

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Ik moet m'n ideeën over romantiek
opnieuw definiëren.

Wiskunde in de media

De vete tussen Newton en Leibniz
Stroperige kaarten

47ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2008

VAN VIERVLAK NAAR STER



Ruimtemeetkunde wordt zoveel interessanter als je de figuren echt kunt vastpakken, helemaal als je de figuren zelf in elkaar hebt gezet. Het bouwplatenboekje van *Pythagoras* vormt daarvoor een mooie aanleiding. Het bevat de bouwplaten voor negen veelvlakken die samen een serie vormen. De kleinste figuur kun je zien als een viervlak waarvan de vier zijvlakken helemaal naar binnen gedeukt zijn. Vervolgens worden die deuken minder diep, komen dan precies vlak te liggen zodat je een echt viervlak krijgt. Maar daar stopt het niet: de zijvlakken komen naar buiten als piramides en vormen sterpunten die steeds verder naar buiten steken.



Het bouwplatenboekje kost € 2,50, exclusief verzendkosten.

De verzendkosten (minimaal € 1,18) hangen af van het aantal bestelde boekjes. Een bestelformulier is te vinden op www.pythagoras.nu.

MEDIACLICHÉS



Voor beroepen die vaak een hoofdrol spelen in films en tv-series, zoals advocaat, arts of maffia-baas, gelden allerlei mediaclichés. Die zijn niet per se onjuist; sterker nog, het verhaal gaat dat echte maffiosi zich graag laten inspireren door Don Corleone uit de Godfather.

In het thema-artikel kijken we dit keer hoe dat met wiskundigen zit. In films als *A beautiful mind* (zie het omslag) worden ze neergezet als geniaal, solitair en sociaal gehandicapt, maar vinden ze ten slotte toch de Ware Liefde met een bloedmooie vrouw.

Volgens het bovenstaande principe van 'de werkelijkheid volgt de kunst', moet je als wiskundig getalenteerde dus geen moeite doen om (deson-

danks?) zo normaal mogelijk te lijken. Integendeel, overdrijf het gerust een beetje, die verstrooidheid, eenzelligheid en verlegenheid. Allemaal tekenen van een prachtige geest, voor wie het wil zien.

Verder gaan we het nieuwe jaar in met een geheel vernieuwde www.pythagoras.nu. Dat was hard nodig, omdat de oude website na een reeks van gedeeltelijke renovaties en uitbreidingen was uitgegroeid tot een html-krottenwijk waarin niemand meer de weg wist. Als gebruiker valt je natuurlijk eerst het andere uiterlijk op, maar de nieuwe site heeft ook inhoudelijk meer te bieden. Zo komen alle oude jaargangen van het blad integraal beschikbaar. Dit is een meerjarig project, waarbij we beginnen met het online zetten van enkele recente jaargangen.

INHOUD

2 Kleine nootjes

4 Mediagenieën

9 Journaal

10 In- & uitspringende hoeken

12 H6X9H-figuren

14 Kort door de bocht

16 Stroperige kaarten

18 Pythagoras Olympiade

20 Wiskunde in Vietnam

21 Miskunde: advocaat met hart voor de zaak

22 Isaac Newton (1643-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): uitvinders van de calculus

28 Over de stelling van Pythagoras

30 Problemen - Oplossingen

32 Superdoku's oplossingen

33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 2



NIVEAUBALKJES

Sommige pagina's hebben onder het paginummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

KLEINE NOOTJES

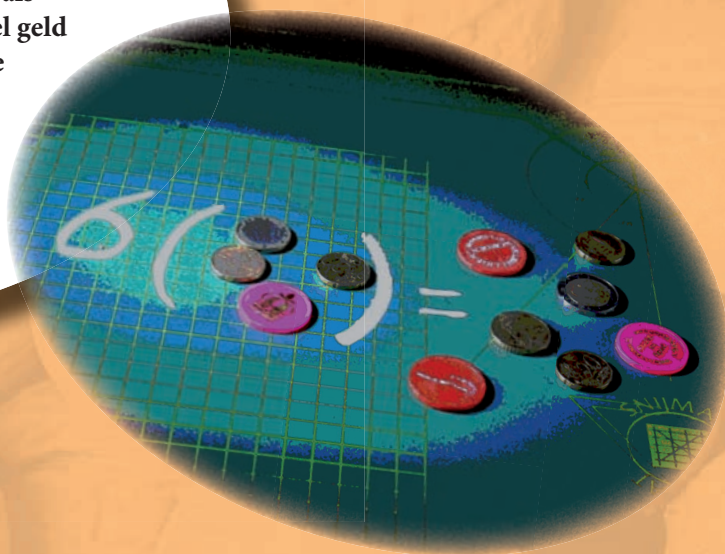
Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

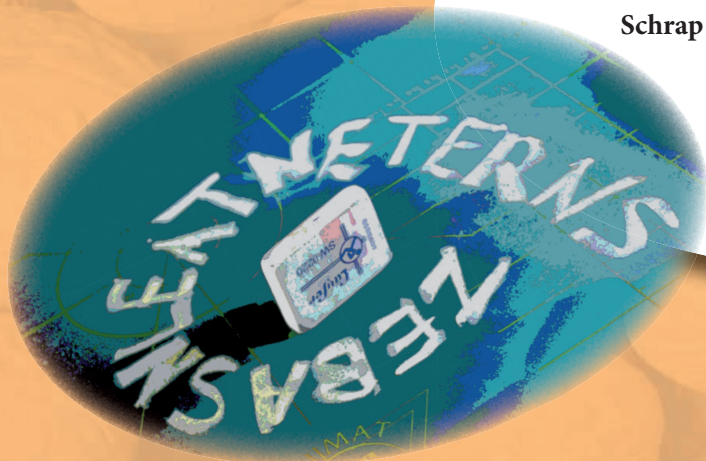
ZES KEER ZOVEEL

Cathy heeft zes keer zoveel munten als Janna, maar Janna heeft zes keer zoveel geld als Cathy. Welk bedrag hebben ze minimaal samen?



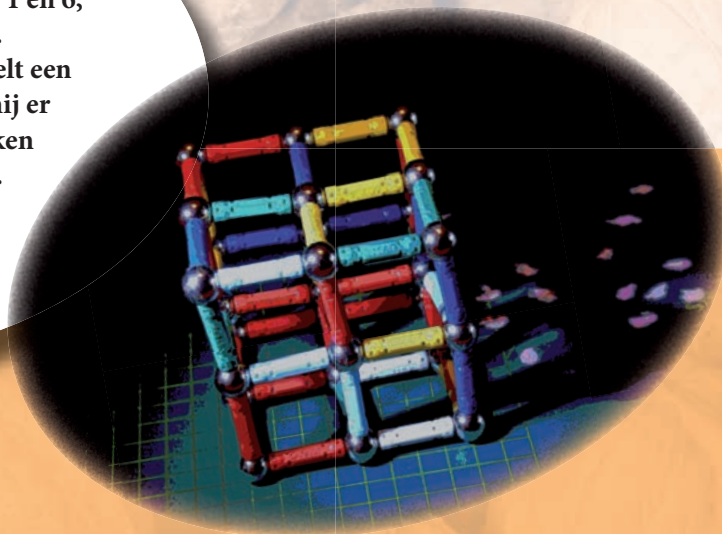
LETTERS SCHRAPPEN

Schrap zes letters en houd vruchten over.



DOBBELSTENEN

Bij een dobbelsteen zitten de ogentallen 1 en 6, 2 en 5, en 3 en 4 tegenover elkaar. Wim heeft acht dobbelstenen. Hij stapelt een kubus van $2 \times 2 \times 2$ dobbelstenen. Als hij er schuin op kijkt, ziet hij drie zijvlakken en dus twaalf dobbelsteenkanten. Hoeveel ogen ziet hij maximaal? En hoeveel minimaal?



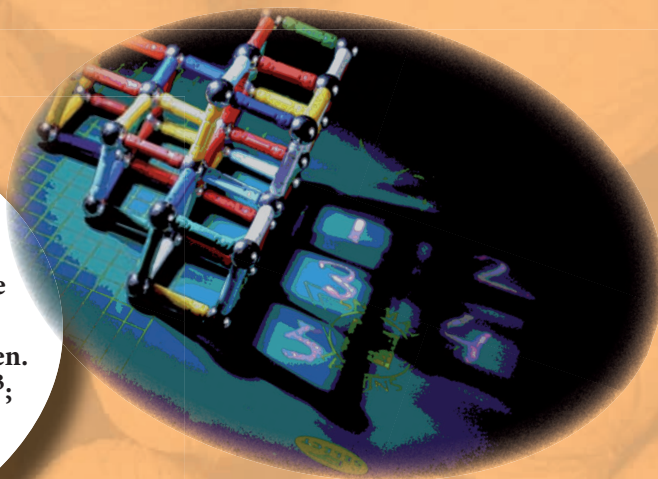
GOEDKOOP NAAR MAASTRICHT?

Een Amsterdammer rijdt met een normale auto langs normale wegen naar Maastricht en gebruikt slechts één liter benzine. Hoe kan dat?



ACHT KUBUSJES

Jan-Peter heeft acht kubusvormige blokjes van 1 bij 1 bij 1 centimeter. Hij plakt ze aan elkaar (telkens een vierkantje op een vierkantje). Elk blokje komt vast te zitten aan één of meer zijvlakken. De buitenoppervlakte van het bouwwerkje is altijd even. Waarom? De kleinst mogelijke oppervlakte is 24 cm^2 ; hoe plak je dan? Wat is de grootste mogelijke oppervlakte? Kun je elke even oppervlakte tussen het minimum en het maximum krijgen?



De wiskundige zal in de entertainmentindustrie nooit zo populair worden als de arts of de politieagent, maar toch krijgt hij af en toe de hoofdrol in een film of serie. Wat zijn de Hollywoodclichés die het grote publiek over de wiskundige krijgt voorgeschooteld? Hij (geen zij) is buitenaards slim, maar dat is in het echte leven eerder een handicap. Sociaal is hij volstrekt raar, en hij werkt altijd in z'n eentje. In de populaire media is een wiskundige in ieder geval nooit iemand die met hard werken een vak geleerd heeft en dat samen met collega's zo goed mogelijk probeert uit te oefenen.

■ door Arnout Jaspers



4

Mediaclichés bepalen voor een groot deel het beeld dat het publiek heeft van een beroep. In politieseries lopen agenten elke werkdag op boeven te schieten, tussen de halsbrekende autoachtervolgingen door. In feite vuurt de modale politieagent, in ieder geval in Nederland, in z'n hele carrière niet één keer in ernst een schot af. Als hij wel zo triggerhappy te werk zou gaan als op tv, zat hij binnen de kortste keren zelf in de gevangenis.

Artsen in ziekenhuisseries stellen in een fractie van een seconde de diagnose van het binnengereken noodgeval en beginnen te snijden. Dertien minuten later is er weer een leven gered. In feite hebben artsen vaak grote moeite om erachter te komen wat een patiënt mankeert, laat staan wat ze er aan kunnen doen. Niet zelden bestaat de behandeling uit afwachten of het vanzelf overgaat, dan maar eens wat proberen en vervolgens de patiënt zien overlijden. Hoe zit het met de Hollywoodclichés over wiskundigen?

BESCHIEDEN TREND Het is ten eerste al opmerkelijk dat er films en series bestaan met een wiskundige in de hoofdrol, een bescheiden trend

van de laatste jaren. Voorbeelden zijn *Good Will Hunting* uit 1997, *A beautiful mind* uit 2001 en de tv-serie *Numb3rs*, die in Nederland nog steeds door Veronica wordt uitgezonden (maandagavond om half tien).

Good Will Hunting en *Numb3rs* zijn pure fictie, terwijl *A beautiful mind* is gebaseerd op het leven van John Nash, Nobelprijswinnaar economie in 1994. Heel veel maakt dat voor het beeld van de wiskundige niet uit. In elke aflevering van *Numb3rs* lost wiskundige Charlie Eppes voor zijn broer, FBI-agent Don, een misdaad op. In deze serie is eigenlijk de wiskunde zelf de hoofdpersoon, dus het is niet meer dan logisch dat de serie meer wiskunde bevat dan de twee films. Zo zijn er afleveringen waarin de woonplaats van een seriemoordenaar wordt afgeleid uit het patroon van de 'plaatsen delict' op de landkaart, of waarin met een slim algoritme een scherp beeld uit een zeer ruizige video-opname wordt gefilterd.

Alledrie de voorbeelden volgen een typische Hollywood-conventie: schrijf alles aan de hoofdpersoon toe. Zoals Rambo voor het dramatisch effect in z'n eentje heel Noord-Vietnam moet ver-



Geniale wiskundigen zijn volgens Hollywood zo onpraktisch, dat ze niet op een velletje papier schrijven, maar op een raam of op een schoolbord aan het plafond.

slaan, zo wekt *Numb3rs* de indruk alsof Charlie Eppes alle benodigde wiskunde ter plekke verzint. In feite is juist zulke puur toegepaste wiskunde de vrucht van jarenlange ontwikkelingstrajecten waar velen aan bijdragen. Er is ook niet één iemand die Excel heeft uitgevonden, om maar wat te noemen.

Hoewel Nash' werk veel baanbrekender was, had ook hij voorgangers op wier inspanningen hij voortbouwde. Wat Will Hunting eigenlijk bijdraagt aan de wetenschap kom je helemaal niet te weten. Will, een anonieme schoonmaker op de Amerikaanse topuniversiteit Massachusetts Institute of Technology, stapt het verhaal binnen door stiekem de oplossing van een hels moeilijk wiskundeprobleem op een schoolbord te schrijven waarop alle studenten hun tanden al stukgebeten hebben. De docent, een winnaar van de Fieldsmedaille (een soort Nobelprijs voor wiskunde), is dan vastbesloten deze ruwe diamant te polijsten tot een echte

wiskundige, maar Will zelf is daartoe pas genegen na uitvoerige zieleknijperij door zijn therapeut, gespeeld door Robin Williams.

Zo wordt het imago geprojecteerd van de wiskundige als orakel: hij studeert nooit, leest geen vakliteratuur, bespreekt problemen niet met collega's, maar vindt in de krochten van zijn brein een kant-en-klare, voor gewone stervelingen onbegrijpelijke oplossing voor elk aangeboden probleem.

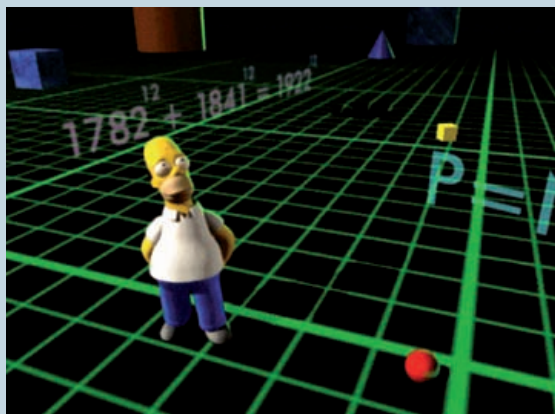
Geen van beide regisseurs versmaadt ook de kans om hun hoofdpersoon te associëren met de enige echte jongensboek-wiskunde: codes kraken. Will wordt gevraagd door de supergeheimzinnige National Security Agency – maar weigert op ethische gronden – John door het Pentagon.

Laatstgenoemde ziet alle deuren voor hem opengaan als hij in een paar seconden een code kraakt die alle Pentagon-specialisten te machtig was. Ook hier is geen sprake van het bestuderen

THE SIMPSONS De ploeg die de al heel lang lopende cartoonserie *The Simpsons* maakt, bevat opvallend veel mensen die wiskunde of informatica gestudeerd hebben. Hoewel wiskunde als zodanig zelden het onderwerp van een aflevering is, strooien de makers af en toe wiskundige toespelingen door hun werk.

Een van de meer expliciete is Homer Simpsons 'weerlegging' van de Stelling van Fermat. Die zegt dat voor drie positieve gehele getallen a , b , c nooit kan gelden: $a^n + b^n = c^n$ als n groter dan 2 is.

