PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

ZUIVERE AKKOORDEN

Superdoku's

Jongleren met nullen

L.E.J. Brouwer: de grondslagencriticus

47ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2007

Verruim je mogelijkheden

Wiskunde in Leiden

Universiteit Leiden

www.studereninleiden.nl

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

OBJECTIEVE INTUÏTIE

Op het omslag van deze *Pythagoras* zie je een *tamtam*: een slagwerkinstrument met een bijzondere, lang nagalmende klank. Daar doorheen zie je een grillige grafiek: het geluidsspectrum van de nagalm. Bijna iedereen vindt zulke geluidseffecten prettig in het gehoor liggen, maar waarom? Is 'mooi' of 'lelijk' puur een kwestie van persoonlijke intuïtie? Voor abstracte schilderkunst zal dat wel kloppen, maar in de muziek kom je met wiskunde een heel eind om oordelen over 'zuivere' en 'valse' tonen objectief te maken. Zie het thema-artikel over wiskunde en muziek, pagina 8 en verder.

Intuïtie lijkt eveneens een hoofdrol op te eisen in het artikel over de *intuïtionist* L.E.J. Brouwer, maar ook dat is maar schijn. De grootste Nederlandse wiskundige van de afgelopen eeuw wilde de grondslagen van de wiskunde veranderen. Zo mag je volgens Brouwer niet aannemen dat een bewering ófwel waar, ófwel onwaar is. Dat lijkt rijkelijk vaag, maar heeft hele concrete gevolgen voor welke wiskundige bewijzen geldig zijn.

Op school en in het dagelijks leven zul je weinig of niets van het intuïtionisme merken. Behalve dan, dat Brouwer onlangs geëerd werd met een postzegel die je op een enveloppe in je brievenbus kunt aantreffen. Lees meer over deze markante Nederlander op pagina 24 en verder.

INHOUD

2 Kleine nootjes
4 Superdoku's

8 Stemmingen

15 Journaal
16 Jongleren met nullen
19 Miskunde: Quote junior-toptien
20 Gevangen viervlak
22 Pythagoras Olympiade
24 L.E.J. Brouwer (1881-1966): de grondslagencriticus
30 Problemen - Oplossingen
32 Buitenaardse bijles
33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

NIVEAUBALKJES
Sommige pagina's hebben onder het paginanummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

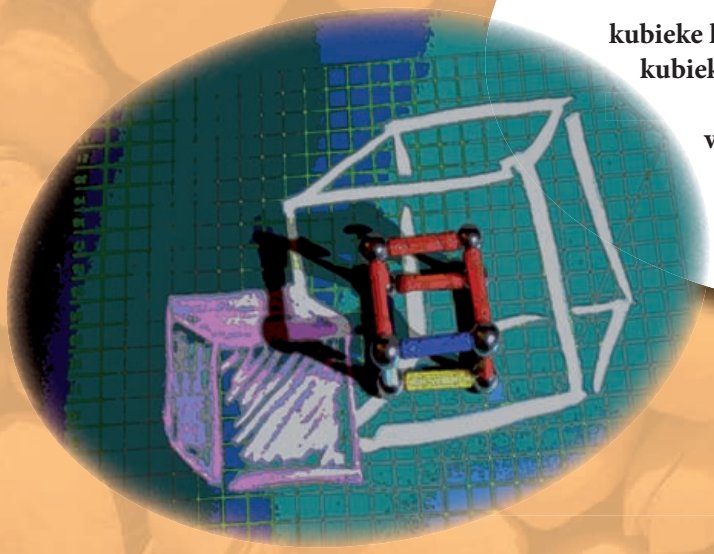
■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

DELEN MET REST

Kun jij de volgende vraag, die kinderen in 1951 kregen voorgelegd bij het toelatingsexamen tot de Middelbare Technische School, beantwoorden? De getallen 5053, 23947, 28367 en 925933 hebben bij deling door een bepaald getal achtereenvolgens de resten 13, 7, 17 en 1; welke getallen kunnen dit zijn?

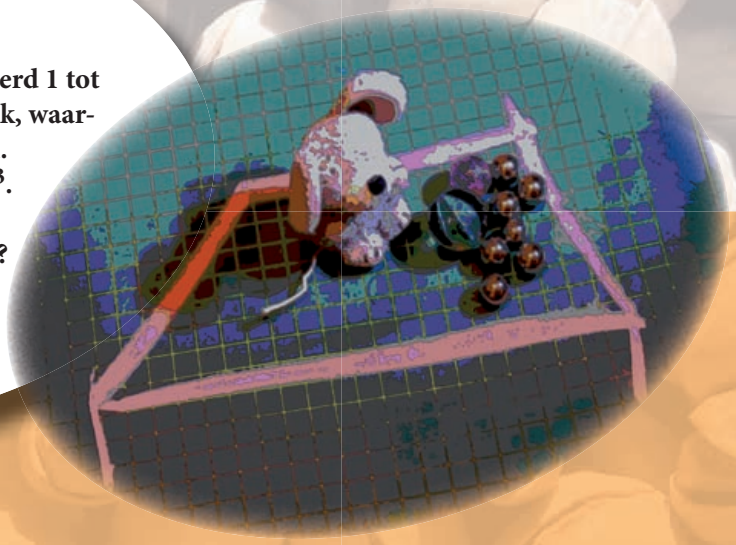
KUBUSVATEN VULLEN

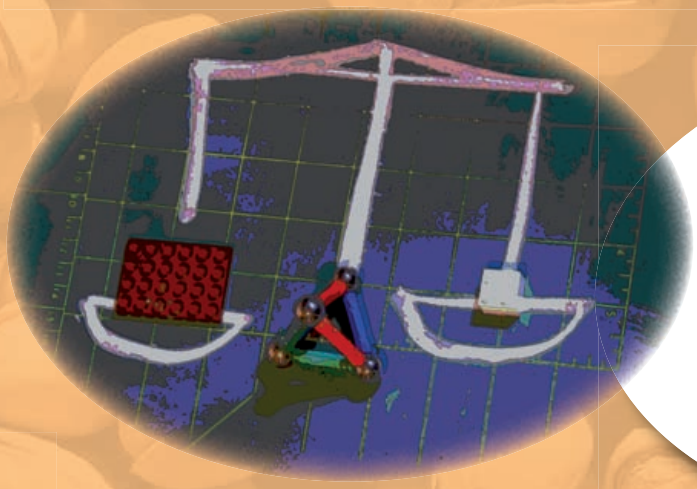
Cato heeft vijf kubusvaten gevuld met water: een kwart kubieke meter, een kubieke halve meter, een achtste kubieke meter, een kubieke kwart meter, een halve kubieke meter. Met welke vier kan zij een leeg kubusvat van 1 kubieke meter precies vullen?



BALLENBAK

In een bak zitten negen ballen, genummerd 1 tot en met 9. Erik trekt vier ballen uit de bak, waarop de nummers a, b, c en d staan.
Hij merkt op dat $a^2 + b^3 = c^2 + d^3$.
Als $a = 4$, wat zijn b, c en d dan?
En wat zijn a, c en d indien $b = 4$?



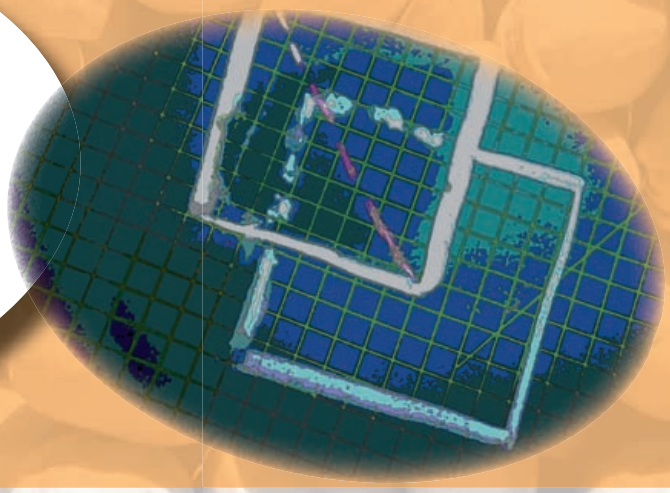


BLOKJES OM TE WEGEN

Je hebt witte en zwarte blokjes, en een balans. Een wit blokje weegt 1 gram, een zwart blokje 4 gram. Om een gewicht van 2 gram te wegen, kun je dat gewicht met twee witte blokjes links leggen, en een zwart blokje rechts: de balans is dan in evenwicht.
Wat is het kleinste aantal blokjes waarmee je élk gewicht van 1 tot en met 10 gram kunt wegen?

PAPIEREN VIERKANTJES

Twee vierkante papiertjes van 6 bij 6 cm liggen precies op elkaar op tafel.
Je schuift het bovenste papiertje een stukje schuin langs een diagonaal over de tafel.
Het overlappende deel van de papiertjes is uiteindelijk 2/7 deel van de totale bedekking op de tafel.
Hoe groot is dit dubbel bedekte vierkantje?



Uitgekeken op de klassieke sudoku in het gratis ochtendkrantje? Geen nood, van een puzzel die zo immens populair is, duiken natuurlijk allerlei varianten op.

■ door Arnout Jaspers

SUPERDOKU'S

Er is een boekje met sudoku's in de handel, waarin je niet de getallen 1 tot en met 9, maar afkortingen van negen chemische elementen moet invullen. Dat is natuurlijk de flauwst denkbare sudoku-variant, want er verandert in wezen niets: of je nu getallen, letters of negen meisjesnamen in de hokjes invult.

Echte sudoku-varianten stellen extra voorwaarden aan de symbolen in de hokjes, waardoor je een ander soort redenering nodig hebt om de open hokjes te vullen. Toch maakt morrelen aan de spelregels een sudoku niet per se moeilijker of interessanter. Iemand heeft eens over een andere klassieker, het schaakspel, opgemerkt: 'Iedere domkop kan in tien minuten een variant van het schaakspel bedenken, en helaas doen sommigen dat ook.'

Of een bepaalde sudoku-variant interessant is, is natuurlijk een kwestie van persoonlijke voorkeur. Maar een simpele spelregel waardoor de sudoku met minder begingetallen toch een unieke oplossing heeft, lijkt het meest populair. Zo is er veel geexperimenteerd met *vormsudoku's*. Daarin moeten de getallen 1 tot en met 9 niet de gebruikelijke 3×3-vierkanten, maar andere vormen (van elk negen hokjes) vullen. Er bestaat een vormsudoku die met slechts acht begingetallen toch een unieke oplossing heeft!

Bij een vormsudoku maakt het nog steeds niet uit welke symbolen je in de hokjes invult, als het maar negen verschillende zijn. In de meeste 'superdoku's', die we in dit artikel bespreken, moet je wel degelijk de eigenschappen van de getallen zelf gebruiken om de oplossing te vinden.

				2		20		
1	2		90				8	
		8	9				3	
378				5		504		
	8		1					6
	3	2		7	6		4	
	1	189						
4			12				9	8
			4		9			5

Figuur 1 Van elk gekleurd drietal hokjes is het product van de drie getallen in die hokjes gegeven

		7		4				2
			2			3		9
	8	3	9				5	
	5		3		2			6
			1	5				
	4			6				
3		8			9	1		

som 17 · som 20 · som 14

product 336 · product 189 · product 40

Figuur 2 Naast de rij en boven de kolom is het product respectievelijk de som van de getallen in de gekleurde hokjes aangegeven

REKENSUDOKU In een *rekensudoku* is, behalve een aantal begingetallen, ook het product en/of de som van groepen getallen gegeven. De sudoku in figuur 1 heeft zes blokken waarvan drie hokjes gekleurd zijn. Het getal linksboven geeft steeds het *product* van de drie betreffende hokjes. De drie gekleurde hokjes in het blok 'rechts-midden' bevatten dus drie getallen met product 504. Bedenk dat $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$; dat zijn zes delers, en de 'nepdeler' 1 moet je er nog bij zetten. Toch kun je die zes of zeven delers in dit geval maar op één manier combineren tot drie getallen onder de 10: $504 = 7 \times 8 \times 9$. Dankzij de 9 en 8 in de twee meest rechtse kolommen, weet je nu al precies waar deze drie getallen staan.

Ook bij een horizontale of verticale som zijn vaak verrassend weinig combinaties mogelijk, omdat de getallen allemaal verschillend moeten zijn. Bekijk bijvoorbeeld in figuur 2 de som $20 = a + b + c$. Als je bedenkt dat $7 + 6 + 5 = 18$, dan weet je al dat het grootste getal van de drie minimaal 8 is, anders haal je nooit de 20. Met 8 als grootste getal is er maar één mogelijkheid: $8 + 7 + 5$. Met 9 als grootste vind je drie mogelijkheden: $9 + 8 + 3$, $9 + 7 + 4$ en $9 + 6 + 5$. Maar: in deze kolom staat al een 9. Dus alleen de combinatie 8, 7, 5 kan hier.

Bij het oplossen van zulke rekensudoku's, ook wel killersudoku's genaamd, komt het aan op het geduldig wegstrepen en combineren van mogelijkheden, niet heel verschillend dus van wat je bij een klassieke sudoku doet.

ALGEBRA-SUDOKU Het wordt al subtieler als letters in plaats van getallen gebruikt worden, net als in een wiskundige vergelijking. In figuur 3 komen alleen de getallen 1 en 5 voor; hoe moet je nu de identiteit van de letters A tot en met F achterhalen? Alleen al het feit dat er alleen gehele getallen in een sudoku voorkomen, geeft veel informatie prijs. Bijvoorbeeld: linksonder staat zowel E als $\frac{E}{F}$. Conclusie: $F \neq 1$, want anders zou in één 3×3-vak tweemaal hetzelfde getal staan. Verder moeten alle breuken een geheeltallige uitkomst hebben, dus mag een letter boven de deelstreep geen 1 of priemgetal zijn, tenzij onder de deelstreep een 1 staat.

C				C/A	D	E		1
				5	C/B	F	D	
		5	E/F			B	C/B	
				E			E/F	
D/B	5			C/B				A/B
A	B		1			C	E	5
		1	C/B		E	5	C/A	
	E	E/F	5	D	A/B	1		A
	C/B	C/A			D/B	D		

Figuur 3 Elke letter staat voor een ander getal

			H	I			G	
	D			B		E		
				E				
	F			D	E	B		
G				F			H	I
H/E			B					
	I		C	G				
				H		D		

Figuur 4 Net als bij de klassieke sudoku staan in elke kolom, rij en 3x3-vak negen verschillende, gehele getallen, maar dit zijn niet de getallen 1 tot en met 9. Verder geldt: het product van deze negen getallen is 9.699.690; $E + F - A = 23$, $C + G = 3$, $B - A = 8$, $G + H + D = 21$, $C + H = 15$ en $\frac{I-6}{H} = G$.

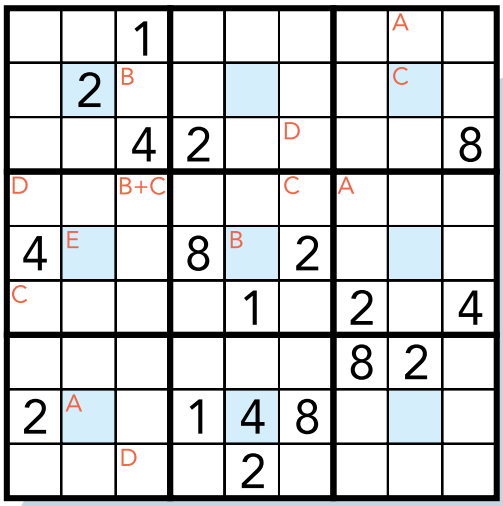
ZUDOKU In een *zudoku* moet je niet alleen de plaatsing van de getallen ontdekken, maar ook welke getallen in de sudoku voorkomen, want dat zijn niet de getallen 1 tot en met 9. De verzameling van álle gehele getallen wordt in de wiskunde genoteerd met **Z**, vandaar de naam **z**udoku.

In figuur 4 staat een zudoku waarin geen enkel begingetal gegeven is. De kans is groot dat je bij deze opgave op een zeker moment denkt dat hij onmogelijk is, maar hij kan echt!

