

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Ik was een kubus, naar m
met zijden, hoeken, wate
maar ach, mijn ziel vertel
dat ik een piramide was.

POE $\geq$ 13

47ste JAARGANG - NUMMER 4 - FEBRUARI 2008

Verruim je mogelijkheden



Wiskunde in Leiden



Universiteit Leiden

www.studereninleiden.nl

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

AL OF NIET

Poëzie mág wel ergens over gaan,
net als algebra of gonio of kettingbreuk
maar het hoeft niet.

Een oplossing kan al of niet bestaan,
retorisch, zo van: hier rijmt dit leuk
of quasi, als limiet

van een formule, met x en y en a^n ,
in vele permutaties, gedeeld door e^{u_k}
mits $= 0$ dit niet verbiedt.

Cijferen met letters is taal tot macht verheffen,
of je nu een lang verhaal ontbindt
in kwadraten van priemfactoren

of π 's laatste decimalen laat beseffen
dat hun on- n -digheid verzwindt,
in de reeks waartoe ze behoren.

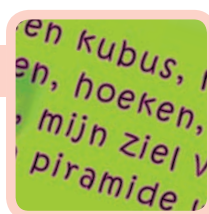
Wiskunde mág wel ergens over gaan,
net als aftelrijm of ezelsbrug of volkslied
maar het hoeft niet.

INHOUD

2 Kleine nootjes

4 Gedichten uit het ongerijmde

- 10 Het opdelen van de ruimte
- 13 Journaal
- 14 Pythagoras Olympiade
- 16 Krom maken wat recht is
- 18 Slim coderen en handig dubbel tellen
- 20 Miskunde: Negen over tien: volmaakte tijd?
- 22 Paul Erdős (1913-1996): een nomadische wiskundige
- 28 Problemen - Oplossingen
- 30 Hyvende getallen, deel 1
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 3



NIVEAUBALKJES

Sommige pagina's hebben onder het paginanummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

1

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

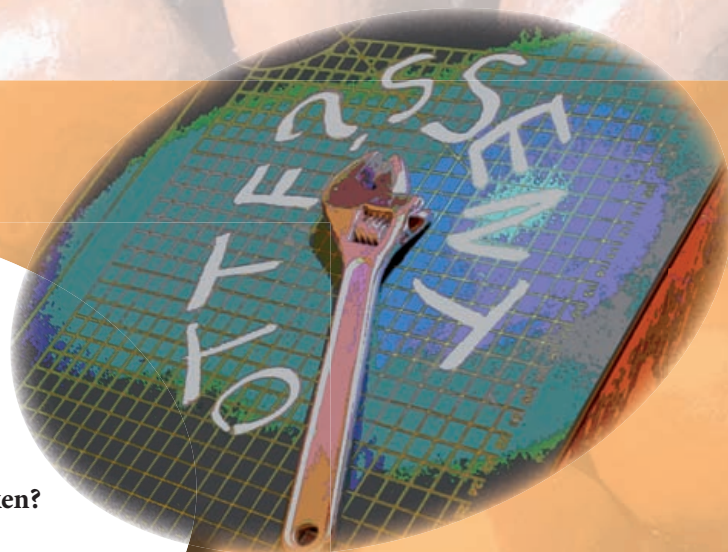
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

TELLEN IN DE EU

Wat komt er op de plaats van het vraagteken?

OTTF?SSNT

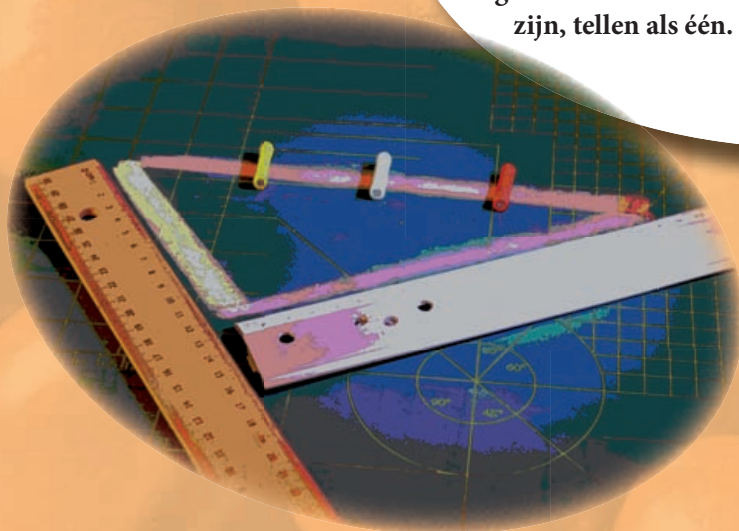


DUBBELE DRIEHOEKEN

Govert heeft vijf stokjes. Ze zijn allemaal ongeveer even lang, maar geen twee stokjes zijn precies even lang. Met elk drietal stokjes kan hij een driehoek leggen.

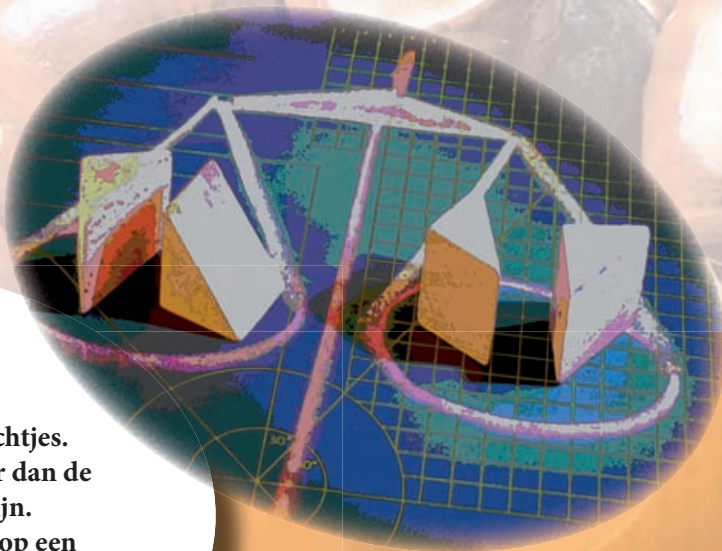
Eerst legt hij een driehoek met drie van de vijf stokjes. Daarna legt hij met de overige twee en één van de al op tafel liggende stokjes (dat op zijn plaats blijft) nog een driehoek. De twee driehoeken mogen buiten elkaar, binnen elkaar of overlappend liggen.

Figuren die door verschuiven, draaien of spiegelen hetzelfde zijn, tellen als één. Hoeveel verschillende figuren kan Govert leggen?



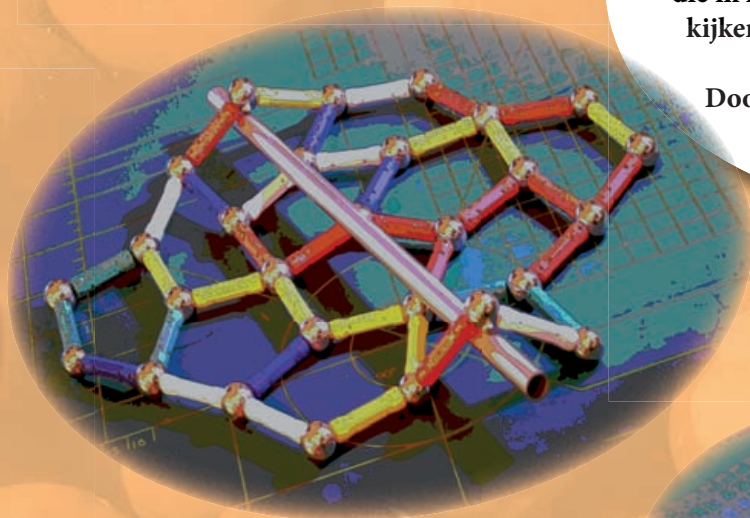
TWEE KEER WEGEN

Sonja heeft vier gelijk uitziende gewichtjes. Twee daarvan zijn even zwaar en lichter dan de andere twee, die ook even zwaar zijn. Hoe vindt Sonja met twee keer wegen op een balans welke de twee lichte gewichtjes zijn (en dus ook de twee zwaardere)?



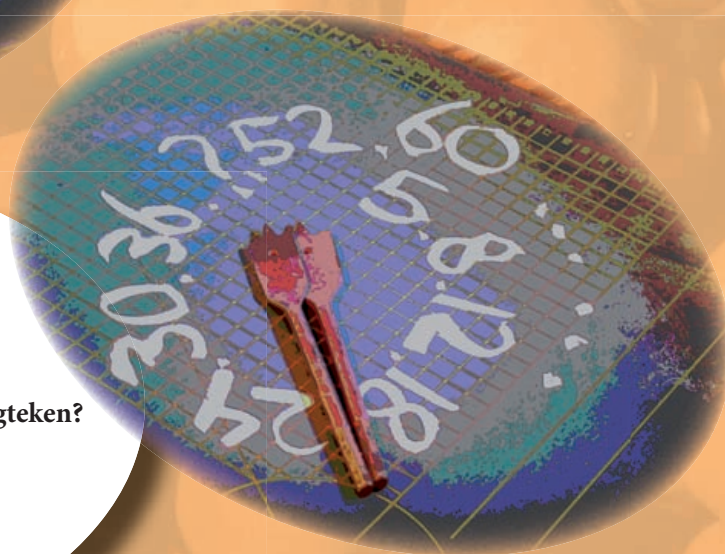
KIJKEN DOOR EEN TWAALFVLAK

Tycho heeft een regelmatig twaalfvlak van karton (aan de buitenkant 12 regelmatige vijfhoeken). Hij maakt in elk van de 20 hoekpunten een gaatje en kijkt door twee gaatjes naar een ster. Door twee gaatjes die in hetzelfde zijvlak liggen, kan hij natuurlijk niet kijken; de lichtstraal naar zijn oog moet echt door het binnenste van het twaalfvlak gaan. Door hoeveel tweetallen gaatjes kan hij kijken?



EEN PRIEMENDE VRAAG

Welk getal komt er op de plaats van het vraagteken?
5 8 12 18 24 30 36 ? 52 60



Poëzie kan natuurlijk over alles gaan, dus ook over wiskunde. In gedichten komen vaak associaties voor, of beeldspraak, en als een dichter iets met wiskunde heeft, komen als vanzelf zulke beelden en begrippen in zijn werk terecht. Maar soms wordt een gedicht geconstrueerd aan de hand van een wiskundig idee, zoals de decimalen van π . Raymond Queneau benutte de wiskunde om een bundel met 'honderdduizend miljard gedichten' te publiceren.

■ door Jeanine Daems

GEDICHTEN UIT HET ONGERIJMDE

4

WISKUNDE ALS ONDERWERP *Wis- en natuurlyriek* van Drs. P en Marjolein Kool is in Nederland waarschijnlijk de bekendste dichtbundel die wiskunde zo duidelijk als onderwerp heeft. Drs. P en Marjolein Kool spelen in de bundel met wiskunde, natuurwetenschap en taal. Gebeurtenissen uit de geschiedenis van de wiskunde, grote ontdekkingen en stellingen worden humoristisch in dichtvorm beschreven.