Homer schrijft in de serie op dat $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$. De grap is dat dit lijkt te kloppen als je het op je rekenmachine uitrekent. Heeft de Britse wiskundige Andrew Wiles, die zeven jaar lang in het geheim aan het bewijs van de stelling werkte, toch een fout gemaakt? Nee dus. Homers getallen vormen een 'bijna-treffer': de eerste tien cijfers van de 39-cijferige uitkomst kloppen, de rest niet, maar dat zie je



niet op het venster van je rekenmachine.

Er zijn inmiddels natuurlijk websites die alle wiskundige toespelingen in *The Simpsons* bijhouden en van commentaar voorzien, bijvoorbeeld www.simpsonmath.com. En het kon niet uitblijven: er zijn ook leraren die met zo'n plaatje uit de Simpsons als voorwendsel lesjes voor in de klas maken.

van eerder werk door voorgangers, data analyseren, hypothesen toetsen, falen en weer opnieuw beginnen: het orakel gaat even in trance en de oplossing volgt in een flits van inzicht.

NASH-EVENWICHT In *A beautiful mind* doet regisseur Ron Howard ten minste nog een dappere

poging om Nash' doorbraak – later het Nash-evenwicht gedoopt – aanschouwelijk te maken. Als John met zijn studievrienden in de kroeg zit en ze er weer eens niet in slagen om indruk te maken op de meisjes, valt hem eindelijk in dat ze allemaal slechter af zijn door achter dat ene spectaculaire blondje aan te gaan. Immers, waarschijnlijk zal ze zich

6



Elke wiskundige is in de film ook cryptograaf. John Nash en Will Hunting worden door respectievelijk het Pentagon en de NSA gevraagd om ze uit de brand te helpen met voor alle anderen onkraakbare codes.

juist door al die aandacht te goed voelen voor ieder van hen, terwijl haar aanvankelijk toeschietelijker vriendinnen zich verwaarloosd voelen en er voor passen om als tweede keus te dienen. Als de vrienden rationeel handelen en elkaars overwegingen goed inschatten, verdelen ze hun aandacht gelijkmatig en heeft iedereen een betere kans om contacten te leggen.

Nu hoeft je hiervoor bepaald geen genie te zijn; iedereen met wat ervaring op dit gebied weet dat zo'n kring hunkerende mannetjes om het aantrekkelijkste vrouwtje heen grondig de markt verpest. Dit type situatie komt echter ook in de economie en de politiek veel voor, en Nash was in 1950 de eerste die met een algemene wiskundige analyse kwam. Tot die tijd was de economische theorie eigenlijk blijven steken bij de achttiende eeuwse filosoof Adam Smith. Die stelde dat als iedereen streeft naar het beste voor zichzelf, dankzij eerlijke concurrentie in een vrije markt, er toch een evenwichtstoestand ontstaat waarin het in totaal best mogelijke voor iedereen wordt gerealiseerd.

Soms klopt dat, maar als de kosten en baten van individueel gedrag anders verdeeld liggen, ontstaat een Nash-evenwicht. In die situatie wordt – als je ieders winst en verlies optelt – niet het optimale resultaat behaald, maar toch zal geen enkele rationeel denkende deelnemer voor een andere strategie kiezen, mits hij de overwegingen en strategie weet van alle andere rationele deelnemers (inclusief hun mening over wat hij zelf denkt).

Natuurlijk komt de film niet aan deze finesses toe en lijkt John Nash z'n latere Nobelprijs vooral te danken te hebben aan het feit dat hij in z'n studententijd geen meisje kon krijgen.

CONTACTGESTOORD Maar misschien lag dat ook wel ergens anders aan: Hollywood-wiskundigen zijn namelijk contactgestoord. John Nash is het prototype van de mensenschuwe nerd, die al tijdens z'n wetenschappelijk beste jaren schizofreen begon te worden. Will Hunting lijkt weliswaar zeer sociaal vaardig met z'n maatjes uit de achterbuurt, maar – maakt zijn therapeut hem met veel moeite duidelijk – in feite houdt hij krampachtig iedereen op afstand die echt contact met hem zou kunnen maken.

In een aflevering van *Numb3rs* wordt een wis-



Beide genieën zijn, om uiteenlopende redenen, niet langer in de maatschappij te handhaven.

kundige gekidnapt, die al vijftien jaar werkt aan het bewijzen van de beruchte Riemann-hypothese. Die heeft weliswaar 'gewoon' een dochter, maar of die daar veel mee opschiet is de vraag. Commentaar van een echte wiskundige op een website die de serie op de voet volgt: 'Ik weet dat wiskundigen een reputatie als workaholics hebben, maar het idee dat hij niet eens een uur vrijmaakt voor z'n dochters verjaardagfeestje vanwege een probleem waar hij al vijftien jaar aan werkt is vrij belachelijk.'

Het genre lijkt ook een conventie te kennen over het daten door echte nerds: zowel Will als John lap-



Beide exactelingen komen op hun eerste afspraakje altijd meteen terzake, met over het algemeen teleurstellende resultaten. Alleen hun Ware Liefde zal deze directe aanpak op waarde weten te schatten.

8

pen alle tactische prudentie aan hun laars door vrijwel meteen eerlijk tegen een vrouw te zeggen dat ze sex met haar willen. Bij Will is het provocatie, bij Nash wereldvreemdheid, althans op het eerste gezicht, maar je kunt het in pokertermen ook zien als 'going all-in': waarschijnlijk betekent het dat je meteen uitgespeeld bent, maar zo niet, dan is de hoofdprijs al bijna binnen.

KERN VAN WAARHEID

Het clichébeeld in de massamedia van de wiskundige als het sociaal onaangepaste orakel dat op de rand van de waanzin leeft bevat ongetwijfeld een kern van waarheid, anders zou het niet aanslaan. Voor een leek kunnen staaltjes van wiskundig inzicht lijken op tovenarij, maar dan gaat het bijna altijd om het wiskundig equivalent van een balletje hoog houden, niet om diepzinnige, vruchtbare ontwikkelingen. Niemand denkt dat een voetballer of zwemmer de absolute top kan halen zonder jarenlange training, optimale trainingsfaciliteiten en goede coaches. Zo is ook wiskundig inzicht, behalve natuurlijk op talent, gebaseerd op duizenden uren noeste arbeid. Het verschil is dat dat zich bui-

ten beeld, in de studeerkamer heeft afgespeeld, terwijl de leeftijdsgenoten naar de disco of de sportclub waren.

MEER WISKUNDEFILMS Al in 1959 maakte Walt Disney een Donald Duck tekenfilm over wiskunde: *Donald in Mathmagic Land*, in het Nederlands verschenen onder de titel *Donald in Rekenwonderland*. Deze film van bijna een halve eeuw oud is ook op dvd verschenen.

In 2007 maakten afstudeerders van de Nederlandse Film- en Televisie Academie een film over Kurt Gödel. Bij die film hoort ook een website: whoisgodel.com.

Van het boek *Flatland – A romance of many dimensions* van Edwin Abbott zijn twee verschillende films gemaakt: *Flatland the movie* (www.flatlandthemovie.com) in 2006, en *Flatland the film* (www.flatlandthefilm.com) in 2007. Lekker verwarrend!

En er bestaat nog meer. Iemand van de Texas A&M University houdt op zijn website een aardig overzicht bij, zie www.math.tamu.edu/~dallen/hollywood. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Pollockfractals

Fractals zijn wiskundige figuren die zichzelf op steeds kleinere schaal herhalen. Een methode om met behulp van fractal-analyse de authenticiteit van een Pollock te checken, blijkt niet te deugen. Dit schrijven drie Amerikaanse onderzoekers van de Case Western Reserve University.

De expressionistische Amerikaanse schilder Jackson Pollock (1912 - 1956) was al overleden toen de wiskundige Mandelbrot in 1961 wiskundige structuren bestudeerde die hij in 1975 fractals noemde. Pollock was zijn tijd echter ver vooruit: zijn werk zit, zonder dat Pollock zich daarvan bewust was, vol met fractale structuren. Althans, dat beweerde Richard Taylor toen hij eind jaren negentig van de twintigste eeuw enkele van Pollocks werken analyseerde.



Jackson Pollocks 'One: Number 31, 1950' in het Museum of Modern Art in New York. Bron: Wikipedia / Answer.com (www.answers.com/topic/pollock31-jpg)

Hij ontdekte dat je van een schilderij van Pollock de zogeheten 'fractaldimensie' kunt berekenen. Bezwaren tegen Taylors methode kwamen van Katherine Jones-Smith, Harsh Mathur en Lawrence Krauss. Jones-Smith maakte een paar simpele tekeningen en liet daar de Taylor-analyse op los. Wat bleek? Haar tekeningen vol-

deden aan dezelfde kwaliteitseisen als een echte Pollock! Van 32 onlangs ontdekte schilderijen waarvan men vermoedt dat ze van Pollock zijn, is de Taylor-test dus niet de aangewezen methode om dit vermoeden te bewijzen of te weerleggen.

Lees meer over dit onderwerp op www.kennislink.nl.

100 eurobiljet overbodig

Uit de pinautomaat komen geen briefjes van 100. Dat geeft niets, want in een wereld zonder het 100 eurobiljet wordt het betalingsverkeer nauwelijks minder efficiënt.

In het betalingsverkeer noemen we een transactie efficiënt als er zo weinig mogelijk munten of biljetten over en weer gaan. Een voorbeeld: stel je moet een bedrag van 11,30 euro afrekenen aan de kassa. Met minder dan vier geldstukken lukt de betaling niet. Met vier geldstukken lukt het wel, hiervoor zijn drie manieren: (a) je geeft een biljet

van 10 euro en munten van 1, 0,20 en 0,10 euro; (b) je geeft een biljet van 10 euro en munten van 1 en 0,50 euro, en krijgt een munt van 0,20 euro retour; (c) je geeft een biljet van 10 euro en een munt van 2 euro, en krijgt munten van 0,50 en 0,20 euro retour.

Voor geheel tallige bedragen tussen de 1 en de 1000 euro zijn er gemiddeld 4,52 handelingen nodig om een bedrag efficiënt te kunnen afrekenen. Om dit gemiddelde uit te rekenen, pasten hoogleraar econometrie Philip Hans Franses en Jeanine Kippers van de Nederlandse Bank het algoritme van Cra-

mer toe. Laat je het 100 eurobiljet weg, dan zijn er gemiddeld 4,62 handelingen nodig: een verwaarloosbaar verschil. Het biljet van 20 en 50 kunnen we daarentegen niet missen. Al snel na de invoering van de euro in 2002 besloten veel winkeliers bedragen af te ronden op veelvouden van 5 cent. Men zag in dat het gedoe met 1- en 2-eurocenten leidt tot opstoppen aan de kassa. Dat inzicht was terecht: zonder afrondingen zijn er gemiddeld 5,83 handelingen nodig om een transactie efficiënt uit te voeren, en met afrondingen 4,93: een winst van bijna een hele handeling!

Misschien heb je op 23 november jl. wel meegedaan met de Wiskunde B-dag, die dit jaar de titel *Polygonen, kapen en driehoeken* had. In dat geval zijn de begrippen *inspringende* en *uitspringende hoek* je bekend. In dit artikel bewijst Frank Roos de *Stelling van de uitspringende hoek*, op een andere manier dan in de opdracht van de Wiskunde B-dag werd gevraagd.

■ door Frank Roos

IN- & UITSPRINGENDE

De hoek tussen twee lijnstukken vatten we bijna altijd op als iets dat kleiner is dan 180° . Maar je kunt elke hoek ook van de andere kant bekijken, namelijk het deel dat groter is dan 180° . We voeren hiervoor de term *applement* in. Je ziet meteen dat een hoek en z'n applement samen altijd 360° zijn, zie figuur 1. Hoeveel hoeken groter dan 180° zouden er in een drie-, vier- of n -hoek kunnen zitten?

Het onderscheid tussen een uitspringende hoek (tussen 0° en 180°) en een inspringende hoek (tussen 180° en 360°) is van belang voor de eigenschappen van veelhoeken (drie-, vier-, vijfhoeken, enzovoorts). Om maar wat te noemen: een eettafel met een inspringende hoek is handig voor iemand met een dikke buik, en aan een uitspringende hoek van de tafel kun je je stoten. Zie figuur 2.

De vraag die we in dit artikel gaan beantwoorden, is: hoeveel inspringende hoeken kan een n -hoek hooguit bevatten?

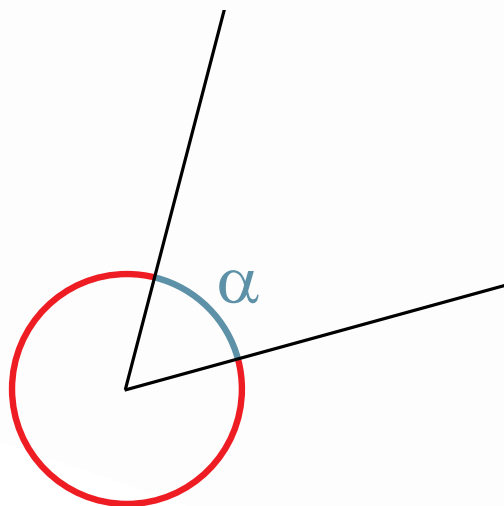
DRIE- EN VIERHOEK Voor een driehoek of een vierhoek is deze vraag makkelijk te beantwoorden. De som van de hoeken van een driehoek is altijd 180° . Eén inspringende hoek is al groter dan 180° ,

dus kan in een driehoek geen inspringende hoek voorkomen.

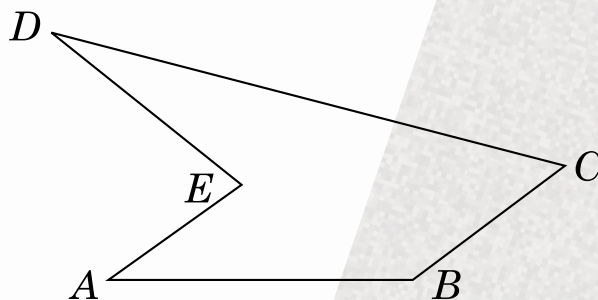
De som van de vier hoeken van een vierhoek is 360° . Eén inspringende hoek neemt hier al meer dan de helft van in beslag, dus kan er geen tweede meer bij. Een vierhoek bevat dus hooguit één inspringende hoek.

DE N-HOEK Kunnen we de vraag ook voor algemene n beantwoorden? Kies binnen de n -hoek een punt en verbindt dat met alle n hoekpunten. In figuur 3 zie je een voorbeeld waarbij $n = 8$. Door de verbindingslijnstukken ontstaan n driehoeken. De totale som van alle hoeken is dan $n \times 180^\circ$. De hoeken rondom het gekozen punt zijn samen 360° , dus voor de som van de hoeken van de n -hoek blijft er $(n - 2) \times 180^\circ$ over. We concluderen: de som van de hoeken van een n -hoek is $(n - 2) \times 180^\circ$.

Voor grillige figuren met scherp inspringende hoeken, zie bijvoorbeeld figuur 4, liggen sommige driehoeken deels buiten de figuur. Ook kunnen driehoeken gaan overlappen. De 'boekhouding' van alle hoeken wordt dan een stuk minder aanschouwelijk, maar het resultaat voor de som van de hoeken blijft geldig.