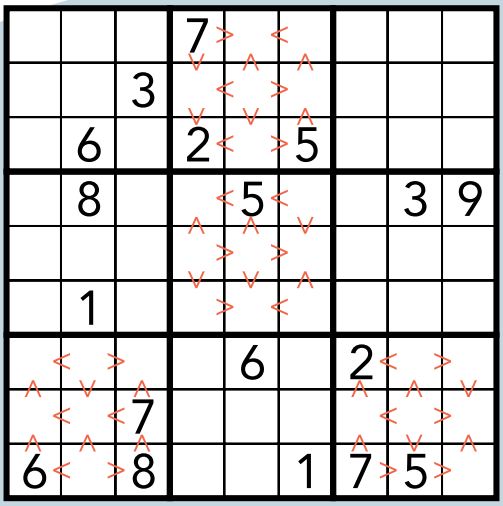
QUDOKU In een *qudoku* kunnen álle getallen uit **Q**, de verzameling van *breuken*, voorkomen. Voor de qudoku in figuur 5 voeren we voor de gelegenheid het 'mythische vierkant' in, een halfbroertje van het magische vierkant. In een mythisch vierkant is niet de som, maar het product van de getallen in elke kolom, rij en een van beide diagonalen gelijk aan hetzelfde getal. In figuur 5 staat een qudoku waarin de gekleurde hokjes een mythisch vierkant vormen.

S<DOK> We keren weer terug naar de sudoku's met de vertrouwde getallen 1 tot en met 9. Met het 'groter dan'– en 'kleiner dan'–teken kun je het aantal benodigde begingetallen drastisch omlaag brengen, tot nul zelfs. Heel verrassend is dat niet: een lange serie pijltjes, met als extreemste voorbeeld >>>>>>>>, komt op hetzelfde neer als een expliciete getallenreeks, namelijk 9-8-7-6-5-4-3-2-1. In figuur 6 staat een *s<dok>* waarin nog wel flink wat begingetallen nodig zijn.

SOMDOKU Er zijn sudoku's waar diverse 3×3 magische vierkanten in voorkomen (groter kan natuurlijk niet, met getallen onder de tien). Omdat er daarvan niet veel zijn, legt dat meteen veel beperkingen op aan de sudoku, zodat je weinig begingetallen nodig hebt. Iets soortgelijks geldt voor de *somdoku*, zie figuur 7. Een rij van drie hokjes in een gekleurd vak vat je op als een getal van drie cijfers. De som van de twee getallen in de eerste twee rijtjes van een blok moet gelijk zijn aan het getal in het onderste rijtje.



Figuur 5 De negen gekleurde hokjes vormen een mythisch vierkant



Figuur 6 Het pijltje wijst naar het kleinere getal

UKODUS Ten slotte kun je het probleem ook nog omkeren: gegeven een deels ingevulde sudoku, wat was de opgave? Dat is *niet* hetzelfde probleem als: bepalen welke van de getallen in het diagram je kunt weglaten, zodanig dat de sudoku nog een unieke oplossing heeft. Je moet reconstrueren welke getallen door een anonieme puzzelaar kunnen zijn toegevoegd aan de oorspronkelijke sudoku. In de *ukodus* van figuur 8 kun je vijf verschillende getallen in vijf hokjes identificeren, en nog een zesde getal dat in één van twee mogelijke hokjes staat.

INTERNET Op het internet zijn nog veel meer sudoku-varianten te vinden. We vermelden hier: www.peterfrank.be en www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_09_05_05.html.

In het volgende nummer van Pythagoras *verschijnen de oplossingen van de superdoku's in dit artikel.* ■

	8		3				9	1
4				1				
					2			9
6						7		
9						3		2
			5			9		4
			9	2				

Figuur 7 Onder een streep staat de som van de twee driecijferige getallen erboven

4	2			5	3	6	9	
	5	8	9		1			
1			2	7			5	
		4	3			7		9
7		3				5		
8	6		7					
	4			3		8		6
	8			6	7	9		
				8			4	5

Figuur 8 Dit was een normale sudoku met 29 begingetallen. Iemand is al begonnen met de oplossing en heeft zes getallen ingevuld. Welke zijn dat?

Wiskunde en muziek hebben zo veel met elkaar te maken, dat het tot ver in de middeleeuwen als één vak aan de universiteit werd onderwezen. Ook daarna hebben grote wiskundigen, zoals Galilei, Mersenne en Euler, nog belangrijke muziektheorieën ontwikkeld. In dit thema-artikel vertelt wiskundige en pianist Derk Pik over de wiskunde die komt kijken bij stemmingen.

■ door Derk Pik

STEMMINGEN

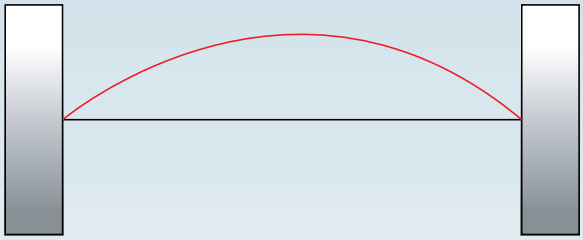
Stemming van instrumenten is een gecompliceerd onderwerp, waar de fysica, de fysiologie van het oor en deelbaarheid van getallen een rol spelen. De toonladder van de 'gewone' muziek, pop of klassiek, is al zeker een eeuw lang hetzelfde, waardoor het voor ons westerlingen lijkt of 'vals' en 'zuiver' objectieve begrippen zijn. Toch zijn ook andere toonladders in gebruik geweest, en is de huidige stemming van piano's maar één keuze uit vele mogelijke.

CONSONANT EN DISSONANT Twee snaren waarvan de twee lengtes een eenvoudige verhouding hebben, klinken goed samen. Deze ontdekking werd vanaf de middeleeuwen toegeschreven aan de school rond Pythagoras. Dit is onjuist, want stemmingen van instrumenten op basis van eenvoudige verhoudingen zijn al te vinden in Babylonische teksten van 3500 jaar oud.

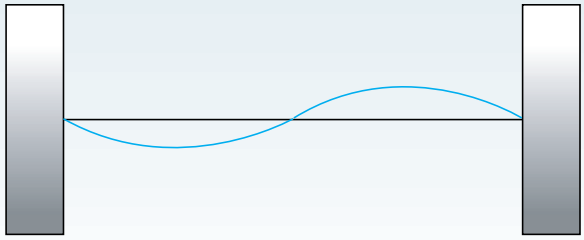
Als je een snaar in trilling brengt, dan zal de trilling er ongeveer uitzien als in figuur 1. Als je de snaar precies in het midden dempt met je vinger, dan neemt de trillende snaar de vorm zoals in figuur 2 aan. De tonen die door de gedempte en de ongedempte snaar worden opgewekt, lijken erg op elkaar en klinken zeer goed samen. We zeggen dat deze twee tonen een *octaaf* uit elkaar liggen.

Er passen natuurlijk nog veel meer *buiken* en *knopen* in de snaar, en het zal bij beluistering steeds opvallen dat deze steeds hogere tonen telkens goed samenklinken met de oorspronkelijke trilling. In feite zullen de trillingen met meer buiken, zie figuur 3, allemaal voorkomen als je een snaar tot trilling brengt door hem aan te strijken of door te plukken. Al deze boventonen bepalen de klankkleur van een geluid en het oor pakt veel van deze boventonen op.

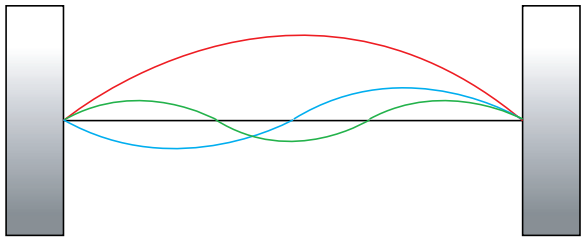
Aan het begin van de zeventiende eeuw ontdekten Marin Mersenne en Galileo Galilei onafhankelijk van elkaar dat toonhoogte en frequentie (het aantal trillingen per seconde) omgekeerd evenredig zijn met elkaar. Ze ontdekten bovendien dat een eenvoudige frequentieverhouding resulteert in *consonantie*: de tonen klinken samen prettig en harmonieus. Een goede verklaring konden ze echter niet geven.



Figuur 1 Een snaar in trilling.



Figuur 2 Een snaar in trilling, waarbij precies het midden is gedempt.



Figuur 3 Een trilling met één buik, met twee en met drie buiken.

Het antwoord werd gevonden door de componist Jean Philippe Rameau (1683-1764) en de muziektheoreticus Georg Andreas Sorge (1703-1778). *Dissonantie* wordt vooral veroorzaakt door tonen en boventonen met frequenties die vlak naast elkaar liggen, maar net niet gelijk aan elkaar zijn; we ervaren samenklanken als *consonant* als de klanken veel tonen en boventonen met elkaar gemeen hebben.

SINUSFUNCTIES Geluid bestaat uit luchttrillingen met een frequentie tussen de 20 en 20.000 keer per seconde (Hertz); andere frequenties hoort het oor niet. Deze variatie in luchtdruk kan worden opgewekt op allerlei manieren, zoals door een snaar, een trillend oppervlak of een fluit.

De eenvoudigste trilling is de *harmonische oscillatie*. Deze vind je overal in de natuur terug waar een systeem uit evenwicht wordt gebracht, terwijl de optredende kracht evenredig is met, en in richting tegengesteld aan de afwijking van de evenwichtstoestand. Neem bijvoorbeeld een spiraalveer waaraan een gewicht hangt. Als je daaraan trekt, is de verlenging van de veer evenredig met de kracht die je uitoefent. Zodra je loslaat, wordt de beweging van het gewicht beschreven door een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0.$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn

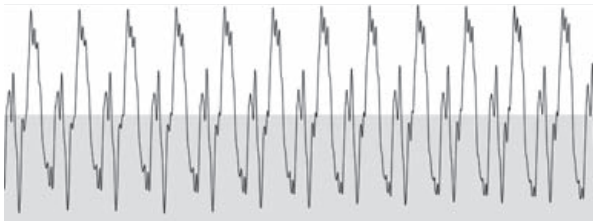
$$x(t) = A\cos(\sqrt{k/m}\cdot t) + B\sin(\sqrt{k/m}\cdot t)$$

met A en B willekeurige constanten. Het systeem zal gaan trillen met frequentie $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$.

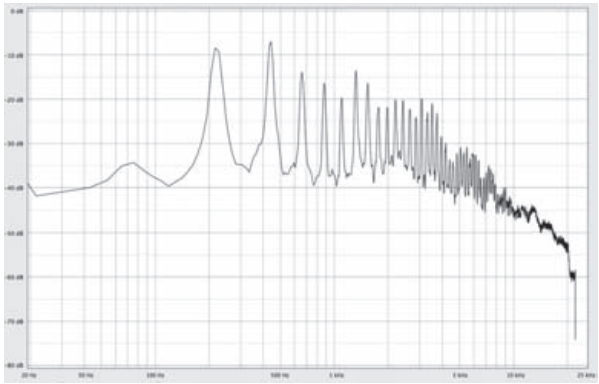
Bij de snaar is de vergelijking wat ingewikkelder, maar hier voldoet als oplossing elke sinusfunctie die een knoop heeft bij het begin en bij het einde van de snaar en ook willekeurige sommen van dergelijke functies. Een snaar zal de lucht laten trillen met allerlei frequenties die elk een geheel veelvoud zijn van de basisfrequentie. Ook bij blaasinstrumenten is de resulterende luchttrilling een som van sinusfuncties die een veelvoud zijn van de basisfrequentie. Bij trommels, pauken en klokken is dit niet zo: dit zijn instrumenten met een tweedimensionaal oppervlak en geven aanleiding tot een heel andere som van frequenties.

Hoe trilt een snaar in het echt? We spelen een *a* van 220 Hz op een altviool, nemen dit op met een microfoon en we plotten de spanning in de microfoon, zie figuur 4.

Op het internet zijn gratis programma's te downloaden waarmee je de verschillende frequenties kunt laten zien van een stuk muziek, of van je eigen stem. Zo'n programma geeft het *spectrum* weer: het neemt een aantal keer per seconde een foto van een klein stukje signaal en kijkt welke frequenties er allemaal in zitten. In figuur 5 is het resultaat te zien van de altviooltoon van figuur 4. De eerste piek is bij 220 Hz, de tweede bij 440 Hz, enzovoorts. Een klarinet zou een heel ander patroon van pieken geven; dit instrument heeft dan ook een heel ander geluid dan een viool.



Figuur 4 Een gestreken altviooltoon (de *a* van 220 Hz). Het patroon herhaalt zich na een grote en een kleine top. Daar tussenin zitten allerlei kleinere topjes, die behoren bij allerlei boventonen.



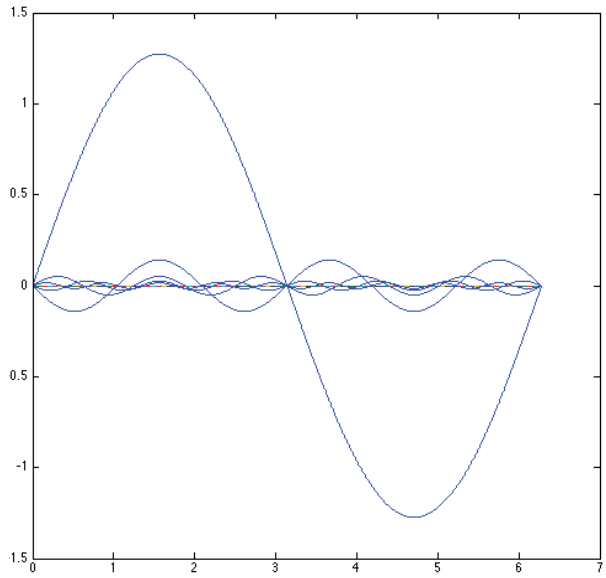
Figuur 5 Het spectrum van de gestreken altviooltoon van figuur 4. We zien heel erg veel boventonen. De laagste frequentie is 220 Hz, dan komt een piek bij 440 Hz, dan bij 660 Hz, enz. Je ziet ook dat de frequenties van hogere boventonen dichter bij elkaar gaan liggen (nog afgezien van de logaritmische schaling).

SOMMEN VAN SINUSFUNCTIES Bijna alle natuurlijke trillingen zijn opgebouwd uit *sommen van de sinusfuncties*. Als voorbeeld laten we zien dat de zaagtandfunctie gelijk is aan

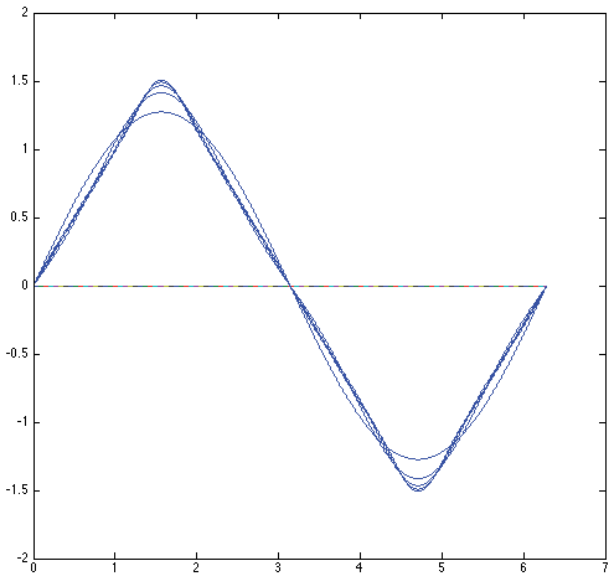
$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \frac{1}{9^2}\sin 9x - \cdots\right).$$

Hoe we een dergelijke reeks berekenen, kunnen we hier helaas niet bespreken; we kunnen wel met grafieken laten zien dat deze formule heel dicht in de buurt komt, zie figuur 6 en 7. Het is een diep wiskundig resultaat dat elke continue periodieke functie willekeurig dicht te benaderen is door een som van sinus- en cosinusfuncties met geheeltallige frequentieverhoudingen.

De benadering van de zaagtandfunctie is ook hoorbaar te maken. Op mijn website (zie het eind van dit artikel voor het adres) staat een geluidsfile, waar de functies van figuur 7 zijn te horen. Telkens wanneer er een sinusfunctie van een hogere frequentie wordt toegevoegd, hoor je eerst even de



Figuur 6 Een plot van de functies $\frac{4}{\pi}\sin x$, $-\frac{4}{\pi}\frac{1}{3^2}\sin 3x$, $\frac{4}{\pi}\frac{1}{5^2}\sin 5x$, $-\frac{4}{\pi}\frac{1}{7^2}\sin 7x$ en $\frac{4}{\pi}\frac{1}{9^2}\sin 9x$ in één grafiek. De amplitude wordt steeds kleiner en de frequentie steeds groter. De som van deze functies benadert de zaagtand, zie figuur 7.