Het gedicht *Vlieger*, bijvoorbeeld, gaat over een vlieger en een ruit. Een ruit is in de wiskunde een vierhoek waarvan allebei de diagonalen symmetrieassen zijn, een vlieger is een vierhoek waarvan ten minste één van de diagonalen een symmetrie-as is. Dat betekent dat elke ruit een vlieger is, maar niet elke vlieger een ruit. Het gedicht *Vlieger* staat hier naast.

Een ander leuk gedicht over wiskundige lichamen is *Transseksueel*. Maar het allerbeste gedicht uit *Wis- en natuurlyriek* vind ik *Bewijzen*. Zowel *Transseksueel* als *Bewijzen* kun je op de volgende pagina lezen.

Vlieger

*Een ruit die tot een vlieger zei:
'Ik ben een vlieger net als jij,'
bracht hem daarmee in zielenstrijd
inzake zijn identiteit.*

*De arme vlieger dacht en dacht,
maar kreeg de stelling niet ontkracht,
waarop hij riep vol kwade zin:
'Ik gooi die vent zijn ruiten in.'*

*Helaas een ruit is louter lijn,
heeft vensterbank noch raamkozijn.
Zodat er bij gebrek aan glas
geen represaille moog'lijk was.*

*De vlieger bracht nog hoopvol uit:
'Ben ik misschien dan ook een ruit?'
Maar nee, helaas, alweer een strop,
ook deze vlieger ging niet op.*

Transseksueel

Toen ik in moeders armen lag
– ze voelde zich bijzonder rijk –
riep zij vol trots naar wie mij zag:
'Het is een echte kubus, kijk!'

Ik was een kubus, naar men zei,
met zijden, hoeken, waterpas,
maar ach, mijn ziel vertelde mij,
dat ik een piramide was.

Ik trok vanuit een diepe drang
steeds piramidekieren aan.
Ik vocht ertegen jarenlang,
maar ging steeds piramider staan.

Mijn psychiater gaf het op.
Geen praatgroep wist een therapie.
Ik vond na jarenlang getob
mijn redding in de chirurgie.

In een luguber soort kliniek,
waar men van hoge prijzen houdt,
werd ik - de ingreep was uniek -
tot piramide omgebouwd.

Nu zit ik lekker in mijn vel
en mijn probleem is opgelost,
al heeft die hele grap me wel
vier ribben uit mijn lijf gekost.

Bewijzen

Een bolleboos riep laatst met zwier
gewapend met een vel A-vijf:
'Er is geen allergrootst getal,
dat is wat ik bewijzen ga.
Stel, dat ik u nu zou bedriegen
en hier een potje stond te jokken,
dan zou ik zonder overdrijven
het grootste kunnen op gaan noemen.
Maar ben ik klaar, roept u gemeen:
"Vermeerder dat getal met twee!"
Dan zien we zeker en gewis
dat dit toch niet het grootste was.
En gaan we zo nog door een poos,
dan merkt u: dit is onbegrensd.
En daarmee heb ik q.e.d.
Ik ben hier diep gelukkig door.
Zo gaan,' zei hij voor hij bezwijmde,
'bewijzen uit het ongedichte.'

Een bewijs uit het ongerijmde is een speciaal soort wiskundige techniek. Je wilt iets bewijzen, zeg bewering A. Om dat te doen neem je het tegengestelde aan: bewering A is *niet* waar. Vervolgens leid je daar een tegenspraak uit af. In de wiskunde kan een tegenspraak niet voorkomen, dus nu weet je dat de aanname ('bewering A is niet waar') niet klopt. Dus is bewering A wel waar.

In het gedicht *Bewijzen* wordt een voorbeeld gegeven van zo'n bewijs uit het ongerijmde. Bewering A luidt hier: er is geen allergrootst getal. Stel namelijk dat er wel een allergrootst getal is, dan kun je er altijd 2 (of 1...) bij optellen, en dan heb je een groter getal. Dus was ons getal niet het allergrootste getal. Maar nu hebben we een tegenspraak, want we hadden aangenomen dat ons getal wel het allergrootste getal is. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen allergrootst getal is.

Luchtiger zijn de dierengedichten van Kees Stip, waarin alle mogelijke onderwerpen aan de orde komen, dus ook wiskunde. De achterkanten van de Pythagorassen van de vorige jaargang bevatten elk een gedicht van Kees Stip.

WISKUNDE ALS BEELDSPRAAK In gedichten worden vaak beelden en associaties gebruikt. Als een dichter iets van wiskunde weet, zal hij zaken waarover hij schrijft soms ook associëren met wiskundige begrippen. Dat komt dan soms terug in poëzie met een heel ander thema, bijvoorbeeld de liefde. Het volgende gedicht is van K. Schippers:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

je schoonheid min je ogen noem ik a
de geest die in je dartelt b
je ogen

c

opgeteld en minstens een kwadraat gegeven:
(a + b + c)²

Ingmar Heytze gebruikt in *Voor een verre prinses*, wat hij zelf zijn beste gedicht noemt, eveneens een wiskundige vergelijking. Een van de strofen luidt:

*En eerder draait de klok terug
of kookt ons bloed tot ijskristallen,
eerder zal de jongste zon
door ouderdom zijn uitgeblust,
eerder krimpt de kosmos
tot de sterren van de hemel vallen
dan dat jij, uniek als priemgetallen,
ooit nog in mijn armen rust.*

De vergelijking ‘uniek als priemgetallen’ klinkt heel mooi, maar klopt natuurlijk niet: er zijn oneindig veel priemgetallen. Dat werd al in de Griekse oudheid bewezen door Euclides. Wel uniek is priemfactorisatie: elk geheel getal groter dan 1 is op precies één manier te schrijven als een product van priemgetallen, op de volgorde na (dus we beschouwen 2×3 en 3×2 als dezelfde priemfactorisatie van 6).

Gerrit Achterberg verwijst in zijn gedicht *Euclides* naar de Euclidische meetkunde. Dit is de gewone meetkunde, waar in het platte vlak twee verschillende lijnen altijd precies één snijpunt hebben, tenzij ze evenwijdig zijn, dan snijden ze elkaar niet. De projectieve meetkunde is een meetkunde waarin andere eigenschappen gelden dan in de gewone meetkunde. In het projectieve vlak snijden twee verschillende lijnen elkaar altijd in een punt, al kan dat een punt in het oneindige zijn.

Euclides

*Gij zijt aan het bestaande tegenstrijdig.
Buiging en ronding om u heen gelegd,
eenmaal uw beeld te buiten, trokken recht
en maakten u aan alles evenwijdig.*

*Tussen die lijnen werd de tijd ontijdig
en schoof de ruimte uit uw lichaam weg.
Ieder begrip dat nog iets van u zegt,
krijgt doel te veel en middelen te weinig.*

*Ik kan u niet met Euclides beschrijven,
want de figuur waarmee gij congrueert
heeft punten nodig der oneindigheid.*

*Nochtans moet gij binnen de perken blijven
van het gedicht dat u verdisconteert
in al het wit dat ieder woord omsluit.*

AANTALLEN LETTERS, LETTERGREPEN, WOORDEN Het getal π , ongeveer 3,1415926536, is de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Er is geen enkele regelmaat aan te wijzen in de opeenvolging van decimalen. Veel mensen vinden π een fascinerend getal, maar het is moeilijk om de decimalen te onthouden. Daarom zijn er ezelsbruggetjes ontstaan: zinnen waarin elk volgende woord steeds even veel letters heeft als de volgende decimaal van π uitdrukt.

Het is natuurlijk een hele kunst om zo'n zin te vinden die ook nog eens goed loopt en makkelijk te onthouden is. Voorbeelden in ietwat ouderwets Nederlands zijn:

*Eva o lief, o zoete hartedief, uw blauwe
oogen zyn wreed bedrogen.
3,14159265358*

*Zie, 'k geef u thans, geleerden en leeken,
ouden van dagen, frissche studenten, weinige
regeltjes, die mij zijn gebleken, vaak nuttig te
werken voor tal van docenten. Zie nu hoeveel
decimalen.
3,141592653589793238462643383279*

Het getal π wordt ook op een andere manier gebruikt om gedichten te construeren, zoals we lezen in *Wis- en natuurlyriek*:

Pi-sonnet

*Drie, een, vier, een en vijf... verstijft u even?
Goed, tweeëntwintig dan, gedeeld door zeven
Precies – dat is wat ik bedoelde: π*

Een Fransman wou daar een sonnet mee maken

*Die reeks vertoont wel weinig symmetrie
Maar veertien in totaal is een gegeven
Twee losse regels tot refrein verheven –
Zo wordt het een gedicht, wel wis en drie*

*Jacques Bens wist dus een nieuw gedicht te
maken*

*Wie zou hiervan niet in vervoering raken?
Na twintig jaar belandt het goed en wel
In onze taal. U moet van ijver blaken
Om op zo'n innovatie in te haken
(Hij noemde die sonnet irrationel)*

In 1965 publiceerde Jacques Bens zijn 41 *sonnets irrationnels*. Hij ontwierp de versvorm die het Pi-sonnet heeft: het aantal regels in een strofe is steeds het volgende cijfer in de decimale ontwikkeling van π . Jaap Bakker speelde daar in 1984 op in door het e-rondeel te bedenken. Jacques Bens was een van de oprichters van de Oulipo (Ouvroir de Littérature Potentielle, oftewel: Werkplaats voor Mogelijke Literatuur). In de Oulipo zaten schrijvers als Raymond Queneau en Georges Perec, maar ook wiskundigen als Jacques Roubaud en François Le Lionnais.

Er zijn natuurlijk eindeloos veel variaties mogelijk op dit thema. Zo werden in 2006 Fibonacci-gedichten een hit op internet. Een Fibonacci-gedicht is gebaseerd op de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (de rij begint met twee enen en elk getal daarna is steeds de som van de twee vorige getallen). In een Fibonacci-gedicht staat op de eerste regel één lettergreep, op de tweede regel ook één, op de derde regel staan twee lettergrepen, op de vierde drie, op de vijfde acht, enzovoort. Je snapt dat de regels van een Fibonacci-gedicht al snel erg lang worden. Daarom hebben de meeste Fibonacci-gedichten (ook wel *Fibs* genoemd) niet meer dan zes of zeven regels.

De Fibs werden bekend door de weblog van de Amerikaanse Gregory K. Pincus (gottabook.blogspot.com), waarop hij in april 2006 het volgende Fibonacci-gedicht plaatste:

One
Small,
Precise,
Poetic,
Spiraling mixture:
Math plus poetry yields the Fib.

Toen andere webloggers naar zijn Fib doorlinkten kreeg ook de New York Times lucht van deze bijzondere dichtvorm. Ze publiceerden een artikel over de Fib, dat begon met:

Blogs
spread
gossip
and rumor
But how about a
Rare, geeky form of poetry?

Dat wiskunde wordt gebruikt om de vorm van gedichten vast te leggen is niet zo verrassend: gedichten worden sowieso vaak in een vaste vorm geschreven. Gewone sonnetten, bijvoorbeeld, al eeuwen een heel gebruikelijke dichtvorm, bestaan altijd uit 14 regels. De oorspronkelijke Italiaanse sonnetten bestonden uit twee strofen van elk vier regels (kwatrijnen) gevolgd door twee strofen van drie regels (terzinen). Later ontstond het afwijkende Engelse sonnet, dat uit drie strofen van vier regels bestaat en eindigt met een strofe van twee regels (distichon).