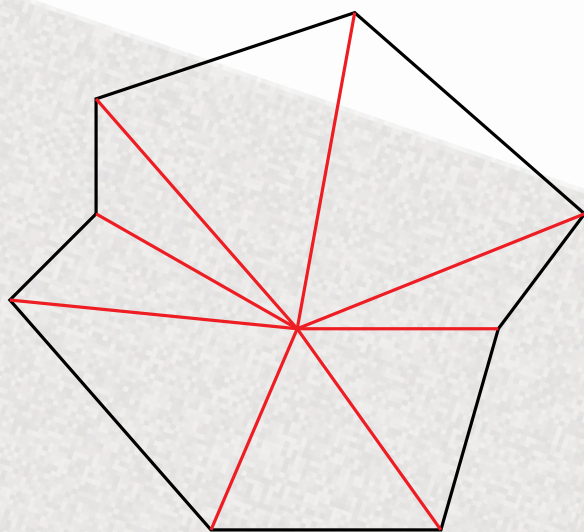


Figuur 1 De rode hoek is het applement van α



Figuur 2 De hoeken bij A, B, C en D zijn uitspringend, de hoek bij E is inspringend

HOEKEN



Figuur 3 De som van de hoeken van een achthoek is $6 \times 180^\circ = 1080^\circ$



Figuur 4 Ook voor deze achthoek is de som van de hoeken 1080°

ALGEMENE OPLOSSING Een 'kleinste inspringende hoek' bestaat niet, omdat er geen kleinste getal groter dan 180 bestaat. Toch kunnen we bij onze berekening 'doen alsof' zo'n kleinste inspringende hoek bestaat: de grootte van deze hoek is $(180 + \varepsilon)^\circ$, waarbij ε° een minuscule klein hoekje is. Het grootste aantal inspringende hoeken is dan het gehele deel van $(n - 2) \times 180^\circ$ gedeeld door $(180 + \varepsilon)^\circ$:

$$\frac{(n - 2) \times 180}{180 + \varepsilon} = \frac{n - 2}{1 + \frac{\varepsilon}{180}}.$$

Omdat $1 + \frac{\varepsilon}{180}$ ietsje groter is dan 1, is $(n - 2) / (1 + \frac{\varepsilon}{180})$ ietsje kleiner dan $n - 2$. Dus het gehele deel hiervan is $n - 3$. De conclusie is dan: een n -hoek bevat hooguit $n - 3$ inspringende hoeken.

Uit dit resultaat volgt meteen de volgende stelling:

Stelling van de uitspringende hoek. Een n -hoek heeft ten minste 3 uitspringende hoeken.

STOMPE HOEKEN Hoeveel stompe hoeken kan een n -hoek hooguit bevatten? Voor $n > 4$ is dat aantal steeds n . Denk maar aan een regelmatige n -hoek. Eigenaardig, dat er twee uitzonderingen zijn: een driehoek kan maximaal slechts één stompe hoek bevatten, en een vierhoek twee. Denk bijvoorbeeld aan een trapezium en een parallellogram.

ZELF PROBEREN Hoeveel rechte hoeken kan een n -hoek maximaal bevatten? Hoeveel scherpe hoeken kan een n -hoek maximaal bevatten? Noem een inspringende en een stompe hoek in een n -hoek een paar. De twee hoeven niet aan elkaar te grenzen, het mag wel. Hoeveel paren kan een n -hoek maximaal bevatten? Kun je beredeneren waarom de absolute waarde van een hoek minus zijn applement gelijk is aan twee maal de absolute waarde van zijn supplement (het supplement van een hoek α is $180^\circ - \alpha$)? ■

Ingewikkelde geometrische figuren kunnen gebaseerd zijn op eenvoudige algoritmen. Een bekend en fascinerend voorbeeld is de *Mandelbrotverzameling*. In dit artikel presenteren we een nieuw soort figuren. Deze figuren hebben *hexagonale patronen*, daarom noemen we ze *H6X9H-figuren*.

■ door Tis Veugen

H6X9H-FIGUREN

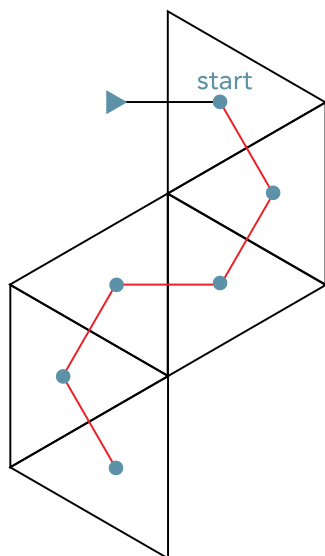
H6X9H-figuren liggen in een plat vlak dat betegeld is met gelijkzijdige driehoeken. Elke figuur wordt bepaald door twee positieve gehele getallen, een even getal D (van **d**enominator = noemer) en een groter, oneven getal N (van **n**umerator = teller). We eisen dat D en N geen gemeenschappelijke delers hebben. De waarde van de breuk $\frac{N}{D}$ blijkt kenmerkend te zijn voor de figuur die door N en D wordt vastgelegd.

Het algoritme om een figuur te maken bestaat in wezen uit een rijtje richtingaanwijzers: R (rechts) of L (links). Dat rijtje heeft lengte N : $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$. De elementen a_k worden bepaald door veelvouden van D te vergelijken met N . Hierbij rekenen we *modulo* $2N$, dat wil zeggen: we letten alleen op de rest bij deling door $2N$.

De waarde van a_k wordt vastgesteld volgens de volgende regel:

- $a_k = R$ als $kD \bmod 2N < N$;
- $a_k = L$ als $kD \bmod 2N \geq N$.

Vanwege het modulo-rekenen herhaalt het recept zich na ieder rijtje van N richtingaanwijzers. In het kader (pagina 13) zie je twee voorbeelden.

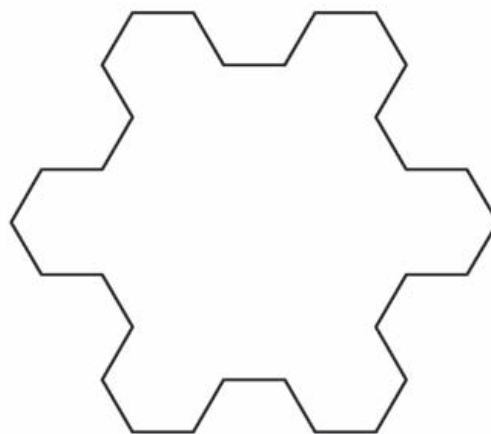


Figuur 1 Het algoritme uitgevoerd ingeval $N = 5$ en $D = 2$

DE FIGUUR TEKENEN Het rijtje richtingaanwijzers gebruik je om de H6X9H-figuur te construeren. Het startpunt van de figuur is het midden van een willekeurige driehoek. Kies een van de drie naburige driehoeken om de oriëntering vast te leggen. Trek vanuit het startpunt een lijnstuk naar het midden van een van beide andere driehoeken, naar rechts als het recept met een R begint, naar links als het met een L begint. Het getekende lijnstuk dient als nieuwe oriëntering voor de volgende letter in het recept. Loop zo alle elementen van het recept af. Dit levert uiteindelijk een reeks lijnstukken.

Als $N = 5$ en $D = 2$, ziet het resultaat eruit zoals in figuur 1 is te zien. Als we de hele procedure nog vijf keer uitvoeren, dan komen we weer uit op het startpunt! Hiermee is de figuur gesloten, en ziet eruit als in figuur 2.

GENERATIES In H6X9H-figuren zitten diverse symmetrieën wat betreft roteren en spiegelen. We kunnen een gespiegelde figuur zelfs genereren door te kiezen voor $D' = N + (N - D) = 2N - D$. Ook bestaan er relaties tussen figuren die op grotere waar-



Figuur 2 Het resultaat als de procedure zes keer achter elkaar wordt uitgevoerd

HET H6X9H-ALGORITME

Stel $N = 5$ en $D = 2$. Welk rijtje richtingaanwijzers levert dat? We bekijken voor $k = 0, \dots, N - 1$ de waarde van $kD \bmod 2N$ en vergelijken dat met N .

Voor $k = 0$: $0 \bmod 10 = 0 < 5$, dus $a_0 = R$.

Voor $k = 1$: $2 \bmod 10 = 2 < 5$, dus $a_1 = R$.

Voor $k = 2$: $4 \bmod 10 = 4 < 5$, dus $a_2 = R$.

Voor $k = 3$: $6 \bmod 10 = 6 \geq 5$, dus $a_3 = L$.

Voor $k = 4$: $8 \bmod 10 = 8 \geq 5$, dus $a_4 = L$.

Conclusie: $N = 5$ en $D = 2$ levert het rijtje RRRLL.

Stel $N = 7$ en $D = 6$.

Voor $k = 0$: $0 \bmod 14 = 0 < 7$, dus $a_0 = R$.

Voor $k = 1$: $6 \bmod 14 = 6 < 7$, dus $a_1 = R$.

Voor $k = 2$: $12 \bmod 14 = 12 \geq 7$, dus $a_2 = L$.

Voor $k = 3$: $18 \bmod 14 = 4 < 7$, dus $a_3 = R$.

Voor $k = 4$: $24 \bmod 14 = 10 \geq 7$, dus $a_4 = L$.

Voor $k = 5$: $30 \bmod 14 = 2 < 7$, dus $a_5 = R$.

Voor $k = 6$: $36 \bmod 14 = 8 \geq 7$, dus $a_6 = L$.

Conclusie: $N = 7$ en $D = 6$ levert het rijtje RRLRLRL.

den van D en N gebaseerd zijn. De figuren 3 en 4 tonen hiervan twee voorbeelden, waarbij de patronen opvallende overeenkomsten hebben.

De waarden voor N en D die de figuren 2, 3 en 4 opleveren, zijn zodanig gekozen dat ze drie opeenvolgende generaties vormen. Uitgaande van een hogere generatie kun je een lagere generatie (met kenmerkende getallen N' en D') uitrekenen. Definieer $E = N \bmod D$. Er zijn nu drie mogelijkheden:

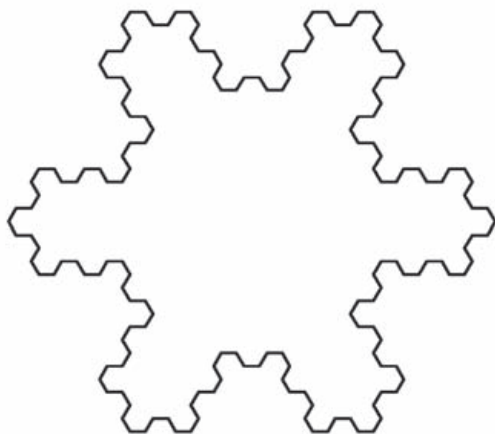
a. Als $E < \frac{1}{2}D$, dan is $N' = E$ en $D' = D \bmod 2N$;

b. Als $E > \frac{1}{2}D$, dan is $N' = D - E$ en $D' = D \bmod 2N$;

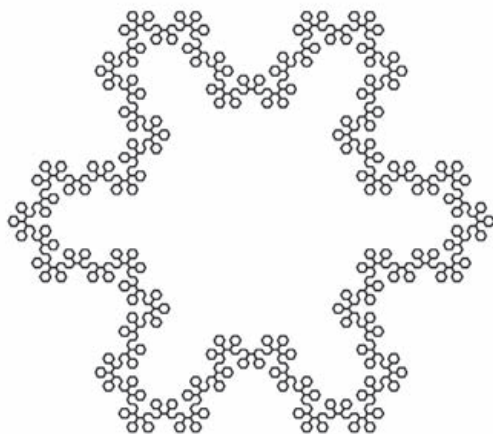
c. Als $E = \frac{1}{2}D$, dan geldt vanwege de aanname dat N en D geen gemeenschappelijke delers hebben dat $D = 2$, en dan is er geen lagere generatie.

Aan de andere kant kun je met deze formules figuren met een hogere generatie 'bouwen'.

ZELF EXPERIMENTEREN Meer over H6X9H-figuren kun je lezen op de website www.tistis.nl/H6X9H. Je kunt daar ook een Java-programma downloaden om zelf met de figuren te experimenteren. Verder bevat de website een Java-applet en een screensaver. ■



Figuur 3 $N = 29$, $D = 12$



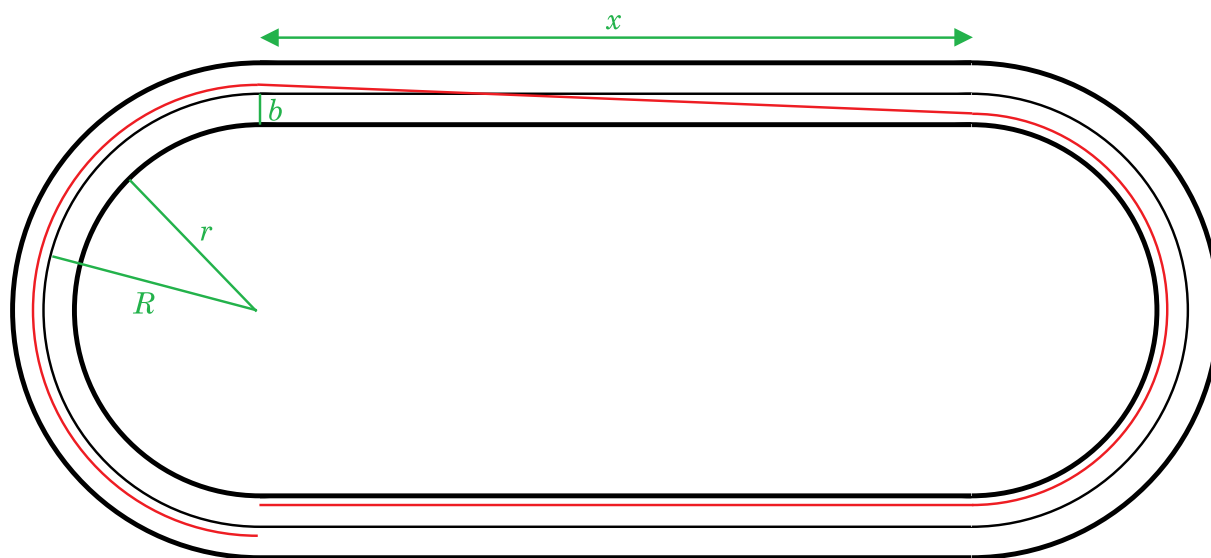
Figuur 4 $N = 309$, $D = 70$

Een nieuw onderdeel van het lange-baan-schaatsen is de *ploegenachtervolging*. Tijdens de Olympische Winterspelen in Turijn in 2006 werd dit onderdeel voor het eerst gereden. Omdat het een spectaculair nummer is, zou het best eens een vast onderdeel van veel schaats-toernooien kunnen gaan worden.

■ door Marcel Roggeband

14

KORT DOOR DE BOCHT



Bij de ploegenachtervolging starten twee ploegen van elk drie rijders tegelijkertijd. De ploegen starten aan weerszijden van de baan, vergelijkbaar met het baanfietsen. Alledrie de atleten moeten over de finish komen en de tijd van de laatste telt.

De rondetijden bij de ploegenachtervolging zullen meestal lager zijn dan bij individuele races. Enerzijds omdat de rijder op kop – die de meeste luchtweerstand moet overwinnen – telkens kan wisselen, maar ook omdat de teams alleen maar binnenbochten schaatsen.

Bij een standaard ijsbaan komt een normale ronde neer op een afstand van 400 meter. Daarin zitten dan twee rechte stukken, een binnenbocht en een buitenbocht, zie de plattegrond. Globaal gezien komt de totale lengte van een ronde neer op $2x + \pi r + \pi R$: tweemaal een recht stuk, eenmaal een halve cirkel met straal r en eenmaal een halve cirkel met straal R . In werkelijkheid zal de totale lengte iets meer zijn: een van de rechte stukken is iets meer dan x , omdat er van de binnenbocht naar de buitenbocht moet worden geschaatst, en de stralen van gereden halve cirkels zijn iets groter dan r en R , omdat er binnen de baan moet worden geschaatst en niet op de rand van de baan. Deze verschillen verwaarlozen we.