Figuur 7 Plots van de functies $\frac{4}{\pi}\sin x$, $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x)$, $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x)$, $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x)$, $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \frac{1}{9^2}\sin 9x)$.
De zaagtand wordt steeds beter benaderd; dit blijkt uit het steeds scherper wordende puntje.

start van een hogere toon, die spoedig versmelt met het geluid dat je al hoorde: er treedt dus telkens een kleurverandering op.

DISSONANTIE Luchttrillingen komen via ons oor uiteindelijk terecht in het met vloeistof gevulde 'slakkenhuis'. Als we het slakkenhuis uit zouden kunnen rollen, zien we een lange, taps toelopende buis met een membraan in het midden: het basilair membraan.

Als er twee sinustonen van nabijgelegen frequenties tot klinken worden gebracht, wordt het basilair membraan geforceerd om te trillen met een langzame en sterk wisselende amplitude, zoals in figuur 8. Dit kun je zelf ook ervaren door naar een file op mijn website te luisteren.

Laten we eerst twee zuivere sinustonen langs elkaar schuiven. De ene blijft constant 220 Hz, de andere gaat van 220 Hz naar de 440 Hz. Eerst hoor je volmaakte consonantie; het zijn gewoon dezelfde tonen, maar spoedig hoor je een akelig, ratelend geluid. De dissonantie is echter ook vrij gauw weer verdwenen. De consonantie die je ervaart, ziet er min of meer uit zoals in figuur 9.

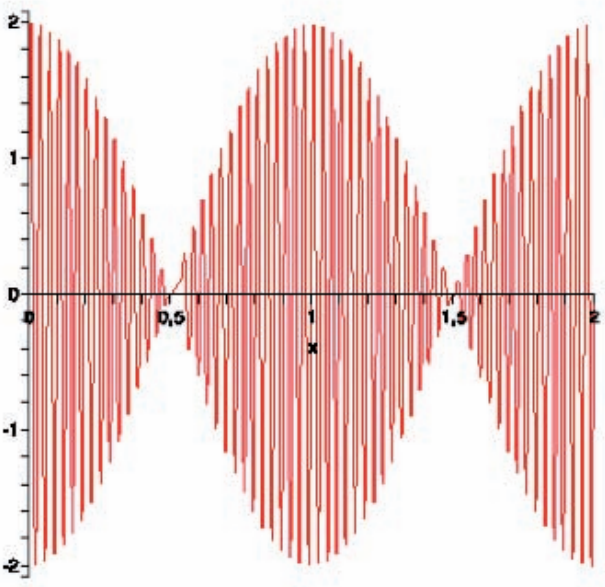
Het feit dat sinustonen die wat verder uit elkaar liggen niet dissoneren, wordt door musici vaak vreemd gevonden; zij verwachten bijvoorbeeld dat een interval dat bijna, maar niet precies een octaaf uit elkaar ligt (frequentieverhouding bijna 1/2), zeer vals zal klinken, net als een ontstemde piano. Ze vergeten dan dat sinustonen en natuurtonen met boventonen heel verschillend zijn.

CONSONANTIE BIJ NATUURLIJKE TONEN

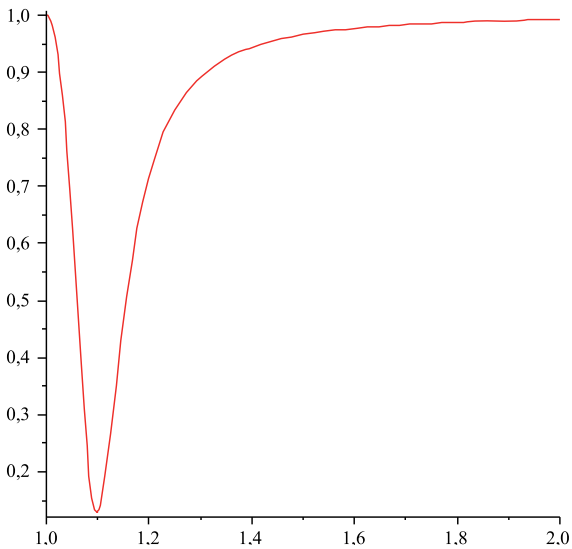
We zagen dat natuurlijke tonen opgebouwd zijn uit sinustonen en dat bij snaar- en blaasinstrumenten de verhouding tussen de frequenties van de sinustonen geheeltallig is. Wat gebeurt er als we twee met de computer gegenereerde zeer zuivere tonen met boventonen van geheeltallige frequentieverhoudingen langs elkaar heen laten schuiven? Eén toon houden we de hele tijd op dezelfde hoogte, dus deze toon bestaat uit de gelijktijdig te horen frequenties 110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880, 990, 1100, 1210, 1320, 1430, 1540 Hz, en de andere toon, die op dezelfde 14 frequenties begint, stijgt langzaam naar de toon 220, 440, 660, 880, 1100, 1320, 1540, 1760, 1980, 2200, 2420, 2640, 2860, 3080 Hz.

We houden bij beide tonen, dus in het bijzonder bij de bewegende toon, de frequentieverhoudingen geheeltallig. Op elk tijdstip zullen er wel plaatsen zijn waar de boventonen wringen of juist goed samenklinken.

De consonantie kun je in getallen uitdrukken: de consonantiegrafiek van figuur 10 krijg je door op elk moment te berekenen hoe ver de boventonen



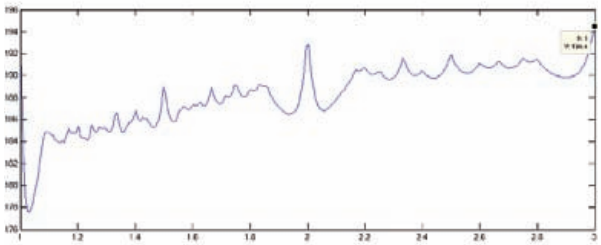
Figuur 8 Twee sinustonen met bijna dezelfde frequentie.



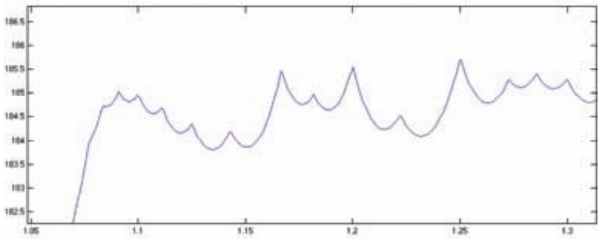
Figuur 9 Consonantiecurve van twee sinustonen: één toon blijft liggen en de andere wordt geleidelijk aan twee keer zo hoog. Op de verticale as staat de dissonantie afgezet; 0 is zeer dissonant; 1 is zeer consonant. Op de horizontale as staat de verhouding van de frequentie van de tweede toon ten opzichte van de eerste. Dus als beide tonen beginnen bij 220 Hz, dan is op moment 1,1 de frequentie van de bewegende toon gestegen tot 242 Hz.

van elkaar afstaan: alle afstanden krijgen een score van 0 (zeer dissonant) tot 1 (zeer consonant), volgens de grafiek van figuur 9. Al deze waarden tel je bij elkaar op om figuur 10 te krijgen. Bekijk de grafiek ook eens terwijl je naar het geluidsvoorbeeld op mijn website luistert.

De consonantiecurve laat een groot aantal pieken zien; deze zijn bij de verhoudingen 1; 1,1; 1,111; 1,125; 1,143; 1,167; 1,20; 1,222; 1,25; 1,325; 1,4; 1,5; 1,666; 1,75; 1,83; 2, ...



Figuur 10 Consonantiecurve van twee tonen met elk 14 boventonen: we zien heel veel pieken (consonantie) en heel veel dalen (dissonantie).

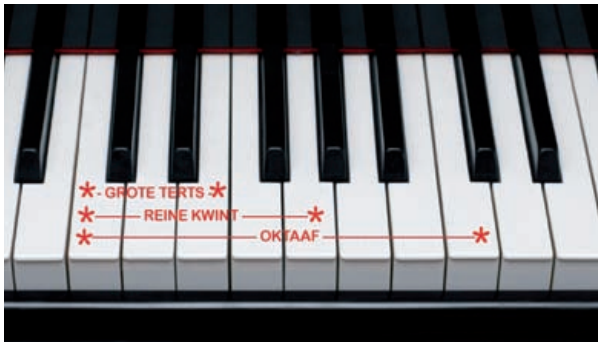


Figuur 11 Detail van de consonantiecurve van twee tonen met elk 14 boventonen: we zien in de buurt van de verhouding 9/8 = 1,125/1 heel veel pieken (consonantie) en heel veel dalen (dissonantie). Je kunt daar dus op allerlei manieren zuiver spelen.

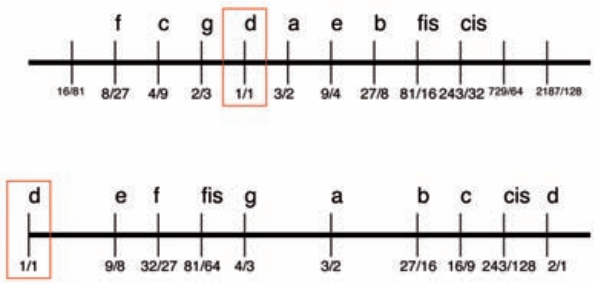
De meeste van deze verhoudingen zijn eenvoudige ratio's: 1, 11/10, 10/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 11/9, enzovoorts. Dit is niet zo verwonderlijk: als er veel consonantie is, past ergens een boventoon van de ene klank echt op een boventoon van een andere. In dat geval zijn er ook meteen allerlei andere veelvouden van die boventoon die precies op een andere passen. Een aantal van deze verhoudingen komt in onze westerse muziek algemeen voor: onze toonladders zijn er op gebouwd; vele andere verhoudingen zijn in de westerse muziek totaal onbekend. Bewustwording van deze samenklanken biedt nieuwe mogelijkheden voor hedendaagse muziek.

We kunnen ook nog iets anders uit de grafiek in figuur 10 conluderen. Als we inzoomen op bijvoorbeeld het gebied rond de verhouding 9/8 (dat is op een piano ongeveer de afstand tussen een *c* en een *d*), dan zien we vele kleine pieken, zie figuur 11. Dit betekent dat er in de buurt van deze toonsafstand meerdere min of meer zuivere intervallen liggen, die allemaal ongeveer de grootte hebben van de verhouding 9/8. Zuiver zingen en zuiver spelen kan dus eigenlijk op vele manieren.

We kunnen concluderen dat voor snaar- en blaasinstrumenten en zang consonantie optreedt bij eenvoudige ratio's.



Figuur 12 Het octaaf, de (onzuivere) reine kwint en grote terts op de piano. Deze intervallen corresponderen met de frequentieverhoudingen van 2/1, van ongeveer 3/2 en ongeveer 4/3. Merk op dat het octaaf acht witte toetsen omvat, de kwint 5 en de terts 3.



Figuur 13 De toonladder van de *Messe de Nostre Dame* van Guillaume de Machaut. In de bovenste tonenrechte zijn de tonen geconstrueerd volgens de verhouding 3/2. Zo is de frequentieverhouding tussen de *a* en de *d* gelijk aan 3/2. De frequentieverhouding tussen de (middeleeuwse) *fis* en de *d* is 81/16. In de onderste grafiek brengen we de tonen door octaafsprongen zo dicht mogelijk boven de *d*, door een aantal keer door 2 te delen of met 2 te vermenigvuldigen. Zo heeft de *e* op de bovenste lijn een verhouding 9/4 tot de basis-*d*, en een octaaf lager heeft de *e* de verhouding 9/8 tot de basis-*d*. De grote (middeleeuwse) terts *fis* - *d* heeft de verhouding 81/64.

DE PYTHAGOREÏSCHE STEMMING De muziek waaraan wij nu, hier in het Westen, gewend zijn, heeft akkoorden die over het algemeen zeer veel verschillende tonen bevatten. Maar tot ver in de middeleeuwen vormden het octaaf met verhouding 1/2 en de kwint met verhouding 3/2 de basis voor alle stemmingen. De grote terts zoals wij die nu kennen, werd destijds als vals ervaren.

De middeleeuwse gevoeligheid voor zuivere intervallen legde de componisten van zangmuziek grote beperkingen op. Neem als voorbeeld het *Kyrie* van de *Messe de Nostre Dame* van Guillaume de Machaut (1300-1377). In dit stuk voor a capella zang (zang zonder begeleiding van instrumenten) worden 9 (van de 12) verschillende tonen gebruikt, die allemaal vanuit de basistoon *d* zijn geconstrueerd met de kwintverhouding 3/2, zie figuur 13.

De stemming waarbij alle tonen door middel van de twee verhoudingen 2/1 en 3/2 zijn geconstrueerd, heet de *Pythagoreïsche stemming*. Daar zijn kwinten (3/2) zuiver en tertsen (81/64) relatief onzuiver. In de *Messe de Nostre Dame*, die wordt gezongen in Pythagoreïsche stemming, komen desondanks enkele grote tertsen voor. Dit is echter altijd ergens in het midden van een zin en het veroorzaakt een zekere spanning. Elke zin eindigt met de consonantie van de kwint.

JUISTE INTONATIE De Pythagoreïsche toonladder heeft drie intervallen die grote getallen in hun frequentieverhouding hebben. We laten dit zien met de Pythagoreïsche toonladder van *c*, zie de bovenste tabel van figuur 14.
We kunnen bijvoorbeeld de toon *e* (81/64) met de verhouding 80/81 verlagen om het veel eenvoudigere quotiënt $\frac{81}{64} \cdot \frac{80}{81} = \frac{5}{4}$ te krijgen.

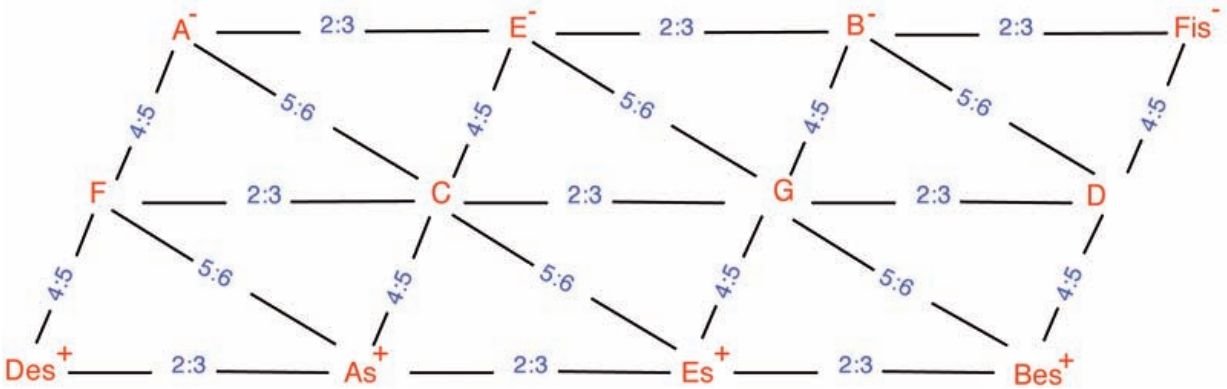
De frequentieverhouding 80/81 heet de *syntonische komma*. Als we dit ook doen bij de *a* en de *b*, dan krijgen we de onderste tabel van figuur 14, die veel eenvoudiger is. Hier klinken alle intervallen zeer zuiver. Elke stemming die gebaseerd is op dergelijke eenvoudige verhoudingen, heet *juiste intonatie*. Merk op dat nu ook de factor 5 in drie breuken voorkomt.

STEMSCHEMA'S Zoals te zien is op de piano in figuur 12, heeft een piano twaalf verschillende (zwarte en witte) toetsen. In onze tabel staan maar zeven verschillende tonen. De vijf tonen die niet in bovenstaande tabel voorkomen, zijn precies de zwarte toetsen. Je kunt deze tonen ook weer met de verhoudingen 3/2 en 5/4 toevoegen. We krijgen dan bijvoorbeeld het stemschema in figuur 15.

toon	c	d	e	f	g	a	b	c
ratio	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1

toon	c	d	e~	f	g	a~	b~	b
ratio	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Figuur 14 Boven de Pythagoreïsche toonladder van *c*, onder een toonladder van juiste intonatie



Figuur 15 Stemschema uit *Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines* (1615) van Salomon de Caus. Dit schema verscheen in 1636 als *Spinetstemming I* in *Harmonie Universelle* (1636-37), van de wiskundige Marin Mersenne. Op elke horizontale regel staan reine kwinten; een stap schuin naar rechtsboven is een grote terts, een stap naar rechtsonder is een kleine terts.