De haiku, een Japanse versvorm, ligt precies vast wat betreft het aantal lettergrepen: de eerste regel heeft vijf lettergrepen, de tweede zeven en de derde weer vijf. Op internet zijn er veel te vinden, ook over wiskunde:

Need socks in the dark?
The pigeonhole principle
comes to your rescue!

Deze haiku van Brent Yorgey beschrijft de oplossing van het volgende raadsel. In een doos liggen een heleboel sokken in twee verschillende kleuren. Als je in het donker sokken moet pakken, hoeveel sokken moet je dan ten minste uit de doos halen zodat je zeker weet dat je een bij elkaar passend paar hebt?

CURIOSITEITEN Lewis Carroll, vooral bekend als auteur van *Alice's Adventures in Wonderland* maar ook wiskundige, liet zich inspireren door het vierkant in een vierkant gedicht:

I	often wondered when I	cursed,
Often	feared where I would	be -
Wondered	where she'd yield her	love,
When	I yield, so will	she.
I	would her will be	pitied!
Cursed	be love! She pitied	me...

De eerste regel en de eerste kolom bevatten precies dezelfde woorden, evenals de tweede regel en de tweede kolom, enzovoort. (De lay-out van het gedicht is een beetje veranderd om dat duidelijk te maken voor de eerste en laatste kolom.)

Het volgende gedicht vind ik ook erg leuk. Het is het derde deel van het korte artikel *Three Cases of Pushing Things to the Limit* van François Le Lionnais: een gedicht gebaseerd op interpunctie.

:
1, 2, 3, 4, 5.
6; 7; 8; 9; 10.
12?
11!

Raymond Queneau schreef een heleboel gedichten tegelijk in zijn *Cent mille milliards de poèmes*. Hij schreef tien gedichten van veertien regels. Tussen de regels staan kniplijntjes. Als je die doorknijpt, is elke bladzijde dus veranderd in veertien losse flapjes. Elke eerste regel is te combineren met elke tweede, derde, vierde regel, enzovoort, en dan rijmt het allemaal nog steeds. In totaal staan er dus $10^{14} = 100.000.000.000.000$ gedichten in de bundel. Dat is meer dan je wil lezen: Queneau rekende de lezer voor, dat iemand die 24 uur per dag leest, 190.258.751 jaar nodig heeft om door deze bundel heen te komen!

ALGORITMEN Een algoritme is een recept om stap voor stap iets te berekenen of te construeren. Wiskundigen gebruiken vaak algoritmen. De methode die je op school geleerd hebt om op papier twee grote getallen met elkaar te vermenigvuldigen is een algoritme: de methode vertelt je stap voor stap wat je moet doen en als je geen rekenfouten maakt komt er uiteindelijk het goede antwoord uit. Ook het berekenen van de decimalen van π gebeurt met een algoritme.

Stel dat je de rest wilt weten van het gehele, positieve getal a bij deling door een kleiner, ook positief getal b . Een heel simpel voorbeeld van een algoritme waarmee je dat kunt doen is het volgende: trek b af van a . Als de uitkomst groter dan b is, moet je b daar opnieuw van aftrekken. Op het moment dat het resultaat kleiner dan b is, heb je de rest gevonden.

Een algoritme lijkt op een recept uit een kookboek: het vertelt je precies wat je moet doen, en je hoeft niet te snappen waarom een bepaalde stap nodig is om het te kunnen uitvoeren. Het implementeren van een algoritme is de manier om een computer te vertellen hoe hij iets voor je moet uitrekenen.

Maar als je met een algoritme iets kunt construeren,

kun je misschien ook wel een algoritme gebruiken om gedichten mee te maken. Gerrit Krol deed dat in 1971, toen de computer nog helemaal geen gemeengoed was, in zijn boekje *APPI – Automatic Poetry by Pointed Information – Poëzie met een computer*.

Krol geeft de computer invoer: hij beschrijft bijvoorbeeld een plaatje. Een plaatje van een dame in badpak beschrijft hij door een aantal zinnen als:

ze heeft een nieuw badpak aan
misschien gaat ze zwemmen
ze steunt op haar hand
om niet te vallen
een aardige vrouw om te zien
een wereld op zich
een denkend wezen
dat haar lippen verft
een lok voor haar ogen
haar oksel is niet te zien
als ze haar arm opheft
zie je die wel
als je haar van de andere kant bekijkt
zie je de andere oksel ook
voor hetzelfde geld kun je zeggen
een nieuw badpak
nu al kiezen
en straks kopen
en het plaatje vergeten

In een grote matrix (tabel) zet Krol een heleboel getallen die hij gaat gebruiken om deze zinnen en gebruikelijke werkwoorden aan andere woorden te koppelen. Zo'n zin of werkwoord wordt gekoppeld aan een modus (bijvoorbeeld: kan, moet, mag, wil, toch, ook, meer, soms, minder; en de negatieven daarvan, dus: kan niet, hoeft niet, mag niet, ook niet, enzovoort), aan een tijd (onvoltooid tegenwoordige tijd, onvoltooid verleden tijd, enzovoort), een beginvoegwoord (bijvoorbeeld: wat, als, waarom, ook, wie, toch, -) en een eindvoegwoord (dat, zodanig dat, zodat, want, en, of, ...).

In de matrix zet Krol op iedere plek een willekeurig getal. Hij geeft vervolgens de computer een algoritme: begin met deze zin, en koppel daaraan

een tijd, voegwoorden en een modus. Ook is er een regel om te bepalen wat de volgende zin is. Bij al deze stapjes worden de getallen in de matrix gebruikt, hij geeft commando's als: kies in deze regel de modus met het grootste getal.

De uitkomst ziet er bijvoorbeeld zo uit:

zeggen (ovt) dan niet, als, want

Een ander programmaatje maakt daarvan vervolgens een kloppende zin:

als ze dan niet zei want

De zinnen over de dame in badpak leiden dan tot:

**als ze dan niet zei want
dat zo haar lippen had geverfd en
toch had je haar nog niet van de andere kant
bekeken.
ze zou soms huilen zodat
het kon lijken dat
ze zal steunen op haar hand enz. zodat
ze het vaak vertelt
waarom ze dan niet misschien gaat zwemmen
waarom ze vaak zal zien of
ze nu al niet meer kiest dat
wat ze nu ook niet koos of
ze niet een nieuw badpak kan.**

Het gedicht gaat nog verder. Een computer kan natuurlijk wel woorden aan elkaar koppelen, maar hij kan niet bepalen of de uitkomst een (goed) gedicht is. Zoals Krol schrijft: 'Het is voor een grote computer een klein kunstje volgens een beschreven procedure (...) in één minuut 1200 regels te drukken die samenhang vertonen. Of die regels sterke formuleringen zijn van nog nooit eerder onder woorden gebrachte gedachten of gevoelens – dat moet worden uitgemaakt door wie de regels leest.' Poëzie maken met een computer is dus een wisselwerking tussen de mens, die de invoer geeft en de uitkomst beoordeelt, en de computer, die alle informatie volgens een bepaald algoritme aan elkaar koppelt en zo een gedicht produceert.

Ook de leden van de Oulipo waren erg geïnteresseerd in de interactie tussen wiskunde en literatuur. Zij hielden zich ook bezig met het algoritmisch produceren van teksten. Zo bedacht Jean Lescure de *N+7*. Net als in het boekje van Krol is er invoer nodig: een tekst (bijvoorbeeld een gedicht), en een woordenboek in de taal waarin de tekst geschreven is.

Vervolgens bepaal je welke woorden in het gedicht dat je gekozen hebt zelfstandige naamwoorden zijn. Daarna zoek je al die zelfstandige naamwoorden op in het woordenboek. Je kijkt zeven zelfstandige naamwoorden verder en dit woord zet je in plaats van het oorspronkelijke zelfstandig naamwoord. Zo kan de bekende Shakespeare-zin *To be or not to be* opeens veranderen in *That is the quibble*. Als we dit procédé uitvoeren met de hierboven geciteerde strofe van Ingmar Heytze, vinden we een nieuw gedicht:

**En eerder draait het klokdiertje terug
of kookt onze bloedakker tot ijslanders,
eerder zal de jongste zondares
door ouderdomsklasse zijn uitgeblust,
eerder krimpt de kostderving
tot de steranijsbomen van de hemelbode vallen
dan dat jij, uniek als priemwormen,
ooit nog in mijn armbanden rust.**

Deze volkomen automatische procedure levert soms toch intrigerende woordcombinaties op. Van regels als 'of kookt onze bloedakker tot ijslanders' en 'dan dat jij, uniek als priemwormen, ooit nog in mijn armbanden rust', is het nog maar de vraag of ze door een poëziekenner meteen als computerspraak afgedaan zouden worden. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

Gerrit Achterberg, *Verzamelde gedichten*, Querido, 1963; Drs. P & Marjolein Kool, *Wis- en natuurlyriek – met chemisch supplement*, Nijgh & Van Ditmar, 2000; Gerrit Krol, *APPI – Automatic Poetry by Pointed Information – Poëzie met een computer*, Querido, 1971; Harry Mathews & Alastair Brotchie, *Oulipo Compendium*, Atlas Press, 1998; Ionica Smeets, *Als wiskunde botst met poëzie (2)*, www.wiskundemeisjes.nl

Enige tijd geleden zag ik een filmpje van een college van de Hongaarse wiskundige G. Pólya (1887-1985). Het filmpje is in drie opzichten interessant: het geeft een leuk beeld van hoe in 1965 college aan studenten werd gegeven (jongens in pak en meisjes in jurk, bescheiden, beleefd en goed oplettend), het is een goede illustratie van de manier van wiskundig denken waartoe Pólya zijn studenten wil aanzetten, en het behandelde wiskundeprobleem is minder eenvoudig dan op het eerste gezicht lijkt.

■ door Nico Bakker

HET OPDELEN VAN DE RUIMTE

10

Op Wikipedia staat een kenmerkend citaat van Pólya: 'Als je er niet in slaagt een bepaald probleem op te lossen, zoek dan een eenvoudiger probleem dat je wel kan oplossen.' Deze filosofie zie je prachtig terug in het gefilmde college. De studenten kregen het volgende probleem voorgeschoteld: wat is het maximum aantal deelruimten waarin de ruimte wordt opgedeeld door vijf vlakken?

Eerst het probleem verkennen: met één vlak verdeel je de ruimte in twee deelruimten, met twee vlakken heb je al vier deelruimten, met drie vlakken krijg je er acht. Maar hoe zit dat met vier of vijf vlakken? Verder verkennen: het gaat hier om ruimten en vlakken. Een ruimte heeft drie dimensies (3D) en een vlak heeft twee dimensies (2D). Verder spreken we af dat een ruimte en een vlak (en voor straks: een lijn) onbegrensd zijn.

EERST IN ÉÉN DIMENSIE Laten we Pólya's goede raad opvolgen en eerst eens kijken hoe dit in één dimensie (1D) in elkaar zit: we delen een lijn op met een aantal punten (met nul dimensies) en kijken hoeveel lijnstukken dat oplevert. In figuur 1 zie je dat een lijn door vier punten in vijf stukken

wordt opgedeeld. Je kunt je gemakkelijk voorstellen dat twee punten de lijn in drie stukken opdelen, enzovoort. Algemeen: een lijn wordt door n punten opgedeeld in $n + 1$ lijnstukken. In formule: $l(n) = n + 1$.

