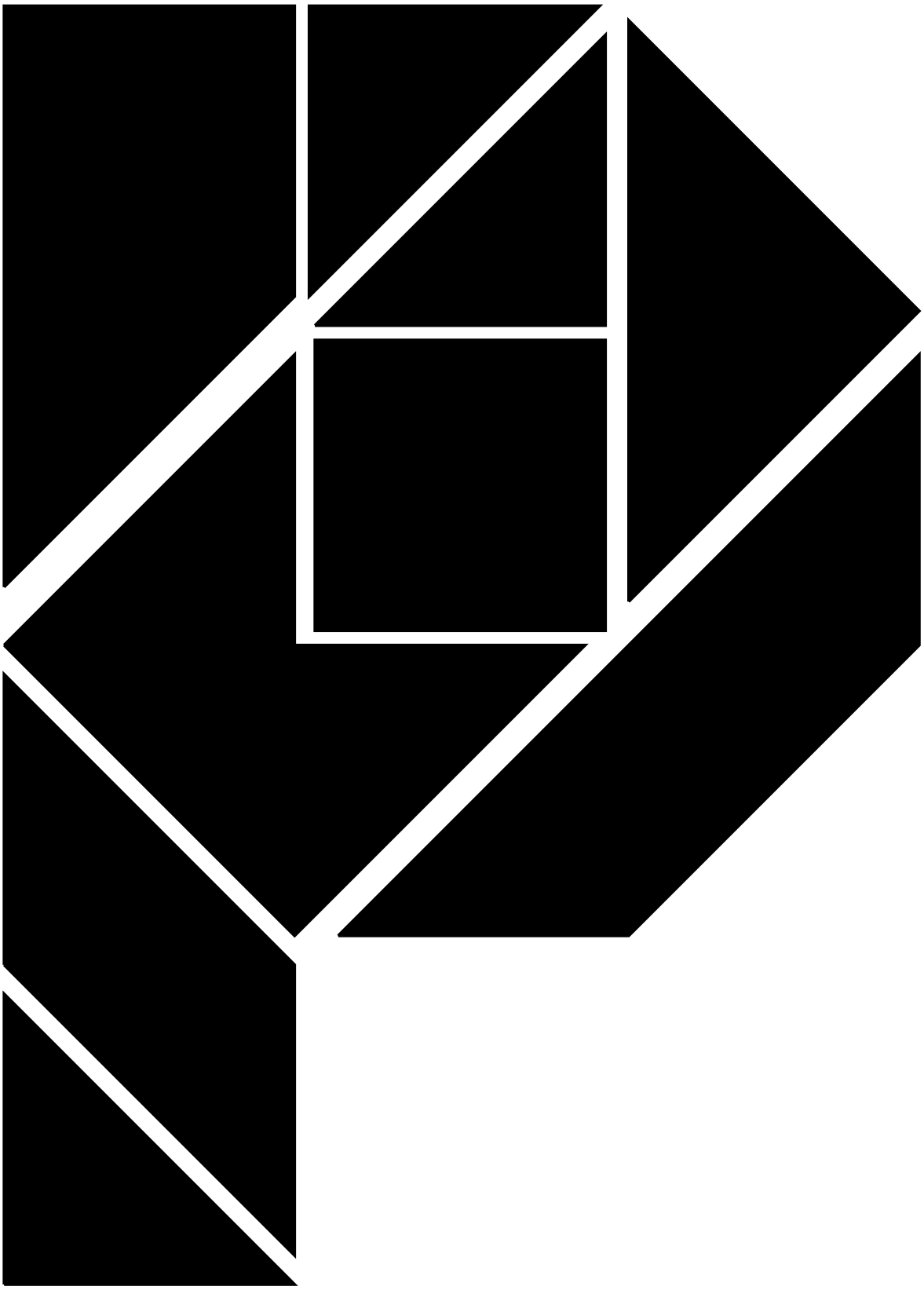
Onze Pygram bestaat uit negen stukken, die samen de letter P vormen, zie pagina 5. Als je het kleine vierkant – het gat in de letter P – weglaat, hou je acht stukken over waarmee je een rechthoek kunt leggen. Je zult merken dat dat al niet eens zo heel makkelijk is.

Met de Pygramprijsvraag kun je op diverse manieren prijzen verdienen. Er zijn vier opdrachten in de categorie 'wiskundig' en twee in de categorie 'artistiek', zie pagina 6.

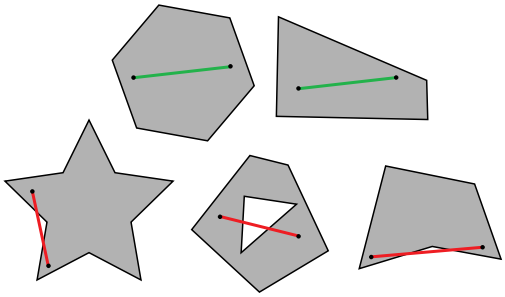
Iedereen kan aan de Pygramprijsvraag meedoen: leerlingen, beroepswiskundigen, hobbyïsten, enzovoorts. Ook als klas kun je inzenden. Opdracht A1 is bij uitstek geschikt voor een klasseninzending. In elke categorie is er een hoofdprijs van € 100. De jury behoudt zich het recht voor om niet in elke categorie de hoofdprijs uit te reiken, of om de prijs te verdelen onder meer dan één inzender.

DE NEGEN STUKJES VAN PYGRAM

Kopieer deze pagina (eventueel vergroot) en knip de stukjes uit. Je kunt de stukjes ook op stevig karton plakken en met een stanleymes uitsnijden.



CONVEX EN CONCAAF Een figuur heet *convex* als elke twee punten binnen de figuur verbonden kunnen worden door een rechte lijn die zelf ook helemaal in die figuur ligt. Deze definitie verhindert dus dat er gaten of inhammen in voorkomen. Een figuur die niet convex is, heet *concaaf*. De twee bovenste figuren zijn convex, de onderste drie zijn concaaf.

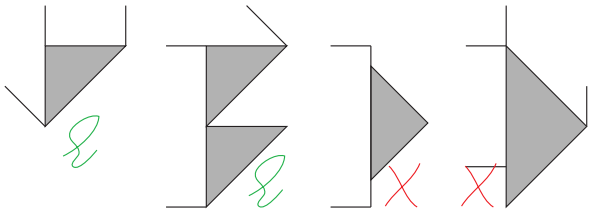


PYGRAM-WISKUNDIG

OPDRACHT W1 Gebruik de negen Pygramstukjes om zo veel mogelijk verschillende convexe figuren te maken. Twee figuren zijn pas echt verschillend, als je ze niet door draaien of ondersteboven leggen op elkaar kunt passen. Je mag ook afzonderlijke stukjes ondersteboven draaien om een convexe figuur te leggen. Dat maakt trouwens maar bij één stukje iets uit. Zie je meteen welk stukje dat is? Let op: per figuur moet je alle negen stukjes gebruiken!

OPDRACHT W2 Laat het kleine vierkant weg. Gebruik de overige acht Pygramstukjes om zo veel mogelijk convexe figuren te maken. Let op: per figuur moet je alle acht stukjes gebruiken! Wat denk je, kun je met deze acht stukjes minder of juist meer convexe figuren maken dan met alle negen stukjes?

OPDRACHT W3 Leg met de negen Pygramstukjes een figuur met een zo groot/klein mogelijke omtrek. Bereken de omtrek van je figuren door te stellen dat de zijden van het kleine vierkantje lengte 1 hebben. De figuur hoeft niet convex te zijn, maar



Bij W3 en W4 mogen stukjes alleen tegen elkaar aan gelegd worden als hun zijden passen

er mag geen gat in zitten. Stukjes mogen alleen tegen elkaar aan gelegd worden als hun zijden passen. Dat wil zeggen: of de tegen elkaar aan liggende zijden zijn even lang, of er passen meerdere stukjes precies tegen een grotere aan, zie de figuur onderaan de pagina.

OPDRACHT W4 Hetzelfde als W3, maar dan met weglating van het kleine vierkant.

PYGRAM-ARTISTIEK

Bij de artistieke opdrachten gelden geen beperkingen voor hoe je de stukjes neerlegt, net als in de tangram-voorbeelden. Ze hoeven zelfs niet aan elkaar te liggen.

OPDRACHT A1 Kies een thema, bijvoorbeeld 'letters' of 'verkeersborden'. Maak met de Pygramstukjes zo veel mogelijk fraaie figuren die in het thema passen. Het is het mooist als je een thema volledig kunt invullen. Dus is je thema 'letters', stuur dan, indien enigszins mogelijk, een heel alfabet in. Per figuur hoef je niet alle negen stukjes te gebruiken.

OPDRACHT A2 Dit is een vrije opdracht, waar bijna alles mag: maak één of meer zo interessant mogelijke figuren. Je mag ook meerdere Pygramsetjes gebruiken, de stukjes (of de randen) een kleur of een cijfer geven en dan voorwaarden bedenken waaraan je figuur moet voldoen, een bordspel met de Pygramstukken bedenken, enzovoorts.

INZENDEN

Je inzending kun je opsturen naar:
Jeanine Daems
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
e-mail: prijsvraag@pythagoras.nu

Vermeld duidelijk de naam van de opdracht: W1, W2, W3, W4, A1 of A2. Je mag in meerdere categorieën inzenden. Vermeld verder je naam en adres, en als je scholier bent, de naam en het adres van de school, je leeftijd en je klas. Bij een klasseninzending moet bovendien de naam van de wiskundedocent opgegeven worden.
Inzendingen moeten bij ons binnen zijn vóór **8 januari 2008**. ■

Nieuw in *Pythagoras*: MISKUNDE. Rekenkundige missers uit kranten, tijdschriften, boeken, enzovoorts. Kom je zelf iets tegen dat geschikt is voor deze rubriek? Meld het ons via post@pythagoras.nu.

■ door Matthijs Coster

VERDWENEN ARMENEN

Op pagina 46 van *De Brug*, het boekenweekgeschenk 2007, schrijft Geert Mak:
"De statistieken van Istanbul spreken voor zich: het Armeense aandeel van de stedelijke bevolking, in 1914 25 procent, was in 1920 gedaald tot 8,5 procent. Twee op de drie Armenen was 'verdwenen'."
Het staat wel vast dat honderdduizenden Armenen het slachtoffer zijn geworden van chaos en grootscheepse deportaties in Turkije tijdens en na de Eerste Wereldoorlog. Hoeveel het er precies zijn geweest weet niemand, en of je dat 'burgeroorlog', 'etnische zuivering' of 'genocide' moet noemen, daarover wordt nog steeds getwist. Maar kun je uit de percentages die Mak noemt, afleiden welk deel van de Armeense bevolking 'verdween'? Nauwelijks.

Laten we beginnen met een tamelijk onrealistische aanname, namelijk dat tussen 1914 en 1920 het aantal niet-Armeense inwoners van Istanbul gelijk bleef. Nauwkeurige inwoneraantallen zijn niet bekend, maar rond 1900 had de stad ongeveer een miljoen inwoners. Als we dat ronde getal ook voor 1914 aannemen, waren er toen dus 250.000 Armenen en 750.000 niet-Armenen in de stad. Als er in 1920 nog steeds 750.000 niet-Armenen in Istanbul woonden (100 – 8,5 = 91,5%), had de stad toen in totaal 750.000 : 0,915 = 820.000 inwoners, waarvan dus 70.000 Armenen. Als er van de 250.000 Armenen slechts 70.000 over waren, zijn niet twee op de drie, maar bijna drie op de vier – (250.000 – 70.000) : 250.000 × 100% = 72% – Armenen verdwenen.

Je ziet dat heel vaak bij percentages: de argeloze rekenaar verliest uit het oog dat een percentage een verhouding tussen twee getallen is en hij vraagt zich niet meer af of het getal onder de deelstreep in beide gevallen wel hetzelfde is. Geert Mak zou nog gelijk kunnen hebben, als elke verdreven Armeen vervangen was door een niet-Armeen. Uit de context van zijn opmerking in *De Brug* blijkt dit echter niet. Kennelijk beseft de auteur gewoon niet dat zijn berekening niet klopt.

Overigens is het waarschijnlijker dat juist minder dan twee op de drie Armenen tussen 1914 en 1925 uit Istanbul verdwenen zijn. Grote steden hebben namelijk sterk de neiging nog groter te worden. Rond 1900 had Istanbul ongeveer een miljoen inwoners, tegenwoordig zijn dat er zo'n elf miljoen. Als de groei de hele twintigste eeuw exponentieel is geweest – net zoals een geldbedrag op een spaarrekening ieder jaar met een vast percentage groeit, een aanname die vaak best aardig klopt – kreeg Istanbul er per jaar bijna 2,4 procent inwoners bij, zie het kader. Dat zou betekenen dat er in 1914 1,4 miljoen mensen in Istanbul woonden en in 1920 1,61 miljoen.

We doen nu de rekenexercitie nog eens over: 25 procent van 1,4 miljoen is 350.000 Armenen in 1914, en 8,5 procent Armenen van 1,61 miljoen in 1920 is (afgerond) 137.000. Nu is dus 'slechts' (350.000 – 137.000) : 350.000 × 100% = 61% van de Armenen verdwenen.

Het zal duidelijk zijn dat je zo naar wens binnen een vrij ruime marge Armeniërs kunt laten verdwijnen of weer tevoorschijn komen. ■

BEVOLKINGSGROEI Als je aanneemt dat een stad elk jaar met een vast percentage groeit, hoef je maar van twee jaren het inwonertal te weten om dit percentage en het inwonertal in een willekeurig jaar uit te rekenen. Het inwonertal voldoet dan namelijk aan de formule $N(t) = N(0) \cdot g^t$. Hierbij is t het aantal jaren, met $t = 0$ het beginjaar; voor Istanbul zouden we nemen $t = 0$ in 1900, $N(0) = 1$ miljoen. De groeifactor g geeft aan hoe snel de bevolking groeit. Istanbul had rond de laatste eeuwwisseling 11 miljoen inwoners, dus $N(100) = N(0) \cdot g^{100} = 11$ miljoen. Met het gegeven dat $N(0) = 1$ miljoen volgt hieruit dat $g^{100} = 11$, ofwel $g \approx 1{,}024$. Dat betekent dat het inwonertal ieder jaar met een factor 1,024 groter wordt, ofwel: het inwonertal neemt jaarlijks met 2,4 procent toe.