Wat is er goed en wat is er slecht aan dit stemschema? Alle intervallen die met weinig stappen te bereiken zijn, klinken erg zuiver. In het bijzonder zijn alle grote en kleine drieklanken, voorgesteld als driehoeken in het diagram, zuiver. Toch moet je voor deze zuiverheid duur betalen: de 'kwint' Fis^- - Des^+ is erg onzuiver.

In figuur 16 lezen we af dat

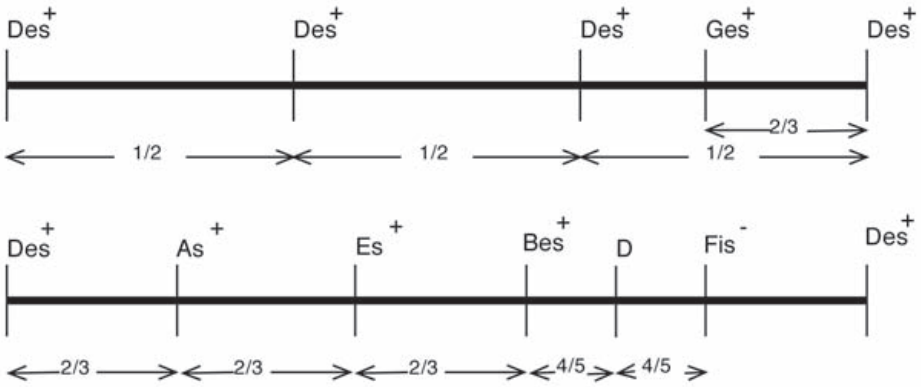
$$\frac{\text{lage } Des^+}{\text{hoge } Ges^+} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{16} = 0{,}1875\,,$$

$$\frac{\text{lage } Des^+}{\text{hoge } Fis^-} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{128}{675} \approx 0{,}1896\,.$$

Dit is een afwijking van meer dan een honderdste, en dat is echt heel vals. Als men de Fis^- wat naar beneden kon brengen, dan zou het interval Des^+ - Fis^- zuiverder worden. Door alle kwinten, die nu met verhouding 2/3 zo zuiver mogelijk zijn, een beetje kleiner te maken, kan men stemmingen produceren waar niet speciaal één interval bijzonder veel valser is dan de andere. Dergelijke stemmingen noemt men *getempereerde stemmingen*. De meeste musicologen denken dat de stemming van *Das Wohltemperierte Klavier* van Bach ook met dergelijke stemming gespeeld moet worden. Op dit moment is er een spannend debat gaande of de titelpagina van het manuscript het stemschema bevat, zie bijvoorbeeld http://bach.tuning.googlepages.com.

GELIJKZWEVENDE STEMMING De piano, zie figuur 12, heeft twaalf verschillende toetsen; als je bijvoorbeeld vanaf de laagste toets twaalf keer een kwint stapelt, kom je weer bij dezelde toets uit, maar dan zeven octaven hoger. Dus: 12 kwinten zijn gelijk aan 7 octaven. Als je dit met frequentieverhoudingen uitrekent, blijkt dit niet precies te zijn.

In frequenties: als je twaalf keer een reine kwint op een andere reine kwint stapelt (je construeert dus de verhouding $(3/2)^{12}$) krijg je ongeveer dezelfde toon als wanneer je zeven keer een octaaf bo-



Figuur 16 Het valse interval van de stemming in De Caus en Mersenne. Je zou willen dat de verhouding tussen de lage Des^+ en de hoge Ges^+ gelijk is aan 3/16, maar door het zuiver stemmen van de tertsen is de Ges^+ eigenlijk een Fis^-. De verhouding tussen de lage Des^+ en de hoge Fis^- is 128/675: een heel lelijke verhouding.

venop elkaar zet, met verhouding $(2/1)^7$. In vergelijking:

$$(3/2)^{12} = 129{,}746 \approx 128 = (2/1)^7.$$

Het quotiënt van deze frequentieverhouding, $3^{12}/2^{19}$, heet de *Pythagoreïsche komma*. Op de piano zijn octaven zuiver, dus op de piano kan geen enkele kwint zuiver zijn. Hoe zit dit precies?

Aan het eind van de achttiende eeuw werd de behoefte om in elke toonsoort even zuiver te kunnen spelen zo groot, dat men er toe overging alle intervallen even onzuiver te maken. Het idee achter deze stemming is afkomstig van Vincenzo Galilei, de vader van Galileo Galilei. De stemming werd echter eeuwenlang niet toegepast.

In een octaaf zitten twaalf tonen. Stel, de verhouding tussen elke twee opeenvolgende tonen is het getal r. Dan is bijvoorbeeld de afstand tussen de c en de c' één octaaf hoger, gelijk aan

$$1/2 = \frac{c}{c'} = \frac{c}{cis} \cdot \frac{cis}{d} \cdot \frac{d}{dis} \cdot \frac{dis}{e} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{fis} \cdot \frac{fis}{g} \cdot \frac{g}{gis} \cdot \frac{gis}{a} \cdot \frac{a}{aïs} \cdot \frac{aïs}{b} \cdot \frac{b}{c} = r^{12}.$$

Dit resulteert in $r = \sqrt[12]{1/2} \approx 0{,}943874$.

Met dit kleinste interval als basis stemt men nu piano's. Deze stemming heet de *gelijkzwevende stemming*. De kwint is met deze stemming aan de schrale kant: $r^7/1 \approx 1/1{,}4983$; nu, in onze moderne tijd, zijn we er echter helemaal aan gewend. Alleen wanneer je een keer een hele middag geconcentreerd naar middeleeuwse muziek hebt geluisterd, kun je nog wel eens schrikken van al die valse muziek om je heen.

INTERNET EN VERDER LEZEN Op mijn website www.math.leidenuniv.nl/~drpik staan geluidsvoorbeelden. De website www.csounds.com biedt een gratis 'state of the art' synthesizer om geluiden op te wekken met je computer. Ideaal voor experimenten. Het kost enige moeite om het te leren, maar er zijn erg veel voorbeelden op het web te vinden. Er zijn ook componisten die er electronische muziek mee maken.

Het Engelstalige boek *Music: a mathematical offering* door David Benson stond al vele jaren op het net; het is mijn favoriete boek op het gebied van wiskunde en muziek en het is dit jaar in druk verschenen bij Cambridge. ■

ADVERTENTIE

PYTHAGORAS zoekt
een **bladmanager (m/v)**

De redactie zoekt een part time (circa 1 dag per week) bladmanager, die de marketing van wiskundetijdschrift*Pythagoras* professioneler gaat aanpakken. Omdat wij kleinschalig en low budget zijn, komt het vooral aan op creativiteit en samenwerking met 'natuurlijke bondgenoten', zoals universiteiten, het onderwijs en organisaties die de bètawetenschappen promoten. Deze functie biedt je de kans om praktijkervaring op te doen met marketing en promotie.

Taken:
- abonnees en advertenties werven
- bedenken en uitvoeren van promotie-acties en publiciteitscampagnes
- *Pythagoras* presenteren op conferenties en publieksevenementen
- afhandeling van prijsvragen, abonnee-acties en dergelijke

Vereist:
- wiskundekennis op minimaal vwo-eindexamenniveau
- aantoonbare affiniteit met marketing en verkoop
- in staat om zelfstandig te werken en initiatief te nemen
- praktijkgerichte instelling (je moet soms zelf de postzegels plakken)

Geïnteresseerd? Stuur je cv en motivatie naar de hoofdredacteur van *Pythagoras*: Arnout Jaspers, e-mail: arnout@pythagoras.nu.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Universele Turingmachine

Een prijsvraag die in mei van dit jaar werd uitgeschreven is gewonnen door de twintigjarige student Alex Smith. Hij bewees dat de zogeheten '2,3-Turingmachine' universeel is.

Een Turingmachine, in 1936 door Alan Turing voorgesteld, is een abstract model van wat een computer (én een mens) kan berekenen. Turings bevindingen waren extreem belangrijk voor de theoretische informatica, de logica en de taalkunde. De grootste openbaring van Turing was wat de universele Turingmachine wordt genoemd: een denkende machine die in principe bij alle denkbare logische processen kon worden ingezet - een apparaat dat kon schaken, cryptografische coderingen kraken en algebrasommen maken. In de loop der jaren begonnen onderzoekers zo klein mogelijke universele Turingmachines te ontwikkelen. 'Zo klein mogelijk' betekent met zo weinig mogelijk toestanden en zo weinig mogelijk verschillende symbolen in het alfabet.

Stephen Wolfram schreef in mei van dit jaar de Wolfram 2,3 Turing Machine Research Prize uit. Hij vermoedde dat een bepaalde Turingmachine met 2 toestanden en 3 kleuren universeel is, maar kon het niet bewijzen. Wie hier wel in zou slagen, kon prijzengeld van 25000 dollar tegemoet zien. Vijf maanden later was er al resultaat: Alex Smith, een twintig jaar oude student uit Birmingham, gaf een bewijs dat de Turingmachine van Wolfram universeel is.

Bron: Kennislink/
Koen Vervloesem

Toekomst van de verleden tijd

Ooit stiet je je kop, tegenwoordig stootte je hem. Werkwoorden veranderen langzaam van onregelmatig, waarbij klinkers veranderen, naar regelmatig: overal dezelfde basis. Werkwoorden die weinig gebruikt worden zijn daar het vatbaarst voor. Wiskundigen van Harvard University hebben uitgezocht hoe snel dat gaat.

'I holp him' was 1200 jaar terug perfect Engels. Tegenwoordig word je raar aangekeken als je die onregelmatige vorm van to help gebruikt. Engelse onregelmatige werkwoorden, zoals to take (take-took-taken), veranderen volgens een mooi wiskundig patroon. Hierdoor kunnen Erez Lieberman en Jean-Baptiste Michel voorspellen wanneer 'took' zal veranderen in 'taked'. Het blijkt dat de tijd die verstrijkt totdat een onregelmatig werkwoord regelmatig wordt, evenredig is met de wortel van de gebruiksfrequentie. Een concreet voorbeeld: een onregelmatig werkwoord dat honderd keer zo vaak gebruikt wordt als een ander, houdt het tien keer zo lang uit voor het aangepast wordt.

Bron: Nature, 11 oktober 2007

Bovenin de zandloper zitten de onregelmatige werkwoorden, onderin de regelmatige. De grootte van het werkwoord in de zandloper is evenredig met de gebruiksfrequentie. Grote werkwoorden zullen aan de bovenkant blijven, terwijl de kleinere werkwoorden naar de bodem dreigen te vallen. Illustratie: Nature/Jonathan Saragosti

JONGLEREN MET N

Nul is niet niks. Nul is een belangrijk getal. Het duidt de hoeveelheid 'niks' aan. Anders dan de getallen één, twee, drie, enzovoort, die al zo lang in gebruik zijn dat de geschiedenis ervan zich niet laat achterhalen, is de geschiedenis van het getal nul redelijk goed bekend. De Indiërs bedachten de nul rond 650 voor Christus, maar nog eeuwen daarna werd dit getal door wiskundigen met wantrouwen bekeken. Tegenwoordig is iedereen er aan gewend, maar helemaal gewoon zal nul nooit worden.

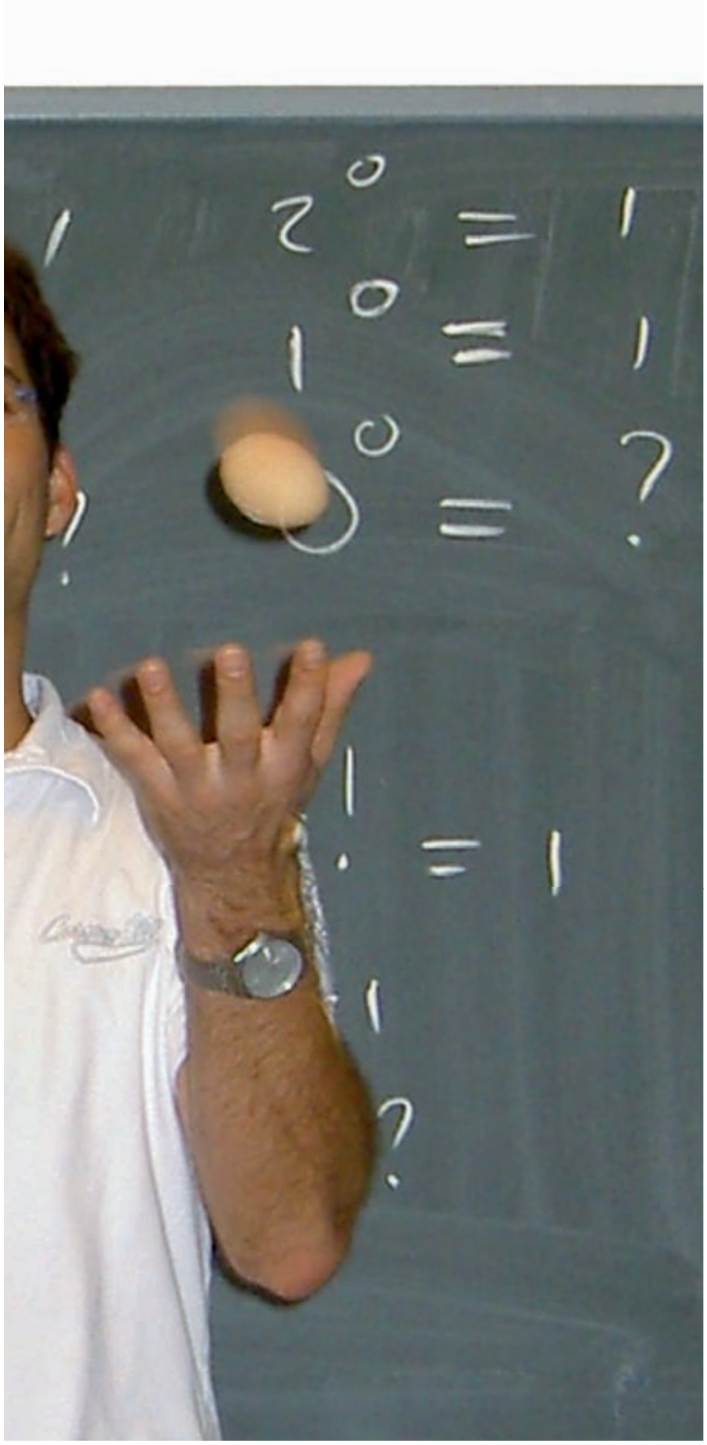
■ door Bart Zevenhek

Indiase wiskundigen introduceerden het symbool '0' in hun positiestelsel, waarmee zij willekeurig grote getallen konden noteren. Dat positiestelsel gebruiken we vandaag de dag nog steeds om getallen te noteren. Bij het positiestelsel geeft de plaats van een cijfer in een getal de betekenis aan. In 237 betekent de '3' dertig en de '2' tweehonderd. Het symbool '0' was nodig om onderscheid te maken tussen 2037 (de '2' betekent nu tweeduizend en de '0' geeft aan dat er geen honderdtal is) en 237. Toen ze gingen rekenen met getallen die in dit positiestelsel genoteerd zijn, zagen ze in dat 0 niet alleen een *symbool* is, maar ook een *getal*: bijvoorbeeld het resultaat van de berekening één min één.

Via de Arabieren kwam het positiestelsel, compleet met het getal nul, naar Europa. Daar was toen nog het systeem van Romeinse cijfers in gebruik, dat veel primitiever is. Grote getallen maak je in dat systeem door optellen van vaste eenheden, die elk worden voorgesteld door een letter. Bijvoorbeeld 2738 is MMDCCXXXVIII, ofwel 1000 + 1000 + 500 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1. Het vermenigvuldigen van twee flinke getallen in zo'n notatie is vrijwel niet te doen.