Er zit wel een addertje onder het gras: als twee of meer punten samenvallen, dan wordt ook het aantal lijnstukken minder. We stellen daarom als eis dat de punten niet samenvallen, wat redelijk is, want we willen het maximum aantal lijnstukken weten.



Figuur 1

NU IN TWEE DIMENSIES We maken ons probleem iets ingewikkelder door het in 2D te gaan bekijken: in hoeveel deelvlakken wordt het vlak opgedeeld door een aantal lijnen? Het is makkelijk voor te stellen dat een lijn een vlak in twee deelvlakken

opdeelt, en twee lijnen delen een vlak op in vier deelvlakken. Dit heb je al vaak gezien bij een assenstelsel, want daarbij delen de twee assen het hele rooster op in vier kwadranten.

Laten we meteen de adders bestrijden, en nu al afspreken dat onze lijnen niet evenwijdig zijn (en dus ook niet samenvallen). Twee evenwijdige lijnen delen een vlak immers op in slechts drie deelvlakken. Ook spreken we af dat een snijpunt van twee lijnen niet samenvalt met het snijpunt van elk ander paar lijnen.

Bij drie lijnen zien we iets merkwaardigs optreden, want nu krijgen we een deelvlak dat geheel omsloten wordt door de drie lijnen: een binnenvlak. In figuur 2 zie je dit binnenvlak paars gekleurd, met daaromheen zes buitenvlakken, dus het aantal deelvlakken is zeven. Dit aantal is dus niet een verdubbeling van het aantal deelvlakken bij twee lijnen!



Figuur 2



Figuur 3

Bij vier lijnen krijgen we nog twee binnenvlakken én twee buitenvlakken erbij, en zo is het aantal deelvlakken elf, zie figuur 3. Je kunt je nu afvragen of het wat uitmaakt waar deze vierde lijn wordt

neergelegd ten opzichte van het binnenvlak bij de drie lijnen. In figuur 4 zie je dat afgebeeld: de vierde lijn gaat respectievelijk boven het eerste binnenvlak langs, op een andere plaats erdoor, en eronder langs.

Het aantal binnenvlakken blijft drie, en het aantal deelvlakken blijft elf, onafhankelijk van waar de vierde lijn wordt geplaatst. Dat is een mooie constatering, maar... kunnen we die ook verklaren?

Laten we de plaatjes nogmaals bekijken, maar ons nu concentreren op de snijpunten van de vierde lijn met de drie andere lijnen, zie figuur 5.

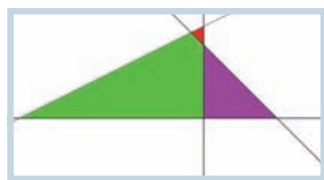
We zien telkens drie snijpunten. Waarom weten we zeker dat er *altijd* drie snijpunten zijn? Dat hebben we te danken aan onze afspraak dat geen van de lijnen evenwijdig is met een andere lijn. Elke lijn heeft daarom een snijpunt met elke andere lijn.

Maar dan is onze vierde lijn te beschouwen als een voorbeeld uit ons eenvoudiger probleem in 1D, en deze wordt dus opgedeeld in vier lijnstukken. Elk van deze vier lijnstukken gaat door een deelvlak, en deelt dit deelvlak op in twee deelvlakken. De vierde lijn levert dus vier extra deelvlakken op. Merk op dat we hierbij gebruik hebben gemaakt van ons resultaat bij één dimensie.

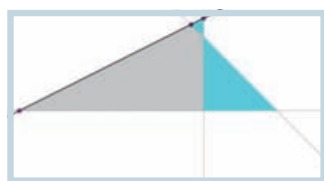
We zijn nu zover dat we een formule kunnen opstellen voor het maximum aantal deelvlakken bij n lijnen. In eerste instantie een recursieve formule: $v(n+1) = v(n) + l(n)$ met $v(0) = 1$ (zoals we eerder zagen is $l(n) = n + 1$). Enig rekenwerk geeft: $v(n) = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$.

DRIE DIMENSIES We zijn nu klaar om ons oorspronkelijke probleem aan te pakken. In figuur 6 zie je hoe drie vlakken de ruimte in acht deelruimten opdelen. In figuur 7 is een vierde vlak toegevoegd en je ziet een binnenruimte ontstaan.

Ook nu gaan we eerst de adder de nek omdraai-

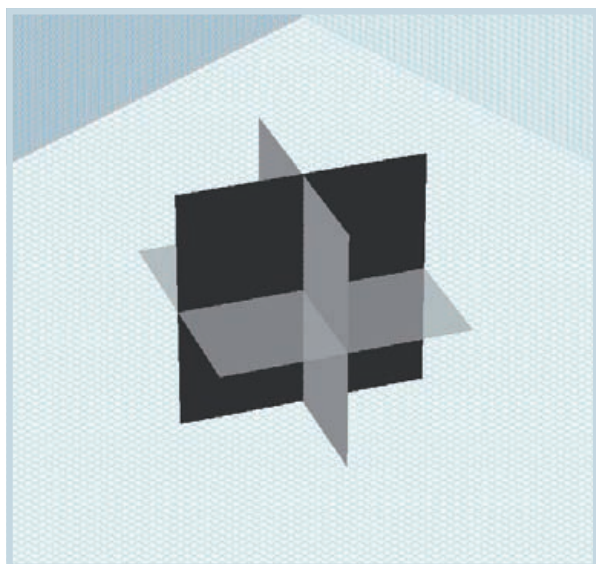


Figuur 4



Figuur 5



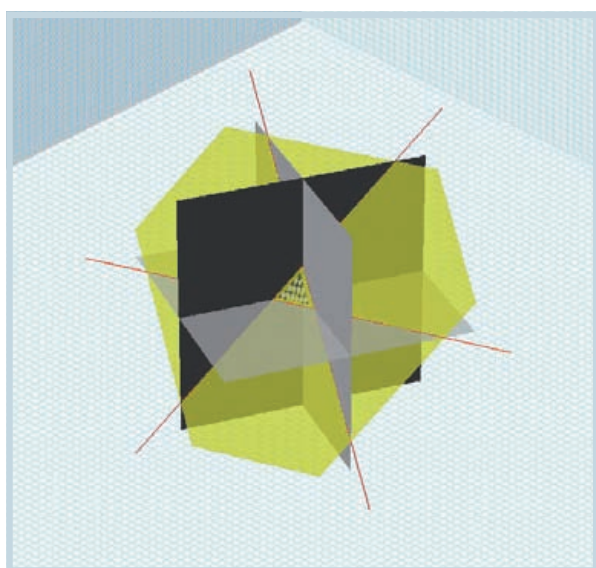


Figuur 6

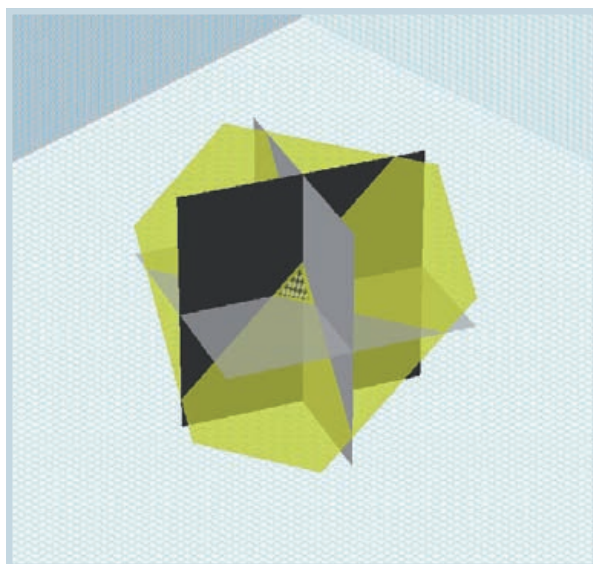
en: we eisen dat vlakken niet evenwijdig zijn, dat snijlijnen niet evenwijdig zijn, en dat snijpunten van drie vlakken niet samenvallen met andere snijpunten. Al deze eisen zijn niet onredelijk, omdat we nog steeds op zoek zijn naar het maximum aantal deelruimten.

Je ziet dat het nu al lastig is om deelruimten te tellen. We gaan daarom meteen onze nieuw verworven kennis toepassen. Net zoals we in 2D hebben gekeken naar de bijdrage van de vijfde lijn aan het aantal deelvlakken, gaan we nu in 3D kijken wat de bijdrage is van het vierde vlak aan het aantal deelruimten. In 2D hebben we de toegevoegde lijn apart bekeken, en dus bekijken we nu het toegevoegde vlak apart.

In figuur 8 zijn de snijlijnen getekend van het vierde vlak met de eerste drie vlakken. Als we het vierde vlak even apart bekijken, herkennen we hoe



Figuur 8



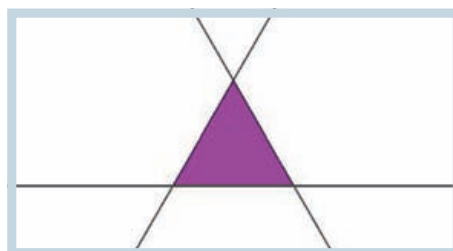
Figuur 7

drie lijnen een vlak opdelen in zeven deelvlakken, zie figuur 9.

In figuur 8 is te zien dat elk van deze zeven deelvlakken een deelruimte in twee stukken opdeelt. Dus de bijdrage van het vierde vlak aan het aantal deelruimten is zeven extra deelruimten. Je kunt je voorstellen dat de bijdrage van een vijfde vlak aan het aantal deelruimten gelijk is aan het aantal deelvlakken in een vlak met vier lijnen. Ook hier zie je weer dat ons resultaat bij twee dimensies een essentiële rol speelt bij drie dimensies.

We kunnen dit alles nu in een recursieve formule zetten: $r(n+1) = r(n) + v(n)$ met $r(0) = 1$. Stevig rekenwerk geeft: $r(n) = \frac{1}{6} n(n^2 + 5) + 1$.

Ik laat het graag aan de lezer over om uit te zoeken hoe dit verhaal verder gaat in vier, vijf, en nog meer dimensies. ■



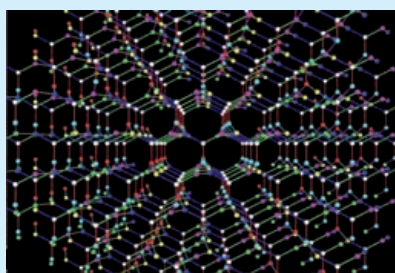
Figuur 9

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

De kristalstructuur van een diamant

De Japanse wiskundige Toshikazu Sunada heeft de kristalstructuur van diamanten wiskundig geanalyseerd. Van alle mogelijke kristalstructuren – dat zijn er oneindig veel – is er slechts één die dezelfde bijzondere eigenschappen heeft als de diamant. Van dit kristal is echter onbekend of het in de natuur voorkomt.