Het thema van de 47ste jaargang van *Pythagoras* is 'wiskunde en kunst'. In deze eerste aflevering schrijft Jeanine Daems over wiskunde en literatuur. Op het eerste gezicht hebben wiskunde en literatuur niet zoveel met elkaar te maken. Maar er zijn auteurs die erg beïnvloed zijn door wiskunde, bijvoorbeeld omdat ze naast schrijver ook wiskundige zijn, en dat zie je terug in hun werk.

■ door Jeanine Daems

WISKUNDE IN WONDERLAND

Lewis Carroll (1832-1898) was in zijn tijd een bekend wiskundige. Maar dat we zijn naam nu nog steeds kennen, komt door zijn wereldberoemd geworden kinderboek *Alice's Adventures in Wonderland.* Lewis Carroll was niet zijn eigen naam, het is een pseudoniem. In feite heette hij Charles Lutwidge Dodgson. Behalve schrijver en wiskundige was hij ook deken in de Anglicaanse kerk (de volgende stap, die van dominee, heeft hij nooit gezet) en verdienstelijk amateur-fotograaf. Hij leefde in Oxford, waar hij kennis maakte met de kinderen Liddell, de dochters van een collega. Een van die kinderen heette Alice, en zijn personage Alice is op haar gebaseerd.

MEISJES ZIJN SLANGEN In het beroemde *Alice's Adventures in Wonderland* valt Alice in een konijnenhol. Ze komt in een sprookjesachtige wereld terecht waar de vreemdste wezens rondlopen, waar de tijd niet loopt zoals je denkt en waar Alice steeds groter en kleiner wordt, al dan niet door het eten van koekjes of paddestoelen. In dit boek vinden we wiskunde vooral in grapjes met logica. Zo probeert Alice in hoofdstuk 5 de *Pigeon* (duif) ervan te overtuigen dat ze geen slang is:

"No, no! You're a serpent; and there's no use denying it. I suppose you'll be telling me next that you never tasted an egg!" "I have tasted eggs, certainly," said Alice, who was a very truthful child; "but little girls eat eggs quite as much as serpents do, you know." "I don't believe it," said the Pigeon; "but if they do, why, then they're a kind of serpent: that's all I can say."

De *Pigeon* zegt dus eigenlijk: slangen eten eieren en meisjes eten eieren, dus meisjes zijn slangen. Dat is duidelijk geen logisch geldige afleiding!

SPIEGELMOTIEF Carroll heeft nog een boek over Alice geschreven: *Through the Looking Glass and What Alice Found There*. We zien in dit tweede deel meer wiskunde dan in het eerste. Het eerste voorbeeld daarvan is de spiegel uit de titel. Ook in dit boek komt Alice in een bijzondere andere wereld terecht. Deze keer bevindt die zich aan de andere kant van de spiegel. Alice is gefascineerd door de kamer die ze kan zien in de spiegel die boven de open haard hangt. Het stuk van die kamer dat ze kan zien lijkt precies op de kamer waar ze zelf in staat, maar hoe zit dat met de rest? Hoe kan ze zeker weten dat er in de gespiegelde kamer ook een vuur brandt in de haard, of waar de hal heenleidt waarvan ze maar een klein stukje kan zien? De spiegel blijkt minder massief dan ze dacht en ze belandt in de gespiegelde kamer. Alice komt er al snel achter dat de dingen in de spiegelwereld die ze niet kon zien inderdaad heel anders zijn dan die in de gewone wereld.

Dit levert een aantal interessante gedachte-experimenten op: wat is er anders als de hele wereld in spiegelbeeld werkt? Alice wil graag naar een heuvel toelopen, maar het lukt haar niet. Elke keer als ze in de richting van de heuvel loopt, komt ze op den duur weer uit bij het huis waar ze vandaan komt. Tot ze bij een bloembed met pratende bloemen arriveert. Ze maakt een praatje, en dan komt de *Red Queen* (de koningin van het schaakspel) in zicht.

"I think I'll go and meet her," said Alice, for, though the flowers were interesting enough, she felt that it would be far grander to have a talk with a real Queen. "You can't possibly do that," said the Rose: "I should advice you to walk the other way." This sounded nonsense to Alice, so she said nothing, but set off at once towards the Red Queen. To her surprise she lost sight of her in a moment, and found herself walking in at the front-door again. A little provoked, she drew back, and, after looking everywhere for the Queen (whom she spied out at last, a long way off), she thought she would try the plan, this time, of walking in the opposite direction. It succeeded beautifully.

Volgens Martin Gardner, die voetnoten bij de Alice-boeken heeft geschreven, is dit een duidelijke verwijzing naar het feit dat vooruit en achteruit door een spiegel worden omgedraaid, als je in de richting van de spiegel loopt of daar vandaan.

Het spiegelmotief komt ook op een andere manier aan de orde. Alice ontmoet Tweedledum en Tweedledee, twee mannetjes die erg op elkaar lijken en zich als elkaars spiegelbeeld gedragen: ze staan bijvoorbeeld met de armen om elkaar heen, dus als ze Alice netjes een hand willen geven, geeft het ene mannetje haar zijn rechterhand en het andere mannetje zijn linker.

Het thema van een andere wereld waarin alles het gespiegeld is ten opzichte van de gewone wereld komt ook terug in *De torens van februari*, van de Nederlandse schrijfster Tonke Dragt. Ook dat boek is zeker de moeite van het lezen waard! Dragt heeft een gedicht uit *Through the Looking Glass* opgenomen als motto van haar boek, dat ze als volgt vertaald heeft:

En nu, als ik per ongeluk
Mijn vingers in de lijmpot stop
Of als een gek mijn rechtervoet
In 't linkerschoentje prop,
Of als ik op mijn grote teen
Iets zwaars laat vallen, ach,
Dan ween ik, want ik denk meteen
Aan die oude man van lang geleên,
Met sneeuwwit haar, zo was er geen?

Interessant is ook de structuur van *Through the Looking Glass*: het is opgebouwd als een potje schaak. Veel personages zijn schaakstukken, en ze komen elkaar alleen tegen als ze elkaar in het spel inderdaad ontmoeten op dat moment (bijvoorbeeld doordat ze op aangrenzende vakjes staan). Alice wil graag een koningin worden, dus ze moet beginnen als een pion:

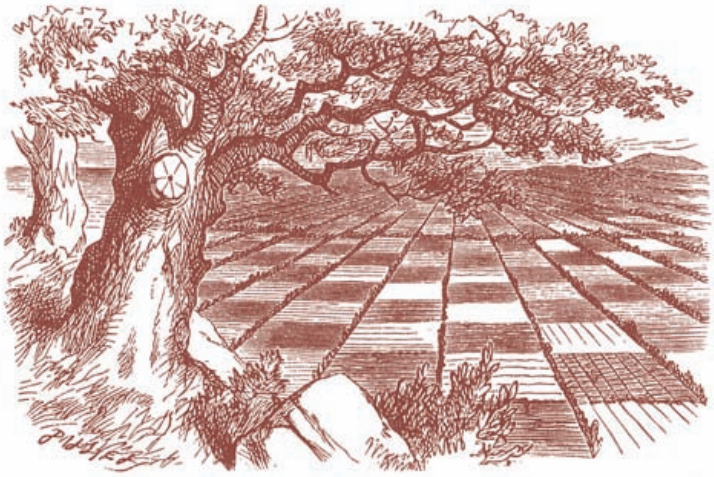
"Oh, what fun it is! How I wish I was one of them! I wouldn't mind being a Pawn, if only I might join – though of course I should like to be a Queen, best." She glanced rather shyly at the real Queen as she said this, but her companion only smiled pleasantly, and said: "That's easily managed. You can be the White Queen's Pawn, if you like, (...) and you're in the Second Square to begin with: when you get to the Eighth Square you'll be a Queen –" Just at this moment, somehow or other, they began to run.

Op haar reis naar het achtste vakje ontmoet Alice onder andere de *White Queen* en de *White Knight* (het witte paard, een personage dat misschien een karikatuur is van Lewis Carroll zelf).

GEORGES PEREC Het idee om een verhaal te structureren volgens een bepaald ruimtelijk patroon, zien we ook in het werk van de Franse schrijver Georges Perec (1936-1982). Perec was lid van de *Oulipo*, wat in het Frans een afkorting is voor 'werkplaats voor mogelijke literatuur'. De Oulipo was een club voor schrijvers en wiskundigen die in 1960 werd opgericht. De beginvraag was: hoe kun je wiskundige structuren gebruiken bij het schrijven van literatuur?

Een van Perecs beroemdste boeken is *Het leven een gebruiksaanwijzing* (*La Vie mode d'emploi*). Hij heeft dat verhaal gestructureerd aan de hand van een wiskundig patroon, op een manier die een beetje lijkt op die van Carroll. Het verhaal speelt zich af in een groot appartementencomplex in Parijs. Het vooraanzicht is een vierkant van tien bij tien appartementen. De hoofdstukken zijn allemaal aan een bepaalde ruimte in het gebouw gekoppeld, er wordt bijvoorbeeld verteld hoe die ruimte er uitziet of we komen iets te weten over de geschiedenis van de bewoner. Als een bepaalde ruimte in een hoofdstuk een rol speelt, dan is de ruimte die in het volgende hoofdstuk een rol speelt met een paardensprong te bereiken. De vraag is natuurlijk: kun je op een tien bij tien schaakbord ergens beginnen en dan steeds met paardensprongen naar andere vakjes springen tot je uiteindelijk alle honderd vakjes precies één keer bezocht hebt? Het antwoord is ja. Perec heeft zijn paardensprongwandeling gevonden door het gewoon te proberen.

SYLVIE AND BRUNO Een ander paar boeken van Carroll dat bij elkaar hoort, bestaat uit *Sylvie and Bruno* en *Sylvie and Bruno Concluded*. Ook in deze boeken bevindt de hoofdpersoon zich afwisselend in de gewone realiteit en in een droomwereld. De hoofdpersoon is hier niet een klein meisje,



maar een volwassen man. In de gewone wereld zien we hem vooral als hij zijn vriend Arthur bezoekt, die dokter is en hopeloos verliefd is op Lady Muriel.

Af en toe krijgt hij een *eerie* gevoel over zich, en dan komt hij steeds, in meer of mindere mate, in een andere wereld terecht. Die wereld hangt nauw samen met de feeënwereld. Hij ontmoet regelmatig zus en broer Sylvie en Bruno, die feeën zijn, maar ook af en toe in kinderen kunnen veranderen. Sylvie is de verstandige, gevoelige grote zus, die erop toeziet dat Bruno zijn lessen leert. Bruno heeft natuurlijk een hekel aan die lessen, dus hij probeert daar zoveel mogelijk onderuit te komen.

In deze twee boeken is het thema wiskunde niet zo duidelijk aanwezig, het komt maar een paar keer om de hoek kijken. Maar in *Sylvie and Bruno Concluded* komt een wiskundig gezien erg interessant hoofdstuk voor. Lady Muriel stelt de hoofdpersoon voor aan *Mein Herr*, een Duitser die erg veel lijkt op de professor die hij regelmatig tegenkomt in zijn droomwereld. Mein Herr bekijkt het handwerkje van Lady Muriel. Hij vraagt haar of ze ooit gehoord heeft van *Fortunatus's Purse*, de portemonnee van Fortunatus. (Fortunatus was in de vijftiende en zestiende eeuw een populair personage uit Duitse verhalen. Hij kreeg een portemonnee van de godin van de voorspoed, die hij in een bos tegengekomen was. Elke keer als hij geld uitgaf, werd het vanzelf aangevuld!)

Mein Herr weet te vertellen dat je uit drie zakdoeken zelf *Fortunatus's Purse* kunt maken! Lady Muriel gaat natuurlijk meteen aan de slag. Om te begrijpen wat zijn idee is, kijken ze eerst naar een ander object: de Möbiusband.

"You have seen the puzzle of the Paper Ring?" Mein Herr said, addressing the Earl. "Where you take a slip of paper, and join its ends together, first twisting one, so as to join the upper corner of one end to the lower corner of the other?" "I saw one made, only yesterday," the Earl replied. "Muriel, my child, were you not making one, to amuse those children you had to tea?" "Yes, I know that Puzzle," said Lady Muriel. "The Ring has only one surface, and only one edge, It's very mysterious!"

Het is erg eenvoudig om zelf een Möbiusband te maken, zoals Mein Herr hierboven ook al uitlegt. Neem een strook papier en maak de ene kant aan de andere vast, zodat er een ring ontstaat. Maar je doet dat niet op de normale manier: je draait één van de uiteinden een halve slag, zodat je de bovenkant van het ene uiteinde vastplakt aan de onderkant van het andere. Het leuke aan de band die je als resultaat krijgt, is dat hij uit één oppervlak bestaat. Als je een mier zou zijn die over de band loopt, dan moet je een afstand van twee keer de lengte van de band afleggen voor je weer op je beginpunt uitkomt. Op een normale band zou je na één keer de lengte van de strook afgelegd te hebben alweer op je begintpunt uitgekomen zijn, terwijl je de andere kant van de strook helemaal niet gezien zou hebben.

ZAKDOEKEN, NAALD EN DRAAD Er bestaat een soortgelijk object dat wat ingewikkelder is: de *fles van Klein*. Net als de Möbiusband is de fles van Klein zelf tweedimensionaal: het is een oppervlak. Maar terwijl de Möbiusband in drie dimensies leeft (je kunt er gewoon een maken, zoals we al gezien hebben), is het onmogelijk om een fles van Klein te maken in de driedimensionale ruimte zonder een zelfdoorsnijding te krijgen. Pas in de vierde dimensie zou het object zonder zelfdoorsnijdingen kunnen bestaan. Maar Mein Herr vertelt Lady Muriel hoe ze zo'n object kan naaien.