Om met nul te rekenen, is het soms voldoende om nul te vertalen tot 'niks' of 'geen enkele'. Als je één mobiele telefoon hebt en je raakt er één kwijt, heb je er geen enkele over: 1 – 1 = 0. Als je twee euro hebt en je geeft niks uit, dan heb je nog steeds twee euro: 2 – 0 = 2. Als je er niets bij krijgt heb je trouwens ook nog steeds twee euro: 2 + 0 = 2. Als je niks hebt en je krijgt er niks bij, of er gaat niks af, heb je nog steeds niks: 0 + 0 = 0 en 0 – 0 = 0. Met vermenigvuldigen werkt dit ook nog redelijk. Drie keer niks is nog steeds niks: 3 × 0 = 0. Geen enkele keer drie euro zakgeld krijgen levert niks op: 0 × 3 = 0. Met 'geen enkele keer niks' is het echter oppas-

NULLEN



sen geblazen! Een bedelaar die een week lang geen enkele dag niks in zijn bakje krijgt, is daar erg blij mee. Maar is 0 × 0 dan niet gelijk aan 0? Zo eenvoudig is het rekenen met nul toch ook weer niet...

Wiskundigen zijn in eerste instantie niet zo geïnteresseerd in de praktische betekenis van de objecten waarmee ze zich bezighouden. Waar het hun om te doen is, zijn de *regels* waaraan die objecten voldoen. Die regels moeten eenvoudig zijn en mogen niet tot tegenspraken leiden. Voor de uitkomst van 0 × 0 vragen ze zich dus niet af welke betekenis 0 heeft in praktische voorbeelden, maar ze definiëren 0 × 0 zó dat de regels die al gelden voor alle andere (positieve) getallen blijven gelden. We zagen al dat een getal dat met 0 wordt vermenigvuldigd, als uitkomst steeds 0 oplevert. Het ligt dus voor de hand om 0 × 0 = 0 te *definiëren*. En zo is dat ook gebeurd. Gelukkig bestaan er geen bewerkingen met getallen die deze definitie tegenspreken. Maar dat deze aanpak niet altijd werkt, gaan we zien bij delen en machtsverheffen.

DELEN Als je zes snoepjes moet verdelen onder drie personen, krijgt ieder twee snoepjes: 6 : 3 = 2. Dat valt te controleren door een vermenigvuldiging: 2 × 3 = 6. Als je nul snoepjes hebt te verdelen onder drie personen, krijgt ieder er nul: 0 : 3 = 0. Maar wat wordt 3 : 0? Je moet dan drie snoepjes verdelen onder nul personen; wat krijgt ieder? Deze vraag is niet te beantwoorden.

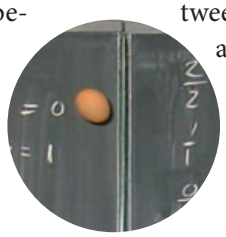
Een andere benadering is de volgende: 0 : 3 = 0 omdat 0 × 3 = 0. Voor 3 : 0 moeten we dus een getal zoeken dat vermenigvuldigd met 0 gelijk is aan 3. Dat lukt natuurlijk nooit, want ieder getal keer nul wordt nul. Om problemen met de bestaande regels te vermijden, hebben wiskundigen eenvoudig besloten om delen door nul *niet te definiëren*. Vandaar de regel: delen door nul is flauwekul.

Hoe zit het dan met 0 : 0? Nul gedeeld door een getal is nul, zoals we zagen. Dus moet 0 : 0 = 0 gelden? Dit klopt ook met de vermenigvuldiging: 0 × 0 = 0. Helaas zijn er meer gegadigden voor 0 : 0. Bijvoorbeeld 1, want ook 1 × 0 = 0. Dit wordt ook ondersteund door de volgende redenering: een getal gedeeld door zichzelf is altijd 1, dus 0 : 0 = 1. Ten slotte zegt de regel 'delen door nul is flauwekul' dat 0 : 0 helemaal niet gedefinieerd is. De verschillende regels spreken elkaar dus tegen en wiskundigen hebben gekozen voor de eenvoudigste uitweg: 0 : 0 wordt eveneens niet gedefinieerd.

Toch is de breuk 0 : 0 erg belangrijk. Neem het begrip 'snelheid'. Wat iemands *gemiddelde snelheid* is over een bepaald traject is duidelijk: de lengte van dat traject, gedeeld door de tijd die hij of zij er

over doet. Maar wat is iemands snelheid op een bepaald *moment*, bijvoorbeeld precies halverwege het traject? Een moment duurt 0 seconden en in die tijd leg je 0 meter af. Je snelheid is dus 0 : 0 meter per seconde. Zoals iedereen weet, kan daar 'van alles uitkomen'. Heel in het algemeen geldt: zodra je probeert exact vast te leggen hoe snel iets verandert, kom je uit op de breuk 0 : 0.

De Griekse filosoof Zeno brak zich hier 2500 jaar geleden al het hoofd over. De paradoxale conclusie waar hij op uit kwam, was dat beweging en verandering onmogelijk, of op z'n minst onbegrijpelijk waren. Hij illustreerde dat met z'n beroemde paradoxen over Achilles die de schildpad nooit zou kunnen inhalen en de pijl uit de boog die niet zou kunnen bewegen.



Pas rond 1700 vonden twee grote wiskundigen, Newton en Leibniz, onafhankelijk van elkaar maar bijna gelijktijdig, de oplossing. Die kennen we nu onder de naam *differentiaalrekening*. In de hogere klassen van de middelbare school leer je (in een modern jasje) in wezen nog steeds hoe Newton de breuk 0 : 0 onschadelijk maakte.

MACHTSVERHEFFEN Hoe werkt machtsverheffen als er een nul in het spel is? Machtsverheffen is herhaald vermenigvuldigen. Zo is $2^3 = 8$, want $2 \times 2 \times 2 = 8$. En $0^3 = 0$, want $0 \times 0 \times 0 = 0$. Tot zover is het eenvoudig. Maar wat is bijvoorbeeld 3^0 of 0^{-3}? Hiervoor gebruiken we twee belangrijke basisregels die gelden bij machtsverheffen: $a^n \times a^m = a^{n+m}$ en $a^n : a^m = a^{n-m}$. Voor bijvoorbeeld $a = 2$ en n, m positieve gehele getallen is dit makkelijk in te zien: $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 27$ en $2^7 : 2^4 = 2^3$.

We willen dat die basisregels ook blijven gelden als nul en negatieve getallen meedoen. Er volgt dan: $3^0 = 3^{2-2} = 3^2 : 3^2 = 9 : 9 = 1$. Dus is $3^0 = 1$. Het ziet er naar uit dat elk getal tot de nulde macht, volgens een soortgelijke redenering, 1 oplevert. Bij 0^{-3} levert deze methode geen oplossing, want $0^{-3} = 0^{3-6} = 0^3 : 0^6 = 0 : 0$, en we zagen hiervoor dat dit niet gedefinieerd is. Samengevat: een getal tot de macht 0 is 1, 0 tot de macht een positief getal is 0, 0 tot de macht een negatief getal is niet gedefinieerd. Wegens het voorgaande hebben we nu dus ten minste drie opties voor de uitkomst van 0^0, namelijk 1, 0 of 'niet gedefinieerd'. Alle drie de opties volgen uit de basisregels. Het enige zinnige besluit is dan ook weer om 0^0 niet te definiëren.

FACULTEIT Het getal 0 vormt in meer wiskundige bewerkingen een speciaal geval. Als laatste voorbeeld bekijken we $n!$ (spreek uit: n-faculteit). Dis is gedefinieerd als $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Als je n verschillende objecten hebt, kun je die in $n!$ verschillende volgordes ('permutaties') zetten. Dus twee mensen kun je in $2! = 1 \times 2 = 2$ volgordes achter elkaar zetten, drie verschillende postzegels kun je in $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ volgordes neerleggen, enzovoorts. Eén object kun je maar op één manier rangschikken, dus de definitie $1! = 1$ is geen probleem.

Maar wat is $0!$, het aantal volgordes waarin je nul elementen kunt zetten? De algemene definitie laat je hier in de steek, maar je bent waarschijnlijk geneigd om te stellen dat $0! = 0$.

Fout. Het blijkt dat je alleen netjes met faculteiten kunt rekenen als je definieert: $0! = 1$. Een van de redenen is dat uit de algemene definitie volgt dat $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Als je nu kiest $n = 0$, staat er $1! = 1 \times 0!$, dus $0! = 1$. Als je dat niet doet, lopen veel berekeningen in onder andere de combinatoriek en de kansrekening vast.

VERDER FILOSOFEREN Je kunt in de voetsporen van Zeno nog verder filosoferen over het getal 0. Is 0 even of oneven? Is het een priemgetal? Bestaat de nulde-machtswortel uit 0? Of de logaritme met grondtal 0 van het getal 0? Soms is er gewoon geen zinnig antwoord, en soms kun je misschien iets definiëren dat geen tegenspraak met andere rekenregels oplevert, net zoals $0! = 1$. ■

MISKUNDE: rekenkundige missers uit kranten, tijdschriften, boeken, enzovoorts. Kom je zelf iets tegen dat geschikt is voor deze rubriek? Meld het ons via post@pythagoras.nu.

■ door Matthijs Coster

QUOTE JUNIOR-TOPTIEN

Het nevenstaande stukje uit *NRC Handelsblad* van 24 mei jl. gaat over de rijkste ondernemers onder de 41-jaar. Voetballers worden uit de lijst geweerd, behalve Overmars: voor hem wordt een uitzondering gemaakt omdat hij investeert in vastgoed.

In de derde alinea lezen we: “Zou Quote de voetballers wel meetellen, dan vullen ze samen de helft van de toptien: Dennis Bergkamp, Patrick Kluivert, Ruud van Nistelrooij en Clarence Seedorf hebben allen een vermogen van boven de 30 miljoen.” Ogenschijnlijk is er met deze zin niets aan de hand.

Maar is voor deze voetballers een vermogen van 30 miljoen wel voldoende voor een plekje in de toptien? Is er überhaupt plaats voor vijf voetballers? Als Marc Overmars op de tiende plaats stond, was het direct duidelijk dat hij uit de toptien valt indien er een andere voetballer in komt.

Marc Overmars staat echter op de zevende plaats, maar nog steeds geldt hetzelfde argument. Als er vier voetballers worden toegevoegd aan de toptien, dan zullen de nummers 7 tot en met 10 aan de onderkant van de lijst afvallen, waaronder dus Overmars. Conclusie: ook als je voetballers wel toelaat, zullen ze niet voor de helft de lijst met veelverdieners vullen. ■

Ranglijst jonge rijken weert voetballers

Door Annemarie Kas

ROTTERDAM, 24 MEI. Voetballers staan er niet in, modellen mogen weer wel. Er is zelfs plaats voor dieetgoeroe Sonja Bakker. Zij staat op 69 in de top-100 van Nederlands rijkste ondernemers onder de 41 (vermogen: 7 miljoen euro). Zakenblad *Quote* publiceert vandaag de *Quote 500 junior*, „voorportaal van de lijst der lijsten”.

Het beleid van de makers is dat alleen jonge, succesvolle ondernemers een plek verdienen. Dat sluit rijke erfgenamen uit. Maar bij de aanvoerder van de lijst, Michiel Mol, klopt dat al niet: de eigenaar van het Formule 1-team van Spyker begon met geld van zijn vader. „De belangen van vader en zoon zijn nog immer innig verstrengeld”, aldus Quote.

Vermogende sporters zijn geschrapt. „De zakelijke component moet duidelijk aanwezig zijn”, aldus redacteur Mischa van de Woestijne van Quote. Daarom komt er maar één voetballer in de lijst voor (Marc Overmars, vermogen: 49 miljoen euro) omdat hij zijn miljoenen investeert in vastgoed. Zou Quote de voetballers wel meetellen, dan vullen ze samen de helft van de toptien: Dennis Bergkamp, Patrick Kluivert, Ruud van Nistelrooy en Clarence Seedorf hebben allen een vermogen van boven de 30 miljoen euro.

Hetzelfde geldt voor bekende Nederlanders uit de amusementsindustrie. Om ergens een grens te trekken is alleen de topdrie van succesvolle BN’ers opgenomen in de lijst, terwijl ook levensliedzanger Jan Smit (21) een plek zou verdienen met zijn 6 miljoen euro.

De rijkste jongeren

Top-10 junioren (40 jaar of jonger) en hun branche, in miljoenen euro’s

NRCH 240507 / PB / Bron: Quote

Net als zanger Gordon of rockster Anouk (beiden 5 miljoen euro).

Quote stelt de lijst samen op basis van openbare bronnen en trekt zich niets aan van ondernemers die er niet in willen staan: „Vermeld worden is geen keuze, vermeld worden is een eer.”

GEVANGEN VIERVLAK

■ door Chris Zaal

Workum is een van de Friese elf steden. Aan de rand van het oude centrum woont Wim Zwaan, van beroep scheepstimmerman. Een van zijn hobby's is het bedenken en maken van puzzels. Niet de bekende legpuzzels, maar denkpuzzels: constructies waarbij je iets listig in elkaar moet zetten of uit elkaar moet halen. Wims specialiteit is het bouwen van *grote* puzzels - minstens een halve meter groot.

VIERVLAK IN KUBUS Een van Wims uitvindingen zie je in figuur 1: een houten kubus met aan de bovenkant een driehoekig gat. In de kubus zit een viervlak: een ruimtelijke figuur opgebouwd uit vier driehoekige zijvlakken. Wat is hiervan de grap? Dit viervlak in de kubus vormt een puzzel. Het viervlak kan namelijk *uit* de kubus. De vraag is alleen *hoe*. Het viervlak moet door het gat: je steekt je hand in de kubus, grijpt het viervlak met je vingers en tilt het omhoog. Maar dan beginnen de problemen: het driehoekige gat in de bovenkant van de kubus is te klein. Kleiner dan elk van de zijvlakken van het viervlak. Toch kan het viervlak uit de kubus. Ra, ra, hoe kan dat?

BOUWPLAAT Hoe het viervlak uit de kubus kan, vertellen we hier niet. Probeer het eerst zelf maar eens. Op de rechter pagina zie je een bouwplaat van de puzzel. Deze bouwplaat is een schaalmodel van de houten puzzel van Wim Zwaan. Het houten model is groter.

De maten van het viervlak (in mm) zie je in rood bij de bouwtekening. De kubus heeft zijden met een lengte van 30 cm. Het driehoekige gat in het bovenvlak heeft zijden van 194, 202 en 211 mm, zie de gekleurde driehoek op de rechter pagina.

Maak de bouwplaat na op een groot stuk dik karton. Je kunt de bouwplaat ook vergroten onder het kopieerapparaat, uitknippen en opplakken op karton. Maak zelf een uitslag van de kubus, en knip in een van de zes zijvlakken het driehoekige gat.

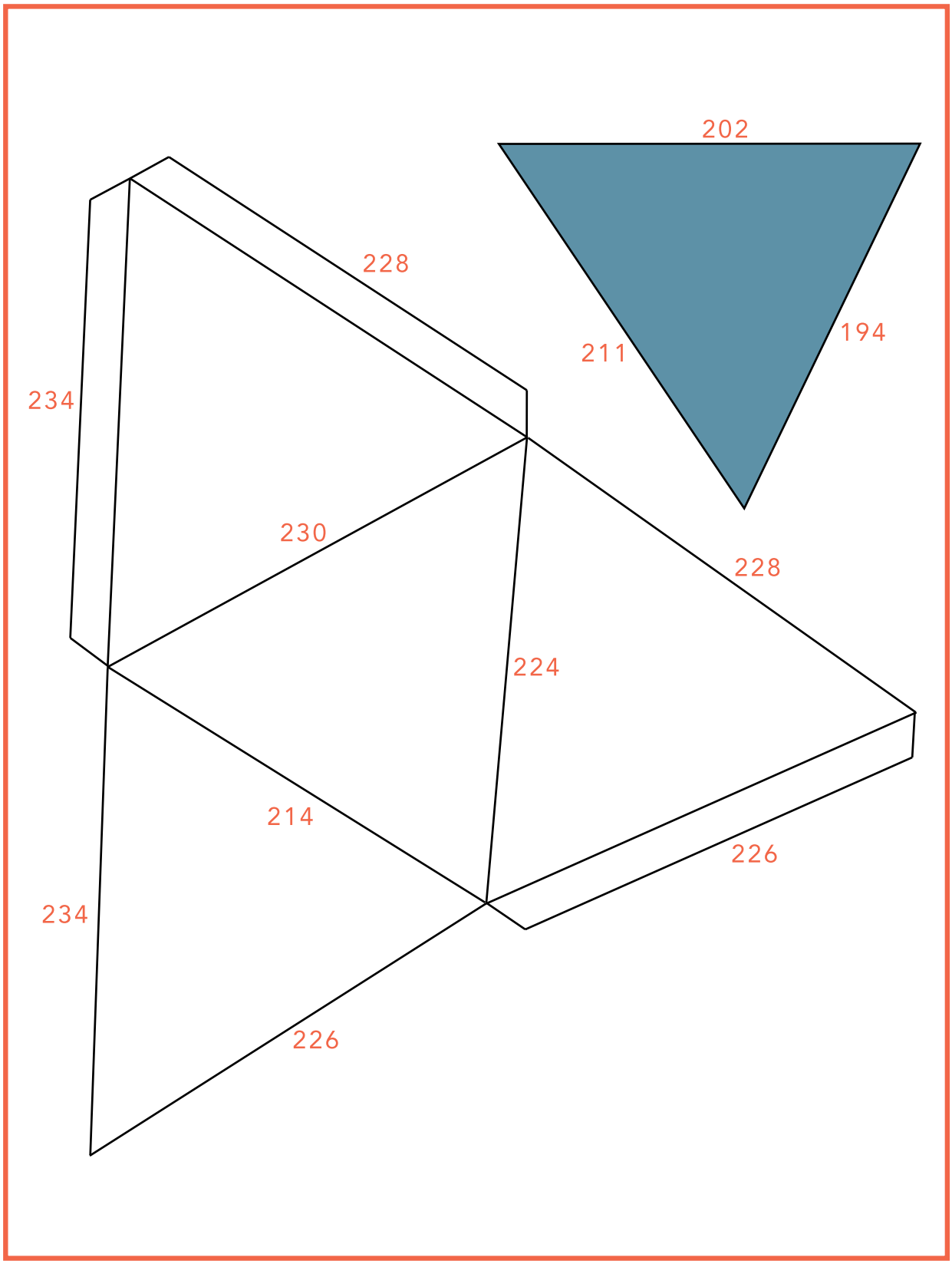
Snij de figuren uit. Rits de vouwlijnen voorzichtig in (niet te diep). Vouw de figuren en plak de randen aan elkaar met plakband. Het viervlak bevindt zich dan buiten het viervlak, zie figuur 2. De opdracht is om het viervlak in de kubus te krijgen. Veel succes!