Een grafische voorstelling van het K4-kristal. (Afbeelding: Hisashi Naito)

Een kristal is een hoeveelheid ordelijk gerangschikte atomen, moleculen of ionen. Van een kristal kun je een wiskundig model maken door hem als oneindige graaf te representeren: de atomen zijn de *knopen* van de graaf, de chemische verbindingen tussen de atomen zijn de *lijnen* van de graaf. Een kristal is nu opgebouwd uit een basisgraaf waarvan kopieën

op een periodieke wijze aan elkaar worden gehangen.

De kristalstructuur van een diamant heeft twee speciale eigenschappen die de diamant onderscheiden van andere kristallen. De eerste eigenschap gaat over de ordening van de aan elkaar gehangen kopieën van de basisgrafen; de kristalstructuur van een diamant is wat Sunada noemt ‘maximaal sym-

metrisch’. Een tweede speciale eigenschap van de diamant is wat Sunada ‘sterke isotropie’ noemt: als je de graaf bekijkt vanuit de richting van één van zijn lijnen en het vervolgens roteert naar een richting van een andere lijn, dan zie je geen verschil.

Van alle kristallen is er slechts één ander kristal dat deze twee eigenschappen met de diamant gemeen heeft. Sunada heeft dit het K4-kristal genoemd, omdat het gebaseerd is op de basisgraaf K4, dat is de graaf met vier knopen waarbij elk tweetal knopen met een lijn wordt verbonden. Voor zover we weten, bestaat van het K4-kristal alleen nog maar de wiskundige beschrijving. In de natuur is het nog nooit aangetroffen.

Woodallpriemgetallen

Een Woodallpriemgetal is een priemgetal van de vorm $n \cdot 2^n - 1$. In 2007 werden vijf priemgetallen van deze soort gevonden, en het zijn meteen de vijf grootste Woodallpriemgetallen die bekend zijn.

Het laatst gevonden Woodallpriemgetal is $3.752.948 \cdot 2^{3.752.948} - 1$; de eerste 1560 cijfers staan hieronder uitgeschreven. Het is het enige Woodallpriemgetal dat we kennen met meer dan een miljoen cijfers;

om precies te zijn: het getal heeft 1.129.757 cijfers. Hiermee staat het op de dertiende plaats van grootste bekende priemgetallen. Het werd gevonden op 21 december 2007 door (de computer van) Matthew J. Thompson.

Men vermoedt dat er oneindig veel Woodallpriemgetallen zijn. Een bewijs van deze hypothese heeft echter nog nooit iemand kunnen leveren. Op dit moment zijn er slechts 33 Woodallpriemgetallen bekend.

De lijst van grootste bekende priemgetallen wordt al sinds september 2006 aangevoerd door het 9.808.358 cijfers lange getal $2^{32.582.657} - 1$. Dit is een Mersenne-priemgetal, dat wil zeggen: van de vorm $2^n - 1$. De reden dat de zes grootste priemgetallen die we kennen allemaal Mersenne-getallen zijn (het grootste bekende Mersenne-priemgetal is bijna negen keer zo groot als het onlangs gevonden Woodallpriemgetal), is dat er voor Mersenne-getallen relatief eenvoudige priemtests bestaan, die niet werken voor andersoortige getallen.

3122767809493122472233064324524273420425531007394106531847824187311821396662134448479154573917028018320260645469401729013609217209660065101723653296916208349613117074959655211922611721073201828812336868958799329045849186542227788598226358241874962068070442839539621311414019668320701452264746206665227306661342740419576121041933280282524646784395296792025406472812436607672443138725180741102913089999361398936981130988716079747860699088913249131593274626208165114400138458222577876684968685468438763415882761861302485346390145231282976742374377892361130827580104427865844129189987849975796352699163226797893569092841853082010554731440999626641586310774664608847724039639204144292564289140934478748255033592341246391809452364046364001178425422257420366197724998515585655799095131649391319323637335161579437086653373159609648124349279089961272536358305474250303335930501220128214746401879022204254130416534225675346786060189098971224042015171426462927910554027216634575608131217034247525807896091568538572476106625161396582218183978676335618848551763831736726657521427687694617755667422201235039051177806470055583278116088855404287139265490785647495017588270579335778250143541516366665124655276826525281971828924855079336055810142464600143883163859198505012972424513250984811138309576621002470104938491847538720512705619343516542752605579385115531339580390978824736646662077240155717824754183150710465459992190705507725706186284259675452197123717387741956856177431857907604257586845791469935143812385784904794054410246717462756334237953207646443880395930149

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de Pythagoras Olympiade. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



14

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 april 2008.

OPGAVE

152

Bepaal alle gehele getallen met precies 100 delers waarbij onder de delers ten minste tien opeenvolgende getallen zijn. Bij de delers van n rekenen we ook 1 en n zelf.

OPGAVE

153

Twee cirkels snijden elkaar in de punten P en Q . Op een van de twee cirkels kiezen we een punt A . AP en AQ snijden de andere cirkel nog eens in de punten B en C . Bewijs dat de raaklijn aan de cirkel in A evenwijdig is met BC .

OPLOSSING

148

Zij k een positief geheel getal. Laat zien dat er een veelvoud m van 2^k bestaat, zodanig dat m is opgebouwd uit alleen maar enen en tweeën. Bijvoorbeeld: 2^3 is een deler van 112.

OPLOSSING We bewijzen dat er voor elk positief geheel getal k gehele getallen a_k en m_k bestaan, zodanig dat $m_k = a_k \cdot 2^k$, waarbij m_k uit k cijfers bestaat en alleen enen en tweeën bevat. Dit gaat met volledige inductie. Voor $k = 1$ voldoet $m_1 = 2$ en $a_1 = 1$. Stel nu dat we $m_k = a_k \cdot 2^k$ hebben.

Als a_k oneven is, neem dan $a_{k+1} = \frac{1}{2}(5^k + a_k)$ en $m_{k+1} = 10^k + m_k$. Deze m_{k+1} is precies m_k met een 1 ervoor geplakt, en bevat dus $k + 1$ cijfers en alleen enen en tweeën, en voldoet aan $m_{k+1} = a_{k+1} \cdot 2^{k+1}$.

Als a_k even is, neem dan $a_{k+1} = 5^k + \frac{1}{2}a_k$ en $m_{k+1} = 2 \cdot 10^k + m_k$. Deze m_{k+1} is precies m_k met een 2 ervoor geplakt, en bevat dus $k + 1$ cijfers en alleen enen en tweeën, en ook dit voldoet aan $m_{k+1} = a_{k+1} \cdot 2^{k+1}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Jan Haenen** van het Porta Mosana College te Maastricht, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard en **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam.
De boekenbon gaat naar Alexander van Hoorn.

OPLOSSING

149

Bepaal alle polynomen $f(x)$ die voldoen aan $x \cdot f(x - 1) = (x - 10) \cdot f(x)$. (Een polynoom is een functie die is opgebouwd uit een eindig aantal niet-negatieve machten van x , zoals $3x^5 - 2x^2 + 6$ of $6x^{19} - 2x^6 - 2x$.)

OPLOSSING Vul achtereenvolgens $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ in, en we vinden: $0 = -10f(0)$ dus $f(0) = 0$, $0 = -9f(1)$ dus $f(1) = 0$, $0 = -8f(2)$ dus $f(2) = 0$, tot en met $0 = -1f(9)$ zodat $f(9) = 0$. Hiermee hebben we gevonden dat f de tien nulpunten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ heeft. We mogen daarom schrijven $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 8)(x - 9)g(x)$, waarbij ook $g(x)$ weer een polynoom is. De vergelijking geeft nu dat $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 8)(x - 9)g(x - 1) = (x - 10)x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 8)(x - 9)g(x)$, zodat $g(x - 1) = g(x)$ voor alle $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Omdat g een polynoom moest zijn, betekent dit dat $g = c$ voor een constante c . Dit geeft $f(x) = cx(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 8)(x - 9)$ als enige mogelijke oplossingen, en deze voldoen ook allemaal.

Deze opgave werd goed opgelost door **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard en **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam.
De boekenbon gaat naar Fabian Hulpia.

In het vorige nummer bleef **Ela Kowalczyk** uit Amsterdam door een technisch gebrek ten onrechte onvermeld bij de correcte inzenders van opgave 147.

KROM MAKEN WAT RE

■ door Arnout Jaspers

In een park in Leiden staat een prieel met een sterk geplooid dak (figuur 1). Toch is te zien dat het dak uitsluitend door rechte houten palen gevormd wordt. Het dak bestaat uit vier onderling verbonden, identieke, zogeheten regeloppervlakken.

De definitie van een regeloppervlak is dat door elk punt ten minste één rechte lijn ('regel') loopt die zelf ook helemaal in dat oppervlak ligt. Dat laat verrassend verknoopte structuren toe, zoals de Möbiusband (figuur 2) of de zadelvorm van de parabolische hyperboloïde (figuur 3).

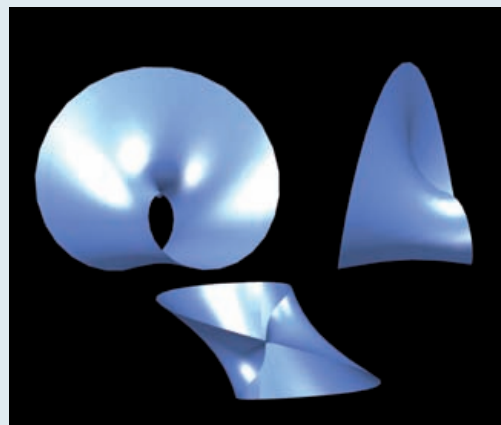
Een klassiek regeloppervlak is ook de Wig van Wallis (figuur 4). Die heeft een cirkel als grondvlak en een rechte lijn loodrecht boven de middellijn van de cirkel als bovenrand. De regels lopen van een punt op de bovenrand naar een punt op de cirkel. De *gimmick* van de Wig van Wallis is dat zijn bovenaanzicht een cirkel is, het zij-aanzicht dwars op de bovenrand een vierkant, en het zij-aanzicht in het verlengde van de bovenrand een driehoek.

Ingenieurs, architecten en meubelontwerpers werken graag met regeloppervlakken, juist omdat heel simpele bouwelementen als regels kunnen fungeren, terwijl toch een elegant gewelfd oppervlak ontstaat. Zelfs de natuur heeft er een voorkeur voor: de vorm van het DNA-molecuul – de dubbele helix – bestaat uit 'traptreden' die met hun middelpunten op elkaar liggen, maar telkens over een vaste hoek ten opzichte van elkaar verdraaid zijn.