BINNENBOCHTEN We willen weten wat de lengte is van een ronde in de ploegenachtervolging, uitgedrukt in de breedte b van een baan. Een normale ronde met binnen- en buitenbocht is 400 meter, dus

$$2x + \pi r + \pi R = 400,$$

waaruit volgt dat

$$x = 200 - \frac{1}{2}\pi(R + r). \quad (*)$$

Bij een ronde in de ploegenachtervolging worden alleen de binnenbochten gereden. Noem de lengte van zo'n ronde y , dan geldt:

$$y = 2x + \pi r + \pi r.$$

Na substitutie van (*) geeft dit

$$\begin{aligned} y &= 2\pi r + 400 - \pi(R + r) = \\ &= 400 - \pi(R - r) = 400 - \pi b. \end{aligned}$$

Het verschil tussen een normale ronde en een ploegenachtervolggronde is dus π keer de breedte van de baan. Bij een breedte van 5 meter is de ronde dus al ongeveer 15 meter korter. Voor een race van 10.000 meter zullen de teams dus geen $10.000 : 400 = 25$ ronden moeten schaatsen, maar $10.000 : 385 \approx 26$ ronden.

Als je het helemaal netjes wilt doen, kun je nog rekening houden met de extra afstand die het kost om te wisselen van binnen- naar buitenbocht. Gebruik de stelling van Pythagoras om de lengte van het rechte stuk van binnen- naar buitenbocht uit te rekenen.

3200-3075 Bij de winterspelen schaatsen de mannen acht ronden en de vrouwen zes ronden. Op de officiële internetsite van de Olympische Winterspelen van Turijn is te lezen dat acht ronden een totale lengte hebben van 3200 meter, en zes ronden 2400 meter. We hebben nu gezien dat deze lengtes in werkelijkheid minder zijn: met een baanbreedte van 5 meter is de totale lengte van acht ronden ongeveer $3200 - 8 \cdot 5 \cdot \pi \approx 3075$ meter, en van zes ronden ongeveer $2400 - 6 \cdot 5 \cdot \pi \approx 2305$ meter. ■

STROPERIGE KAAAR

■ door Arnout Jaspers

De wereldkaart die iedereen gewend is, geeft een sterk vervormd beeld van de werkelijkheid. Door de gangbare manier waarop de aardbol op een plat vlak wordt geprojecteerd (Mercatorprojectie of iets soortgelijks), lijken landen groter naarmate ze dichterbij de polen liggen. Groenland lijkt op kaart 1 vier keer zo groot als Congo, terwijl het in feite iets kleiner is.

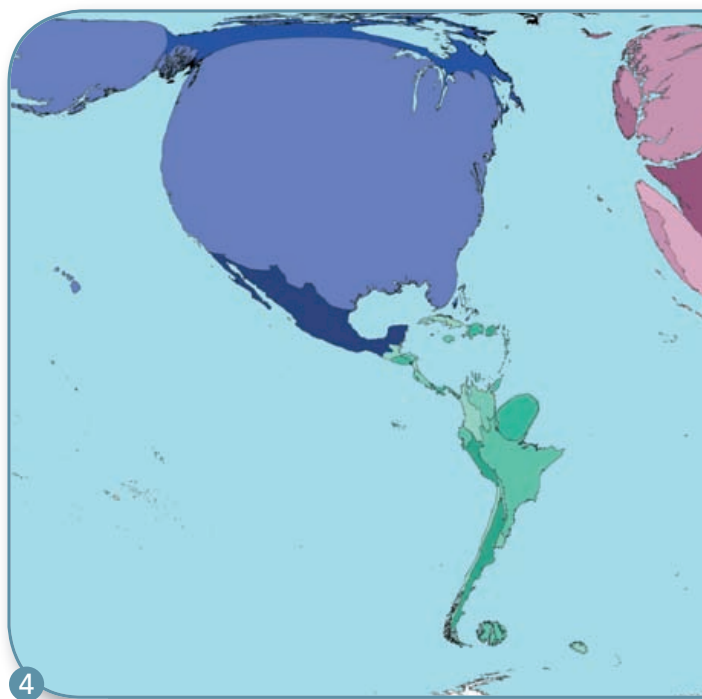
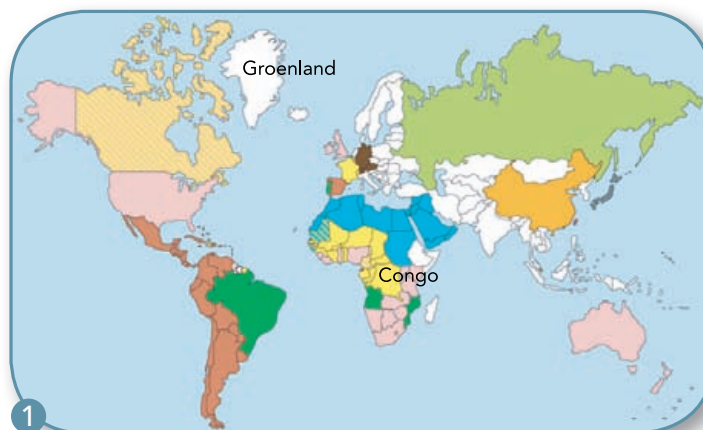
Met een speciale projectiemethode komen landen wel met hun correcte oppervlakte op de kaart te staan. Naar de polen toe raakt die steeds sterker vervormd, zie kaart 2.

Nog een stap verder gaan *density-equalizing* maps, in kreupel Nederlands 'dichtheidsvereffenende kaarten'. In plaats van de oppervlakte kun je ook een andere eigenschap van een land door zijn grootte op de kaart weergeven, zoals het aantal inwoners. Zo zie je op kaart 3 in één oogopslag hoe groot het aandeel Chinezen, Indiërs of Noord-Amerikanen in de totale wereldbevolking is. In zo'n kaart is de bevolkingsdichtheid (aantal inwoners per vierkante kilometer) op het hele landoppervlak precies gelijk, vandaar de naam.

16

WORLDMAPPER Hoe maak je zulke kaarten? Een goede transformatie houdt de totale landoppervlakte gelijk en laat de onderlinge positie en vorm van landen zoveel mogelijk intact, zonder overlappingsen of gaten. Wiskundig blijkt dit heel lastig te zijn, en geen enkele oplossing is in alle opzichten ideaal.

Op www.worldmapper.org staan honderden kaarten die gemaakt zijn met de 'diffusie-methode'. Het idee is geleend uit de natuurkunde: stel je kaart 2 voor als een horizontaal plat vlak, terwijl de landsgrenzen en kusten schuttingen zijn. Elk land wordt nu gevuld met een gekleurde, stroperige vloeistof tot een hoogte die overeenkomt met de bevolkingsdichtheid in dat land. De hoeveelheid stroop per land komt dan overeen met de totale bevolking. Laat nu in één keer alle landsgrenzen verdwijnen. Alle kleuren stroop zullen tegelijkertijd van laag naar hoog gaan stromen, totdat het niveau overall even hoog is (om te voorkomen dat de oceaan helemaal volstroomt, is die pro forma gevuld met de gemiddelde stroophoogte).

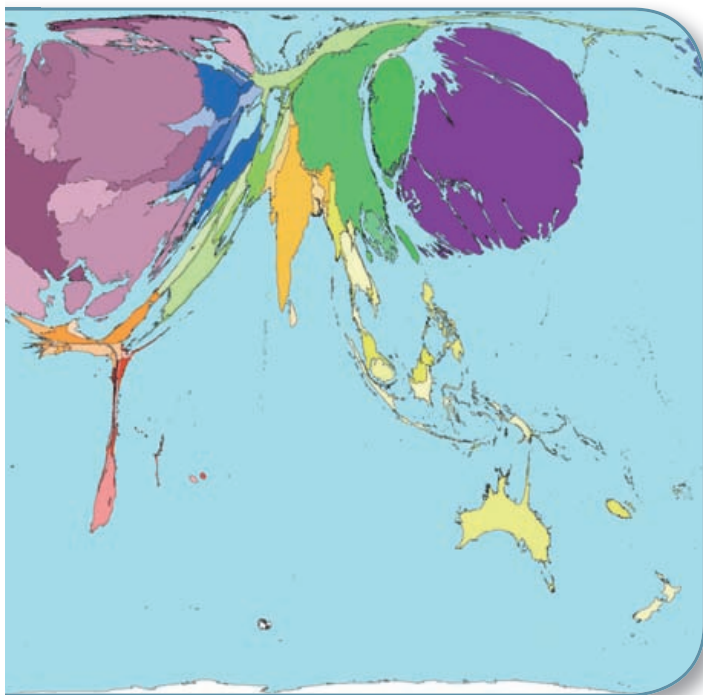


Dichtbevolkte landen zullen dus uitgloeien over een grotere oppervlakte, ten koste van de dunbevolkte. Dit principe kun je natuurlijk ook toepassen op provincies in één land, met verkiezingsuitslagen, ziektegevallen en nog veel meer.

Het uitgloeien van de stroop wordt beschreven door de al lang bekende diffusievergelijking, die in de natuurkunde veel gebruikt wordt en waarmee computers goed overweg kunnen. Maar het verkrijgen van een herkenbare kaart blijft volgens de makers toch een hele kunst. Soms is het resultaat beter als je de landen nog verder onderverdeelt, met het hoogste (danwel laagste) niveau stroop in het mid-

TEN

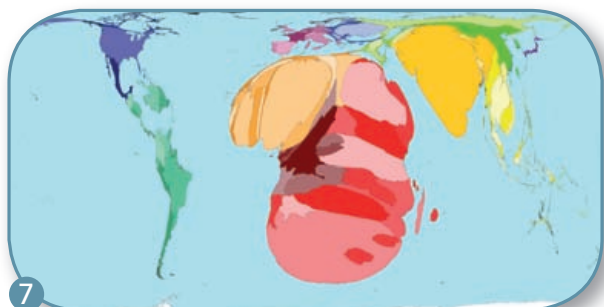
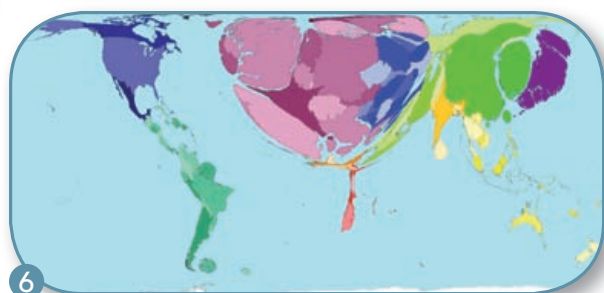
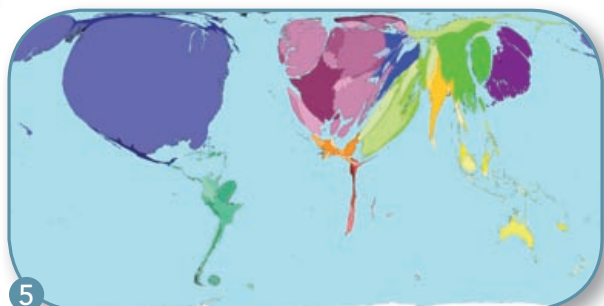
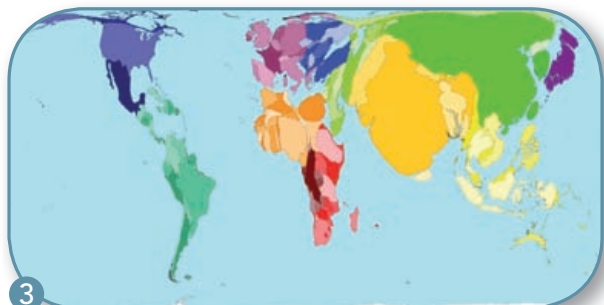
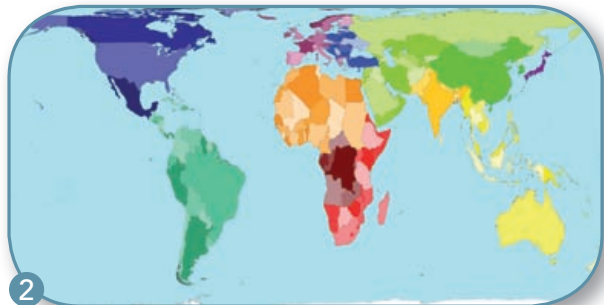
- Kaart 1 De standaard wereldkaart
- Kaart 2 Wereldkaart met correcte landoppervlakte
- Kaart 3 Het aandeel per land in de wereldbevolking
- Kaart 4 Het Bruto Nationaal Product (de totale economische productie) per land
- Kaart 5 Uitgaven aan wapens en defensie per land
- Kaart 6 Het aantal gepubliceerde boeken per land
- Kaart 7 Het aantal HIV-besmetten per land



den en ter weerszijden van de grenzen meer gelijke niveaus.

Deze kaarten zijn alleen met een computer te maken, omdat er intensief rekenwerk voor nodig is. Is er een methode te bedenken die je in principe nog met pen en papier zou kunnen doen? Of wie weet bestaat er een combinatie van slimme trucs om in een tekenprogramma op de computer een vereffeningskaart te maken...

Veel meer kaarten vind je op www.worldmapper.org en gedetailleerde uitleg van de wiskunde achter de diffusiemethode op <http://aps.arxiv.org/abs/physics/0401102>. ■



PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Op vrijdag 25 januari is de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Als het dan tegen zit, is deelname aan de tweede ronde nog niet uitgesloten! Want leerlingen die het goed doen bij de Pythagoras Olympiade krijgen eveneens een uitnodiging om mee te doen met de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Bovendien wordt bij de Pythagoras Olympiade onder de goede leerling-inzenders per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Reden genoeg dus om mee te doen!

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



18

LET OP: NIEUW ADRES!

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 29 februari 2008.

OPGAVE

150

Het vlak wordt verdeeld in evenwijdige banen, allemaal met breedte 1. Elk van die banen wordt of wit of zwart gekleurd. Bewijs dat je bij elke mogelijke kleuring, en elke gelijkzijdige driehoek met gehele zijdes, een manier kunt vinden om de driehoek op het vlak te leggen zodat de drie hoekpunten op banen van dezelfde kleur liggen.

OPGAVE

151

Is het mogelijk om 10^{10} te schrijven als het product van twee gehele getallen met de eigenschap dat in geen van die twee getallen (in de decimale notatie) het cijfer 0 voorkomt? Zo ja, geef dan twee getallen. Zo nee, bewijs dat het niet mogelijk is.

OPLOSSING

146

Geef alle oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} abc + d = 2 \\ abd + c = 2 \\ acd + b = 2 \\ bcd + a = 2 \end{cases}$$

Hierbij zijn a , b , c en d reële getallen.

OPLOSSING Uit de gegeven vergelijkingen volgt: $abcd = d(2 - d)$, $abcd = c(2 - c)$, $abcd = b(2 - b)$ en $abcd = a(2 - a)$.

Dus $abcd$ is een punt uit het beeld van de functie $f(x) = x(x - 2)$. Deze functie is symmetrisch in de lijn $x = 1$ en dus weten we dat $f(x) = f(2 - x)$. Omdat $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = abcd$, moet gelden dat $b = a$ of $b = 2 - a$. Evenzo voor c en d . We kunnen dus drie soorten gevallen onderscheiden:

- (1) $a = b = c = d$, (2) $a = b = c = 2 - a$ en
(3) $a = b = 2 - c = 2 - d$.

In geval (1) geldt dat $a^4 = a(2 - a)$, dus $a = b = c = d = 1$, wat inderdaad een oplossing is van het gegeven stelsel, of $a = b = c = d = 0$, wat geen oplossing is van het gegeven stelsel.

Geval (2) geeft $a^3(2 - a) = a(2 - a)$; dit heeft als oplossingen $a = b = c = 0$, $d = 2$, $a = b = c = d = 1$, $a = b = c = -1$, $d = 3$ en $a = b = c = 2$, $d = 0$; invullen in het gegeven stelsel geeft dat alleen de tweede en derde oplossing voldoen.

Geval (3) geeft $a^2(2 - a)^2 = a(2 - a)$; hiervan zijn de oplossingen $a = b = 0$, $c = d = 2$, $a = b = 2$, $c = d = 0$ en $a = b = c = d = 1$; na controleren blijkt alleen de derde oplossing te voldoen.