EEN TIPJE VAN DE SLUIER Eigenlijk is er niets geheimzinnigs aan deze puzzel. Ingewikkelde toeren uithalen hoeft niet: je kunt het viervlak in één rechte lijn uit de kubus tillen, zonder te draaien, te wiggelen of te roteren. Deze puzzel is een wiskundig, of beter, een meetkundig probleem. Als je er niet uitkomt, kun je altijd je wiskundeleraar ermee plagen! ■

Figuur 1 Het viervlak zit in de kubus. De opdracht is om het viervlak *uit* de kubus te krijgen.

Figuur 2 Hoe krijg je het viervlak *in* de kubus?

Bouwplaat van het viervlak. De afmetingen zijn in mm. De gekleurde driehoek is het gat in de kubus, waar het viervlak doorheen moet.



PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

HOE IN TE ZENDEN?
Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2007.

OPGAVE 148

Zij k een positief getal. Laat zien dat er een veelvoud m van 2^k bestaat, zodanig dat m is opgebouwd uit alleen maar enen en tweeën. Bijvoorbeeld: 2^3 is een deler van 112.

OPGAVE 149

Bepaal alle polynomen $f(x)$ die voldoen aan $x \cdot f(x-1) = (x-10) \cdot f(x)$. (Een polynoom is een functie die is opgebouwd uit een eindig aantal niet-negatieve machten van x, zoals $3x^5 - 2x^2 + 6$ of $6x^{19} - 2x^6 - 2x$.)

OPLOSSING 144

Laat n een positief geheel getal zijn, waarvan de eerste vier cijfers 1137 zijn. Bewijs dat we de cijfers van n zo kunnen verwisselen dat het nieuwe getal deelbaar is door 7.

OPLOSSING. Laat k het getal zijn dat we krijgen wanneer we de eerste vier cijfers van n weghalen. Het nieuwe getal m, dat we willen maken, zal dan worden $m = k \cdot 10000 + r$, waarbij r een getal is bestaande uit de cijfers 1, 1, 3 en 7. Nu gaan we laten zien dat we voor ieder getal k een getal r kunnen vinden zodat $m = k \cdot 10000 + r$ deelbaar is door 7. Wanneer we k delen door 7, houden we een rest i over, die gelijk is aan 0, 1, 2, 3, 4, 5 of 6. Nu zorgen we dat r bij deling door 7 rest $7 - i$ geeft:
als $i = 0$, dan $r = 3171 = 453 \cdot 7 + 0$,
als $i = 1$, dan $r = 1371 = 195 \cdot 7 + 6$,
als $i = 2$, dan $r = 7131 = 1018 \cdot 7 + 5$,
als $i = 3$, dan $r = 1173 = 167 \cdot 7 + 4$,
als $i = 4$, dan $r = 7311 = 1044 \cdot 7 + 3$,
als $i = 5$, dan $r = 1731 = 247 \cdot 7 + 2$,
als $i = 6$, dan $r = 3711 = 530 \cdot 7 + 1$.
Voor ieder getal k kunnen we de cijfers 1, 1, 3 en 7 dus zo herschikken dat het getal $m = k \cdot 10000 + r$ deelbaar is dus 7.

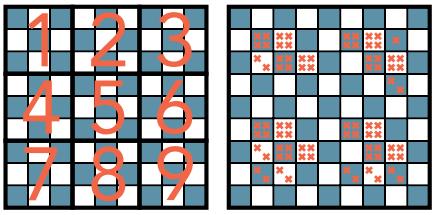
Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Johan Heremans** uit Gooik (België), **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar Alexander van Hoorn.

OPLOSSING 145

Op elk hokje van een roosterbord van 9 bij 9 zit een vlo. Een vlo springt alleen schuin naar voren of naar achteren en wel precies één hokje. Wanneer we in onze handen klappen, springen alle vlooien één keer.
a. Hoeveel hokjes zijn er nu minimaal leeg?
b. Hoeveel hokjes zijn er nu maximaal leeg?

OPLOSSING. Kleur het roosterbord als een schaakbord, met de vier hokjes in de hoeken zwart. Elke vlo springt altijd van zwart naar zwart óf van wit naar wit.

a. Omdat de vlooien diagonaal springen, springen ze altijd naar een rij hoger of lager. Alle vlooien uit een oneven rij springen dus naar een even rij en omgekeerd. De oneven rijen hebben in totaal 45 hokjes, de even rijen 36. Er moeten dus ten minste $45 - 36 = 9$ hokjes leeg blijven. Het is inderdaad mogelijk dat er 9 hokjes leeg blijven. Hiervoor springen alle vlooien vanaf de zwarte hokjes schuin naar rechts beneden, waarbij de vlooien die dan van het bord af zouden vallen een andere kant op springen. Vanaf de witte hokjes wisselen de vlooien twee aan twee van hokje. Dit is mogelijk, want alle diagonalen bestaan uit een even aantal hokjes.



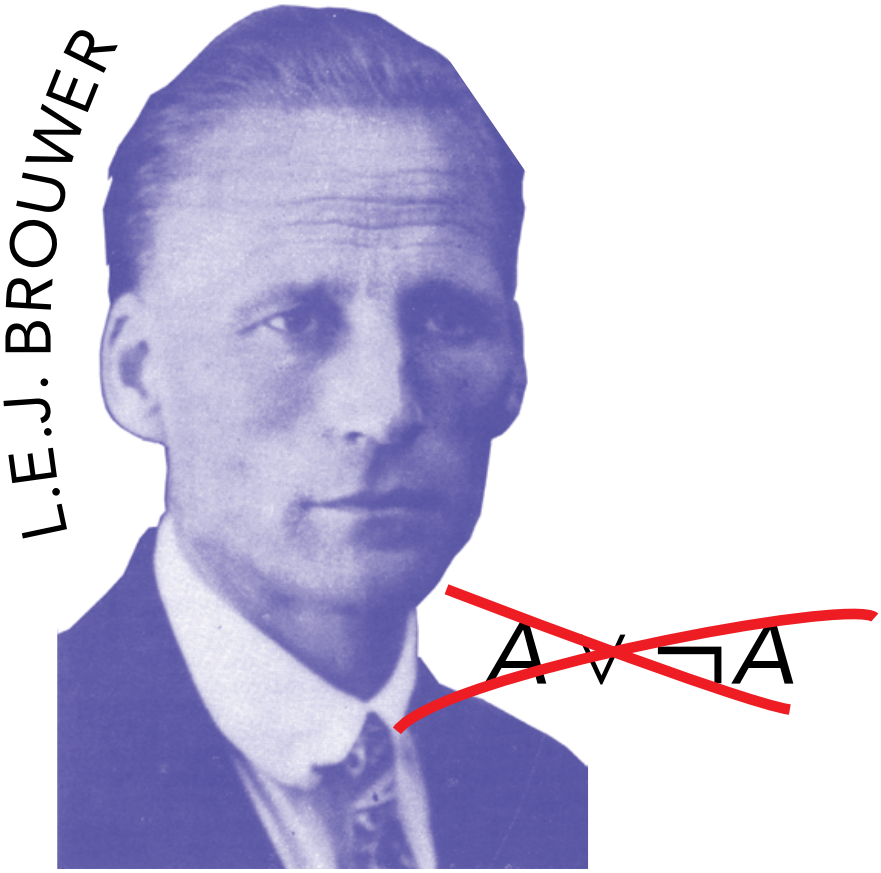
b. Verdeel het bord zoals in het linker plaatje. In de stukken 1, 3, 7 en 9 zijn er na het springen ten minste 2 zwarte en 2 witte hokjes niet leeg. In de stukken 2, 4, 6 en 8 is er ten minste 1 zwart en 1 wit hokje niet leeg en in stuk 5 is er zeker 1 zwart hokje niet leeg. In totaal zijn er dus minimaal 25 hokjes niet leeg, ofwel: maximaal 56 hokjes zijn wel leeg. Zoals in het rechter plaatje is te zien, is het inderdaad mogelijk om 56 lege hokjes te krijgen.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Yvette Welling** van OSG Erasmus te Almelo.
De boekenbon gaat naar Yvette Welling.

L.E.J. BROUWER (1881-1966): DE GRONDSLAGENCR

Een eeuw geleden verscheen *Over de grondslagen der wiskunde*, het proefschrift van L.E.J. Brouwer, de grootste Nederlandse wiskundige van de twintigste eeuw. Brouwer, toen nog jong en onbekend, waagde het om de 'paus' van de toenmalige wiskunde, David Hilbert, tegen te spreken. Met het proefschrift zette hij de eerste stappen in de richting van wiskunde op een nieuwe grondslag: het *intuïtionisme*. Hierbij mag je er bijvoorbeeld niet van uitgaan dat een bewering ófwel waar ófwel onwaar is.

door Marco Swaen



In 1900, bij het aanbreken van de nieuwe eeuw, heerste er op het internationale congres van wiskundigen te Parijs een opperbeste stemming. De vage begrippen waar wiskundigen uit voorgaande eeuwen zich van bedienden waren vervangen door strakke definities en uitgangspunten, belangrijke vraagstukken werden met succes aangepakt, en de wiskunde was uitgegroeid tot de universele taal van de natuurwetenschappen. In zijn beroemde toespraak op het congres schetste David Hilbert (1862-1943) de uitdagingen voor de wiskunde in de komende eeuw.

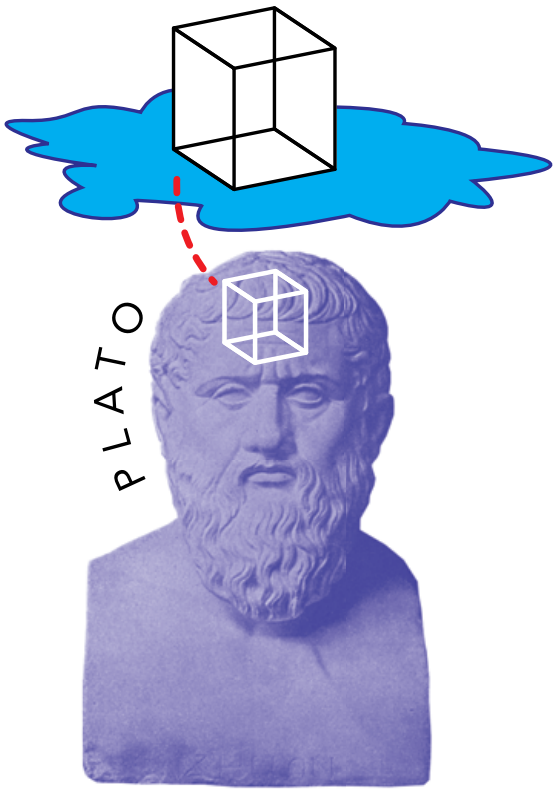
Hilbert was vol optimisme over de kracht van de moderne wiskunde, hij hield het zelfs voor mogelijk dat er binnen afzienbare tijd nog maar twee soorten problemen zouden bestaan: enerzijds een grote hoeveelheid opgeloste problemen en anderzijds een paar problemen waarvan bewezen is dat ze onoplosbaar zijn.

Van dat optimisme is niets terug te vinden in *Over de grondslagen der wiskunde*, het proefschrift waarin Brouwer betoogde dat de moderne wiskunde gebaseerd was op drijfzand, en zich bezighield met betekenisloze woordspelletjes. Het was tijd de wiskunde een steviger grondslag te geven en vandaaruit opnieuw op te bouwen. De diepe kloof tussen de visies van Hilbert en Brouwer is terug te voeren op hun tegengestelde opvattingen over de klassieke kwestie: wat is wiskunde eigenlijk?

WISKUNDIGE ZEKERHEID Zoals een sterrenkundige de sterren bestudeert en een bioloog levende wezens, zo bestudeert een wiskundige getallen, figuren of algemener gezegd: structuren. Zowel in de wiskunde als in de natuurwetenschappen doet men observaties en bedenkt men theorieën om die observaties te verklaren. Een wiskundige kan een getal nemen en dat kwadrateren en vaststellen dat het resultaat niet negatief is. Een bioloog bestudeert het leven van insecten en constateert dat uit eitjes larven komen, die zich vervolgens verpoppen. Als op een dag uit insecteneieren direct volwassen exemplaren komen, dan zal de bioloog zijn theorie aanpassen. Maar als de wiskundige na kwadrate-

ren een negatief getal krijgt, dan is hij er zeker van dat hij een rekenfout heeft gemaakt. De wiskundige is veel zekerder van zijn theorie omdat wiskundige theorie bestaat uit stellingen waarvoor harde bewijzen geleverd zijn, terwijl natuurwetenschappelijke theorie alleen verklaart wat tot dan toe is waargenomen.

Er is trouwens een duidelijk verschil tussen enerzijds een ster of een insectenei en anderzijds een getal of bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek. Sterren en eieren zijn dingen uit de werkelijkheid, die er ook zijn zonder dat wij ze bekijken. Getallen en figuren niet. Getallen herken je pas als je hebt leren tellen, en dan alleen maar als aantallen. En de tekeningetjes die uitbeelden wat een gelijkzijdige driehoek is, blijken bij uitvergroting korrelige inktvlekken, terwijl de echte driehoek perfect rechte zijden zou moeten hebben, die ook bij uitvergroting recht en oneindig dun blijven. De vraag is dan ook in hoeverre de wiskundige objecten zoals getallen en figuren los van ons bestaan.



DE OUDHEID Die vraag hield de Oude Grieken al bezig. Zo leerde Plato dat de wiskundige objecten *wel* los van ons bestaan, en zelfs werkelijker zijn dan alles wat wij met onze zintuigen kunnen waarnemen. Voor Plato is de driehoek die wij tekenen de schaduw van de werkelijke Driehoek, die zich bevindt in een wereld boven de onze: de Ideeënwereld. Wij kunnen die objecten niet via de zintuigen waarnemen, maar alleen via ons verstand, dat ons bijvoorbeeld vertelt dat elke hoek van een gelijkzijdige driehoek precies 60 graden moet zijn. Bij de driehoeken die we tekenen is dat nooit (helemaal) het geval.

Aristoteles, een leerling van Plato, leerde daarentegen dat de wiskundige objecten *niet* los van ons bestaan. Voor hem is iets als een kubus een menselijk bedenksel, gevormd door abstractie van dingen die wij om ons heen zien, zoals een dobbelsteen of een houten blok. Maar ook Aristoteles benadrukt dat we alleen kennis kunnen verwerven door heldere en strenge redeneringen.