Je kunt het zelf ook proberen, je ruimtelijk inzicht zal op de proef gesteld worden! Je hebt drie zakdoeken nodig, en naald en draad. (Tip: met servetten en nietjes gaat het ook.) De instructie kun je lezen op pagina 12. Zodra de derde zakdoek in het spel komt, ontstaat er een probleem. Maar Lady Muriel komt zo ver niet:

"I see!" Lady Muriel eagerly interrupted. "Its outer surface will be continuous with its inner surface! But it will take time. I'll sew it up after tea." She laid

Maak zelf een Kleinse fles met drie zakdoeken, naald en draad

1

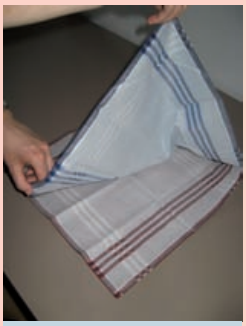
2

3

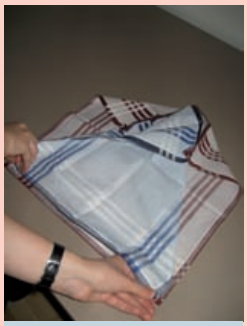
4

5

6a


6b

6c


6d

6e

7

8

9

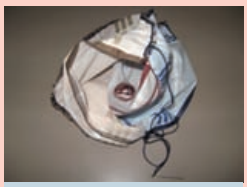
10

11

12

13a

13b


13c

14

15

16

1: Benodigdheden: drie zakdoeken, een bolletje garen en een naald.
2: Leg twee zakdoeken op elkaar.
3: Naai de rechter bovenhoeken aan elkaar.
4: Naai de linker bovenhoeken aan elkaar.
5: Aan de bovenkant ontstaat nu deze opening. Let op: deze opening mag NOOIT worden dichtgenaaid.
6a t/m e: Leg de onderkant van de bovenste zakdoek andersom op de onderkant van de onderste zakdoek.
7: Naai de onderkanten zo aan elkaar vast.
8: Dit is het resultaat. Er zijn (buiten de opening aan de bovenkant) nog vier kanten vrij.
9: De derde zakdoek komt erbij.
10: Leg de derde zakdoek zo aan de bovenste zakdoek.
11: Naai de derde zakdoek zo aan de bovenste zakdoek vast.
12: Ga verder met het vastnaaien van de derde zakdoek aan de volgende vrije kant die je tegenkomt.
13a t/m c: Als je in een hoekpunt aankomt, ga je verder met de vrije kant die je tegenkomt en die NIET bij de bovenkant hoort.
14: Als je met de vierde kant van de derde zakdoek bezig bent, dan kom je na een tijdje in de problemen: je kunt niet meer zo makkelijk verder naaien, want er zit van alles in de weg.
15: Begin dan in het andere hoekpunt waar dezelfde twee kanten bij elkaar komen en naai ze ook een stukje aan elkaar vast vanaf de andere kant. Het probleem zit nu in het midden, je kunt niet meer verder. Je fles van Klein is af.
16: Zo ziet het resultaat eruit.

aside the bag, and resumed her cup of tea. "But why do you call it Fortunatus's Purse, Mein Herr?"

Dat is een goede vraag: wat heeft deze rare tas met de portemonnee van Fortunatus te maken? Mein Herr heeft hier een duidelijk antwoord op:

"Don't you see, my child – I should say Miladi? Whatever is inside *that Purse, is* outside *it; and whatever is* outside *it, is* inside *it. So you have all the wealth of the world in that leetle Purse!"*

VERDER LEZEN? Er zijn natuurlijk nog veel meer romans waarin wiskunde een belangrijke rol speelt. Hieronder staan er nog een paar, met een korte omschrijving, misschien zit er iets leuks voor je bij.

Mark Haddon: *Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht*
Jeugdboek vanuit het perspectief van een autistische jongen die geobsedeerd is door wiskunde. De jongen probeert de moord op de hond van een buurvrouw op te lossen, maar hij heeft veel moeite de wereld om zich heen te begrijpen. De hoofdstukken zijn genummerd met priemgetallen en er wordt wat wiskunde uitgelegd, bijvoorbeeld hoe de zeef van Eratosthenes werkt (dat is een manier om priemgetallen te vinden), en achterin zit een appendix met een wiskundig bewijs! Dit is een mooi, grappig en ook wel ontroerend boek.

Apostolis Doxiadis: *Oom Petros en het vermoeden van Goldbach*
Oom Petros is het zwarte schaap van de familie, maar zijn neef weet niet waarom. Op een dag gaat hij op zoek naar de reden en hij ontdekt dat zijn oom vroeger wiskundige was. Hij heeft zijn hele leven besteed aan een mislukte poging het vermoeden van Goldbach te bewijzen. Dat vermoeden zegt dat elk even getal groter dan 2 te schrijven is als de som van twee priemgetallen. Oom Petros balanceert op het randje van de waanzin. Maar is oom Petros nou gek of geniaal?

Daniel Kehlmann: *Het meten van de wereld*
Dit boek gaat over twee wetenschappers aan het eind van de achttiende eeuw: de wiskundige Carl Friedrich Gauss en de ontdekkingsreiziger Alexander von Humboldt. Hun persoonlijkheden zijn volkomen tegengesteld, maar allebei willen ze graag meer weten over de wereld. Gauss komt over als een bijzonder onaardige en ongeduldige man. Von Humboldt reist naar Zuid-Amerika om dat werelddeel beter in kaart te brengen, Gauss blijft het liefst in zijn eigen kamer en vindt het al te veel gedoe om naar een conferentie in Berlijn te gaan. Het is een vermakelijk boek en het heeft in Duitsland wekenlang bovenaan de bestsellerlijsten gestaan. ■

Gebruikte literatuur
Lewis Carroll, *The Annotated Alice, with an introduction and notes by Martin Gardner* (Penguin, 1976)
The complete works of Lewis Carroll (Penguin, 1988)
Apostolis Doxiadis, *Oom Petros en het vermoeden van Goldbach* (De Bezige Bij, 2000)
Tonke Dragt, *De torens van februari* (Leopold, 1973)
Mark Haddon, *The curious incident of the dog in the night-time* (Vintage, 2003)
Daniel Kehlmann, *Het meten van de wereld* (Querido, 2006)
Harry Mathews, Alastair Brotchie (editors), *Oulipo Compendium* (Atlas Press, 1988)
Georges Perec, *Het leven een gebruiksaanwijzing* (De Arbeiderspers, 1996)

De tekeningen zijn van John Tenniel, afkomstig uit *The Annotated Alice, Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking-Glass*

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Bronzen medaille bij Internationale Wiskunde Olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade (IWO) vond dit jaar plaats in de Vietnamese hoofdstad Hanoi. De Nederlander Wouter Zomervrucht behaalde een bronzen medaille.

Drie andere leden van het Nederlandse team, Wouter Berkelmans, Milan Lopuhaä en Tim Reijnders, wisten één van de zes pittige vragen geheel correct op te lossen en kregen daarvoor een eervolle vermelding.

Aan de 48ste editie van de IWO deden 520 leerlingen afkomstig uit 93 landen mee. Winnaar is Rusland (184 punten), gevolgd door China (181 punten) en Vietnam (168 punten). Nederland is met 65 punten 56ste geworden in het eindklassement. België haalde met 78 punten de 45ste plaats.

De IWO wordt jaarlijks georganiseerd, telkens door een ander land. In juli 2011 zal het evenement in Nederland plaatsvinden.

Uitgebreide informatie over de IWO kun je lezen op www.imo2007.edu.vn.

Franklin-vierkant van 12 bij 12 onmogelijk

Waar lange tijd naar werd gezocht, een Franklin-magisch vierkant van 12 bij 12, blijkt niet te bestaan. Dat heeft Cor Hurkens van de TU Eindhoven ontdekt.

Hij schreef een computerprogramma en schakelde enkele tientallen computers in, die na anderhalve dag rekenen alle mogelijke configuraties hadden doorlopen. Het gezochte vierkant zat er niet tussen.

In maart van dit jaar haalden drie middelbare scholieren uit Nijmegen alle tv-journaals met een magisch vierkant van 12 bij 12. Dit vierkant heeft alle bijzondere eigenschappen van het vierkant van Franklin, op één na: aan de halve rij en halve kolom eigenschap wordt niet voldaan.

Onafhankelijk van Cor Hurkens was elektrotechnisch ingenieur Huub Reijnders met pen en papier op zoek naar een 12 × 12 vierkant, natuurlijk ook uitgedaagd door de publiciteit rond magische vierkanten. Uiteraard lukte het hem niet om zo'n vierkant te maken. Hij wist met zijn methode wel ándere Franklin-magische vierkanten te produceren.

Al met al heeft het werk van Hurkens en Reijnders tot de volgende stelling geleid: Franklin-magische vierkanten van orde n bestaan precies dan als n een viervoud is, behalve als $n = 4$ of $n = 12$.

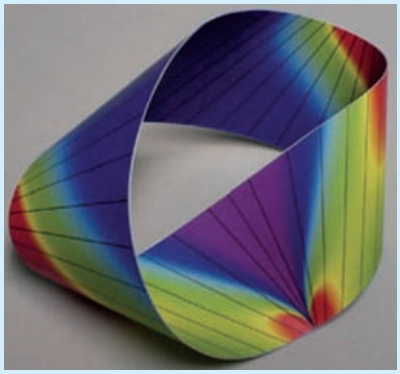
Bron: www.puzzled.nl/franklin

Het vierkant van de Nijmeegse scholieren voldoet aan de volgende eisen: in het vierkant zitten alle getallen 1 tot en met 144; elke rij en elke kolom heeft som 870; de gebogen diagonalen hebben som 870; de parallelle gebogen diagonalen hebben som 870; elk 2 bij 2 vierkant heeft som 290. De ontbrekende eigenschap om helemaal Franklin-magisch te zijn: elke halve rij en halve kolom heeft som 435 (hier is dat 436 (rood) of 434 (groen) voor de rijen, en 423 en 447 voor de kolommen).

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

De vorm van een Möbiusband

Neem een dunne strook papier, draai één uiteinde een halve slag en plak de uiteinden aan elkaar. Het resultaat is een Möbiusband, genoemd naar de bedenker, de Duitse wiskundige August Ferdinand Möbius (1790-1868).



Computerbeeld van een Möbiusband. Het kleurverloop geeft aan hoe de druk verandert. De 'energy density' is het grootst waar de Möbiusband sterk buigt (rood) en het laagst waar de band het platst is. (Beeld: Nature Materials / Starostin & Van der Heijden)

Eugene Starostin en Gert van der Heijden van het University College in Londen hebben uitgedokterd welke vorm een Möbiusband precies aanneemt, afhankelijk van de lengte en de breedte van de strook. Waar welft de band en hoe sterk zijn die welvingen?

Al in de jaren 1930 deden wiskundigen pogingen om deze vraag te beantwoorden. Maar pas 75 jaar later is het gelukt om een bevredigende oplossing te vinden. Starostin en Van der Heijden gebruikten een theorie uit 1989 om een speciaal soort differentiaalvergelijkingen, de zogeheten Euler-Lagrange-vergelijkingen, op te lossen. Niemand kwam eerder op het idee om deze bijna twintig jaar oude theorie toe te passen op de vorm van een Möbiusband.

Met het nieuwe resultaat kan wiskundig worden verklaard waarom het moeilijker wordt zo'n band te maken naarmate de strook dikker wordt. De vorm van een Möbiusband wordt bepaald door wat de wetenschappers 'energy density' noemen: deze dichtheid is het grootst waar de band sterk buigt en het laagst waar de band het platst is. Naarmate de strook papier dikker is, wordt de 'energy density' op de plaatsen waar het papier sterk buigt groter. Op een gegeven moment is er een kritieke grens: dan lukt het niet meer om een Möbiusband te maken.
Bron: *Nature Materials*

Attente lezers

Het vorige nummer van *Pythagoras* (juni 2007) is goed gelezen door onze abonnees. Dat bleek uit de vele reacties die we op dit nummer kregen.

Bij de oplossingen van de Kleine nootjes werd bij 'Hoeveel vierkanten?' gemeld dat er 18 vierkanten te maken zijn in een rooster van 4 bij 4 punten. De redactie ontving van Jitske (11jaar) en Martijn (42 jaar) Bak nog twee oplossingen: je kunt ook nog twee vierkanten met zijde $\sqrt{5}$ maken. Er zijn dus in totaal 20 vierkanten.

Ernst van de Kerkhof stuurde een e-mail naar aanleiding van 'Een nukkig kluisjesprobleem'. In dat artikel wordt niet vermeld dat de collectieve kans nog beter wordt door slim te gokken ingeval de basisstrategie faalt. Zou er bijvoorbeeld worden afgesproken dat iemand die zijn portemonnee niet aantreft, het nummer noemt van het kluisje dat hoort bij de portemonnee die hij als laatste (in de vijfde geopende kluis) heeft gevonden, dan slaagt de strategie ook bij cykels van lengte 6 (de als zesde te openen kluis is voor de personen in cykels van lengte 6 immers de juiste). Hierbij moet worden opgemerkt dat deze strategie volgens de spelregels strikt genomen niet is toegestaan: "De tien personen krijgen hun portemonnee alleen terug als iedereen zijn eigen portemonnee heeft aangetroffen," staat in de vijfde alinea van het artikel.