Conclusie: $(a, b, c, d) \in \{(1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, 3), (-1, -1, 3, -1), (-1, 3, -1, -1), (3, -1, -1, -1)\}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbergs** uit Leersum, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henkrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker (België), **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam en **Sandra van Wijk** uit Best.

De boekenbon gaat naar Fabian Hulpia.

OPLOSSING

147

Op een lijn l liggen vier verschillende punten A , B , C en D , in deze volgorde. Construeer een vierkant $PQRS$ dat aan één zijde van l ligt zodat de lijn PQ de lijn l snijdt in A , de lijn RS de lijn l snijdt in B , de lijn QR de lijn l snijdt in C en de lijn door PS de lijn l snijdt in D .

OPLOSSING Trek vanuit B een lijnstuk van lengte $|CD|$ loodrecht op l en noem het eindpunt E . Trek, dezelfde kant op, vanuit C een lijnstuk van lengte $|AB|$ loodrecht op l en noem het eindpunt F . Noem het snijpunt van de lijnen AE en DF punt P . Trek evenwijdig met AE een lijn door B en noem het snijpunt met DP punt S . Trek evenwijdig met DF een lijn door C , en noem het snijpunt met AP punt Q . Nu ontstaat een vierhoek, waarvan we het nog onbenoemde snijpunt van BS en CQ de naam R geven.

Omdat $|EB| = |CD|$ en $|CF| = |AB|$ en $\angle ABE = \angle FCD$, zijn $\triangle ABE$ en $\triangle FCD$ congruent. Hieruit blijkt dat $\angle PAD + \angle PDA = \angle EAB + \angle FDC = \angle EAB + \angle AEB = 180^\circ - \angle ABE = 90^\circ$. Dit betekent dat $\angle QPS = \angle APD = 90^\circ$. Uit de evenwijdigheid van QP met RS en van PS met QR blijkt nu dat alle hoeken van vierhoek $PQRS$ 90° zijn, zodat het een rechthoek is. Tevens is $|PQ|$ gelijk aan de lengte van de hoogtelijn vanuit C in $\triangle FCD$, en is $|PS|$ gelijk aan de lengte van de hoogtelijn vanuit B in $\triangle ABE$. Vanwege de congruentie van deze twee driehoeken moeten die twee hoogtes gelijk zijn, zodat $PQRS$ een vierkant is.

Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbers** uit Leersum, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker (België) en **Ernst van de Kerkhof** te Sittard.

De boekenbon gaat naar Fabian Hulpia.



WISKUNDE IN VIETNAM

Deze maand is het weer tijd voor de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Wie het er op vrijdag 25 januari goed vanaf brengt, gaat door naar de tweede ronde, met als doel uiteindelijk Nederland te mogen vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade. Afgelopen zomer was Vietnam het gastland van de 48ste Internationale Wiskunde Olympiade. Het Nederlandse team bestond uit Wouter Berkelmans, Raymond van Bommel, Milan Lopuhaä, Kyndylan Nienhuis, Tim Reijnders en Wouter Zomervrucht, met als begeleiders Quintijn Puite en Birgit van Dalen. Floris van Doorn ging als zevende leerling mee en doet verslag.

■ door Floris van Doorn

ceremonie met speeches en Vietnamese muziek en dans. Hierna volgden de twee dagen waarom het allemaal te doen was: de wedstrijd, met op beide dagen drie moeilijke opgaven die je in vier en een half uur moet proberen op te lossen. De opgaven bij de Wiskunde Olympiade zijn zo moeilijk dat je al deze tijd hard nodig hebt. Vaak moet je iets bewijzen; het hangt heel erg van het soort opgave af welk bewijsprincipe de grootste kans op succes heeft. Het is vaak een kwestie van uitproberen wat je allemaal kunt met de gegevens, maar dat is zeker niet eenvoudig! Zo was er dit jaar een meetkundeopgave waar je zelf drie nieuwe punten moest definiëren. Hiermee moest je dingen gaan bewijzen die achteraf erg nuttig bleken, maar van tevoren was dat erg lastig in te zien. Gelukkig heb je tijdens de training allerlei stellingen en trucjes geleerd om toe te passen, en heb je al veel geoefend met talloze andere opgaven.

Naast wiskunde was er ook genoeg vrije tijd om te sporten, te praten met deelnemers uit andere landen en te mailen met het thuisfront. We hebben contacten gemaakt met wiskundigen uit de rest van de wereld. Na de wedstrijd waren er twee excursiedagen, waarin we wat van Vietnam konden zien. Aan de kust bezochten we Ha Long Bay, de 'Baay van de Neerdalende Draak', met duizenden rotsige eilanden die hoog boven het water uittorenen. Op een van die eilanden bezochten we een prachtige grot.

Het was duidelijk te merken dat Vietnam iets spectaculairs wilde maken van de Wiskunde Olympiade. Tijdens de excursiedagen werden de bussen begeleid door de politie, waardoor we gewoon door rood konden rijden. En als het verkeer op de ene weghelft stilstond, gingen we gewoon een stukje spookrijden. Verder werd het slotfeest op de Vietnamese televisie uitgezonden. Hierdoor werden we op de dag van vertrek herkend, toen we nog even door Hanoi liepen.

Alle informatie over de Nederlandse Wiskunde Olympiade is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl. ■



Het Nederlandse team, inclusief Floris

Na een vlucht van ongeveer twaalf uur, waarbij we bijna de overstap in Parijs misten, kwamen we aan in Hanoi, de hoofdstad van Vietnam. We gingen al een week voordat de olympiade zelf begon naar Vietnam, met als voornaamste reden om nog een week te kunnen trainen. Ook konden we dan nog beter acclimatiseren wegens de hitte en hoge luchtvochtigheid.

Op 24 juli begon de olympiade echt: het organiserende comité verzorgde een mooie openings-

ADVOCAAT MET HART VOOR DE ZAAK

Kansbegrip is een berucht struikelblok in de media. ‘De kans op een dijkdoorbraak is één op duizend’ staat er bijvoorbeeld in de krant. Moeten we ons nu zorgen maken? Is dat de kans per dag, per jaar, per eeuw of wellicht per storm? De verslaggever heeft geen benul, en wat zou het ook, als het maar eng klinkt.

We bekijken in dit kader twee persberichten over Willem Holleeders hartoperatie. De volgende tekst is afkomstig uit *Het Parool* van 12 april 2007:

Holleeder had tien procent overlevingskans

LEIDEN – Willem Holleeder had toen hij in het Leids Universitair Medisch Centrum (LUMC) werd opgenomen slechts 10 procent kans om te overleven. Dat zeiden de artsen woensdagavond tegen zijn familie, aldus de advocaat van Holleeder, Jan-Hein Kuijpers. Artsen hebben de ‘topcrimineel’ donderdag wel met succes aan zijn hart geopereerd, vertelt de advocaat. Hij is nu stabiel maar wordt nog wel in slaap gehouden. (...)

De journalist zal toch zeker niet bedoelen dat 90 procent van de patiënten met een soortgelijke afwijking de operatie niet overleeft? Dan zouden dergelijke operaties al gauw niet meer worden gedaan, vermoedelijk. Een welwillender interpretatie is: zonder operatie zou Holleeder slechts 10 procent kans hebben gehad om nog ten minste bijvoorbeeld een jaar in leven te blijven. Van mensen met een soortgelijke afwijking die niet geopereerd worden, overlijdt dan binnen een jaar 90 procent. Bij zo'n kans op overleven moet je wel een termijn melden, anders kun je er niets mee.

Het probleem is echter dat medici zich zo nooit uitdrukken. Zij spreken bij dit soort kwalen altijd van, bijvoorbeeld, de kans om na één of na vijf jaar nog in leven te zijn ná de behandeling. Daar houden ziekenhuizen namelijk cijfers van bij. Maar over de overleving van mensen met zo'n afwijking die niet geopereerd worden, is weinig of niets bekend. Te meer omdat in landen die überhaupt dat soort cijfers bijhouden, iedereen aan zijn lekkende hartklep geopereerd wordt.

Kuijpers had het in feite nog veel sensationeler kunnen maken: 0 procent overlevingskans voor Holleeder! Er is in Nederland namelijk niemand die dertig jaar lang rondloopt met een hartklep die net zo lek is als die van Holleeder.

Op 29 augustus 2007 verscheen in *Het Parool* een artikel waarin advocaat Kuijpers wordt geciteerd:

Advocaat: justitie vermoordt Holleeder

(...) “Terwijl de capaciteit van zijn hart maar rond de twintig procent ligt en hij bij elke hartslag volgens de artsen veertig procent kans heeft op een hartstilstand, lijdt Willem onder een heleboel stress. Veel daarvan is met een iets menselijkere behandeling te voorkomen.”

Denk eens na over de zinsnede ‘hij (heeft) bij elke hartslag (...) veertig procent kans (...) op een hartstilstand’. Hier staat eigenlijk dat hij elke hartslag met kans 0,6 overleeft. De kans op overleven na twee hartslagen zou dan $0,6 \times 0,6 = 0,36$ zijn, en na drie hartslagen nog maar $0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,216$. Bij een normale hartslag van zeventig slagen per minuut zou de kans om één enkele minuut te overleven dus $0,6^{70}$ zijn. Dat is slechts 0,0000000000000003, een wel heel kleine kans! Onzin dus. Dat kan de advocaat niet bedoeld hebben. Of het is een echt mirakel dat Holleeder nog leeft.

Een iets aannemelijker interpretatie van de genoemde 40 procent zou kunnen zijn dat 40 procent van de patiënten na een soortgelijke operatie binnen bijvoorbeeld tien jaar overlijdt. Maar dan moet je er ook hier een periode bij noemen, die uit onderzoek aan een grote groep vergelijkbare operaties naar voren is gekomen. De uitdrukking ‘bij elke hartslag’ zou dan alleen betekenen dat Holleeder zich eigenlijk ‘steeds’ bewust is van zijn korte levensverwachting en dat hij daardoor onder stress staat. ■

ISAAC NEWTON (1643-1727) EN GOTTFRIED WILHELM UITVINDERS VAN DE

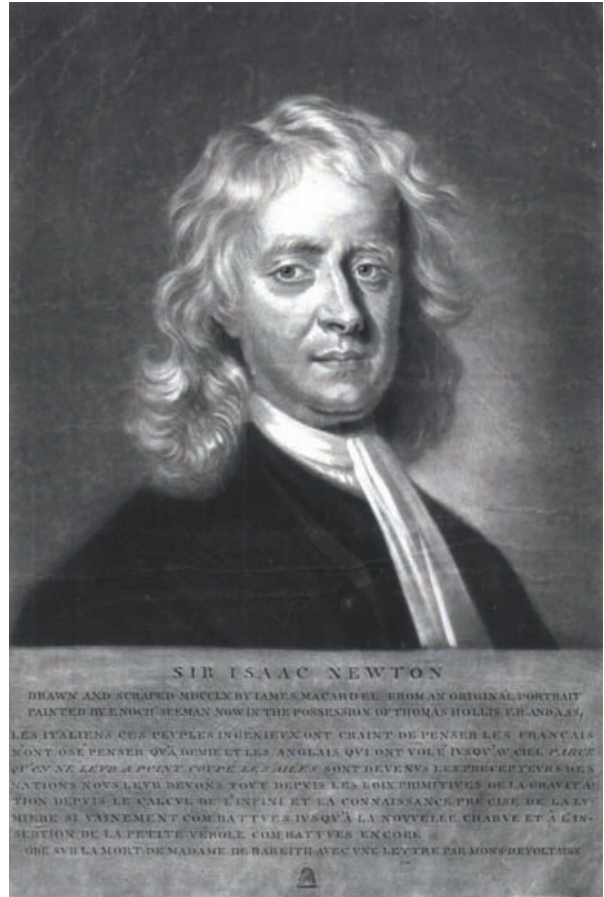
Newton en Leibniz waren twee van de grootste wis- en natuurkundigen uit eind zeventiende, begin achttiende eeuw. Zij hebben tot hun dood een hevige polemiek gevoerd over wie als eerste de 'calculus' had uitgevonden, in de schoolwiskunde tegenwoordig bekend als 'differentiëren en integreren'. Eigenlijk maakte pas de calculus het mogelijk om alles wat er beweegt en verandert in de wereld om ons heen wetenschappelijk te analyseren. Zonder calculus zouden we wiskundig nog steeds in de Middeleeuwen leven.

■ door Jan Guichelaar

Tegenwoordig kent men Isaac Newton (1643-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) even veel eer toe voor het uitvinden van de calculus. Beide geleerden hebben echter voortgebouwd op voorbereidend werk van vele wiskundigen vóór hen.

Een van die voorgangers, een heel verre, was Archimedes, die leefde van 287 tot 212 voor Christus. In het onlangs verschenen boek *De Archimedes Codex* wordt recent onderzoek beschreven naar een tiende-eeuwse Griekse tekst van een aantal werken van Archimedes. Die tekst was in de dertiende eeuw van het perkament geschraapt om plaats te maken voor een religieuze tekst. Met de modernste technologische middelen kon de oude tekst gereconstrueerd worden en kwam naar voren dat Archimedes al een zeker inzicht had in de basisprincipes van het integreren.

Met de beginselen van differentiëren en integreren worden tegenwoordig de leerlingen in de bovenbouw van het vwo al vertrouwd gemaakt. En elke wis- en natuurkundige maakt van deze technieken dagelijks gebruik. Het zijn onmisbare hulpmiddelen bij elk theoretisch onderzoek. Newton verwoordde zijn plaats in de wetenschap eens als volgt: 'Als ik verder heb gezien dan anderen, komt dat doordat ik op de schouders van reuzen heb gestaan.' Dat klinkt heel nederig, maar Newton was volgens getuigenissen van zijn tijdgenoten een onaangenaam, egocentrisch mens, die telkens in vetes met collega's verzeild raakte.



NEWTON

Isaac Newton werd in een boerenfamilie in Woolsthorpe in het Engelse graafschap Lincolnshire geboren op 4 januari 1643. Hij was natuurkundige, wiskundige en astronoom, maar ook theoloog, filosoof en zelfs alchemist. In 1660 ging hij studeren in Cambridge, onder andere bij de wiskundige Isaac Barrow en bestudeerde *Arithmetica infinitorum* (wiskunde van de oneindigheden – oneindig kleine grootheden en oneindig lange reeksen) van de wiskundige Wallis (1616-1703). Op zijn 26ste volgde Newton Barrow als professor op en bleef dat tot 1696.

Newton publiceerde in 1686 zijn hoofdwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (De Wiskundige Beginselen van de Natuurfilosofie), meestal kortweg aangeduid als *Principia Mathematica*. Het is opvallend dat hij bij de afleiding van bijvoorbeeld de planetenbanen (ellipsen) daarin voorna-

LEIBNIZ (1646-1716):

CALCULUS

melijk meetkundige methodes gebruikte, zoals de oude Grieken, en niet zijn nieuwe fluxierekening.

Hoewel de Principia zeer moeilijk te volgen is, ontketende het een wetenschappelijke revolutie. Newton slaagde erin om de drie Wetten van Kepler geheel af te leiden uit de zwaartekrachtswet. Uitgaande van een wiskundig heel simpele wet was het dus mogelijk om een onuitputtelijke hoeveelheid problemen uit de hemelmechanica door te rekenen. Op basis van zijn zwaartekrachtswet konden ook over bijzondere hemellichamen als kometen, die in zeer lang gerekte ellipsbanen rond de zon bewegen, nu voorspellingen worden gedaan. Zo heeft de Engelse astronoom Edmond Halley (1656-1743) met de hemelmechanica van Newton voorspeld dat de komeet die in 1682 zichtbaar was, opnieuw in 1759 zou verschijnen. Zijn voorspelling kwam uit; helaas was Halley toen al overleden.

Zo legde Newton de basis voor de moderne natuurwetenschap: eerst waarnemingen doen, dan theorie opstellen, theorie controleren aan de hand van de waarnemingen en ten slotte voorspellingen doen op basis van de gecontroleerde theorie.