DE AXIOMATISCHE METHODE Iemand die als geen ander de kunst van het streng redeneren verstond was Euclides. Met zijn dertiendelige boekwerk *De Elementen* schreef hij een handboek van de wiskunde dat tweeduizend jaar lang het voorbeeld is geweest voor hoe wiskundige kennis moet worden opgebouwd. De dertien boeken bestaan uit een opeenvolging van stellingen met hun bewijzen, waarbij alleen gebruik wordt gemaakt van hetgeen in het voorafgaande bewezen is. Helemaal aan het begin van boek I staan de uitgangspunten waarop het hele bouwwerk rust. Dat zijn de *definities* van de belangrijke begrippen, zoals: 'een punt is wat geen deel heeft', en de algemene inzichten, *axioma's* geheten, waarvan Euclides vindt dat ze zo waar zijn dat iedereen ze onmiddellijk zal accepteren, zonder bewijs. Een voorbeeld van zo'n axioma is: 'dingen gelijk aan hetzelfde zijn gelijk aan elkaar'.

Voor de Grieken waren axioma's waarheden als koeien. In de negentiende eeuw echter bleek dat één van Euclides' axioma's, het *parallellenaxioma*, vervangen kan worden door het tegenovergestelde, waarmee dan een soort alternatieve meetkunde ontstaat: de *niet-euclidische meetkunde*. Het

was niet uit te maken welk van de twee de juiste is, blijkbaar waren er twee verschillende meetkunden mogelijk: een euclidische en een niet-euclidische.

Voor de aanhangers van Plato's Ideeënwereld was dit een pijnlijke ontdekking: het verstand kon ons niet vertellen wat de ware meetkunde is, en daarmee verviel het idee van één ware wiskunde.

PARADOXEN Van de vrijheid in de keuze van axioma's lagen wiskundigen niet wakker, en in de rest van de negentiende eeuw beleeft de axiomatische methode een ware zegetocht. De verschillende vakgebieden zoals analyse, algebra en meetkunde worden streng opgebouwd, overal lukt het een paar axioma's te kiezen waaruit de rest van de stellingen opgetrokken kan worden. Tegelijkertijd wordt er gewerkt aan een gemeenschappelijk fundament voor de hele wiskunde gebaseerd op de simpelste wiskundige objecten: de verzamelingen. Georg Cantor (1845-1918), de grote man achter dit project, wist met zijn verzamelingenleer veel van de raadselachtigheid rond het begrip 'oneindig' op te helderen. In zijn verzamelingenleer komt 'oneindig' voor als een gewoon getal, en worden er zelfs vele graden van oneindigheid onderscheiden. Deze theorie, wel eens 'Cantors paradijs' genoemd, leek de hoeksteen waarop de hele wiskunde kon worden opgetrokken.

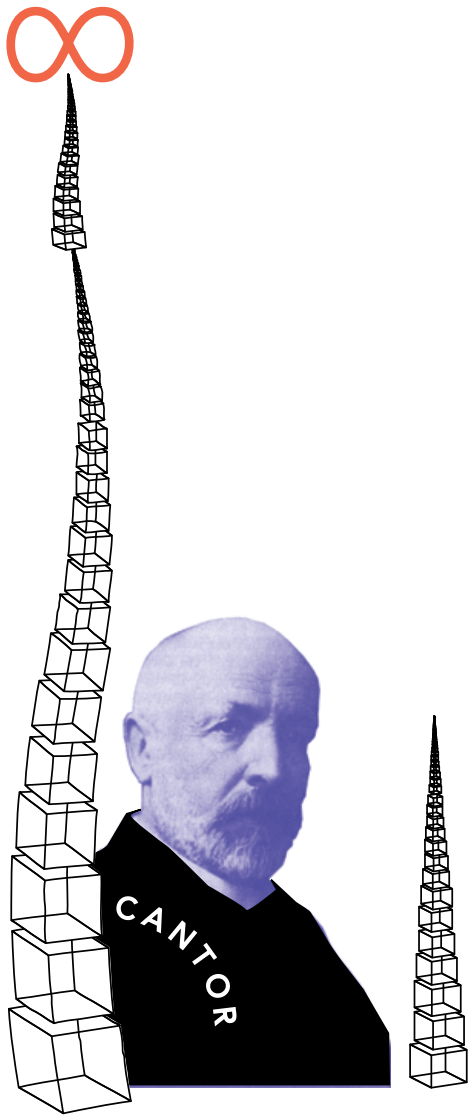
Maar voor de enthousiaste aanhangers van de axiomatische methode volgde er een tweede tegenslag. De aanvankelijk gekozen axioma's spraken elkaar tegen en de verzamelingenleer bleek paradoxen te bevatten. Door de axioma's aan te passen konden die er wel uitgehaald worden, maar wat bleef was het besef dat ook als je de axioma's zorgvuldig kiest, er ongemerkt toch paradoxen in een theorie kunnen opduiken.

HILBERTS REDDINGSPROGRAMMA De Duitse wiskundige David Hilbert gold als kampioen van de axiomatische methode. Hilbert had een nieuwe kijk op het gebruik van axioma's. In zijn ogen waren betekenissen, begrippen en associaties vaak een bron van verwarring, en was het zaak die helemaal buiten het wiskundige werk te houden.

Euclides begon zijn boek nog met uit te leggen wat een punt is. Hilbert betoogt dat je om meetkundige stellingen te bewijzen helemaal niet hoeft te weten wat punten precies zijn, als je maar axioma's hebt die vastleggen wat je in een bewijs met punten kunt doen, zoals het principe: door twee punten gaat precies een lijn. Of die punten dan wel of geen delen hebben, en of de lijn eigenlijk een cirkel is, maakt dan niet uit. Maar hoe losser een axiomastelsel staat van een betekenisvolle wereld, al is het maar een fantasiewereld, hoe minder overzicht je hebt op wat er allemaal uit die axioma's volgt en of er dus geen paradoxen in zitten.

Om het gevaar van paradoxen af te wenden, had Hilbert iets anders bedacht. De axioma's samen met de logische regels vormden eigenlijk een soort wiskundig spel, waarbij je vanuit bepaalde beginwoorden (de axioma's) volgens vaste regeltjes (de logica) nieuwe woorden vormt (de stellingen). Met een soort speltheorie zou het dan moeten lukken te bewijzen dat in dat spel nooit verboden woorden (paradoxen) kunnen worden gevormd. Deze speltheorie is dan eigenlijk een wiskunde óver de wiskunde, en staat bekend als *bewijstheorie*.

DE TIJDSINTUÏTIE De jonge Brouwer was goed op de hoogte van het recente grondslagenonderzoek. Hij kende Hilberts ideeën over formele wiskunde en bewijstheorie, hij kende Cantors verza-



melingenleer en wist van de paradoxen die waren opgetreden.

Als student had Brouwer zo zijn eigen filosofische standpunten ontwikkeld, die gekenmerkt werden door een hang naar mystiek, verwerping van optimistisch vooruitgangsdenken, en wantrouwen jegens de taal. Zekerheid heb je eigenlijk alleen van het feit dat je zelf bestaat. Brouwer verwierp Plato's idee dat wiskundige objecten echt bestaan. Maar evenzeer verwerpt hij Hilberts idee dat je wiskunde kunt bedrijven als een betekenisloos woordspel.

Brouwer stelt dat wiskundige objecten scheppingen zijn van onze geest: mentale constructies. Die constructies doen wij niet blindelings, maar betekenisvol en geleid door bepaalde intuïties die onlosmakelijk verbonden zijn aan de manier waarop wij denken. Brouwer heeft het over de *tijdsintuïtie*, en noemt daarbij het gegeven dat wij gedachten en gewaarwordingen niet gelijktijdig maar achtereen hebben, en beschikken over het vermogen de ene ervaring te onthouden om te vergelijken met een navolgende. In onze geest is als-het-ware een tijdslijn ingebouwd waarlangs wij het leven beleven en overdenken. Brouwer werkt niet precies uit wat de tijdsintuïtie inhoudt, bijvoorbeeld in de vorm van een stel axioma's. Dat zou ook niet passen in zijn overtuiging dat wiskundig inzicht zich niet in woorden laat vangen.

DE GETALLEN Uit het beeld van de tijdslijn ontwikkelt Brouwer zowel het concept van de natuurlijke getallen als de reële. Door op de tijdslijn hele stappen te zetten en die te onthouden, ontstaat vanzelf een rij van gehelen 0, 1, 2, 3, ... Maar ook is de tijdslijn een vloeiend geheel van momenten, waarbij tussen momenten steeds weer nieuwe momenten onderscheiden kunnen worden, zodat we

$a = 0$ of $a \neq 0$?

Kies een nog onopgelost wiskundig probleem, zoals het *vermoeden van Goldbach*. Dat vermoeden zegt dat elk even getal (groter dan 2) te schrijven is als de som van twee priemgetallen ($4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, enzovoorts). Maak op de volgende manier het reële getal a.

Schrijf eerst '0,'

Bekijk het eerste even getal (groter dan 2); dat is 4, en te schrijven als $2 + 2$; voeg dan een 0 toe: '0,0'.

Bekijk het volgende even getal, 6, kijk of het te schrijven is als som van twee priemgetallen; zo ja, schrijf weer een 0, zo niet, schrijf dan een 1.

Ga zo alle even getallen af. Dit is een uitvoerbare constructie waarbij het getal a op elke gewenste nauwkeurigheid kan worden bepaald. Tegelijkertijd is duidelijk dat a nooit klaar is, want dat vergt het testen van álle even getallen, en dat zijn er oneindig veel. Zou je nu zomaar kunnen zeggen of $a = 0$ danwel $a \neq 0$, dan zou je het vermoeden van Goldbach hebben opgelost. Want als $a = 0$, dan heeft a alleen maar nullen in zijn decimaalontwikkeling, als daarentegen $a \neq 0$, dan is er blijkbaar ergens een 1 geschreven, dus is er een even getal gepasseerd dat niet als som van twee priemgetallen geschreven kan worden.

L.E.J. BROUWER Luitzen Egbertus Jan Brouwer werd geboren in 1881 in Overschie. Zijn ouders kwamen uit Friesland, maar omdat zijn vader onderwijzer was, verhuisde het gezin regelmatig al naar gelang er een betere aanstelling vrij kwam. Op school viel Brouwer op als een pientere jongen, op zijn negende ging hij al naar de middelbare school en op zijn zestiende deed hij eindexamen HBS en gymnasium tegelijk. Hij studeerde wis- en natuurkunde in Amsterdam en promoveerde in 1907 bij prof. D.J. Korteweg. Mede onder invloed van Gerrit Mannoury ontwikkelde hij een eigen standpunt over de grondslagen van de wiskunde, dat hij verder uitwerkte onder de naam *intuïtionisme*.

Wiskundig gezien is Brouwer vooral succesvol geweest als topoloog. Hij was de eerste die taaie begrippen als 'kromme', 'gebied' en 'dimensie' in bedwang kreeg en gaf daarmee vorm aan een nieuw vakgebied: de *algebraïsche topologie*, waarin ruimten bestudeerd worden via hun afbeeldingen van en naar standaardruimten als de n-dimensionale bol.

Brouwer was een excentrieke en charmante figuur met een sterk rechtvaardigheidsgevoel. Samenwerking ging hem minder goed af en hij raakte regelmatig in bittere conflicten. In 1966 overleed hij nadat hij was aangereden door een auto.

een idee krijgen van een volle getallenlijn, of zoals Brouwer het noemt: het *continuüm*.

De dingen die wij construeren, construeren wij in stappen. Daarbij kunnen we ook constructies bedenken die eindeloos doorgaan. Zo kunnen we bijvoorbeeld beginnen met een getal 5 en daar steeds 1 bij optellen, dat levert dan een rij cijfers 5678910111213141516.... Die rij zullen we nooit af hebben. Wel kunnen we, als we erover nadenken, voorspellingen doen over hoe die rij zich verder zal ontwikkelen, als we hem verder uitschrijven. Zo is duidelijk dat in deze rij het cijfer 5 steeds weer zal blijven opduiken.

ONBETROUWBARE LOGICA In zijn proefschrift doet Brouwer logische wetten af als inhoudsloze taalvormen, die niet bijdragen aan de wiskundige inhoud. Een van de bekende wetten uit de logica zegt: een bewering is wel waar, of niet waar. Omdat er dus geen derde mogelijkheid is naast 'waar' en 'niet-waar', heet deze wet de *wet van de uitgesloten derde*. In logische symbolen wordt hij geschreven als $A \vee \neg A$ (A of niet-A). Van deze wet zegt Brouwer in 1907 dat hij vanzelfsprekend waar is, maar wiskundig helemaal niets vertelt.

Een jaar later heeft Brouwer zijn kijk op de rol van logica bijgesteld. In het artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' dat in 1908 verscheen in het *Tijdschrift voor wijsbegeerte* geeft hij voegwoorden als 'of' en 'niet' een nieuwe, constructieve betekenis. De bewering $A \vee \neg A$ staat dan voor 'Ik heb een methode om te beslissen of A danwel niet-A waar is'. Brouwer merkt op dat bij onopgeloste wiskundige problemen die beslissing nog niet te nemen is, en dat daarom de wet van de uitgesloten derde in de wiskunde dus niet altijd kan wor-

den toegepast. Hij licht dat toe met een voorbeeld, zie het kader op pagina 27.

DUBBELE ONTKENNING In Brouwers nieuwe interpretatie ontstaat er ook een wezenlijk betekenisverschil tussen de bewering 'A' (A is waar) en de bewering '$\neg\neg A$' (A is niet niet-waar). Stel je zoekt een oplossing voor een bepaalde vergelijking. Dan kan het zijn dat je een concrete oplossing hebt, in dat geval kun je met recht zeggen: 'er is een oplossing' (A). Maar het kan ook zijn dat je via een of andere redenering kunt aantonen dat het niet mogelijk is dat er géén oplossing is. In dat tweede geval ($\neg\neg A$) weet je dan dat er ergens een oplossing moet zijn, maar je hebt nog geen manier om die oplossing concreet aan te wijzen. Omdat voor Brouwer wiskundige dingen alleen bestaan voor zover je ze zelf kunt maken, mag je dan niet beweren dat er een oplossing ís, hoogstens dat er niet geen is.

INTUÏTIONISTISCHE WISKUNDE De wiskundige grondslag van Brouwer heet *intuïtionisme*. Als op school voortaan intuïtionistische wiskunde zou worden gegeven, zou je het verschil waarschijnlijk nauwelijks merken. De bekende functies als $\sqrt{}$, log, sin, cos, hun afgeleiden en primitieven, zijn constructief en zien er dus intuïtionistisch hetzelfde uit. Verschillen treden pas op als je algemene stellingen over willekeurige functies gaat proberen te bewijzen. Er blijkt dan dat nulpunten er vaak 'niet niet' zijn, maar daarmee nog niet 'wel'. Er blijkt dan ook dat een functie nooit een sprong kan maken.

In sommige opzichten past de huidige praktijk misschien wel beter bij Brouwers wiskunde. Als we bij een berekening uitkomen op getal $a \approx 4{,}00$, dan is de uitkomst iets anders dan het getal 4; we hebben te maken met een onaf getal a, dat bij scherpere berekening zich zou kunnen ontwikkelen als 3,998 of 4,003. Van zo'n kommagetal a is dus niet met zekerheid te zeggen of $a < 4$ danwel $a \geq 4$.

INTUÏTIONISME VANDAAG Wat betreft de grondslagen van de wiskunde is Hilberts standpunt onhoudbaar gebleken. In de jaren dertig werd bewezen dat het nooit zal lukken alle axioma's van de wiskunde op te schrijven, noch te bewijzen dat er geen paradoxen kunnen optreden zonder datzelfde eerst aan te nemen. Toch is Brouwer met zijn intuïtionisme niet de grote winnaar geworden. Zijn steviger gegrondveste wiskunde werd door de meeste wiskundigen als te bewerkelijk ervaren en zij namen de onzekerheid over de klassieke grondslagen voor lief. Hilbert had al eens gezegd: 'Niemand zal ons verdrijven uit het paradijs dat Cantor ons geschapen heeft.' In dat opzicht heeft hij wel gelijk gekregen.