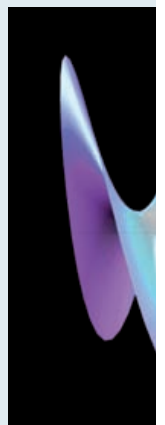
De grootste regeloppervlakken die je in de werkelijkheid tegenkomt, zijn de gewapend betonnen koeltorens van elektriciteitscentrales (figuur 5). Die hebben de vorm van een eenbladige hyperboloïde (figuur 6). Dit is zelfs een *dubbel* regeloppervlak. ■



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

Figuur 1 Een prieel in de Leidse Hout

Figuur 2 Möbiusband

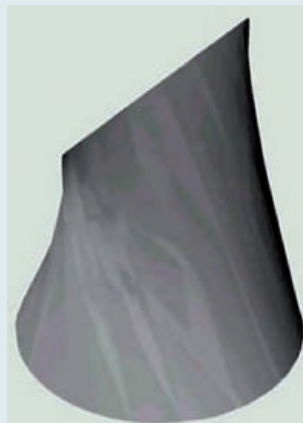
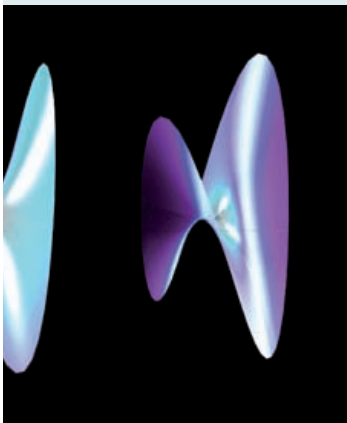
Figuur 3 Zadelvorm van de parabolische hyperboloïde

Figuur 4 De Wig van Wallis

Figuur 5 Een koeltoren

Figuur 6 Een eenbladige hyperboloïde

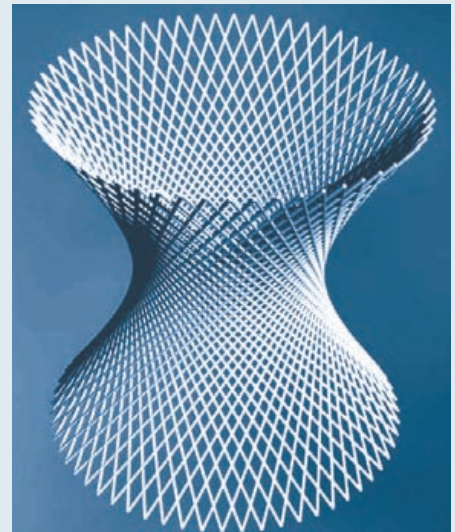
CHT IS



Figuur 4



Figuur 5



Figuur 6

REGELOPPERVLAGKEN Een regeloppervlak S voldoet altijd aan een parametervergelijking van de vorm

$$S(t, u) = \mathbf{p}(t) + u \cdot \mathbf{r}(t).$$

S is een oppervlak in de driedimensionale ruimte en dus heeft elk punt op S drie coördinaten x_S , y_S en z_S . P is een kromme (die mag ook recht zijn, natuurlijk) die in S loopt, u is een parameter (een getal dat binnen zekere grenzen mag variëren) en $\mathbf{r}$ is een kromme op een bol met straal 1 ($\mathbf{r}(t)$ geeft de richting aan van de rechte lijn voor een zekere waarde t).

Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}t) \cos(t) \\ \cos(\frac{1}{2}t) \sin(t) \\ \sin(\frac{1}{2}t) \end{pmatrix}$$

beschrijft een Möbiusband met een breedte die wordt bepaald door de uiterste waarden van u .

SLIM CODEREN EN HANDIG DUBBEL TELLEN

Vorige maand vond op veel scholen de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Er waren acht vijfkeuzevragen en vier open vragen, in totaal goed voor 36 punten. Op een van deze opgaven kijken we in dit artikel terug.

■ door Quintijn Puite



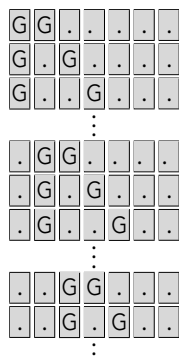
De honderd beste deelnemers (uit verschillende klassen) van de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade worden uitgenodigd om volgend schooljaar, op vrijdag 12 september, mee te doen aan de tweede ronde, die op de Technische Universiteit Eindhoven wordt georganiseerd. En als je daar hoog scoort, word je uitgenodigd om een jaar lang aan de training deel te nemen, die uiteindelijk kan leiden tot een plekje in het team voor de Internationale Wiskunde Olympiade in juli 2009 in Duitsland.

We kijken hier terug op een van de opgaven uit de eerste ronde van 25 januari jongstleden; de andere opgaven kun je vinden via de website www.wiskundeolympiade.nl. Opgave A7 luidde als volgt:

De 7 letterblokjes **GENEGEN** worden door elkaar gehutseld. Dan krijg je bijvoorbeeld **EEENNGG** of **GEENGEN**. Hoeveel verschillende 'woorden' van lengte 7 zijn er in totaal te vormen? (Als *woord* telt elke volgorde van de 7 letters.)

Je kunt hier verschillende oplossingen voor bedenken. Een manier die geen bovenbouwwiskunde, zoals binomiaalcoëfficiënten, gebruikt, is systematisch alle mogelijkheden nagaan.

Voor de twee G-blokjes zijn er $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ mogelijkheden om op de 7 plaatsen gelegd te worden, zie onderstaande figuur. Bij elke keuze zijn er voor de twee N-blokjes $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ mogelijkheden; dan liggen de drie E-blokjes vast. In totaal zijn er dus $21 \cdot 10 = 210$ mogelijkheden; klaar.



Toch wordt deze methode voor ingewikkeldere setjes letterblokjes al snel ondoenlijk. Daarom gaan we op zoek naar een methode die voor elk setje letterblokjes werkt. De vraag *Hoeveel woorden kun je maken van de letterblokjes AARDAPPELETERS* beantwoord je er net zo gemakkelijk mee. We zullen een formule afleiden die je ook bij de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade tegenkomt.

EEN SLIM GEKOZEN CODERING Een willekeurige volgorde van de 7 letterblokjes E, E, E, G, G, N, N noemen we een woord. Als op de 7 letterblokjes 7 verschillende letters hadden gestaan, hadden we het aantal woorden als volgt kunnen berekenen: als eerste letter van het woord zijn er 7 blokjes mogelijk; is de eerste letter eenmaal gekozen, dan kunnen we voor de tweede letter uit 6 blokjes kiezen, enzovoort. Dus zijn er dan $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ verschillende woorden te vormen. Maar wat nu als een letter op meerdere blokjes voorkomt, zoals in het geval van de opgave? Hiertoe voeren we een codering in.

Het woord GENEGEN kun je als volgt coderen: de E staat op de plekken 2, 4 en 6; de G op de plekken 1 en 5; en de N op de plekken 3 en 7. We koppelen aan GENEGEN daarom bijvoorbeeld de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7), zie onderstaande figuur. En zo hoort bij EEENNGG bijvoorbeeld de code (3, 2, 1; 6, 7; 5, 4) en bij GEENGEN bijvoorbeeld de code (6, 3, 2; 5, 1; 7, 4). Kortom, we beschrijven het woord door middel van een volgorde van de getallen 1 tot en met 7, die we opdelen in brokjes van lengte 3, 2 en 2, waarbij we afspreken dat die brokjes staan voor de plekken van achtereenvolgens de

E			G		N		1 2 3 4 5 6 7							
4	6	2	5	1	3	7	→	G	E	N	E	G	E	N
3	2	1	6	7	5	4	→	E	E	E	N	N	G	G
6	3	2	5	1	7	4	→	G	E	E	N	G	E	N

letters E, G en N. Zo'n volgorde heet ook wel een *permutatie* van de getallen 1 tot en met 7. Net als hierboven, zien we dat er in totaal $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ permutaties zijn van 7 getallen; als eerste element kun je uit 7 getallen kiezen, daarna uit 6, enzovoort.

Met elke mogelijke permutatie van de getallen 1 tot en met 7 is het nu duidelijk welk woord er wordt bedoeld. Zo zou je misschien verwachten dat je ook 5040 verschillende woorden krijgt. Maar nu moeten we goed opletten: de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7) leidt bijvoorbeeld tot het woord GENEEN, maar de code (2, 4, 6; 1, 5; 7, 3) net zo goed! We kunnen een woord blijkbaar op verschillende manieren coderen. Hoeveel permutaties leiden er nou tot het woord GENEEN? Als ik binnen de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7) de eerste drie getallen in een andere volgorde zet, verandert er niets aan mijn woord. Dat kan op $3!$ manieren. Ik had bovendien ook de 1 en de 5 in het tweede brokje kunnen omwisselen. En ook de 3 en de 7 in het derde brokje. In elk brokje kan ik dus de getallen permuteren, en dat kan in totaal op $3! \cdot 2! \cdot 2!$ manieren. Het is bovendien duidelijk dat we nu ook daadwerkelijk alle codes hebben gevonden die het woord GENEEN coderen, want daarvoor is het toch echt nodig dat ik de 2, 4 en 6 op een of andere manier in het eerste brokje stop, de 1 en de 5 in het tweede en de 3 en de 7 in het derde.

Conclusie: Het woord GENEEN wordt op precies $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$ manieren gecodeerd. Sterker nog, dit kunnen we op precies dezelfde manier voor elk woord afleiden! Als we dus alle $7! = 5040$ permutaties van de getallen 1 tot en met 7 opschrijven met daarachter het bijbehorende woord, staat elk woord precies $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$ maal in deze opsomming.

Omdat elk woord *even vaak* is geteld (namelijk 24 maal), kunnen we nu onze conclusie trekken: er zijn precies $\frac{5040}{24} = 210$ verschillende woorden te vormen met de letterblokje E, E, E, G, G, N, N.

Opgave 1. Hoeveel woorden zijn er met de letters A, A, R, D, A, P, P, E, L, E, T, E, R, S?

MULTINOMIAALCOËFFICIËNTEN Hoeveel is $(e + g + n)^7$? Oftewel, wat krijg je als je in $(e + g + n) \cdot (e + g + n) \cdot (e + g + n) \cdot (e + g + n) \cdot (e + g + n) \cdot (e + g + n) \cdot (e + g + n)$ alle haakjes uitwerkt? Dan moeten we in elke factor de e , g of n kiezen; dat levert dus in eerste instantie 3^7 termen op (vóór samennemen van gelijknamige termen). Je krijgt bijvoorbeeld een term $e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e = e^7$, maar ook een term $g \cdot e \cdot n \cdot e \cdot g \cdot e \cdot n$ en een term $g \cdot e \cdot e \cdot n \cdot g \cdot e \cdot n$. Merk op: die laatste twee termen lij-

ken wel verdacht veel op onze woorden GENEEN en GEENEN. We kunnen beide termen schrijven als $e^3 g^2 n^2$.

Hoeveel termen kunnen we in totaal op deze manier samen nemen opdat we ze kunnen schrijven als $e^3 g^2 n^2$? Oftewel, hoeveel termen zijn er in totaal ontstaan door driemaal een e , tweemaal een g en tweemaal een n te kiezen? Dat correspondeert dus precies met de vraag *Hoeveel woorden kun je maken van de letterblokje E, E, E, G, G, N, N?* Dus het aantal termen $e^3 g^2 n^2$ is na haakjes uitwerken en gelijknamige termen samennemen precies $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Hoe groot zou het aantal termen $e^2 g^4 n^1$ zijn? Inderdaad, $\frac{7!}{2! \cdot 4! \cdot 1!}$. En het aantal termen $e^7 g^0 n^0$? Dat is er maar 1, maar als we daar de formule toepassen krijg je $\frac{7!}{7! \cdot 0! \cdot 0!}$. Maar ook dat is 1 (gebruik dat $0! = 1$), dus ook hier klopt onze formule nog steeds. En hoe groot is het aantal termen $e^3 g^4 n^5$? Dat was een instinker; het antwoord is nul, want er worden maar 7 factoren vermenigvuldigd; die som van de exponenten moet wel 7 zijn! We concluderen dat

$$(e + g + n)^7 = \sum_{i+j+k=7} \frac{7!}{i! \cdot j! \cdot k!} e^i g^j n^k,$$

waarbij de sommatie loopt over de gehele niet-negatieve getallen i, j, k (met som 7, zoals aangegeven). Het is nu een kleine moeite om dit te generaliseren naar willekeurige machten van willekeurige sommen van variabelen:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}.$$

De uitleg hierbij kunnen we kort houden: de coëfficiënt van een term $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ in deze sommatie moet gelijk zijn aan het aantal woorden die bestaan uit k_1 letterblokje met opschrift ' x_1 ', k_2 letterblokje ' x_2 ', enzovoort. Net als hierboven zien we in dat er $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ van zulke woorden zijn.