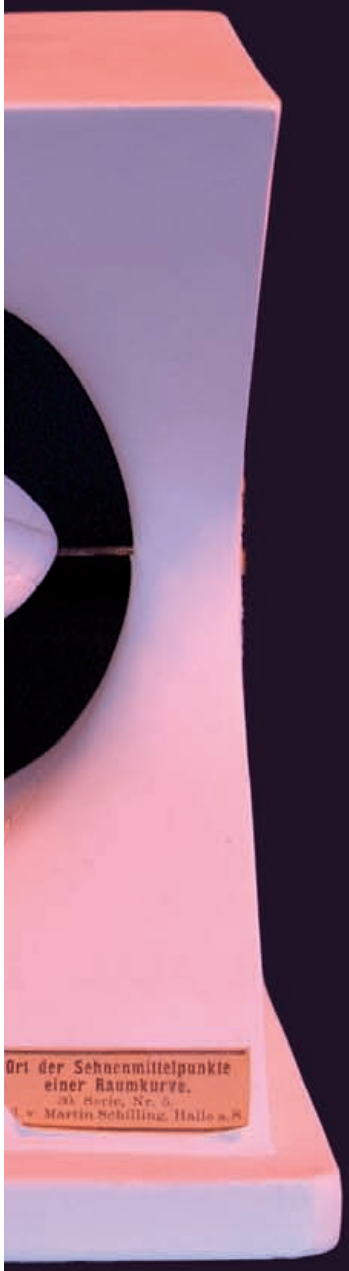
Op het artikel 'Schuifpuzzels en pariteit' kregen we reacties van Wim van der Meer, Sandra van Wijk, Fred Schalekamp, Daan Wanrooy en W.G.H. Strijbos. Er werd geschreven dat de schuifpuzzel in de titel niet is om te vormen tot 'SCHUIFPUZZELS & PARITEIT'. Doordat er echter dubbele letters voorkomen, is het wél mogelijk. Wil je de laatste twee blokjes verwisselen zónder ergens anders nog twee blokjes te verwisselen, dan bestaat er (inderdaad) geen oplossing. Maar waarom zou je dat willen, het verschil tussen I en I is immers niet zichtbaar! Overigens is deze fout in het artikel niet voor rekening van de auteurs, maar van de redactie, die ook al moeite had met het juist spellen van de naam van één der auteurs: de achternaam van Bruno van Albada werd geschreven als 'Van Albeda'.

BEELDENDE WI

Gips- en draadmodellen werden tot in het begin van de twintigste eeuw gebruikt om wiskundige vergelijkingen uit te beelden. Tegenwoordig zijn er websites waar je alleen maar een vergelijking hoeft in te typen en de software tekent volautomatisch een 3D-model van de oplossingen op je beeldscherm. Maar destijds moesten ze met vijl en schuurpapier uit een massief blok gips gehaald worden, een specialistisch en arbeidsintensief karwei. Daarom waren die modellen ook erg duur.

■ door Arnout Jaspers

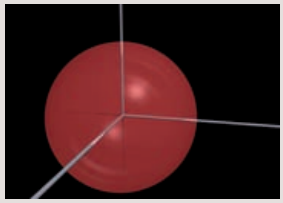
SKUNST



In menig instituut liggen oude gips- en draadmodellen van wiskundige vergelijkingen in een kelder te verstoffen, maar onder andere in Groningen is de collectie deels gerestaureerd onder leiding van de Groningse hoogleraar Jaap Top. De beroemde beeldhouwer Henry Moore, die het gat als beeldend element in de beeldhouwkunst introduceerde, zei dat hij daartoe door zulke negentiende-eeuwse gipsmodellen werd geïnspireerd.

GRILLIGE VERGELIJKINGEN De oplossing van een vergelijking in twee variabelen is een kromme in het platte vlak. Zo heeft de vergelijking $x + y = 1$ als oplossing een rechte lijn. Een vergelijking in drie variabelen geeft als oplossing een (onbegrensd) oppervlak in de ruimte. Zo heeft de vergelijking $x + y + z = 1$ als oplossing een plat vlak, dat alledrie de assen op afstand 1 van de oorsprong snijdt, zie figuur 1. Een boloppervlak met straal 1, zie figuur 2, voldoet aan de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

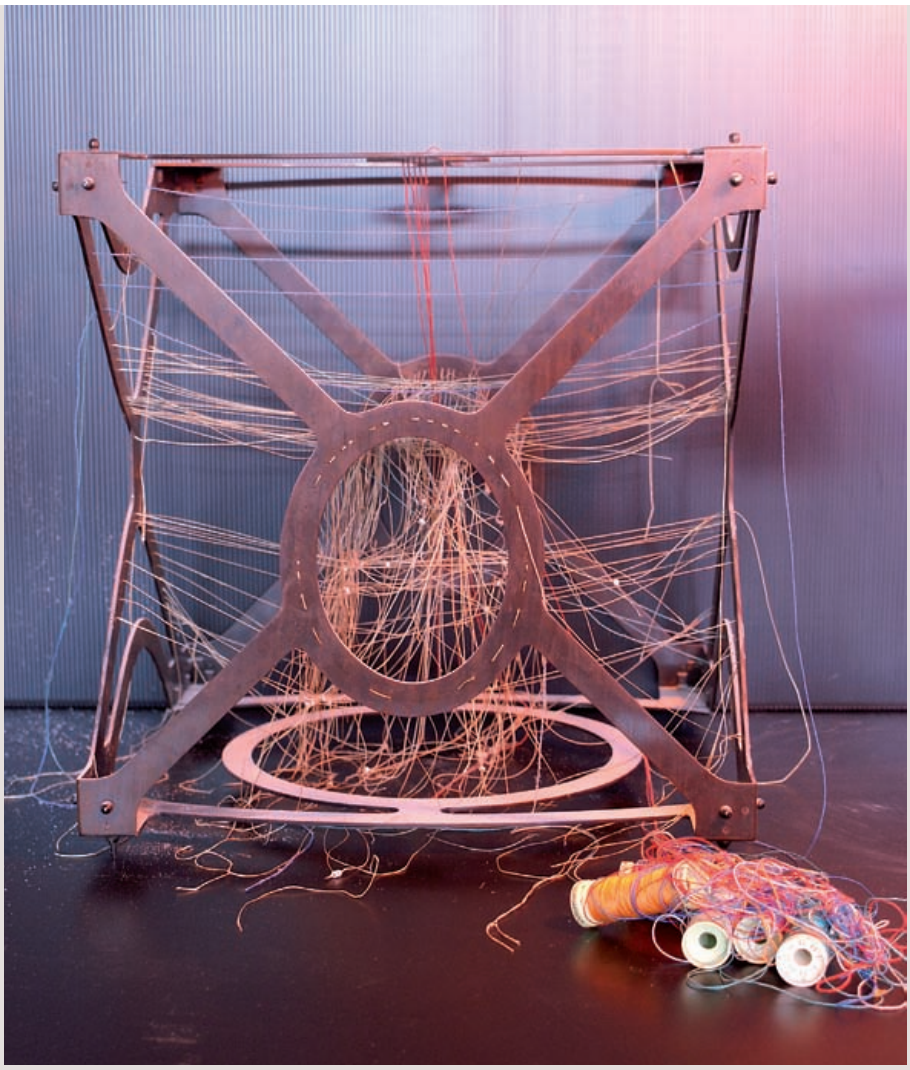
Figuur 1



Figuur 2

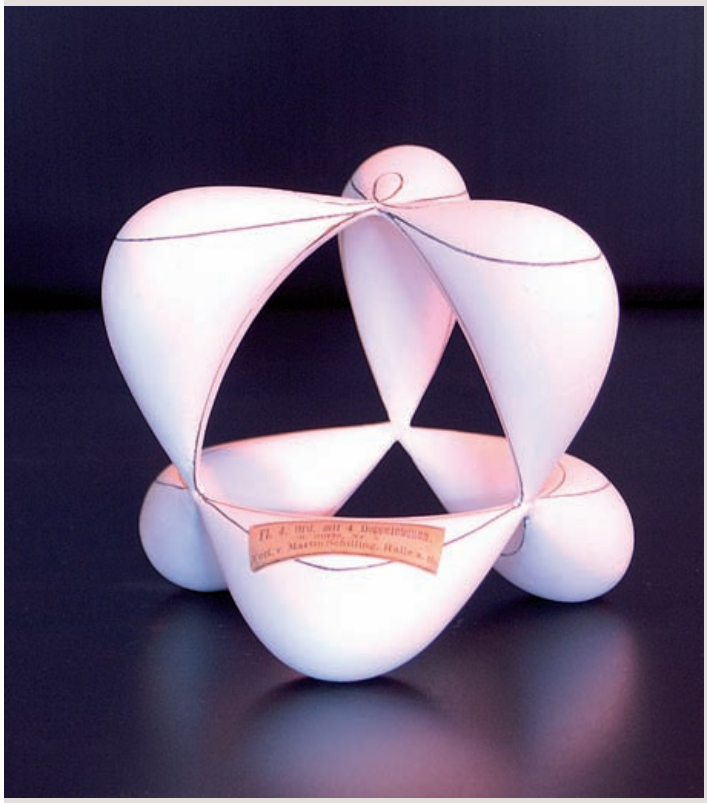
Vergelijkingen met hogere machten en mengtermen van x, y en z kunnen zeer grillige vormen opleveren, die zichzelf doorsnijden of gaten en scherpe pieken vertonen. Van sommige oude modellen is niet eens meer bekend welke vergelijking ze precies uitbeelden. Je kunt zelf op onderzoek uit gaan, door een plausibele formule in te tikken op een online functie-plotter (zie bijvoorbeeld de interactieve mathematica-server op wims.math.leidenuniv.nl, klik op 'functieplotters' en 'polyray'), en dan de coëfficiënten zodanig af te stellen dat een zo goed mogelijk gelijkend oppervlak ontstaat. Het gaat altijd om een derde- of vierdegraads vergelijking, dus een formule waarin x, y en z hoogstens tot de vierde macht voorkomen. In mengtermen is de som van de exponenten nooit meer dan vier, dus x^2y^2 of xyz^2 kan voorkomen, maar x^3z^2 niet.

Bedenk wel dat een ingewikkeld gevouwen oppervlak er heel anders uit kan zien als je het vanuit een andere positie bekijkt of als je de grootte verandert van de kubus waarin de plotter het oppervlak tekent. ➤

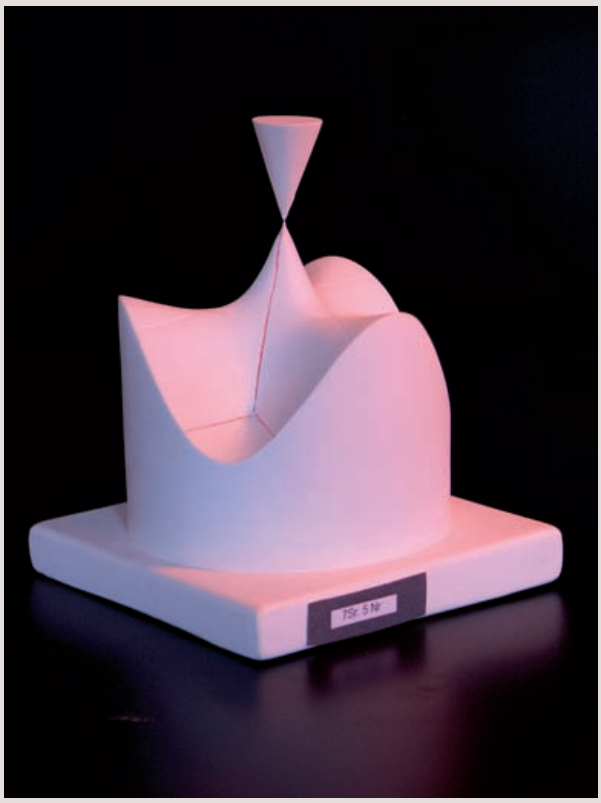


Een half gerestaureerd model, dat een idee geeft van het monnikenwerk dat nodig is om de tientallen jaren oude, vergane draden te vervangen. Een aantal Groningse draadmodellen is door hoogleraar algebra en meetkunde Marius van der Put volledig gerestaureerd.

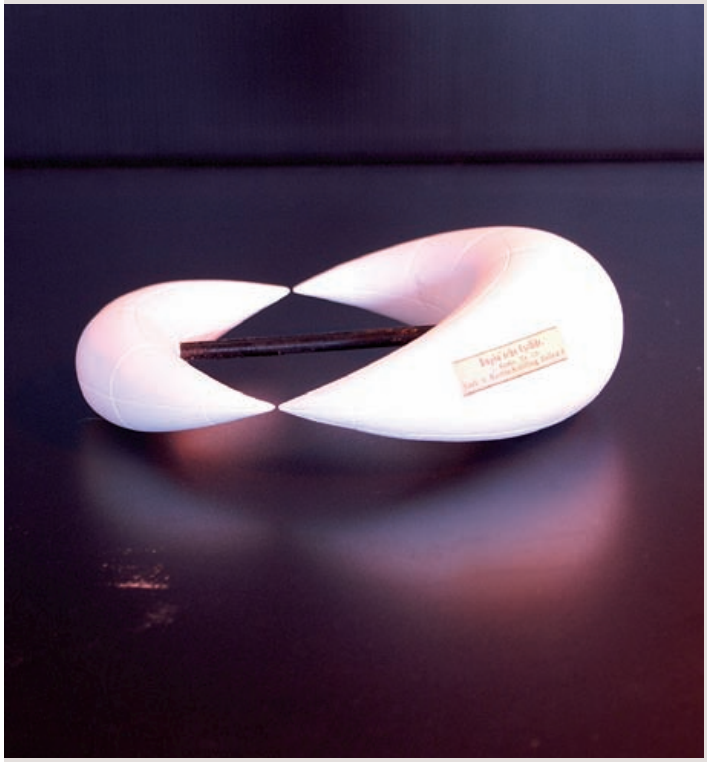
Een draadmodel van een vierdegraads oppervlak met de speciale eigenschap dat het geheel is op te bouwen uit rechte lijnen. Zulke oppervlakken heten 'regeloppervlakken'.