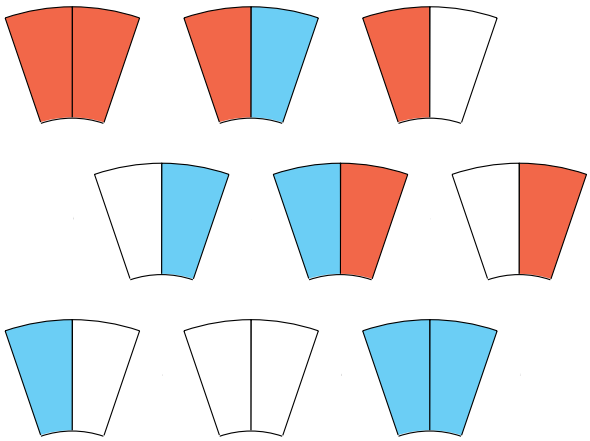
In september 2007 werd een postzegel uitgebracht ter gelegenheid van het feit dat honderd jaar geleden Brouwers proefschrift *Over de grondslagen der wiskunde* verscheen. Het teken ⊨ staat voor 'er geldt dat'. De formule, waarin dit teken is doorgestreept, zegt dus: 'het principe A of niet-A geldt niet'. De zegel is te koop bij de grotere postkantoren en via onlinewinkel.tntpost.nl

LITERATUUR Bij Epsilon Uitgaven (Utrecht) verscheen in 2001 *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde* van Dirk van Dalen. Hierin zijn onder meer opgenomen Brouwers proefschrift *Over de grondslagen der wiskunde* (1907) en het artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' (1908). Bij uitgeverij Bert Bakker (Amsterdam) verscheen in 2001 de biografie *L.E.J. Brouwer* door Dirk van Dalen. ■

PROBLEMEN

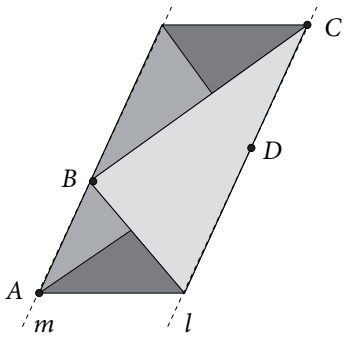
■ door Dion Gijswijt

PUZZELRING 1. Maak van de negen puzzelstukjes een ring. Kleuren van naast elkaar gelegen stukjes moeten overeenkomen.

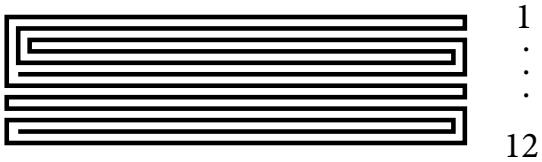


2. In het artikel *Magische blokken* uit het septembernummer worden de zijden van een vierkant elk rood of wit gekleurd. Zo ontstaan 16 verschillende tegels waarmee je een 4 × 4 vierkant kunt leggen, zó dat de kleuren van buurtegels steeds aansluiten. Kun je op dezelfde manier een 9 × 9 vierkant leggen van alle 81 tegeltjes die je krijgt door de zijden met *drie* kleuren te kleuren?

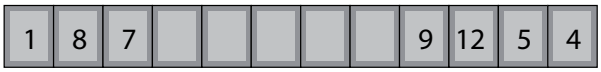
ORIGAMI In de figuur zie je een vierkant velletje papier *ABCD* met zijde 1. De twee overstaande hoekpunten *B* en *D* zijn naar binnen gevouwen langs de vouwlijnen *l* en *m*. Nu liggen de punten *A* en *B* op lijn *m* en de punten *C* en *D* op lijn *l*. Wat zijn de lengtes van de twee vouwen?



POSTZEGELS Een strip van twaalf postzegels wordt opgevouwen tot een stapeltje. De twaalf postzegels worden nu van boven naar beneden genummerd van 1 tot en met 12. In de figuur zie je hoe de stapel er van opzij uit zou kunnen zien.



In de uitgevouwen strip, zie onderstaande figuur, zijn zeven van de twaalf nummers al ingevuld. Kun je de rest ook invullen?



DUIVELSE DOZEN Beelzebub heeft een grote doos, waarin precies dertien kleinere dozen zitten. Op elke doos staat een getal. Het getal van een doos is altijd precies één meer dan de getallen van de dozen die erin zitten bij elkaar opgeteld. Het getal van de grote doos is 666. Wat zijn de getallen van de andere dozen?

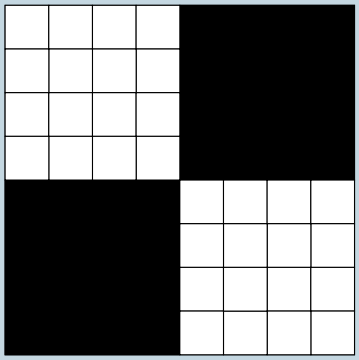
OPLOSSINGEN nr. 1

VIERKANTEN Noem de zijden van de vierkanten A, B en C achtereenvolgens a, b en c. Door naar de zijden van de grote 'geodriehoek' te kijken, vinden we:

$$\begin{aligned} a + c + c &= 17, \\ a + b \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + b \cdot \sqrt{2} &= 17, \\ b + b + c \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + c \cdot \sqrt{2} &= 17\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Oplossen van het stelsel geeft $a = 5$, $b = 4\sqrt{2}$ en $c = 6$.

SCHAAKBORD Het verwisselen van twee rijen of van twee kolommen verandert het probleem niet. Door dit te doen, krijgen we onderstaande figuur. Het is duidelijk dat er in elk wit gebied precies vier muntjes moeten komen en dat dit voor beide gebieden op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ manieren kan. In totaal zijn er dus $24 \times 24 = 576$ manieren.



KWADRATENKETTING Het is duidelijk dat 8 en 9 elk maar één buur kunnen hebben. Dit zijn dus de uiteinden van de ketting. Door vanaf uiteinde 9 te werken, zie je snel dat de enige oplossing is: 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

BLOKKEN STAPELEN Het kan! De snelste oplossing die ik ken vergt 69 stappen. Weet iemand een snellere manier?

RANGLIJST Laat A_n het aantal ranglijsten zijn met n deelnemers. Het is snel te zien dat $A_0 = 1$, $A_1 = 1$ en $A_2 = 3$. Voor n deelnemers kunnen we kijken naar het aantal ranglijsten waarbij er k eerste plaatsen zijn. Dit aantal is gelijk aan $\binom{n}{k} A_{n-k}$: kies uit de n deelnemers k winnaars en stel een ranglijst op voor de overige $n - k$ deelnemers.
Zo krijgen we achtereenvolgens:

$A_3 = 3 \times A_2 + 3 \times A_1 + 1 = 13$,
$A_4 = 4 \times 13 + 6 \times 3 + 4 \times 1 + 1 = 75$,
$A_5 = 375 \times 130 + 30 + 5 + 1 = 541$.

BUITENAARDSE BIJLES

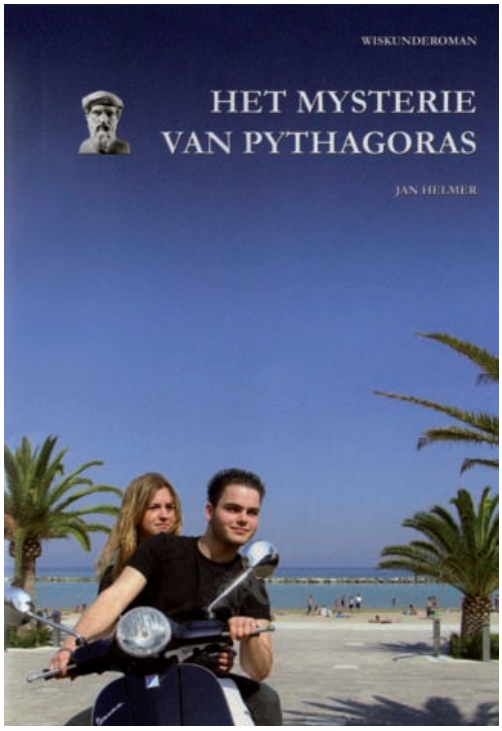
Het mysterie van Pythagoras
boekbespreking
■ door Jan Guichelaar

Jan Helmer (1955), auteur van het onlangs verschenen *Het mysterie van Pythagoras*, heeft vier liefdes: echtgenote Jutta, dochter Claudia, wiskunde en Italië. Hij heeft ze in zekere zin in zijn 'wiskunderoman' (eigenlijk een wiskundesprookje) gecombineerd. Op de planeet Symmetria, zo'n twee miljard lichtjaar van de aarde verwijderd, onzichtbaar voor de aardbewoners door een enorm zwart gat ergens halverwege, wonen onder meer wiskundigen die lang geleden op aarde hun sporen hebben nagelaten: onder anderen Euclides, Fibonacci en Pythagoras. De stelling van de laatste kent elke middelbare scholier. Hoewel eigenlijk niet toegestaan, maakt Pythagoras nog wel eens een tripje naar die goede oude aarde en loopt daar dan in een wit gewaad als een vreemdeling rond.

Matteo Concetti, een middelbare scholier, die alleen op zijn Vespaatje rondrijdt en niets van wiskunde moet hebben, doet het dit jaar niet goed op school. Hij kan het jaar alleen nog redden door zijn laatste wiskundeproefwerk uitstekend te maken. Op het strand van zijn woonplaats Crotone ontmoet hij een oude man in een wit gewaad, die beweert dat hij Pythagoras is ('zeker zo'n oude gek uit die inrichting hier in de buurt,' denkt Matteo). Pythagoras wil hem helpen bij de voorbereiding van zijn wiskundeproefwerk.

En zo begint een serie avonturen van Pythagoras, Matteo en het Engelse meisje Sophia, dat via een scholenuitwisseling bij de familie Concetti logeert. Tijdens deze avonturen komen alle onderwerpen uit het komende proefwerk van Matteo (Pythagoras weet dat natuurlijk allemaal) aan de orde: rechte lijnen, negatieve getallen, formules, hoeken, allerlei bijzondere getallen, tweetallig stelsel, parabolen, wortels, verhoudingen, priemgetallen, oppervlakte en omtrek van een cirkel en natuurlijk de stelling van Pythagoras.

Samen met Pythagoras reizen ze naar Symmetria (in het ruimtevaartuig Homerus 360), weer terug op aarde brengen ze een bezoek aan Samos (een eilandje voor de Turkse kust), waar Pythagoras geboren is. Matteo krijgt steeds meer lol in de wiskundige dingen die hij van Pythagoras leert. Samen met Sophia, die allengs natuurlijk steeds verliefder wordt op die mooie Italiaanse jongen, lost hij steeds meer problemen op.



Uiteindelijk keren ze terug naar de groep scholieren, met het excuus dat ze voor de maffia gevlucht waren, maar niet nadat ze met veel dank afscheid hebben genomen van Pythagoras, die weer naar Symmetria terug moet. Zijn laatste proefwerk maakt Matteo fantastisch, tot verbazing en verdriet van zijn wiskundeleraar Di Santis, die had gehoopt eindelijk van die wiskundeluilak verlost te zijn.

Sophia vertrekt en Matteo heeft bij het afscheid een lekker luchtje opgespoten. Je begrijpt het al, Sophia komt nog geregeld bij Matteo logeren en uiteindelijk krijgen ze elkaar. Eind goed al goed.

Het boekje leest vlot, de behandelde wiskunde ligt op het niveau van de onderbouw van de middelbare school. De lezer leert wat middelbare-schoolwiskunde op een leuke manier, wat geschiedenis van de wiskunde en ook een aantal verrassende extra wiskundige zaken, zoals 'de prachtige eigenschappen van het getal 36' en 'in hoeveel stukken kun je een pizza snijden met een bepaald aantal sneden?'. Elke schoolbibliotheek zou er wel eentje moeten hebben. ■

Jan Helmer, *Het mysterie van Pythagoras*, ISBN 978-90-811843-1-1, www.pythagorasproject.nl

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

LETTERGETALLEN

Voor A zijn er 9 mogelijkheden (bedenk dat $A \neq 0$). Voor B zijn er ook 9 mogelijkheden (want $B \neq A$). In totaal zijn er dus $9 \times 9 = 81$ mogelijkheden.

G8-TOP

De kans dat zij naast elkaar zitten is 1/7 en de kans dat zij tegenover elkaar zitten is 0 (want Poetin zit tegenover een man).

GROOTSTE DOOSJE

Het grootste volume is $5 \times 4 \times 3 = 60$ met $2 \times (5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 5) = 94$ vierkantjes.

KOEKOEKSKLOK

Om kwart voor zeven $(7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 1 + 10 + 1 = 38)$ of om kwart voor tien $(10 + 1 + 11 + 1 + 12 + 1 + 1 + 1 = 38)$.

EEN, TWEE, DRIE, VIER, VIJF, ZES, ZEVEN, ...

$X = 4$ en $Y = 5$, want EEN heeft 3 letters, TWEE heeft 4 letters, DRIE heeft 4 letters, enzovoorts.

PYTHAGORAS

47ste jaargang nummer 2
november 2007
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Marco Swaen, Chris Zaal

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Alex van den Brandhof, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.

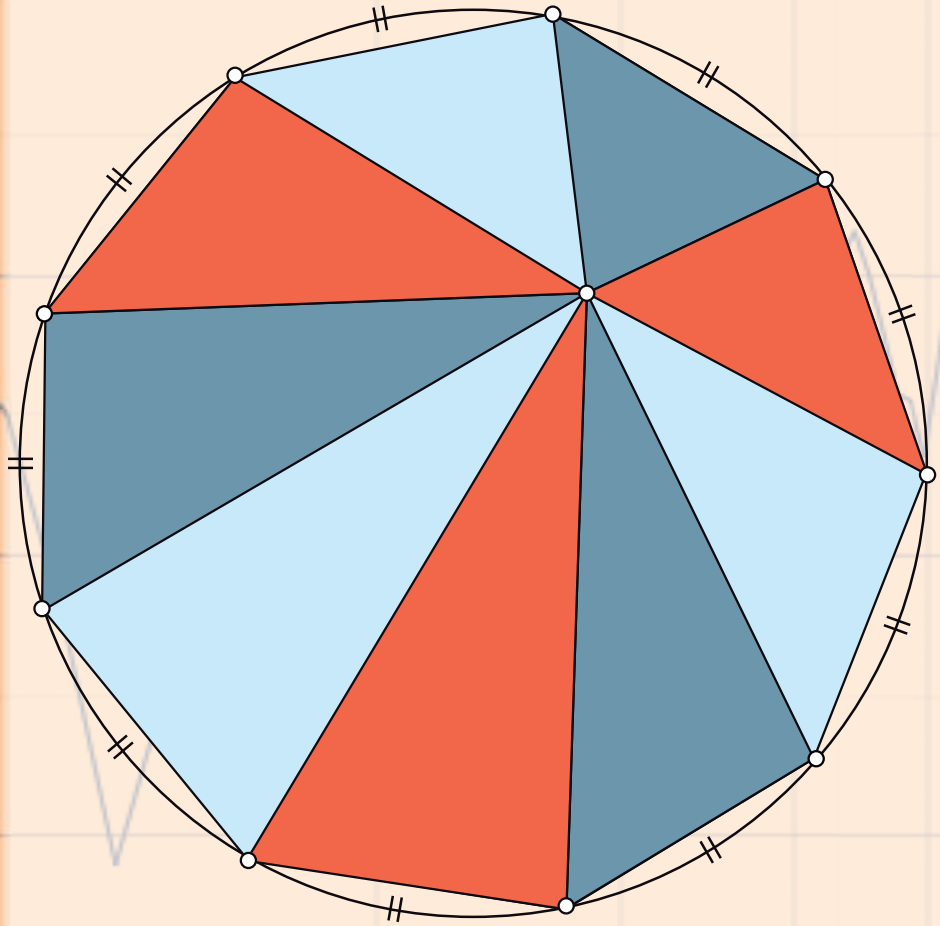
Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs (6 nummers per jaargang)
€ 21,00 (Nederland) € 23,00 (België),
€ 27,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 21,00 (leerlingabonnement België),
€ 11,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 13,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems, promovendus wiskunde aan de UL (jdaems@math.leidenuniv.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (pytholym@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), dr. D.R. Pik, wiskundige en pianist (drpik@xs4all.nl), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl), dr. M.D.G. Swaen, docent wiskunde op het Calandlyceum, de UvA en de HvA te Amsterdam (marco@pythagoras.nu), dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwikkelaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu), drs. B. Zevenhek, docent wiskunde op het Barlaeusgymnasium te Amsterdam (bartzevenhek@gmail.com)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:

SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit.
De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.