In 1689 werd hij tot Parlements lid gekozen. Via zijn politieke contacten kreeg hij in 1696 een positie aan de Munt in Londen, waar hij uiteindelijk muntmeester werd en naam maakte door zijn meedogenloze vervolging van valsemunters. In 1703 werd hij gekozen tot President van de Royal Society (de Engelse academie van wetenschappen) en door Queen Anne in 1705 in de adelstand verheven.

Zoals al opgemerkt is, had Newton geen aardig karakter. Hij was niet getrouwd en heeft voor zover bekend ook nooit een relatie gehad. Hij overleed in Londen op 31 maart 1727.



GODEFRIDVS GVILIELMVS L.B. de LEIBNIZ

Nat. d. 21. Jun. 1646. Denat. d. 14. Nov. 1716.

*Adspice, quem nobis peperit Germania mater,
Cui par viderunt saecula nulla decus.
Nec tibi in immenso verum iam finge profundo:
Nam tenet hic veri quicquid in orbe latet.*
S. J. Goussier

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz werd in Leipzig geboren op 1 juli 1646. Hij studeerde filosofie en promoveerde op jonge leeftijd. Vanaf 1667 werkte hij voor de keurvorst van Mainz. Op diplomatieke missies in Londen en Parijs leerde hij veel geleerden kennen. Hij correspondeerde en schreef veel (er zijn van hem 15.000 brieven bewaard) op diverse wetenschappelijke terreinen: logica, geschiedenis, theologie, wiskunde, natuurkunde, politiek. Hij was een echte 'homo universalis', een geleerde die 'alles' wist.

Op zijn reizen in het begin van de jaren zeventig leerde Leibniz in Parijs de Nederlandse geleerde Christiaan Huygens kennen, de uitvinder van het slingeruurwerk en de ontdekker van de ringen van Saturnus, die een toelage ontving van de Franse koning Lodewijk XIV en betrokken was bij de oprichting van de Franse Academie van Wetenschappen. Huygens hielp Leibniz met wiskunde, waar hij in-

middels grote belangstelling voor had gekregen.

Ook in Londen, waar hij twee keer heenging, leerde hij wetenschappers kennen. Hij maakte ook kennis met werk van Newton. Hij maakte een mechanische rekenmachine, die ook kon vermenigvuldigen, delen en worteltrekken, en bood die aan aan de Royal Society. In 1675/'76 ontwikkelde Leibniz zijn differentiaal- en integraalrekening.

Leibniz was op vele terreinen actief en onderhield daarom een uitgebreide correspondentie met meer dan 1000 wetenschappers. Hij had zelfs een opvouwbare bureaustoel om op zijn vele reizen in de door de slechte wegen in die tijd erg wiebelende koetsen te kunnen schrijven. In 1676 werd hij benoemd tot raadsheer van de hertog van Hannover. Hij reisde toen van Parijs via Londen en Nederland naar Hannover. Later klaagde hij in een van zijn brieven over het gebrek in Hannover aan ontwikkelde en geleerde personen, zoals die er waren in Parijs en Londen.

Op zijn doortocht door Nederland sprak hij met Antoni van Leeuwenhoek (1632-1723); met zijn eenlenzige microscopen de grondlegger van de microbiologie en de bacteriologie. Met de filosoof Baruch de Spinoza (1632-1677) discussieerde hij in Den Haag over het bewijs voor het bestaan van God.

Ook op het technische vlak was Leibniz actief. Hij wilde met windmolens het water uit de mijnen in de Harz pompen. Het project mislukte vanwege onder meer een gebrek aan wind.

In de natuurkunde was Leibniz degene die het begrip dynamica (bewegingsleer ten gevolge van krachten) invoerde. Later bestreed hij ook het begrip kracht-op-afstand, dat Newton invoerde met zijn zwaartekrachtswet.

Als theoloog hield hij zich actief bezig met het bevorderen van de toenadering tussen de katholieke en de protestantse kerk. Hij werkte ook de theorie uit dat God uit alle mogelijke werelden bij de schepping de 'best mogelijke' heeft gekozen. Dit kwam hem vele jaren na zijn dood op schampere opmerkingen van de Franse toneelschrijver Voltaire te staan in diens boek *Candide*.

Leibniz was net als Newton ongetrouwd. Hij stierf op 14 november 1716 in Hannover, na een dominee aan zijn bed geweigerd te hebben en een laatste poging te hebben gedaan om nog iets te schrijven.

DE GROTE VETE Wie was de ontdekker van de differentiaal- en integraalrekening? Twee feiten staan historisch wel vast: 1. Newton was de eerste die de calculus in de vorm van zijn fluxietheorie ontwikkelde (1665/'66); 2. Leibniz was de eerste die zijn werk publiceerde, in 1684 en 1686.

Vanaf 1708 ontstond een hevige vete tussen Newton en Leibniz over 'wie de eerste was'. Leibniz had in Londen en Parijs weliswaar een aantal geschriften en brieven van Newton gezien, waar hij erg van onder de indruk was, maar in het begin van de jaren zeventig was hij nog een wiskundige in ontwikkeling en het lijkt uitgesloten dat hij in latere jaren daar nog iets aan gehad heeft. De beschuldiging van plagiaat aan het adres van Leibniz berustte wel op deze vermeende 'voorkennis', waarbij hij alleen maar een andere notatie gekozen zou hebben om iedereen zand in de ogen te strooien.

Beide heren speelden het spel niet fijntjes, maar Newtons woede was uiteindelijk onblusbaar. Hij benoemde, als president van de Royal Society, een 'onpartijdige' commissie om de zaak te onderzoeken. Hij schreef zelf in het geheim veel van de rapporten, waaruit in 1715 natuurlijk zonneklaar bleek dat alleen aan Newton het recht en de eer op de uitvinding van de 'nieuwe wiskunde' toekwam. Zelfs na Leibniz' dood in 1716 bleef Newton de strijd voortzetten. Er kwam pas een einde aan met Newtons eigen dood.

Moeite om greep te krijgen op de 'oneindig' kleine grootheden hadden Newton en Leibniz al lebei. Critici maakten in de begintijd de calculus belachelijk omdat die zou neerkomen op delen door nul, wat natuurlijk niet kan. Pas in de negentiende eeuw is de wiskundig sluitende theorie ontwikkeld voor de differentiaal- en integraalrekening.

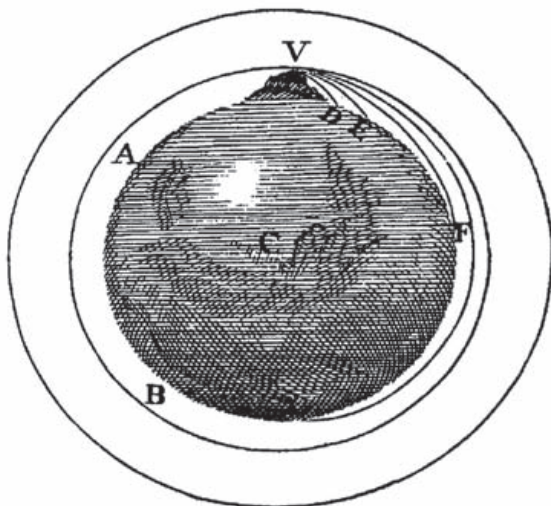
Toch werden met de nieuwe rekenmethoden prachtige resultaten bereikt in de tijd van Newton en Leibniz. Bijvoorbeeld: in welke vorm gaat een aan twee punten opgehangen ketting hangen? Of: langs welke baan glijdt een voorwerpje wrijvingsloos in de kortste tijd van A naar B? Voor het eerst was het mogelijk deze krommen, respectievelijk de kettinglijn en de brachystochroon (Grieks voor 'kortste tijd'), in een exacte formule te vatten.



MAANAPPEL Een waarschijnlijk onware legende is, dat Newton bij het zien van een vallende appel, zittend en denkend onder een boom, in een flits het wezen van de zwaartekrachtswet zag: elke twee massa's, hoe groot of hoe klein ook en op welke afstand dan ook van elkaar, trekken elkaar aan. Het idee dat eenzelfde kracht verantwoordelijk was voor het vallen van een appel en het in een baan om de aarde houden van de maan was destijds een wereldschokkende gedachtesprong.



CIRKELBAAN OM DE AARDE Stel ik gooi een steentje horizontaal weg. Dan beschrijft dat steentje een kromme baan en valt terug op aarde. De zwaartekracht trekt het steentje naar beneden. Maar gooi dat steentje nu eens veel harder weg. Dan beschrijft het een veel langere boog voor het op de aarde valt. Maar het aardoppervlak is krom. Stel je nu eens voor dat je het steentje zo hard weggooit dat de kromming in de baan door de zwaartekracht precies gelijk is aan de kromming van het aardoppervlak. Dan komt het steentje nooit meer dichterbij de aarde en blijft het in een cirkelbaan om de aarde draaien. We doen dan wel net of er geen luchtweerstand is. De benodigde snelheid is ongeveer 8 kilo-



meter per seconde, en in 1957 hebben de Russen voor het eerst met een raket die snelheid bereikt en een kleine kunstmaan in een baan om de aarde gebracht, de Spoetnik.

Je ziet dat we hier gebruikmaken van drie wetten van Newton: de traagheidswet (de grootte van de snelheid van het steentje blijft behouden), de tweede wet (de zwaartekracht verandert alleen de richting van de snelheid) en de zwaartekrachtswet.

DE WETTEN VAN NEWTON In de mechanica formuleerde Newton vier wetten. De Eerste wet (traagheidswet) is: een lichaam waar geen kracht op wordt uitgeoefend, staat stil of beweegt met constante snelheid. De Tweede wet ($F = m \cdot a$) is: als op een lichaam een kracht F werkt, krijgt dat lichaam een versnelling a , die omgekeerd evenredig is met zijn massa. (Als de kracht – een vector met een grootte én een richting – niet gelijk gericht is aan de snelheid – ook een vector –, bestaat de versnelling ook uit een verandering van de richting.)

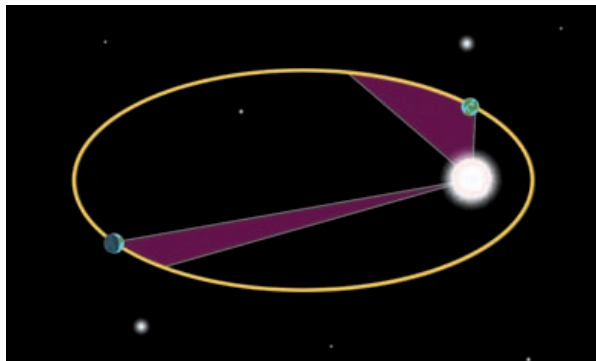
De Derde wet (Actie is Reactie, ofwel $F_{AB} = -F_{BA}$) luidt: als voorwerp A een kracht uitoefent op voorwerp B, dan oefent B ook een kracht uit op A, die even groot is en tegengesteld gericht.

Ten slotte is er de Zwaartekrachtswet ($F = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$): elke massa (m_1) oefent op elke andere massa (m_2) een kracht F uit die recht evenredig is met de twee massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de onderlinge afstand r . G is de gravitatieconstante.

ONTDEKKING VAN DE PLANEET

NEPTUNUS Wiskundigen hebben Newtons mechanica in de achttiende eeuw met succes uitgewerkt om spectaculaire voorspellingen over het zonnestelsel te doen. Het twee-lichamenprobleem (zon-aarde, of aarde-maan) was al door Newton opgelost (cirkel-, ellips-, parabool- en hyperboolbanen). Maar bewegingsproblemen van drie of meer lichamen zijn slechts met benaderingsmethoden op te lossen. De Franse sterrenkundige Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) veronderstelde dat de kleine waargenomen afwijkingen in de baan van de planeet Uranus door een nog onbekende planeet veroorzaakt





werden. Uranus was in 1781 ontdekt door de Duitse, naar Engeland geëmigreerde musicus en astronoom Friedrich William Herschel (1738-1822). De overige planeten (Mercurius, Venus, Aarde, Mars, Jupiter en Saturnus) waren al in de Oudheid bekend. Le Verrier stuurde zijn resultaten door aan de Duitse astronoom Johann Gottfried Galle (1812-1910), die op de avond van de ontvangst van de brief in 1846 de nieuwe planeet precies op de door Le Verrier voorspelde plek waarnam, dat wil zeggen: hij zag een sterretje dat niet op zijn sterrenkaart stond en de volgende dagen steeds een andere plaats innam. Een prachtige ode aan Newton.

VAN PTOLEMAEUS TOT KEPLER



In het wereldbeeld van Ptolemaeus (tweede eeuw na Christus) stond de aarde in het centrum van het heelal, terwijl zon, maan en planeten in cirkels daaromheen draaiden. Ptolemaeus ontwikkelde een gecompliceerd systeem van cirkels en cirkels op cirkels (cykels en epicykels) om de grillige bewegingen van de hemellichamen mee te beschrijven.

26

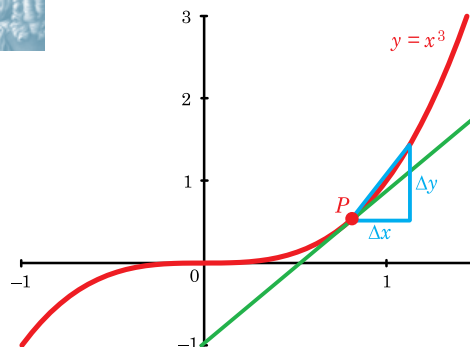
Pas Nicolaus Copernicus (1473-1543) zette de zon centraal in het heelal, een revolutionaire stap die de planeetbewegingen veel eenvoudiger maakte, zodat een fysische verklaring binnen bereik kwam. Daarop kwam Tycho Brahe (1546-1601), die nog met het blote oog ongeëvenaard nauwkeurige plaatsbepalingen deed van zon, maan en planeten.

Vervolgens kwam Johannes Kepler (1571-1630) die uit deze waarnemingen zijn drie wetten afleidde. De Eerste wet is de Perkenwet: de voerstraal (denkbeeldige lijn van zon naar planeet) veegt uit het bewegingsvlak in gelijke tijden gelijke oppervlaktes. De Tweede wet luidt: de banen van de planeten om de zon zijn ellipsen met de zon in een van de brandpunten. En de Derde wet: de derde macht van de straal van een cirkelbaan (of van de halve grote as van een ellips) is recht evenredig met het kwadraat van de omlooptijd.

Omdat de ellipsen van de planeetbanen maar weinig afwijken van een cirkel, is het zeer indrukwekkend dat de waarnemingen van Brahe en het doorzettings- en rekenvermogen van Kepler deze details toch boven water wisten te krijgen.

WERKEN MET DIFFERENTIES

Differentiëren. Hoe vind je, gebruikmakend van differenties, de richtingscoëfficiënt a in het punt $P(x, x^3)$ aan de grafiek van $y = x^3$?

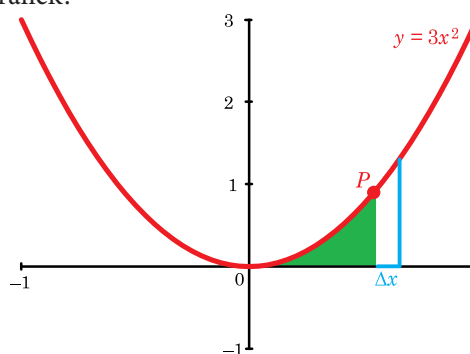


In het plaatje zie je een koorde op de grafiek van $y = x^3$ met P als linker eindpunt. De waarde van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geeft de richtingscoëfficiënt van de koorde. Als Δx steeds kleiner wordt, komt de richtingscoëfficiënt van de koorde steeds dichterbij de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P (de groene lijn). Een 'oneindig kleine' toename van x , notatie dx , geeft precies wat we willen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \\ &= \frac{3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3}{dx} = \\ &= 3x^2 + 3x \cdot dx + (dx)^2. \end{aligned}$$

Omdat dx een 'oneindig kleine' toename is, is de gezochte waarde van a dus $3x^2$.