Een ‘Kummeroppervlak’, genoemd naar de wiskundige die als eerste deze vierdegraadsvergelijkingen bestudeerde, Ernst Eduard Kummer. Behalve het gladde oppervlak dat het model weergeeft, leveren zulke vergelijkingen ook nog een aantal losse punten in de ruimte op.



Een Cayley kubisch oppervlak, het enige derdegraads oppervlak met exact vier singuliere punten: de drie deukjes en het ene punt tussen de twee spitsen.



Een cyclide van Dupin, een vierdegraads oppervlak.

Een twaalfdegraads oppervlak

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

HOE IN TE ZENDEN?
Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2007.

OPGAVE 146

Geef alle oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} abc + d = 2 \\ abd + c = 2 \\ acd + b = 2 \\ bcd + a = 2 \end{cases}$$

Hierbij zijn a, b, c en d reële getallen.

OPGAVE 147

Op een lijn l liggen vier verschillende punten A, B, C en D, in deze volgorde. Construeer een vierkant $PQRS$ dat aan één zijde van l ligt zodat de lijn PQ de lijn l snijdt in A, de lijn RS de lijn l snijdt in B, de lijn QR de lijn l snijdt in C en de lijn PS de lijn l snijdt in D.

OPLOSSING 142

Bij een spelshow worden op een scherm n verschillende prijzen getoond. Je wordt voor n deuren geplaatst; achter deze deuren staan die prijzen. Je moet raden welke prijs achter welke deur zit. Na de eerste poging zegt de spelleider hoeveel prijs-deur-combinaties je goed had gegokt, en geeft je vervolgens de mogelijkheid om je keuzes nog te veranderen. Je wint alle prijzen als je alle prijs-deur-combinaties goed hebt gegokt, anders win je niets. Wat is de kans dat je met de prijzen naar huis gaat?

OPLOSSING. Eerst bepalen we de kans dat je in de eerste ronde precies m prijzen goed uitkiest, waarbij $m \leq n$. Voor $m = n - 1$ is deze kans gelijk aan 0; je kunt niet één prijs verkeerd kiezen. Voor $m \neq n - 1$ is de kans wel positief, en wordt hij gegeven door $\binom{n}{m}\frac{k}{n!}$, waarbij k het aantal mogelijkheden is om $n - m$ prijzen bij de verkeerde deuren te zetten.

In de tweede ronde moet je de $n - m$ foute prijs-deur-combinaties uitkiezen. De kans dat je precies deze deuren kiest, is $1/\binom{n}{m}$. Vervolgens moet je nog de juiste prijs achter de juiste deur leggen; hier heb je k mogelijkheden voor waarvan slechts één de goede is, dus de kans is $\frac{1}{k}$.

Nu combineren we de kansen uit de beide rondes: de kans dat je eerst m prijzen goed gokt en vervolgens in de tweede ronde de overige prijzen goed gokt, is

$$\binom{n}{m}\frac{k}{n!} \cdot \frac{1}{\binom{n}{m}}\frac{1}{k} = \frac{1}{n!}.$$

Merk op dat deze kans onafhankelijk is van m. Omdat $m \in \{0, 1, 2, ..., n - 3, n - 2, n\}$ (dit zijn precies n elementen), is de totale kans om alle prijzen in de wacht te slepen, gelijk aan

$$n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Hendrik Jan van Eijsden** uit Capelle aan den IJssel, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar Yvette Welling.

OPLOSSING 143

De drie getallen a, b en c zijn geheel. Bovendien is ook $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ een geheel getal. Laat zien dat a, b en c kwadraten van gehele getallen zijn.

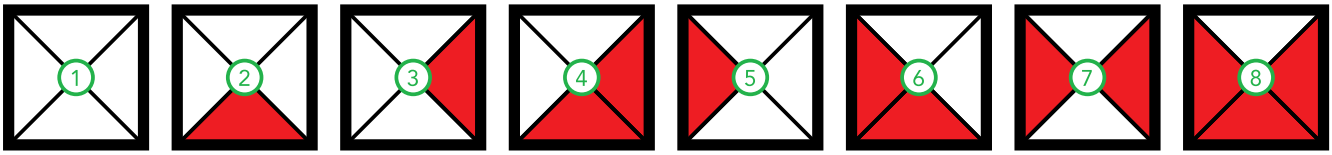
OPLOSSING. We weten dat als a en $\sqrt{a}$ positieve gehele getallen zijn, a een kwadraat is. Voor twee wortels kunnen we dit ook bewijzen. Stel namelijk dat $\sqrt{a}+\sqrt{b}=x$ met a, b en x positieve gehele getallen. Dan geldt $a=(x-\sqrt{b})^2=x^2-2x\sqrt{b}+b$, en dus is $\sqrt{4x^2b} = a-x^2+b$ geheel en $4x^2b$ een kwadraat. Dan moet ook b een kwadraat zijn, en met hetzelfde bewijs zie je dat a een kwadraat moet zijn.

Nu kunnen we het ook bewijzen voor drie wortels. Stel dat $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=y$ voor positieve gehele getallen a, b, c, y. Dan geldt ook $\sqrt{a}+\sqrt{b}=y-\sqrt{c}$, en dus $a^2+b^2+2\sqrt{ab}=y^2-\sqrt{4y^2c}+c$, ofwel

$$2\sqrt{ab}+\sqrt{4y^2c}=y^2+c-a^2-b^2.$$

Dan is $4y^2c$ een kwadraat, en dan moet c ook een kwadraat zijn. Nu weten we dat $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ geheel is, en dus zijn a en b kwadraten.

Deze opgave werd goed opgelost door **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam en **Yvette Welling** van de OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar Alexander van Hoorn.



Figuur 1

MAGISCHE BLOKKEN

■ door Jan Verbakel

Als je een vierkant met z'n diagonalen in vieren deelt en elk driehoekje al dan niet inkleurt, krijg je $2^4 = 16$ verschillende tegeltjes, die je kunt nummeren zoals in figuur 1 is gedaan. Die nummers laten we nog even buiten beschouwing, we gaan eerst met die zestien tegeltjes blokken van vier bij vier maken met twee simpele 'burenregels'.

In figuur 2 zie je een blok waarvoor geldt dat buren elkaar raken met verschillende kleuren, dus een witte zijkant ligt altijd tegen een rode.

In figuur 3 is het net andersom: buren raken elkaar altijd met dezelfde kleur, wit tegen wit, rood tegen rood.

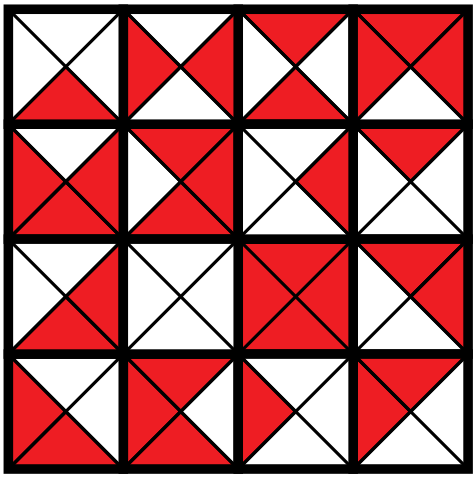
Met de regel 'gelijke buurkleur' ziet zo'n blok er heel wat geordender uit dan met de regel 'ongelijke buurkleur'. Maar met beide regels zijn nog duizenden verschillende blokken te vormen.

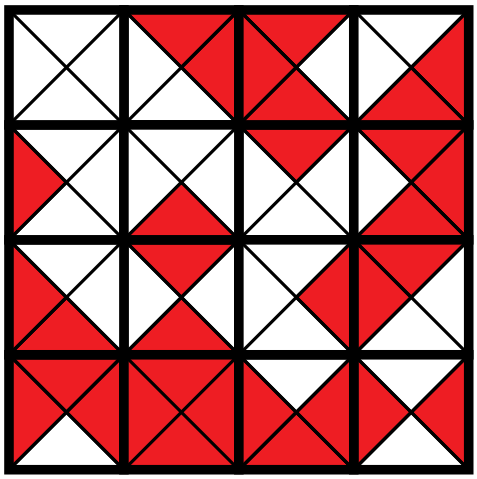
VLOEREN LEGGEN Stel nu dat je met de regel 'gelijke buurkleur' een hele vloer vol wilt leggen. Dan moet de linkerkant van elk blok aansluiten aan de rechterkant, en de onderkant aan de bovenkant. Met het blok in figuur 3 lukt dat niet. De onderkant sluit wel volgens de buurregel aan bij de bovenkant, maar links niet bij rechts.

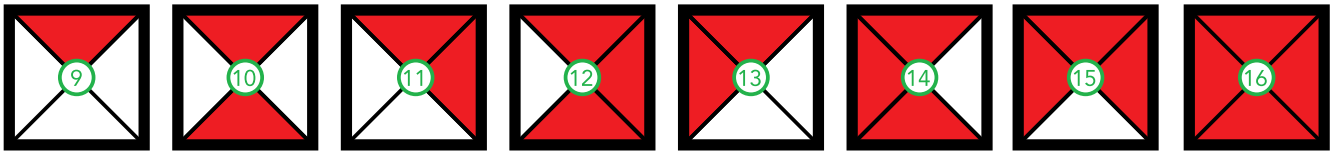
Er zijn echter honderden andere blokken waarmee dat wel kan. Een voorbeeld zie je in figuur 4. Doordat steeds wit tegen wit ligt en groen tegen groen, verschijnen ook diagonale vierkantjes die helemaal wit of helemaal groen zijn, en ook die kunnen als vlakvulling beschouwd worden. De tegelvloer in figuur 4 blijkt dan vol symmetrie te zitten.

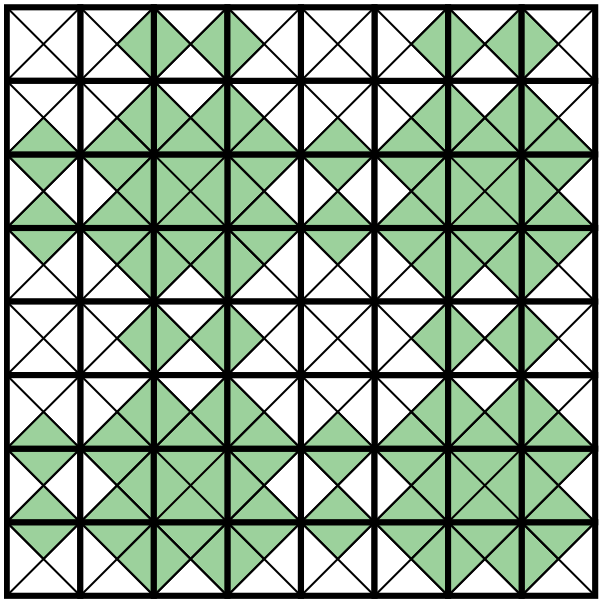
We kunnen het aantal mogelijkheden drastisch inperken door alleen met *magische blokken* te tegelen. We gebruiken daartoe de nummering van de vierkantjes in figuur 1 en eisen dat de som van iedere rij en iedere kolom 34 is. Er blijven nu maar drie echt verschillende blokken over om mee te tegelen. Figuur 5 toont een van de drie mogelijkheden.

Maar voor volwaardige magie geldt ook nog de eis dat de som van de diagonalen 34 is. Er blijft nu precies één mogelijkheid over, de enige perfect magische betegeling, afgebeeld in figuur 6. Het patroon is niet alleen zeer symmetrisch, maar ook invariant onder kleurverwisseling: als je alle witte driehoekjes geel maakt en omgekeerd, komt exact hetzelfde patroon weer tevoorschijn. ■

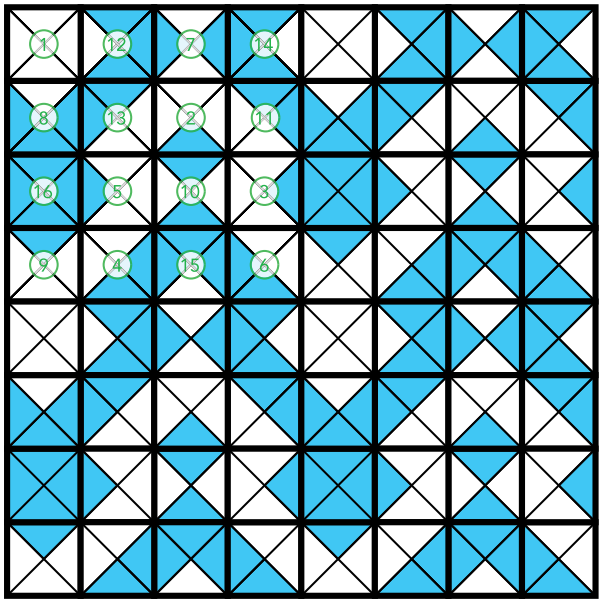

Figuur 2


Figuur 3

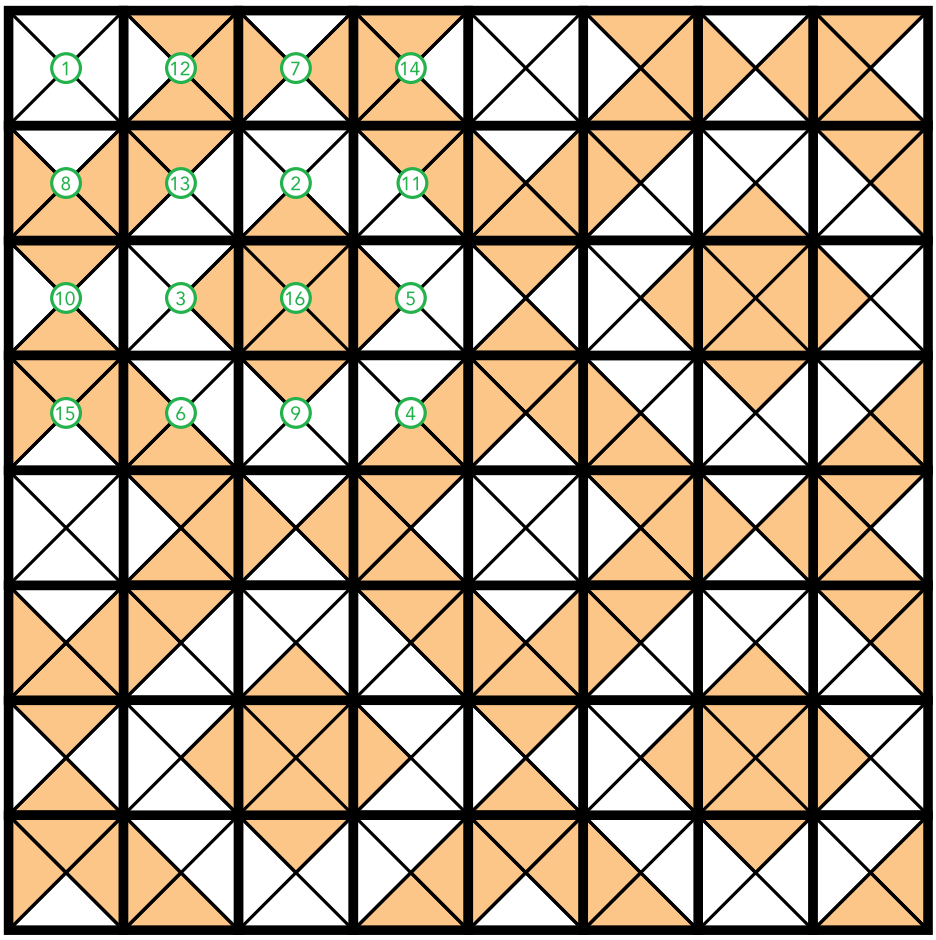




Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6

In het juninummer van *Pythagoras* stond een artikel over paradoxen en zelfverwijzing. Daarin kwamen zinnen voor die over zichzelf praten, zoals 'Deze zin bevat vijf woorden'. Je kunt een zin of een getalrij zelfs z'n eigen inhoud laten opsommen. Er is dan geen sprake van een paradox, integendeel, het wonderlijke is juist dat je elke tegenspraak kunt vermijden.