Omdat $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ een *multinomial* wordt genoemd, heten de coëfficiënten in de formule *multinomialcoëfficiënten*. Ze worden ook wel genoteerd als

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$). Het bijzondere geval $m = 2$ staat bekend als het *binomium van Newton*:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k}.$$

Lees verder op pagina 20

NEGEN OVER TIEN: VOLMAAKTE TIJD?

In 1989 schreef Harry Mulisch de novelle *Het beeld en de klok*. De ik-persoon, het standbeeld van Laurens Janszoon Coster, is erg nieuwsgierig en luistert daarom vol overgave naar de verhalen van de wereldse meester.

In hoofdstuk 14 legt de meester uit waarom polshorloges in reclamefolders van juweliers altijd op tien over tien staan: 'als je lacht staat je mond op tien over tien, en je armen houd je zo als je zegeviert, kijk maar naar de wielrenner die als eerste over de finish gaat. Het is de houding van de triomf.' En even verder: 'Daarmee zijn wij in staat, de stand mathematisch te verankeren. Kijk nog eens

goed. De meeste horloges staan op tien over tien, maar hier staat er een op elf over tien, en deze op acht over, deze zelfs op zeven over tien. Als ik directeur van deze fabriek was, zou ik die fotograaf op staande voet ontslaan, want dat kan natuurlijk niet. Er moet één volmaakte stand zijn. Omdat de kleine wijzer de tien iets is gepasseerd, moet de grote wijzer dezelfde afstand tot de twee bewaren. Dan kom je op de volmaakte stand van negen over tien – zoals bij dit horloge hier. En nu beweer ik, (...) dat de wijzers in deze volmaakte stand een hoek van 108 graden



Vervolg van pagina 19



De coëfficiënten hiervan zijn nu niets anders dan de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$. Het leuke is dat we hierboven de formule voor het multinomium (en in het bijzonder die voor het binomium) hebben afgeleid door niets anders te doen dan heel zorgvuldig te tellen: een combinatorisch bewijs voor een stelling uit de algebra!

LOPEN IN EEN ROOSTER Tot slot geven we nog een aardige toepassing. Een kever loopt in een driedimensionaal rooster van de oorsprong (0, 0, 0) naar (3, 2, 2). Hij loopt hierbij via de roosterlijnen en neemt een zo kort mogelijke weg. Oftewel, bij elke stap verhoogt hij één van z'n coördinaten met 1. Hier staat een mogelijke route:

$$(0, 0, 0) \xrightarrow{G} (0, 1, 0) \xrightarrow{E} (1, 1, 0) \xrightarrow{N} (1, 1, 1) \xrightarrow{E} (2, 1, 1) \xrightarrow{G} (2, 2, 1) \xrightarrow{E} (3, 2, 1) \xrightarrow{N} (3, 2, 2)$$

Hoeveel routes kan de kever lopen?

Dit soort problemen blijken we nu in een klap ook gekraakt te hebben. Als we de assen van het rooster de E-as, de G-as respectievelijk de N-as noemen, kunnen we elke route van (0, 0, 0) naar (3, 2, 2) coderen door middel van een woord gemaakt van de letterblokjes E, E, E, G, G, N, N. Zo

hoort bij bovenstaande route het woord GENE-GEN.

Omgekeerd hoort bij elk woord bestaande uit 3 E's, 2 G's en 2 N'en juist weer één zo'n route van (0, 0, 0) naar (3, 2, 2). We concluderen dat het aantal routes voor de kever gelijk is aan

$$\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210,$$

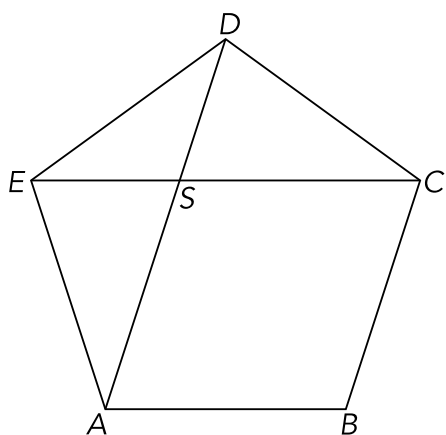
en voor ons is het nu geen probleem meer om dat te generaliseren naar hoger-dimensionale roosters. Ook hier blijkt slim coderen weer de sleutel tot de oplossing te zijn!

Opgave 2. Hoeveel kortste routes via roosterlijnen zijn er van (0, 0, 0, 0, 0) naar (3, 3, 3, 3, 3)?

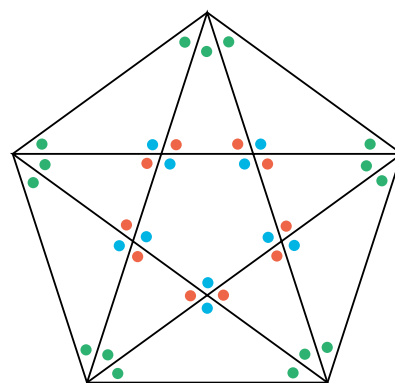
Antwoord van opgave 1: het zijn 14 letters, netjes gesorteerd A, A, A, D, E, E, E, L, P, P, R, R, S, T; er zijn dus $\frac{14!}{3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 605.404.800$ woorden te maken.

Antwoord van opgave 2:
 $\binom{15}{3, 3, 3, 3, 3} = \frac{15!}{(3!)^5} = 168.168.000$





Figuur 1 Punt S verdeelt AD (en ook EC) volgens de gulden snede: $|SD| : |AS| = |AS| : |AD|$



Figuur 2 De groene hoeken zijn 36° , de rode 72° en de blauwe 108°

vormen.' De ik-persoon vraagt zich af waarom nu juist 108 graden; de meester noemt dit Het Geheim van Pythagoras.

In hoofdstuk 15 onthult de meester dit Geheim. Hij vertelt over de 'inwendige structuur' van een pentagon (regelmatige vijfhoek). Als je twee diagonalen tekent die elkaar snijden (Mulisch noemt het 'kruisen'), dan vinden we in het pentagon verhoudingen die voldoen aan de gulden snede, de 'esthetisch volmaakte verhouding', zie figuur 1.

Een pentagon heeft vijf hoeken van 108 graden, en ook in driehoek *DES* in figuur 1 zit een hoek van 108 graden. Teken je alle vijf de diagonalen, dan zie je een stervormige figuur, pentagram geheten. 'Als je in het kleine pentagon in het hart van de ster een tweede pentagram tekent, komt in de hele figuur de Gulden Snede zesduizend keer voor,' vertelt de meester. 'Maar wat heeft dat allemaal met de stand van negen over tien op horloges te maken?' vraagt de ik-figuur, waarop de meester antwoordt: 'Dat de volmaaktheid van die wijzerstand is gegrondvest in de volmaaktheid van het pentagram. Er komen alleen hoeken in voor van 36, 72 en 108 graden. Dat bij de horloges voor de stompe hoek is gekozen, en wel met de benen omhoog, heeft psychologische redenen waar we het al over hadden.'

SCHIJN BEDRIEGT Wat is er nu waar van wat Mulisch schrijft? Tegen zijn bewering dat in een pentagram alleen hoeken van 36, 72 en 108 graden voorkomen, is niets in te brengen. Zie figuur 2, reken de hoeken maar na!

Maar hoe zit het met Mulisch' theorieën over de wijzers van een horloge? Stel dat het exact negen minuten over tien is. De hoek die de grote wijzer dan maakt met de verticale symmetrie-as is gelijk aan $\frac{9}{60} \cdot 360^\circ = 54^\circ$. De hoek



die de kleine wijzer maakt met de verticaal is $60^\circ - \frac{9}{60} \cdot 30^\circ = 55\frac{1}{2}^\circ$. De wijzers staan dus niet symmetrisch ten opzichte van de verticaal en de hoek die de wijzers maken is geen 108° , maar $54^\circ + 55\frac{1}{2}^\circ = 109\frac{1}{2}^\circ$.

Hoe laat is het en welke hoek maken de wijzers indien de wijzers symmetrisch staan ten opzichte van de verticaal? Stel, het is t minuten over tien. De grote wijzer maakt dan een hoek van $6t^\circ$ en de kleine wijzer maakt een hoek van $60^\circ - \frac{1}{2}t^\circ$. Vanwege de symmetrie moet gelden $6t = 60 - \frac{1}{2}t$, ofwel $t = 9\frac{3}{13}$, dus 9 minuten en ongeveer 13,8 seconden. De hoek tussen de wijzers is $110\frac{10}{13}^\circ$, meer dan twee graden te veel om 'volmaakt' genoemd te mogen worden!

Ten slotte: hoe zit het als de hoek tussen de wijzers precies 108° is? Stel, het is t minuten over tien; er moet dan gelden dat $6t + 60 - \frac{1}{2}t = 108$, waaruit volgt dat $t = 8\frac{8}{11}$, dus 8 minuten en ongeveer 43,6 seconden. Van symmetrie ten opzichte van de verticaal is geen sprake: de grote wijzer maakt een hoek van $52\frac{4}{11}^\circ$ en de kleine wijzer maakt een hoek van $55\frac{7}{11}^\circ$.

Mulisch sjoemelt terwijl hij de indruk wekt volkomen exact te zijn. Door de 'volmaakte' stand van het horloge te koppelen aan de hoeken van het 'volmaakte' pentagram, wordt van de wiskunde iets bovenmenselijks gevraagd: het gelijkpraten van dingen die niets maar dan ook niets met elkaar te maken hebben, behalve dat ze op het oog niet echt van elkaar te onderscheiden zijn. ■



De Hongaar Paul Erdős is een van de productiefste wiskundigen die hebben geleefd. Reizend met een halflege koffer en een plastic tas, zich op de been houdend met koffie en pepmiddelen, hield hij zich 19 uur per dag met slechts één ding bezig: wiskunde. Hij is vooral bekend vanwege véél resultaten, meer dan heel erg diepe resultaten. Hij werd geëerd met meer dan tien eredoctoraten en won in 1983 de prestigieuze Wolf Prize.

■ door Alex van den Brandhof

PAUL ERDŐS (1913 - 1996):

EEN NOMADISCHE WISKUNDIGE

22

Wat is het verbindende element tussen de vijf Nederlanders J.F. Koksma (1904-1964), J.H. van Lint (1932-2004), N.G. de Bruijn (1918), R. Tijdeman (1943) en J.W.M. Turk (1951)? Het antwoord: Paul Erdős. Erdős publiceerde met 485 collega-wiskundigen in totaal meer dan 1500 artikelen. Onder die 485 co-auteurs bevinden zich de vijf genoemde Nederlanders, die daardoor het 'Erdősgetal' 1 bezitten.