Integreren. Hoe vind je de oppervlakte A tussen de grafiek van $y = 3x^2$ en de x -as, van de oorsprong $(0, 0)$ tot de verticale lijn door het punt $P(x, y)$ op de grafiek?



In het plaatje wordt de bedoelde oppervlakte (het groene gebied) uitgebreid met een pilaartje van breedte Δx . Maken we het pilaartje 'oneindig smal', dan geldt:

$dA = A(x + dx) - A(x) = y \cdot dx = 3x^2 dx$, dus

$$\frac{dA}{dx} = 3x^2.$$

Met andere woorden: A is de functie die onder 'differentiëren' hierboven staat: $A = x^3$.

LEIBNIZREEKS Leibniz leidde in 1673 de volgende oneindige reeks voor de waarde van π af:



$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Deze Leibnizreeks was, met dank aan de nieuwe kennis van differentiëren en integreren, de eerste puur algebraïsche benaderingsmethode voor π . Al Leibniz' voorgangers baseerden zich op meetkundige constructies, bijvoorbeeld door de omtrek van een regelmatige n -hoek binnen een cirkel te berekenen voor zo groot mogelijke n .

LEIBNIZ-REKENMACHINE Leibniz vervaardigde in 1673 een werkend model van een mechanische rekenmachine, die alle vier de rekenkundige bewerkingen kon uitvoeren.



FLUXIEREKENING Newton ontwikkelde zijn differentiaal- en integraalrekening, door hem *method of fluxions* (fluxierekening) genoemd, in 1665/'66, toen hij vluchtte voor een uitbraak van de pest en in zijn ouderlijk huis de tijd had voor wiskunde en natuurkunde (zwaartekrachtstheorie en theorie van het licht).



Een fluxie is een verandering per seconde van een grootte (bijvoorbeeld: snelheid is de verandering van plaats per seconde, versnelling is de verandering van snelheid per seconde). Newton noteerde zijn fluxies met een punt boven de grootte: een kleine verandering per seconde in de plaats x gaf hij aan met $\dot{x}$, waarbij de punt boven de x het 'oneindig kleine' aangaf. Dus de snelheid $v = \dot{x}$ en de fluxie van v , de versnelling $a = \dot{v} = \ddot{x}$.

Newton publiceerde over zijn fluxierekening pas in 1687. Newton is zijn hele leven uiterst terughoudend geweest met publiceren. Collega's moesten hem vaak overhalen om zijn ontdekkingen bekend te maken. Deze aarzeling lag ook ten grondslag aan zijn ruzie met Leibniz over wie nu eigenlijk de fluxietheorie had bedacht.

Voor 'oneindig kleine' veranderingen gebruikte Leibniz het symbool d (van het Latijnse woord 'differentia' wat 'verschil' betekent). Zo wordt met dx een 'oneindig kleine' toename van de x -coördinaat bedoeld, en betekent ds een 'oneindig klein' stukje van de lengte van een kromme.

Voor het sommeren van 'oneindig veel oneindig kleine beetjes' gebruikte Leibniz het symbool $\int$: een Gothische s , van het Latijnse woord 'summa', wat 'som' betekent. De oppervlakte A tussen de x -as en de grafiek van de functie $y = y(x)$ gaf hij aan met $\int y \cdot dx$, waarbij $y \cdot dx$ de oppervlakte van een 'oneindig smal' pilaartje is.

In de moderne wiskunde gebruiken we de notatie van Leibniz nog steeds, terwijl je de fluxies van Newton nooit meer tegenkomt. ■

Er bestaan al talloze bewijzen van de stelling van Pythagoras, dus wat zou nóg een nieuw bewijs daar aan toe kunnen voegen? In het archief van de eminente Nederlandse wiskundige E.W. Dijkstra (1930-2002) is een elegant bewijs te vinden dat toch weer een ander aspect van de stelling belicht.

■ door Klaas Pieter Hart

OVER DE STELLING VAN PYTHAGORAS

Dijkstra was computerwetenschapper van het eerste uur, die carrière maakte in de Verenigde Staten. Tot op het laatst schreef hij liever brieven met een vulpen aan zijn vele vrienden en collega's dan e-mail te versturen. Een van zijn gedenkwaardige uitspraken: "Computerwetenschap gaat net zo min over computers als astronomie over telescopen gaat." In dit artikel lees je Dijkstra's (bewerkte en uit het Engels vertaalde) bewijs.

De gebruikelijke formulering van de stelling van Pythagoras is als volgt, zie ook figuur 1.

Stelling van Pythagoras. *In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.*

Laten we wat met deze formulering spelen. In een driehoek met zijden a , b en c – ongelijk aan 0 om de hoeken welgedefinieerd te maken – noemen we de overstaande hoeken zoals altijd α , β en γ .

We kunnen de formulering van de stelling van

Pythagoras als volgt formaliseren:

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

We kunnen π elimineren door gebruik te maken van $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Mooi symmetrisch toch? Het suggereert meteen een versterking, namelijk de equivalentie

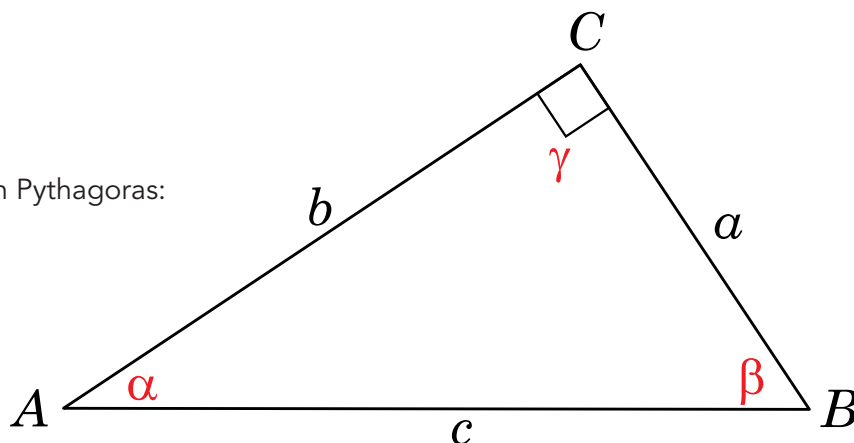
$$\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad (0)$$

(dit zullen we straks bewijzen). We krijgen een equivalente formulering door negaties te nemen:

$$\alpha + \beta \neq \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq c^2.$$

Maar $x \neq y$ is equivalent met ' $x < y$ of $x > y$ ', en die twee kunnen niet tegelijk waar zijn. Omdat grotere hoeken tegenover langere zijden liggen, is het niet

Figuur 1
De stelling van Pythagoras:
 $a^2 + b^2 = c^2$



onredelijk te vermoeden dat de volgende twee equivalenties ook gelden:

$$\alpha + \beta < \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2 \quad (1)$$

en

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2. \quad (2)$$

De equivalenties (0), (1) en (2) zijn niet onafhankelijk: uit elk tweetal volgt automatisch de derde. Met behulp van de *signum-functie* kunnen we ze in één regel samenvatten. De signum-functie is als volgt gedefinieerd:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

We krijgen dan de volgende formulering van (0), (1) en (2) tegelijk:

$$\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

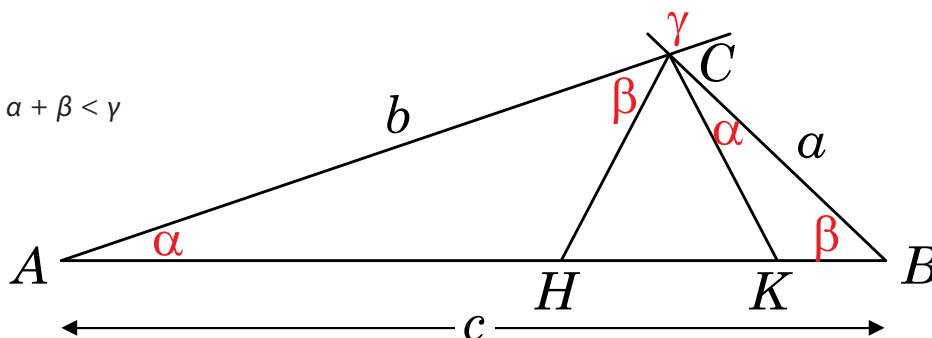
Bekijk figuur 2. We hebben het geval $\alpha + \beta < \gamma$ getekend, waarin de driehoeken $\triangle CKB$ en $\triangle AHC$ elkaar niet overlappen en ook de driehoek $\triangle ABC$ niet overdekken. We schrijven XYZ voor de oppervlakte van $\triangle XYZ$ en we krijgen, in dit geval

$$CKB + AHC < ABC.$$

Als $\alpha + \beta = \gamma$, dan zijn H en K gelijk en dus

$$CKB + AHC = ABC.$$

Figuur 2
 $\triangle ABC$ met $\alpha + \beta < \gamma$



Als $\alpha + \beta > \gamma$, dan overlappen de twee driehoeken elkaar en krijgen we

$$CKB + AHC > ABC.$$

Samengevat:

$$\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}(CKB + AHC - ABC).$$

De drie oppervlakten aan de rechterkant komen van gelijkvormige driehoeken. Ze hebben dus dezelfde verhoudingen als de kwadraten van de overeenkomstige zijden, in het bijzonder

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ABC}{c^2} > 0$$

en dus

$$\text{sgn}(CKB + AHC - ABC) = \text{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Maar daarmee hebben we ook

$$\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$$

bewezen.

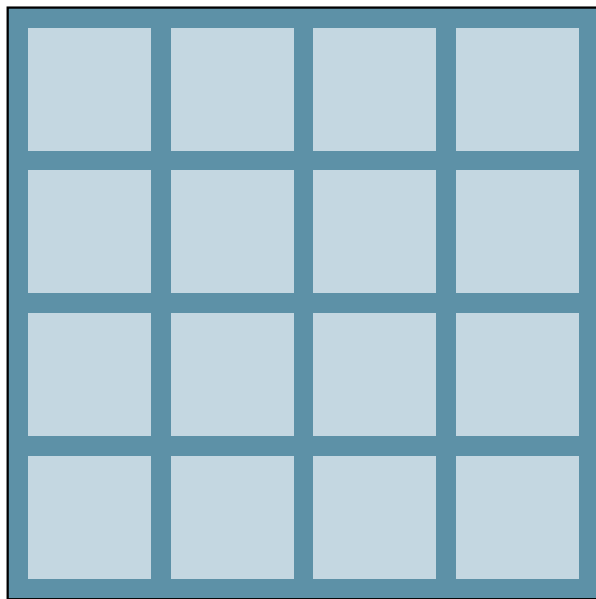
DIJKSTRA-ARCHIEF ONLINE Het gehele Dijkstra-archief is op het internet te vinden: www.cs.utexas.edu/users/EWD. Het hier vertaalde artikel heeft het volgende adres: www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD09xx/EWD975.html. ■

PROBLEMEN

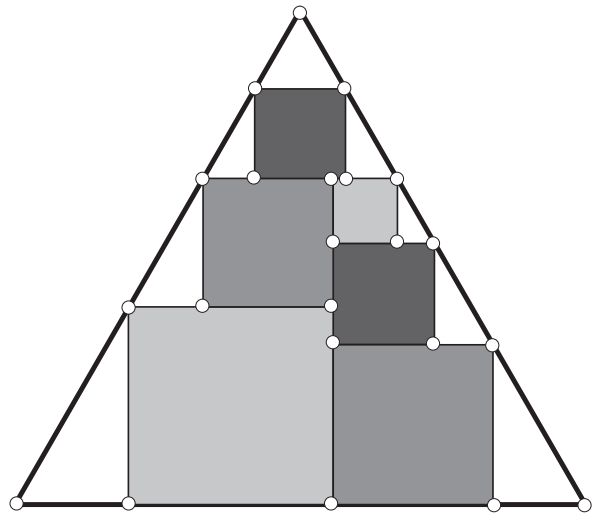
■ door Dion Gijswijt

NEGEN GEWICHTEN Negen gewichtjes kunnen worden verdeeld in 2 groepjes van 30 gram, in 3 groepjes van 20 gram, in 4 groepjes van 15 gram of in 5 groepjes van 12 gram. Hoe zwaar zijn de gewichtjes?

MAGISCH LETTERVIERKANT Zet in elk van de 16 vakjes nul of meer van de letters A, B, C en D. Het moet zó gebeuren, dat in iedere rij, iedere kolom en op elk van beide diagonalen van het vierkant, elke letter precies tweemaal voor komt. Bovendien mogen geen twee vakjes dezelfde inhoud hebben.

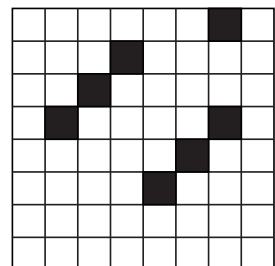
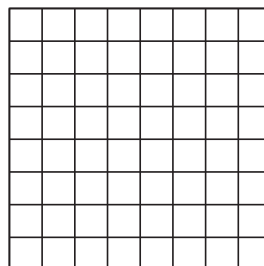


VIERKANTEN STAPELEN Binnen een gelijkzijdige driehoek zijn zes vierkanten gestapeld. Het vierkantje op de top heeft zijde 1. Wat zijn de afmetingen van de andere vijf vierkanten?



SLANGENSPEL Twee spelers spelen het volgende spel op ruitjespapier. De eerste speler kiest een leeg hokje en kleurt het in. Daarna doen de spelers om beurten een zet, te beginnen met de tweede speler. Een zet bestaat eruit een leeg hokje te kiezen dat in een zijde grenst aan het laatst ingekleurde hokje, en dat in te kleuren. Zo ontstaat een soort slang. De speler die geen zet meer kan doen verliest (de slang bijt zichzelf) en de andere speler wint.

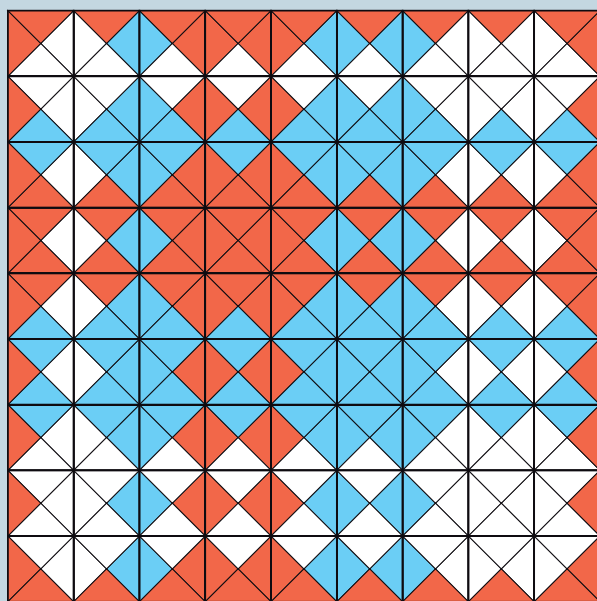
Welke speler heeft een winnende strategie op onderstaande speelborden? Bij het rechter speelbord moet je de ingekleurde hokjes opvatten als gaten in het speelbord.



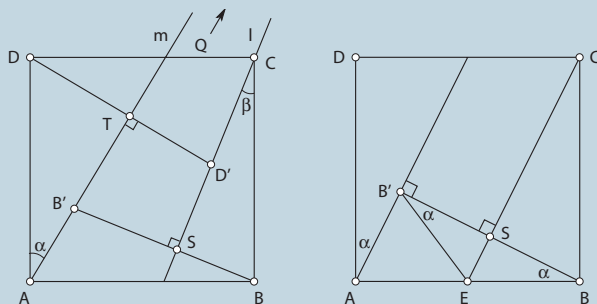
OPLOSSINGEN

PUZZELRING

1. Leg de stukjes in deze volgorde: RW, WB, BR, RR, RB, BB, BW, WW, WR.
2. Door de oplossing van vraag 1 te combineren in horizontale en verticale richting, vind je de oplossing van het probleem met de 81 tegeltjes, zie onderstaande figuur.