■ door Arnout Jaspers

ZELFVERWIJZINNEN en

Deze zin bevat twee keer het woord 'deze', twee keer het woord 'zin', twee keer het woord 'bevat', zeven keer het woord 'twee', twaalf keer het woord 'keer', twaalf keer het woord 'het', twaalf keer het woord 'woord', twee keer het woord 'vier', vier keer het woord 'twaalf', twee keer het woord 'zeven' en twee keer het woord 'en'.

ZELFVERWIJZINNEN De zin van 59 woorden in het kader is, voor zover bekend, de kortst mogelijke zin van de vorm "Deze zin bevat ... keer het woord '...' , ..." , die vervolgens woord voor woord z'n eigen inhoud opsomt. Laten we zo'n constructie een *zelfverwijzin* noemen. Deze woordelijke zelfverwijzin is nog met pen en papier en wat puzzelen en proberen gevonden. Maar toen doemde de volgende uitdaging op: bestaat er een letterlijke zelfverwijzin? Dit is dus een zin volgens het principe "Deze zin bevat ... keer de letter '...' , ... keer de letter '...' , ...", waarbij alle getallen moeten worden uitgeschreven.

Dit probleem is in januari 2006 als prijsvraag gepubliceerd in het tijdschrift *Natuurwetenschap & Techniek*. Geholpen door zelfgeschreven computerprogamma's produceerden lezers hele boekwerken met zulke zelfverwijzinnen. Om alles kloppend te krijgen, waren in veel gevallen wel vulwoordjes nodig als 'exact' of 'precies'. De oplossing met het minste vulmateriaal kwam toen van Thomas Beuman, zie het kader op pagina 25.

Een open probleem is: bestaat er een volledige letterlijke verwijzin? Dit is een letterlijke verwijzin waarin alle letters van het alfabet voorkomen. Ook kun je nog proberen om een minimale verwijzin zoals die in het kader te vinden. Je kunt dat op twee manieren opvatten: een verwijzin die zo weinig mogelijk letters van het alfabet bevat, of een verwijzin die in totaal zo kort mogelijk is.

Als je de eis dat de zin moet beginnen met een aanhef als "Deze zin bestaat uit ..." weglaat, maar genoegen neemt met een kale opsomming in de trant van "Vijfenveertig e, eenendertig n, ...", dan is dit minimumprobleem vrijwel zeker opgelost: er bestaat een letterlijke zelfverwijzin van maar twintig letters lang! De oplossing staat hieronder, ondersteboven.

Vijf v, vijf i, vijf j, vijf f.

INVENTARIJEN

Deze zin bestaat uit vijfenveertigmaal een a, tweemaal een b, driemaal een c, achtmaal een d, tachtigmaal een e, driemaal een f, tienmaal een g, driemaal een h, drieëntwintigmaal een i, driemaal een j, eenentwintigmaal een l, eenentwintigmaal een m, eenenveertigmaal een n, negenmaal een r, tweemaal een s, tweeëntwintigmaal een t, tweemaal een u, vijfmaal een v, negenmaal een w en driemaal een z.

INVENTARIJEN In het juninummer vroegen we te zoeken naar zelfverwijzende getalrijen, die we hier *inventarijen* dopen, omdat ze de inventaris van hun eigen inhoud zijn. Bijvoorbeeld: van de rij **3, 4, 4, 5** is de inventaris **1, 3, 2, 4, 1, 5** ('Deze rij bevat 1 keer het cijfer 3, 2 keer het cijfer 4, 1 keer het cijfer 5'). Deze twee rijtjes zijn niet gelijk, dus is **3, 4, 4, 5** geen inventarij.

De kortst mogelijke inventarij is **2, 2,** want die bevat 2 keer het cijfer 2. Het zal duidelijk zijn dat inventarijen altijd een even aantal cijfers hebben. Echter, een inventarij met lengte 4, 6 of 12 bestaat niet. Een inventarij met lengte 8 is **2, 1, 3, 2, 2, 3, 1, A,** met A groter dan 3. Eén van lengte 10 is **3, 1, 2, 2, 3, 3, 1, A, 1, B** met A ongelijk aan B en beide groter dan 3. Een inventarij met lengte 14 is **4, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 4, 1, A, 1, B, 1, C** met A, B en C ongelijk aan elkaar en groter dan 4.

Zo wordt al snel duidelijk dat een inventarij van lengte 2(N – 1) + 8 te vormen is door een kop **N, 1, 3, 2, 2, 3, 2, N,** waaraan een lichaam komt met een zuivere opsomming **1, A_1, 1, A_2, ..., 1, A_k,** waarbij de A_i's staan voor N – 1 getallen ongelijk aan N en aan elkaar en allemaal groter dan 3.

Als je doet alsof ∞ (oneindig) een bonafide getal is, kun je begin en eind opschrijven van een inventarij die alle natuurlijke getallen bevat: ∞, **1, 3, 2, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, ..., 2,** ∞.

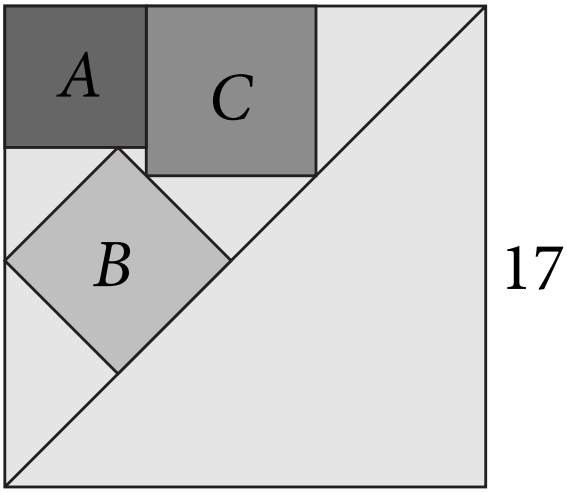
VERDER ONDERZOEK Op het gebied van de inventarijen valt nog van alles te onderzoeken. Zo zijn er rijen die je tweede-orde inventarijen zou kunnen noemen: niet de inventaris, maar de inventaris-van-de-inventaris is gelijk aan de oorspronkelijke getalrij. Kun je ook derde, vierde of *n*-de orde inventarijen vinden?

Nog een open kwestie: behalve 2, 2 bevatten al deze inventarijen de getallen 1 tot en met 3. Kan het ook zonder? Zo ja, hoe hoog kun je beginnen bij een gegeven lengte *m* van de hele rij? Stuur je bevindingen naar post@pythagoras.nu. ■

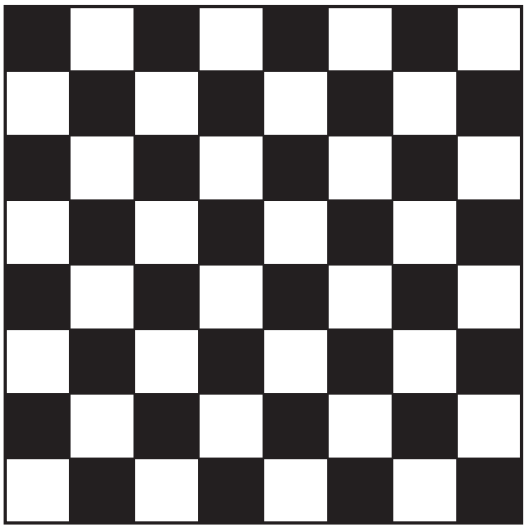
PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

VIERKANTEN Als de zijde van het grote vierkant 17 is, wat zijn dan de oppervlaktes van de vierkanten *A*, *B* en *C*?

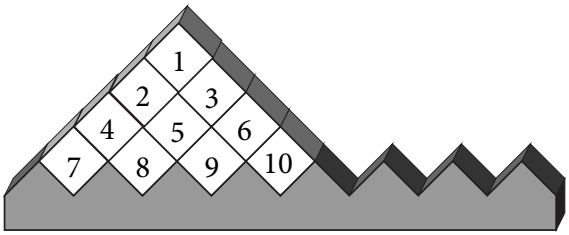


SCHAAKBORD Leg acht muntjes op de witte velden van een schaakbord. Doe het zó dat in iedere rij en kolom precies één muntje ligt. Op hoeveel manieren kan dat?



KWADRATENKETTING Zet de getallen 1 tot en met 15 op een rij. Doe het zó dat twee opeenvolgende getallen steeds een kwadraat als som hebben.

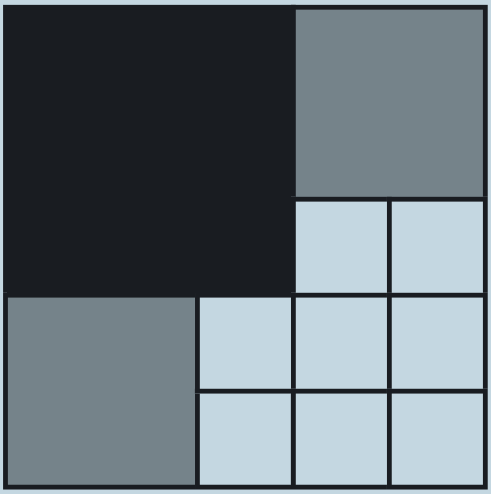
BLOKKEN STAPELEN In de figuur zie je een toren van tien blokken. Kun je de toren drie plaatsen naar rechts opschuiven? Je mag de blokken alleen één voor één verplaatsen en na iedere zet moet elk blok op twee blokken met hogere nummers rusten (of op het rek).



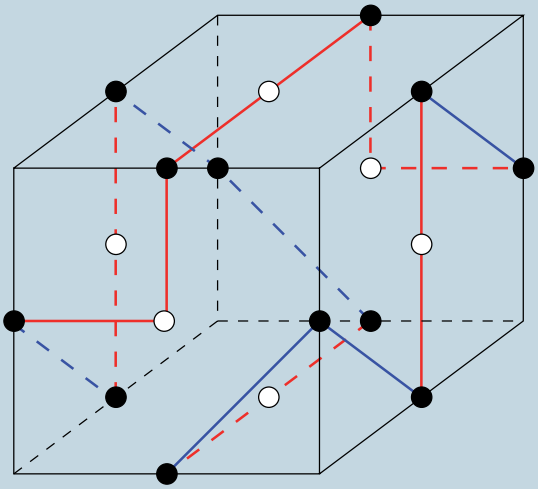
RANGLIJST Bij een wedstrijd zijn er vijf deelnemers: *A*, *B*, *C*, *D* en *E*. Na afloop wordt een ranglijst gemaakt: wie is er eerste geworden, wie tweede, etcetera. Het is mogelijk dat verschillende deelnemers op dezelfde plaats in de ranglijst staan. Hoeveel ranglijsten zijn er mogelijk?

OPLOSSINGEN nr. 6

VIERKANTEN Je kunt een vierkant verdelen in n vierkanten, tenzij $n = 2$, 3 of 5, zie het artikel 'Vierkant van vierkanten' in *Pythagoras* 45-5 (april 2006). Een oplossing voor $n = 11$ zie je hieronder.

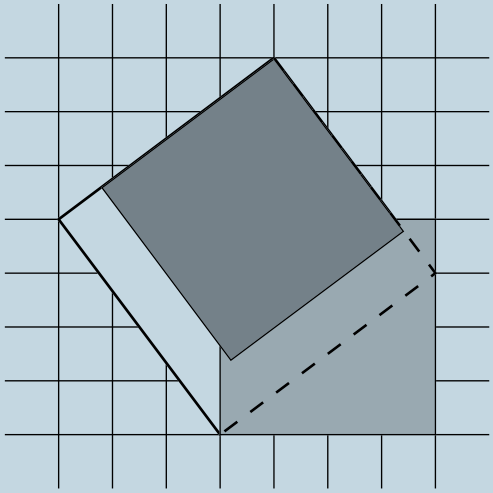


RONDWANDELING Kleur de twaalf punten op de ribben zwart en de zes punten op de zijvlakken wit. De kortste afstand tussen een zwart en een wit punt is 1 en de kortste afstand tussen twee zwarte punten is $\sqrt{2}$. Omdat een rondwandeling langs alle punten minimaal 12 – 6 = 6 keer van een zwart punt naar een zwart punt gaat, is de totale lengte altijd ten minste $6\sqrt{2}+12$. Dat er ook daarwerkelijk een rondwandeling van deze lengte bestaat, zie je in de figuur.