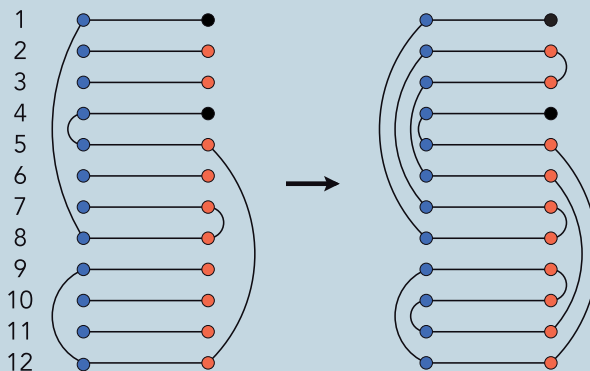
ORIGAMI De vouwlijnen l en m zijn evenwijdig en dus zijn de vouwen even lang. Dit volgt uit de linker figuur: als $\alpha > \beta$, dan snijden l en m elkaar in punt Q . Omdat de driehoeken $D'TQ$ en $B'SQ$ gelijkvormig zijn, volgt dat $|D'T| < |B'S|$. We zien ook dat $|DT| > |BS|$. Maar dit geeft een tegenspraak, want $|DT| = |D'T|$ en $|B'S| = |BS|$. Volgens eenzelfde redenering geeft ook $\alpha < \beta$ een tegenspraak. Dus $\alpha = \beta$. Bekijk nu de rechter figuur. De hoeken $AB'E$ en $B'AE$ zijn gelijk: $90 - \alpha$ graden. Daaruit volgt dat $|AE| = |B'E| = |BE|$. Dus $|BE| = \frac{1}{2}$ en $|EC| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.



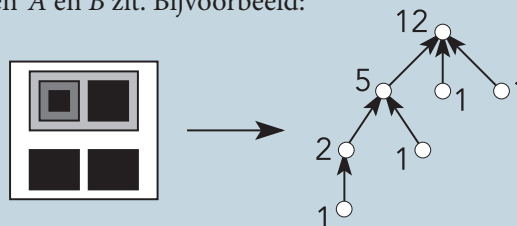
POSTZEGELS In de opgevouwen strip komen de blauwe randen aan één kant te liggen en de rode randen aan de andere kant.



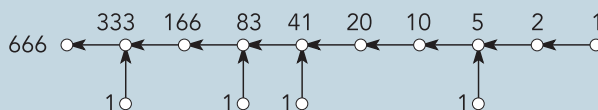
Hier zie je de stapel en de connecties die bekend zijn: 1 grenst in blauw aan 8, 8 grenst in rood aan 7, enzovoorts. Twee verbindingen kunnen elkaar niet snijden. Dit geeft een unieke oplossing.



DUIVELSE DOZEN We geven een configuratie van dozen aan met een *gerichte boom*. De dozen worden punten en we trekken een pijl van doos A naar doos B als A in B zit, maar er geen doos 'tussen' A en B zit. Bijvoorbeeld:



Een oplossing staat hieronder. Het bewijs dat er geen andere oplossing is, laten we hier achterwege.



In de vorige *Pythagoras* presenteerden we acht *superdoku's*, varianten op de bekende sudoku's waarbij je de eigenschappen van de getallen moet gebruiken om de oplossing te vinden.

■ door Arnout Jaspers

SUPERDOKU'S

OPLOSSINGEN

3	9	6	7	2	8	1	5	4
1	2	4	3	6	5	9	8	7
5	7	8	9	4	1	6	3	2
6	4	1	2	5	3	8	7	9
7	8	5	1	9	4	3	2	6
9	3	2	8	7	6	5	4	1
2	1	9	5	8	7	4	6	3
4	5	3	6	1	2	7	9	8
8	6	7	4	3	9	2	1	5

Figuur 1

9	1	7	5	4	3	6	8	2
4	6	5	2	1	8	3	7	9
2	8	3	9	7	6	4	5	1
8	5	4	3	9	2	7	1	6
1	9	2	6	8	7	5	3	4
7	3	6	1	5	4	2	9	8
6	2	1	8	3	5	9	4	7
5	4	9	7	6	1	8	2	3
3	7	8	4	2	9	1	6	5

Figuur 2

8	3	4	7	2	6	9	5	1
2	1	7	9	5	4	3	6	8
9	6	5	3	8	1	2	4	7
1	7	8	2	9	5	4	3	6
3	5	9	6	4	8	7	1	2
4	2	6	1	3	7	8	9	5
6	8	1	4	7	9	5	2	3
7	9	3	5	6	2	1	8	4
5	4	2	8	1	3	6	7	9

Figuur 3

1	-11	3	17	81	-2	-19	5	-1
91	-5	5	3	-11	-19	1	-2	17
-19	17	-2	-1	1	5	91	3	-11
-2	3	17	91	-1	1	-11	-19	5
5	1	-1	-19	3	-11	-2	17	91
-11	-19	91	5	-2	17	3	-1	1
17	-2	1	-11	-19	-1	5	91	3
-1	91	-11	-2	5	3	17	1	-19
3	5	-19	1	17	91	-1	-11	-2

Figuur 4

8	16	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	32	$\frac{1}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	32	8	1	4	$\frac{4}{3}$	16
32	$\frac{4}{3}$	4	2	$\frac{1}{3}$	16	1	$\frac{2}{3}$	8
16	1	2	4	32	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{2}{3}$
4	32	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{2}{3}$	2	16	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	8	16	1	$\frac{1}{3}$	2	32	4
1	4	32	$\frac{4}{3}$	16	$\frac{2}{3}$	8	2	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	4	8	$\frac{2}{3}$	16	32
$\frac{2}{3}$	8	16	$\frac{1}{3}$	2	32	$\frac{4}{3}$	4	1

Figuur 5

4	2	5	7	1	3	9	6	8
8	7	3	6	9	4	1	2	5
9	6	1	2	8	5	3	4	7
7	8	2	1	5	6	4	3	9
3	4	9	8	7	2	5	1	6
5	1	6	4	3	9	8	7	2
1	5	4	9	6	7	2	8	3
2	3	7	5	4	8	6	9	1
6	9	8	3	2	1	7	5	4

Figuur 6

1	7	3	8	5	9	2	4	6
2	8	6	3	4	7	5	9	1
4	5	9	2	1	6	8	3	7
7	3	5	1	8	2	4	6	9
6	1	2	4	9	3	7	5	8
9	4	8	6	7	5	3	1	2
3	2	7	5	6	1	9	8	4
5	6	4	9	2	8	1	7	3
8	9	1	7	3	4	6	2	5

Figuur 7

4	2			5	3	6	9	
	5	8	9		1			
1			2	7			5	
		4	3			7		9
7		3				5		
8	6		7					
	4			3		8		6
	8			6	7	9		
				8			4	5

Figuur 8

32

In de **rekensudoku's** (figuur 1 en 2) waren de som en/of het product van bepaalde combinaties van vakjes gegeven in plaats van de getallen zelf.

In de **algebra-sudoku** (figuur 3) stond elke letter in de opgave voor een van de getallen 1 tot en met 9.

In de **zudoku** (figuur 4) komen andere gehele getallen dan 1 tot en met 9 voor. Gegeven was het product van alle negen getallen: 9.699.690. Omdat dit getal precies acht priemfactoren heeft, met 1 als noodzakelijke negende 'deler', lijkt de enige mogelijkheid $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$, maar dan kom je in de zudoku al snel op een tegenspraak uit. Echter, met een even aantal negatieve getallen is het product óók positief, en kun je zowel 1 als -1 gebruiken! Daardoor kun je twee echte priemdelers combineren ($91 = 7 \times 13$) en blijkt de zudoku toch oplosbaar te zijn.

In de **qudoku** (figuur 5) zijn ook breuken toegelaten.

In de **s<dok>** (figuur 6) gaven 'groter dan' en 'kleiner dan' relaties tussen hokjes aan.

In de **somdoku** (figuur 7) vormen sommige 3×3 -vakken een correcte optelling van driecijfergetallen.

In de **ukodus** (figuur 8) moest je uit een al gedeeltelijk ingevulde sudoku de beginsudoku reconstrueren. Alle rode getallen in figuur 8 behoren niet tot de beginsudoku, en één van de twee blauwe getallen ook niet (uit de opgave is niet af te leiden welke van de twee). Hoe kom je daar achter? Bekijk bijvoorbeeld alleen de getallen 9 in het diagram en denk er om beurten één van weg. Alleen als je de 9 rechtsboven wegdenkt, dwingen de overige negens een unieke positie voor deze 9 af. Als je dit voor alle getallen doet, blijkt dit in vijf gevallen een uniek geplaatst getal op te leveren, plus de 'dubbelzinnige' 3. Er was gegeven dat er zes getallen waren ingevuld, dus dat moeten deze zes zijn.

De redactie blijft geïnteresseerd in originele, elegante sudoku-varianten van lezers. Bijzondere inzendingen publiceren we eventueel in *Pythagoras*. ■

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

DELEN MET REST

Er zijn twee mogelijkheden:
21 en 42. Bijvoorbeeld
 $5053 : 21 = 240$ met rest 13,
en $5053 : 42 = 120$ met rest 13.

KUBUSVATEN VULLEN

Gebruik de kubieke kwart
meter niet. De overige vaten
zijn samen: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1$.

BALLENBAK

Als $a = 4$, geldt
 $b = 1$, $c = 3$ en $d = 2$.
Als $b = 4$, geldt
 $a = 5$, $c = 9$ en $d = 2$.

PAPIEREN VIERKANTJES

Als het dubbel bedekte vierkantje
 x bij x cm is en $\frac{2}{7}$ deel van de totale
bedekking is, geldt: $x^2 = \frac{2}{7}(72 - x^2)$.

Hieruit volgt dat $x = 4$.
Het dubbel bedekte vierkantje is dus
4 bij 4 cm groot.

BLOKJES OM TE WEGEN

Je hebt minimaal twee witte blokjes
en twee zwarte blokjes nodig.

**PYTHA
GORAS**

47ste jaargang nummer 3
januari 2008
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder
auspiciën van de Nederlandse Onder-
wijscommissie voor Wiskunde en richt
zich tot alle leerlingen van vwo en
havo. Pythagoras stelt zich ten doel
jongeren kennis te laten maken met de
leuke en uitdagende kanten van wis-
kunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine
Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart, Chris Zaal

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal,
Korteweg-de Vries Instituut voor
Wiskunde,

Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per
e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar,
jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout
Jaspers, arnout@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Alex van den
Brandhof, Faculteit der Exacte Wetens-
schappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan
1081a, 1081 HV Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten
Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 21,00 (Nederland) € 23,00 (België),
€ 27,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 21,00 (leerlingabonnement België),
€ 11,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 13,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

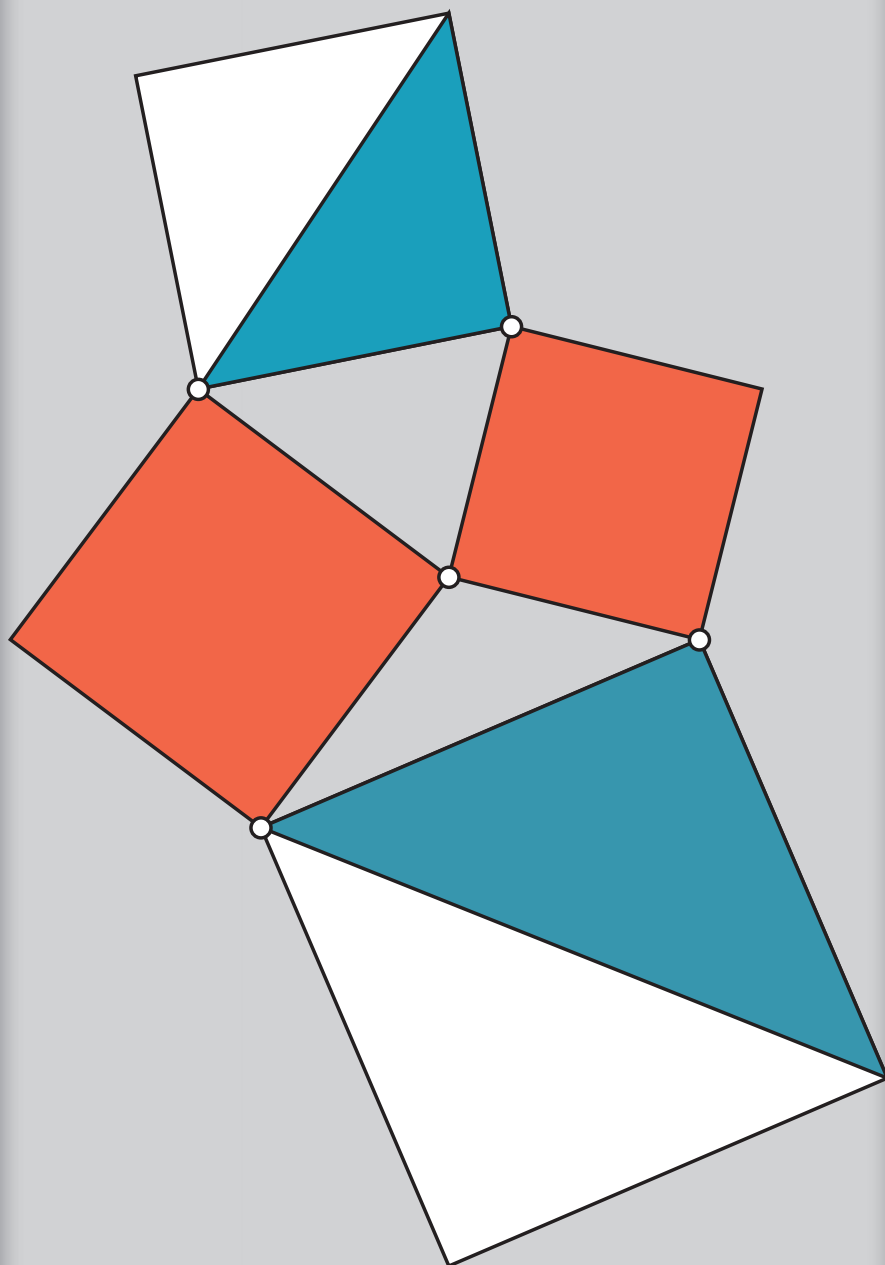
ir. D. Beekman, auteur van diverse br einderboeken (dh.beekman@hetnet.nl),
drs. A.J. van den Brandhof, docent wis-
kunde op het Vossiusgymnasium te Am-
sterdam (alex@pythagoras.nu), dr. M.J.

Coster, wetenschappelijk onderzoeker
bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu),
drs. J. Daems, aio wiskun-
de aan de UL (jeanine@pythagoras.nu),
dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische
optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu),
F. van Doorn, leerling van het
Comenius College te Hilversum (florisvandoorn@hotmail.com),
dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele
Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu),
A. de Haan, student wiskunde
aan de UvA (pytholym@pythagoras.nu),
dr. K.P. Hart, docent topologie aan de
TU Delft (kp@pythagoras.nu),
drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu),
A. Kr et, student wiskunde
aan de UL (pytholym@pythagoras.nu),
drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskun-
de op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu),
drs. M. Roggeband, hoofd afdeling rekenregels bij Achmea
Pensioenen (m.roggeband@orange.nl),
F. Roos, docent natuurkunde te T olbert
(fd_r@yahoo.com), I.M. Smit, student wis-
kunde aan de UvA (imsmit@science.uva.nl),
ir. L.M.M. Veugen, software engineer
bij LogicaCMG (tis.veugen@gmail.com),
dr. C.G. Zaal, docent en onderwijsontwik-
elaar aan de UvA (chris@pythagoras.nu)

Sponsors Pythagoras wordt mede mo-
gelijk gemaakt door de bijdragen van de
volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.