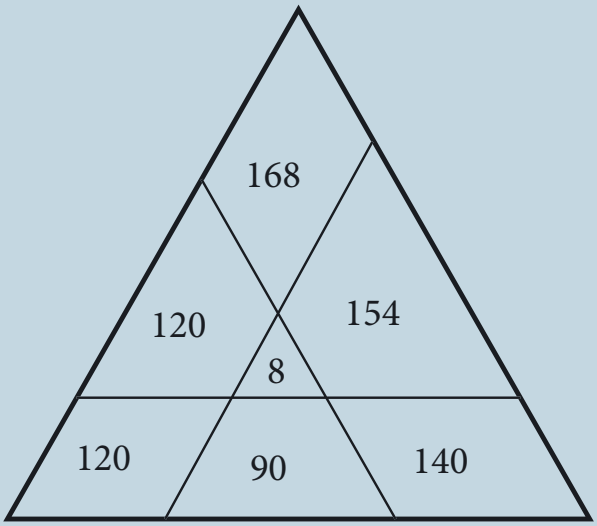


VERSCHILLEN Kies de getallen 0, 1, 2, 3, 7, 11 en 15.

OVERDEKKING Het is mogelijk om een vierkant met zijde 5 te overdekken met drie vierkanten met zijde 4. In de figuur zie je hoe je twee van de drie vierkanten moet neerleggen.



GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK



In de 47ste jaargang van *Pythagoras* zullen we in elk nummer aandacht besteden aan een van 's werelds grootste wiskundigen. In deze eerste aflevering is dat Leonhard Euler. Hij werd dit jaar precies 300 jaar geleden geboren.

■ door Alex van den Brandhof

LEONHARD EULER (1707-1783): DE BLINDE ZIENER

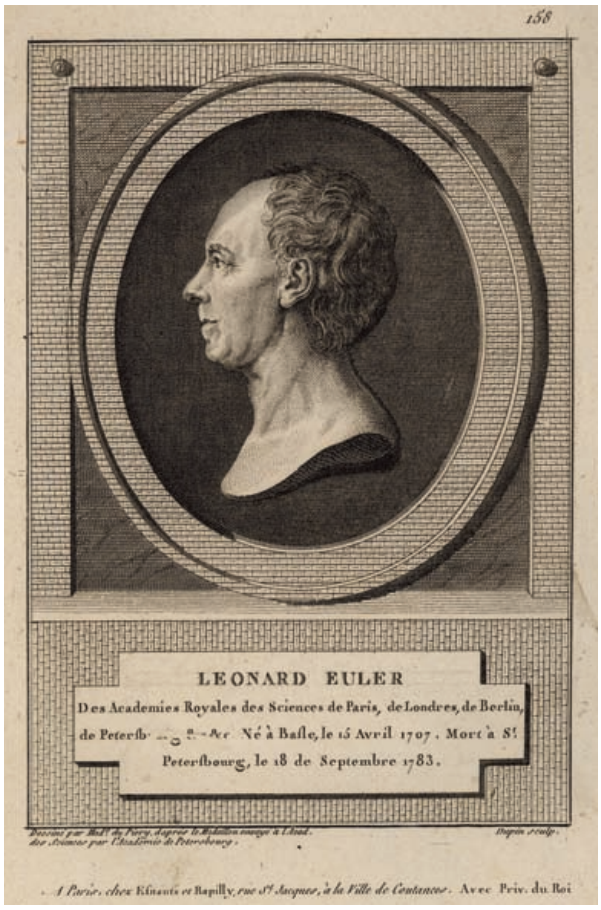
Iedereen die iets met wiskunde doet, gebruikt dagelijks Eulers erfgoed, omdat de moderne notatie grotendeels van hem afkomstig is. Leonhard Euler schreef als eerste $f(x)$ om een functie aan te duiden, net als de letter sigma (Σ) voor een som van veel termen. Hij bedacht de huidige namen van de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens. Hij voerde de Griekse letter π in voor de verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel, de letter i voor de imaginaire eenheid $\sqrt{-1}$ en de letter e voor het grondtal van de natuurlijke logaritme.

Waarom Euler juist die letters koos weten we niet zeker. Misschien nam hij de i omdat die het meest op het cijfer 1 lijkt, of omdat het de eerste letter van 'imaginair' is. Er is wel gesuggereerd dat hij met de e zijn eigen initiaal bedoelde, maar daarvoor was Euler te bescheiden. Dat Euler zijn keuze baseerde op het woord 'exponentieel', wordt door veel wiskundigen eveneens verworpen. Eli Maor geeft in het boek *e: The Story of a Number* (1994) als meest waarschijnlijke reden dat Euler een letter koos uit het begin van het alfabet. De letters a, b, c en d werden al veelvuldig gebruikt in de wiskunde; de letter e daarentegen was nog 'vrij'.

MOOISTE VERGELIJKING Met de notaties die Euler invoerde, kon hij een verbluffende ontdekking heel compact opschrijven. Hij bewees namelijk dat

$$e^{\pi i}+1=0.$$

Destijds leek het al bijna een wonder dat een irrationaal getal (e), verheven tot een imaginaire macht (πi) een heel alledaags, geheel getal opleverde. Bovendien werd dat kunststukje volbracht door getallen uit ver uiteenliggende takken van de wiskunde: π is een getal uit de meetkunde, i kwam oorspronkelijk tevoorschijn bij het oplossen van vergelijkingen en e heeft te maken met exponenten en logaritmen.



Figuur 1 Leonhard Euler werd geboren op 15 april 1707 in Basel, Zwitserland. Met meer dan 800 artikelen en boeken is hij verreweg de productiefste wiskundige uit de achttiende eeuw: in 1775 schreef hij ongeveer een artikel, in lengte variërend van 10 tot 50 pagina's, per week. Zijn verzameld werk beslaat zo'n 25000 pagina's, verdeeld over 79 delen. Zijn bijdragen bestrijken vrijwel alle gebieden van de wiskunde, zoals getaltheorie, meetkunde, (complexe) analyse en toegepaste wiskunde.

In 1988 werd de vergelijking, die de vijf belangrijkste constantes uit de wiskunde verenigt, door lezers van het tijdschrift *Mathematical Intelligencer* gekozen tot 'mooiste vergelijking aller tijden in de wiskunde'.

BASEL, SINT PETERSBURG EN BERLIJN

Leonhard Euler werd geboren op 15 april 1707 in het Zwitserse Basel als zoon van Paul Euler, een theoloog aan de Universiteit van Basel en Margarethe Brucker, de dochter van een protestantse dominee. Zijn vader wilde dat Leonhard theologie ging studeren. Hij begon aan deze studie, maar kon er zijn draai niet vinden. Johann Bernoulli overtuigde Paul Euler ervan dat zijn zoon voorbestemd was een groot wiskundige te worden. Leonhards vader stemde toe in het overstappen naar de studie wiskunde; in 1726 studeerde Leonhard af aan de Universiteit van Basel.

Een jaar later werd hij benoemd aan de Academie voor Wetenschap in Sint Petersburg. Daar volgde hij in 1730 zijn vriend Daniël Bernoulli, zoon van Johann, op als professor in de wiskunde en vestigde hij zijn grote reputatie. In 1741 werd Euler door Frederik de Grote, koning van Pruisen, naar Berlijn gehaald om een Academie voor Wetenschap te helpen stichten. Eind jaren '60 keerde Euler terug naar Sint Petersburg.

BLIND PRODUCTIEF Euler bleef briljante wiskunde creëren tot op de dag van zijn dood, 18 september 1783. Dit is des te opmerkelijker omdat hij de laatste zeventien jaar van zijn leven volkomen blind was. Het verlies van zijn gezichtsvermogen begon in 1735, toen de Académie in Parijs een beloning uitloofde voor de oplossing van een astronomisch probleem. Euler, bezeten van de opdracht, werkte er drie dagen onophoudelijk aan en was al zijn collega's te vlug af, zodat hij de prijs in de wacht sleepte. Dit ging niet zonder problemen: de hoge werkdruk en abominabele werkomstandigheden kostten de 28-jarige Euler het licht in een van zijn ogen. Hijzelf zag dit slechts als een kleine handicap, of zelfs een voordeel: hij zei zelf dat hij nu 'minder afgeleid werd'.

Maar dertig jaar later werd hij door staar in zijn goede oog helemaal blind. Toch leed zijn wiskundige arbeid daar nauwelijks onder: zijn fenomenale geheugen vormde zijn geestelijke bibliotheek, die hij altijd kon raadplegen. Hij was in de jaren die zich in duisternis voltrokken productiever dan ooit. Opschrijven kon hij zijn gedachten echter niet meer, hij moest alles dicteren aan zijn zoon Albert. Hij werkte door totdat hij op 18 september 1783 in Sint Petersburg door een beroerte overleed.

EEN GENIE OP VELE TERREINEN Leonhard Euler heeft op vrijwel elk gebied van de wiskunde grote bijdragen geleverd. In 1732 bewees hij dat het getal $2^{25} + 1$ niet priem is; een opmerkelijke prestatie in een tijd dat er nog geen rekenmachines waren. In 1753 schreef Euler aan Goldbach dat hij de Laatste Stelling van Fermat voor het geval $n = 3$ had bewezen: er bestaan geen geheeltallige oplossingen voor de vergelijking $x^3 + y^3 = z^3$. Later bleek dat in zijn bewijs een fout zat, maar dat kon gelukkig gerepareerd worden. Van de Kleine Stelling van Fermat (als p een priemgetal is en a is geen p-voud, dan geldt dat a^{p-1} een p-voud plus 1 is) wist Euler een generalisatie te geven, die tegenwoordig toegepast wordt in de cryptografie.

In de analyse was Euler een meester in het manipuleren van oneindige sommen. In *Pythagoras* 41-4 (april 2002) schreven we over Eulers bewijs dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Voor het getal e vond hij een kettingbreuk; niet rechtstreeks, maar via de breuk (e – 1)/2:

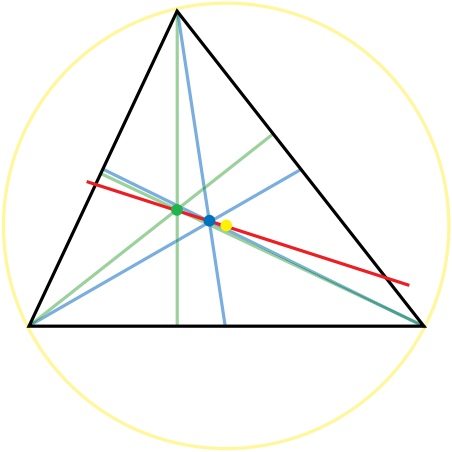
$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cdots}}}}}}$$

Hierover schreven we in *Pythagoras* 43-5 (april 2004).

In de meetkunde kennen we 'de formule van Euler'. Voor een veelvlak, een ruimtelijke figuur omsloten door platte vlakken, geldt: aantal zijvlakken – aantal ribben + aantal hoekpunten = 2. In jaargang 42 (2002-2003) kwam deze formule uitgebreid aan bod.

In de vlakke meetkunde bewees Euler dat in een driehoek het hoogtepunt (snijpunt van de hoogtelijnen), het zwaartepunt (snijpunt van de zwaartelijnen) en het middelpunt van de omgeschreven cirkel (snijpunt van de middelloodlijnen) altijd door één lijn gaan. Deze lijn wordt wel 'de lijn van Euler' genoemd, zie figuur 2 op de volgende pagina.

In de grafentheorie is Eulers oplossing van het probleem van de zeven bruggen van Koningsbergen beroemd geworden.



Figuur 2 De rode lijn is de lijn van Euler (hoogtepunt: groen, zwaartepunt: blauw, middelpunt van omgeschreven cirkel: geel).

HET KONINGSBERGER-BRUGGEN-PROBLEEM In figuur 3 zie je een satellietfoto van de Russische stad Kaliningrad. Deze stad was tot 1946 deel van Pruisen en heette tot die tijd Königsberg (in het Nederlands: Koningsbergen). Door de stad stroomt de rivier de Pregel die de stad in stukken verdeelt. In de achttiende eeuw werden de verschillende oevers via zeven bruggen met elkaar verbonden, zie figuur 4. In het begin van de achttiende eeuw was Koningsbergen een welvarende stad. Volgens de overlevering vroegen de inwoners zich af of het mogelijk is een wandeling door de stad te maken waarbij elke brug precies eenmaal wordt overgestoken. Daarbij was het niet nodig om bij het beginpunt van de wandeling te eindigen, terug kon altijd nog na het bezoek aan een café.

Euler bewees in 1736 dat zo'n wandeling onmogelijk is. Hij publiceerde zijn bewijs in een artikel getiteld 'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis'.

EULERS OPLOSSING Euler geeft elk stadsdeel een letter: A, B, C, D; zie figuur 5a. Hij stelt de route voor als een rijtje letters, dat aangeeft in welke volgorde de wandelaar zich in de vier stadsdelen bevindt. Zo geeft het rijtje ABDC aan dat de reiziger start in stadsdeel A, vervolgens naar stadsdeel B loopt, dan naar D en tot slot naar C. Omdat er in figuur 5a zeven bruggen zijn, zal het rijtje uit acht letters bestaan.

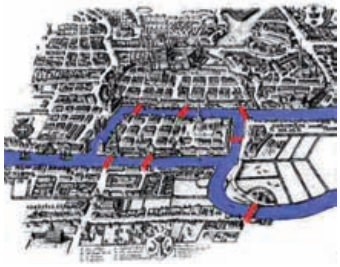
Euler merkt op dat als er drie bruggen naar een stadsdeel gaan, de letter van dat stadsdeel precies twee keer in het rijtje moet voorkomen: één keer als je er langskomt via brug 1 en weggaat via brug 2, en nog een tweede keer als brug 3 aan de beurt is. Op dezelfde manier zal een letter precies drie keer voorkomen als het stadsdeel met vijf bruggen verbonden is. Dus zouden B, C en D ieder twee keer, en A zelfs drie keer moeten voorkomen in een rijtje. Dat is samen negen, terwijl we op grond van het aantal bruggen al wisten dat het rijtje uit slechts acht letters kan bestaan. De rekensom gaf Euler weer in een tabel, zie figuur 5b, en zo toonde hij eenvoudig aan dat het Koningsberger-bruggenprobleem geen oplossing kan hebben.

Euler werkt deze redenering in het artikel uit tot een algemene methode om te bepalen of er een wandeling bestaat. Het idee is te tellen hoe vaak iedere letter in het rijtje moet voorkomen, en dan te zien of dat gelijk is aan het aantal bruggen plus één.

Als er naar een stadsdeel een oneven aantal bruggen gaat, zeg $2n - 1$, dan komt de betreffende letter dus n keer voor in het rijtje. Als er naar het stadsdeel een even aantal bruggen gaat, dan maakt het uit op welk moment in de wandeling je in dat stadsdeel komt. Is stadsdeel A alleen maar een tussenstation tijdens de wandeling, dan kom je er steeds via een brug aan en gaat er via een tweede brug weg. Het aantal keren dat de letter A in het rijtje voorkomt, is dan precies de helft van het aantal bruggen dat naar A gaat. Is A echter begin- of eindpunt in de wandeling, dan zal de letter A een keer extra voorkomen in het rijtje. We zien dit terug in de tabellen waarmee Euler berekent of een wandeling mogelijk is.

TABELLEN Gegeven is een willekeurige plattegrond die uit de stadsdelen A, B, C, ... bestaat, verbonden via een aantal bruggen. Euler telt het aan-

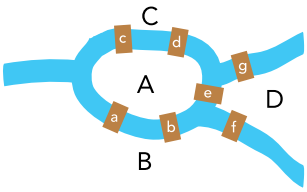
Figuur 3 Een satellietfoto van het huidige Kaliningrad (bron: Google Earth). Sommige oude bruggen zijn er niet meer.



Figuur 4 Koningsbergen in het begin van de achttiende eeuw. De oevers worden met elkaar verbonden via zeven bruggen.

tal bruggen, voegt daar één aan toe en noteert dat boven een tabel met drie kolommen. In de tabel noteert hij de letters van de stadsdelen in de eerste kolom, en het aantal bruggen dat naar het betreffende stadsdeel leidt in de tweede kolom. Bij de letters met een even aantal bruggen noteert hij een asterisk (*). In de derde kolom noteert hij de helft van de aantallen in de tweede kolom; de helft van een oneven getal wordt naar boven afgerond. Hij berekent de som van de getallen in de derde kolom. Indien deze som één minder dan of gelijk is aan het bovenaan vermelde getal (het aantal bruggen plus één), dan bestaat er een wandeling waarbij elke brug precies één keer wordt overgestoken, en anders niet. Indien de som één minder is dan het bovenaan vermelde getal, begint de wandeling in een stadsdeel dat met een asterisk is gemarkeerd. Indien de som precies gelijk is, start de wandeling in een ongemarkeerd stadsdeel.

In figuur 6a zie je een stad die uit zes stadsdelen bestaat, die via vijftien bruggen met elkaar worden verbonden. In figuur 6b staat de bijbehorende tabel. Euler concludeert dat een wandeling waarbij elke brug precies één keer wordt overgestoken mogelijk is. De wandelaar moet starten in D of E. Een mogelijke wandeling is EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD. Een kleine letter geeft aan welke brug moet worden bewandeld tussen twee stadsdelen.



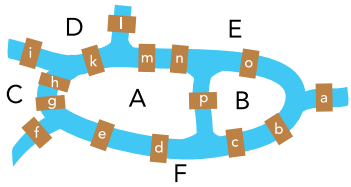
Figuur 5a Koningsbergen: vier stadsdelen verbonden via zeven bruggen

		8
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9 +

Figuur 5b

GRAFENTHEORIE Eulers artikel wordt wel beschouwd als de geboorte van de grafentheorie. Een *graaf* is een figuur die uit punten en lijnen bestaat. De plattegrond van Koningsbergen kan als graaf worden gerepresenteerd als in figuur 7. In die graaf stellen de punten de stadsdelen voor en de lijnen representeren de bruggen. Het *aantal* lijnen dat samenkomt in een punt, heet de *graad* van dat punt.

Euler komt met zijn telargument tot de slotsom dat de graaf niet meer dan twee punten mag hebben met een oneven aantal lijnen. Dat had hij ook sneller kunnen inzien. Als een punt namelijk geen begin- of eindpunt van de wandeling is, dan komt de wandelaar er elke keer binnen en gaat er weer weg, dus heeft een even graad. Is een punt begin- of eindpunt, dan hoeft de wandelaar het punt alleen maar te verlaten respectievelijk te betreden: zo'n punt heeft een oneven graad. Als de wandeling moet beginnen en eindigen bij hetzelfde punt, dan moet dit punt – net als elk ander punt – een even graad hebben.

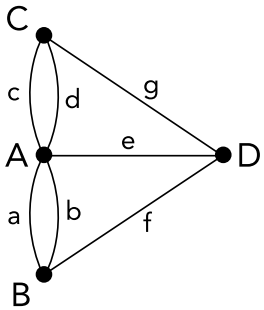


Figuur 6a Een stad bestaande uit zes stadsdelen verbonden via vijftien bruggen

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16 +

Figuur 6b

Het begrip 'graaf' werd pas in 1878 – bijna een eeuw na Eulers dood – ingevoerd, door J.J. Sylvester. Tegenwoordig kent de grafentheorie vele toepassingen. Het gehele internet is een graaf, Google gebruikt grafentheorie om websites te vinden, de wiskundige theorie achter sudoku's maakt gebruik van grafentheorie en grafen zijn onmisbaar bij onder andere telefoonnetten en (spoor)wegennetten.

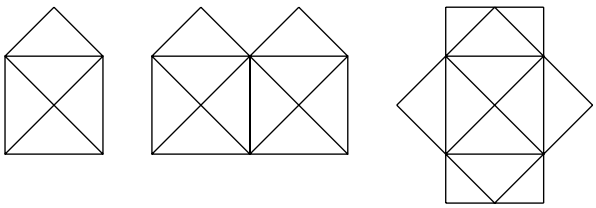


Figuur 7 De bruggen van Koningsbergen gerepresenteerd als graaf

Bij een willekeurig netwerk van bruggen is het alleen mogelijk een wandeling te maken waarbij elke brug precies één keer wordt overgestoken, als alle punten een even graad hebben, of als precies twee punten een oneven graad hebben.

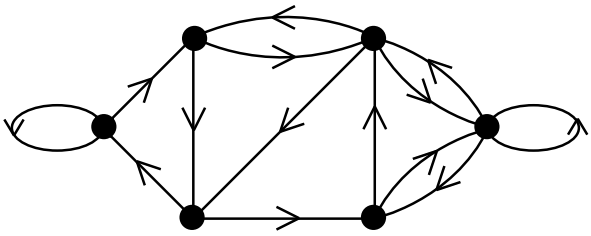
PROBLEMEN OM OVER NA TE DENKEN

1. Kunnen de lijnenpatronen in figuur 8 worden getekend zonder een tweede keer langs een lijnstuk te gaan, en zonder de potloodpunt van het papier te halen? Kun je in het algemeen zeggen aan welke voorwaarden een lijnenpatroon moet voldoen, om onder deze condities getekend te kunnen worden?



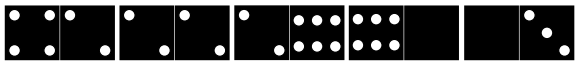
Figuur 8

2. Bestaat er een wandeling in de graaf van figuur 9, waarbij elk lijnstuk precies één keer wordt doorlopen, en wel in de aangegeven richting? Hoe zit dat als begin- en eindpunt van de wandeling gelijk moeten zijn?



Figuur 9

3. Is het mogelijk om alle stenen van het dominospel (28 stuks; de helften hebben 0 tot en met 6 ogen) volgens de regels in één cykel te leggen? In figuur 10 zie je enkele dominostenen aan elkaar gelegd.



Figuur 10

MEER INFORMATIE Een mooi boek over grafentheorie is *Graph theory, 1736-1936* van N.L. Biggs, E.K. Lloyd en R.J. Wilson. Daarin staat onder andere een Engelse vertaling van Eulers artikel over het Koningsberger-bruggenprobleem.

INTERNET Op het internet is een schat aan informatie over Leonhard Euler te vinden. We vermelden hier www.eulerarchive.org, een online verzameling van de teksten van Leonhard Euler. De website biedt onder meer scans van veel originele publicaties, informatie over de data van publicaties en vertalingen van de belangrijkste zaken, zoals abstracts, in het Engels. Een Nederlandstalige biografie van Euler is te lezen op www.math4all.nl. ■

EULERTRIP

Eulers driehonderdste geboortedag (15 april 2007) gaat in de wiskundewereld niet onopgemerkt voorbij. De *Mathematical Association of America* organiseerde in juli een veertiendaagse Eulertrip. Hierbij werden zijn geboorteplaats Basel, en de twee steden waar hij lange tijd werkzaam is geweest, Berlijn en St. Petersburg, bezocht. Foto links: het gebouw van de *Akademie der Wissenschaften* in Berlijn. Foto rechts: deelnemers van de Eulertrip voor het woonhuis van Euler in St. Petersburg. (Foto's: Ron Rosier/MAA)

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

ZUINIG AUTORIJDEN

Jos rijdt over het hele traject één op veertien.

HONGER EN DORST?

Op het vraagteken hoort de letter H.
Je leest dan met de klok mee: THEETENT.

SAMEN 20

Je kunt 20 maken met 6, 6 en 8, maar ook met 9, 9, 1 en 1 (draai het blaadje om!).

EEN RODE BAL

Gonnie heeft met kans $\frac{1}{2}$ de rode bal met cijfer 1 getrokken; de kans is dan 0 dat ik die bal trek. Gonnie heeft met kans $\frac{1}{2}$ de rode bal met cijfer 2 getrokken; de kans dat ik vervolgens de rode bal met cijfer 1 trek, is $\frac{1}{3}$. Dat betekent dat ik met kans $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de rode bal met cijfer 1 trek.

HOE OUD?

Ik ben nu 30 en jij bent nu 20.

PYTHAGORAS
47ste jaargang nummer 1
september 2007
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Marco Swaen, Chris Zaal

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Alex van den Brandhof, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.

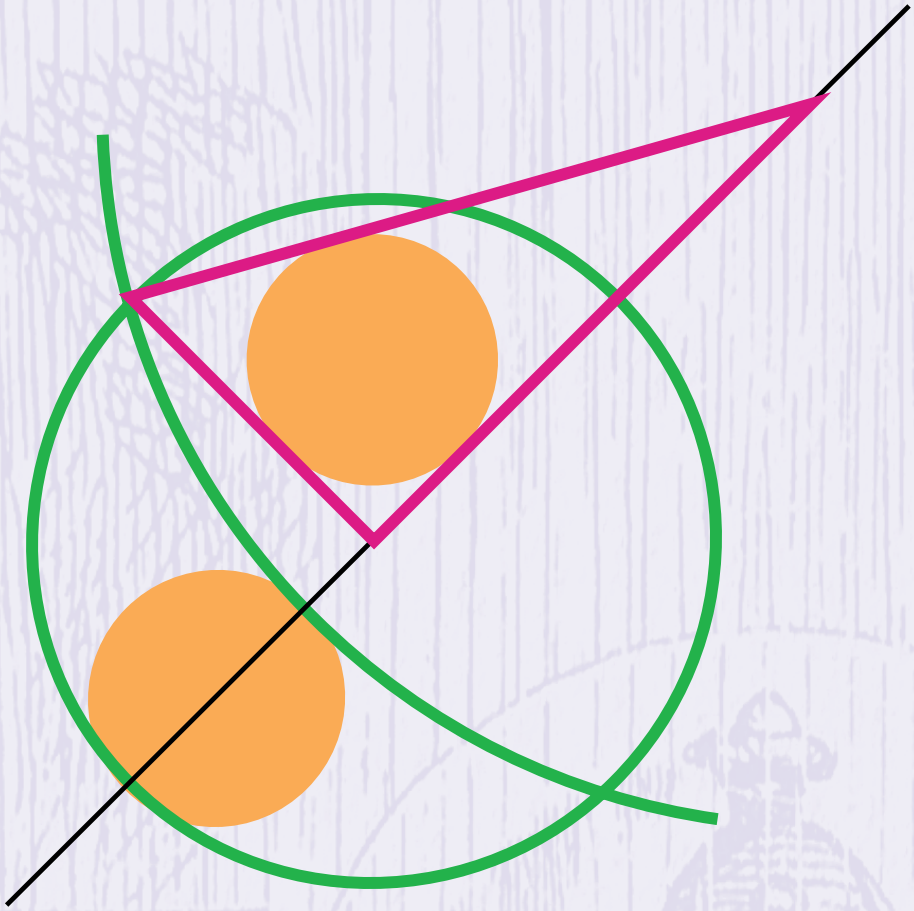
Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 21,00 (Nederland) € 23,00 (België),
€ 27,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 21,00 (leerlingabonnement België),
€ 11,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 13,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems, aio wiskunde aan de UL (jdaems@math.leidenuniv.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), ir. J.J.M. Verbakel, industrieel wiskundige bij Assembleon (janverbakel@planet.nl), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:

SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder
woorden een stelling uit.
De kunst is om uit het diagram
af te leiden welke stelling dat is
en die te bewijzen.