Het Erdősgetal is een begrip onder wiskundigen. Het werd geïntroduceerd door vrienden van Erdős, vanwege zijn enorme productiviteit. Erdős zelf heeft het Erdősgetal 0, zijn directe co-auteurs kregen Erdősgetal 1, de mensen die gepubliceerd hebben met een van deze co-auteurs bezitten Erdősgetal 2, wie publiceerde met iemand die publiceerde met iemand die publiceerde met Erdős staat op 3, enzovoorts. Een van de onopgeloste vragen in dit verband is het hoogste Erdősgetal dat er op dit ogenblik bestaat.

JEUGD Paul Erdős werd op 26 maart 1913 geboren in Boedapest, de hoofdstad van Hongarije in de

Habsburgse dubbelmonarchie. Hij was de zoon van twee wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs. Kort voor zijn geboorte stierven zijn twee zusjes, Klara van drie en Magda van vijf jaar. Het gevolg was een zeer beschermende moeder, zeker toen in 1914 de Eerste Wereldoorlog uitbrak: vader werd gevangen genomen in een Russisch offensief en naar Siberië gezonden.

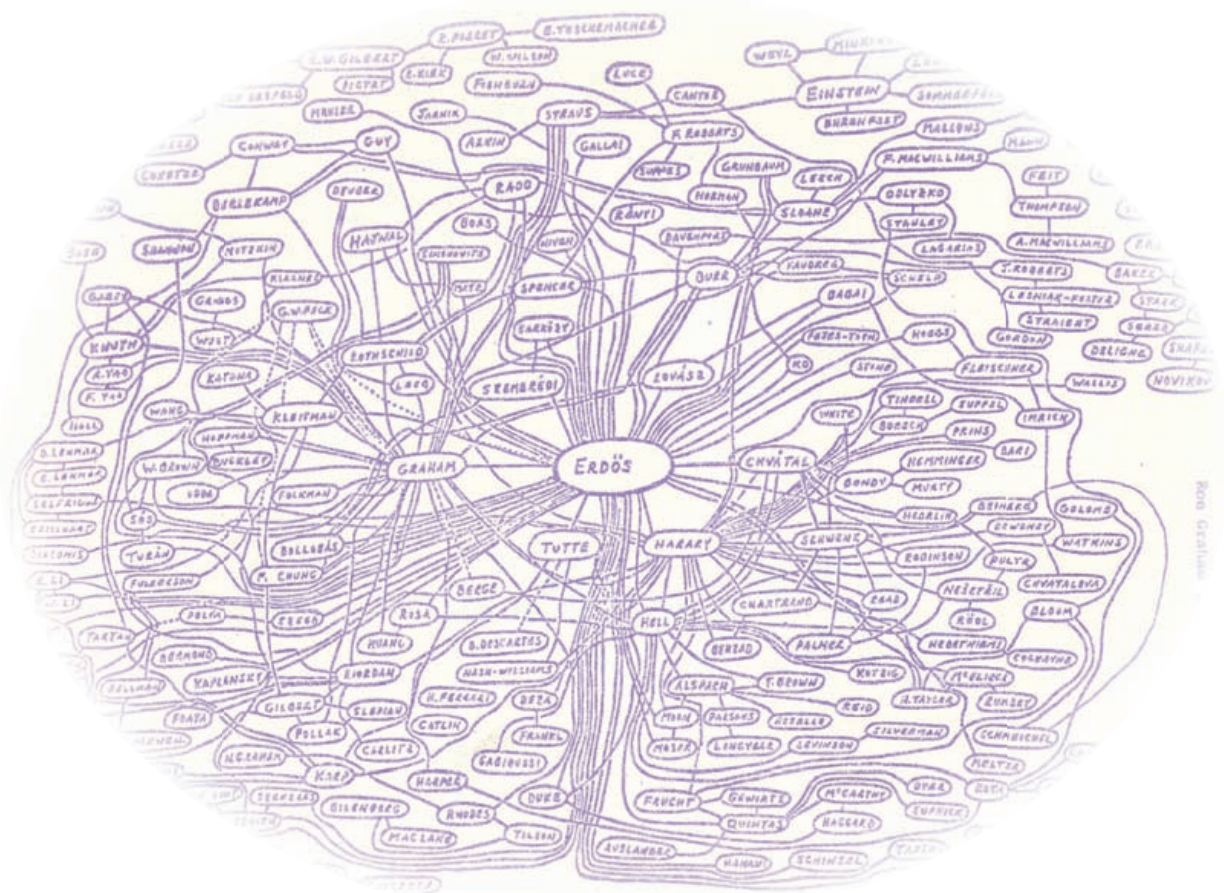
Als kleuter was Erdős al handig met getallen. Hij vermenigvuldigde uit het hoofd getallen van vier cijfers met elkaar, hij berekende hoe lang een trein erover zou doen om naar de zon te rijden en hij vroeg aan gasten hoe oud ze waren waarna hij dan uit zijn hoofd berekende hoeveel seconden ze geleefd hadden.

Na de oorlog, in 1918, heerste er chaos in Hongarije. De dubbelmonarchie viel uit elkaar, er waren een half miljoen Hongaren gesneuveld en het lot van driekwart miljoen krijgsgevangene-

Paul Erdős: 'Een wiskundige is een machine die koffie omzet in stellingen.'

FEBRUARI 2008





Deel van een graaf met Erdős als centrum. Een verbindingslijn tussen twee namen geeft een gezamenlijke publicatie aan. Het kleinste aantal lijnen dat iemand met Erdős verbindt, geeft het Erdősgetal van diegene aan.

nen, waaronder Pauls vader, was onbekend. Pas in 1920, toen vader Erdős na zes jaar vrijkwam, kwam een einde aan deze onzekerheid. In Siberië had vader zichzelf de Engelse taal geleerd, zonder de juiste uitspraak te weten. Hij bracht zijn kennis over op zijn zoon, wat hem later, als wiskundige die de hele wereld zou rondreizen, goed van pas zou komen. Het vreemde accent heeft Paul Erdős zijn hele leven lang gehouden.

Op zeventienjarige leeftijd baarde Erdős opzien door het omslachtige bewijs van Chebyshev van de stelling dat tussen een willekeurig getal en het dubbele van dat getal altijd een priemgetal zit, aanzienlijk te versimpelen. Hier openbaarde zich het elegante, elementaire redeneren dat zijn handelsmerk zou worden.

EPSILONS, HET BOEK EN DE SUPREME FASCIST In Hongarije bestond al tijdens de dubbelmonarchie een onmiskenbaar antisemitisme. Dit is na de Eerste Wereldoorlog versterkt, maar tijdens het bewind van Gömbös, die een overtuigd fascist was en die in 1932 premier werd, werd het een onderdeel van de officiële regeringspolitiek. Uit deze

tijd dateert Erdős' afkeer van het fascisme. Er kwam antisemitische wetgeving, waarin de vrijheid van de Joden werd beperkt. Zo werd bepaald dat ten hoogste zes procent van de studenten Joods mocht zijn. Erdős wilde om die reden Hongarije verlaten, maar omdat winnaars van nationale competities onvoorwaardelijk tot universiteiten werden toegelaten, besloot Erdős op zeventienjarige leeftijd toch een studie in Boedapest te beginnen. Vier jaar later promoveerde hij al tot doctor in de wiskunde.

Tijdens zijn studietijd trok Erdős regelmatig op met een groepje Joodse medestudenten. Samenwerkingen waren verboden en men was niet vrij om zijn mening te uiten. In deze periode ontwikkelde Erdős met zijn vrienden een taaltje dat hij tijdens zijn hele verdere leven zou gebruiken. Rusland was 'Joe' en de Verenigde Staten 'Sam'. Wijn werd 'vergif' genoemd, muziek 'lawaii', mannen 'slaven' en vrouwen 'bazen'.

In de wiskunde wordt een 'heel kleine waarde' vaak met ϵ , de Griekse letter epsilon, aangeduid; Erdős sprak over 'epsilons' wanneer hij kinderen bedoelde. Hiermee bedoelde hij echter niets denigrerends, hij was juist dol op kinderen. Voor kinde-

ren van collega-wiskundigen bracht Erdős dikwijls een cadeautje mee. De tweejarige dochter van een collega-wiskundige op wie Erdős eens in het park moest passen, werd door hem meegenomen naar de snoepwinkel, met als gevolg een bezorgde vader die bij terugkomst in het park merkte dat zijn dochter en Erdős verdwenen waren. En tijdens een diner met enkele wiskundigen stond Erdős eens plotse-ling op, liep naar een tafel waar net een gezin met een klein kind was gaan zitten en knoopte een gesprekje aan met het kind. De ouders waren zichtbaar verbaasd over deze actie, maar zagen al gauw dat er geen kwaad in Erdős school.

Erdős was ongelovig en noemde God de SF, 'Supreme Fascist'. 'Het Boek' was een denkbeeldig boek waarin God de beste en meest elegante bewijzen voor wiskundige stellingen had opgeschreven. Hij vond dat je als wiskundige niet in God moest geloven, maar in 'Het Boek'. De Duitse wiskundigen Martin Aigner en Günter Ziegler stelden in de jaren negentig aan Erdős voor om een 'benadering van Het Boek' te schrijven. Erdős reageerde enthousiast en verleende onmiddellijk zijn medewerking. De bedoeling was dat het boek in 1998,

op Erdős' 85ste verjaardag, zou worden gepresenteerd. Door Erdős' dood in 1996 heeft deze feestelijke gebeurtenis niet kunnen plaatsvinden. Toch verscheen in maart 1998 een eerste editie met de titel *Proofs from THE BOOK*, zonder dat Erdős een van de auteurs is. Inmiddels is er al een derde, uitgebreidere, editie van het boek.

ENGELAND EN AMERIKA In 1934 verliet Erdős Hongarije. Makkelijk was dat niet: zijn moeder had hem wel wiskunde geleerd, maar niets van de praktijk van het leven. Een boterham had hij nog nooit zelf gesmeerd. Toch weerhield dit Erdős er niet van zijn ouderlijk huis te verlaten. Het was het begin van zijn bestaan als de immer reizende wiskundige. Hij wilde naar Göttingen, Duitsland, dat in de jaren twintig het Mekka van de wiskunde was. Het opkomende fascisme weerhield Erdős er echter van deze reis te ondernemen.

In plaats daarvan ging hij naar Manchester om daar vier jaar als 'post-doc' te werken. Engeland was in deze tijd een centrum van getaltheorie en discrete wiskunde, de delen van de wiskunde die Erdős het meest na aan het hart lagen. Hij reisde

PRIEMGETALSTELLING

Over priemgetallen, getallen met precies twee delers, wordt al vele eeuwen nagedacht. Euclides (ongeveer 300 voor Christus) bewees al dat er oneindig veel van bestaan. Rond 1800 vermoedden Legendre en Gauss dat het aantal priemgetallen kleiner dan n ongeveer gelijk is aan $n / \ln n$. Preciezer geformuleerd: als we het aantal priemgetallen kleiner dan n noteren met $\pi(n)$, dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \cdot \ln n}{n} = 1.$$

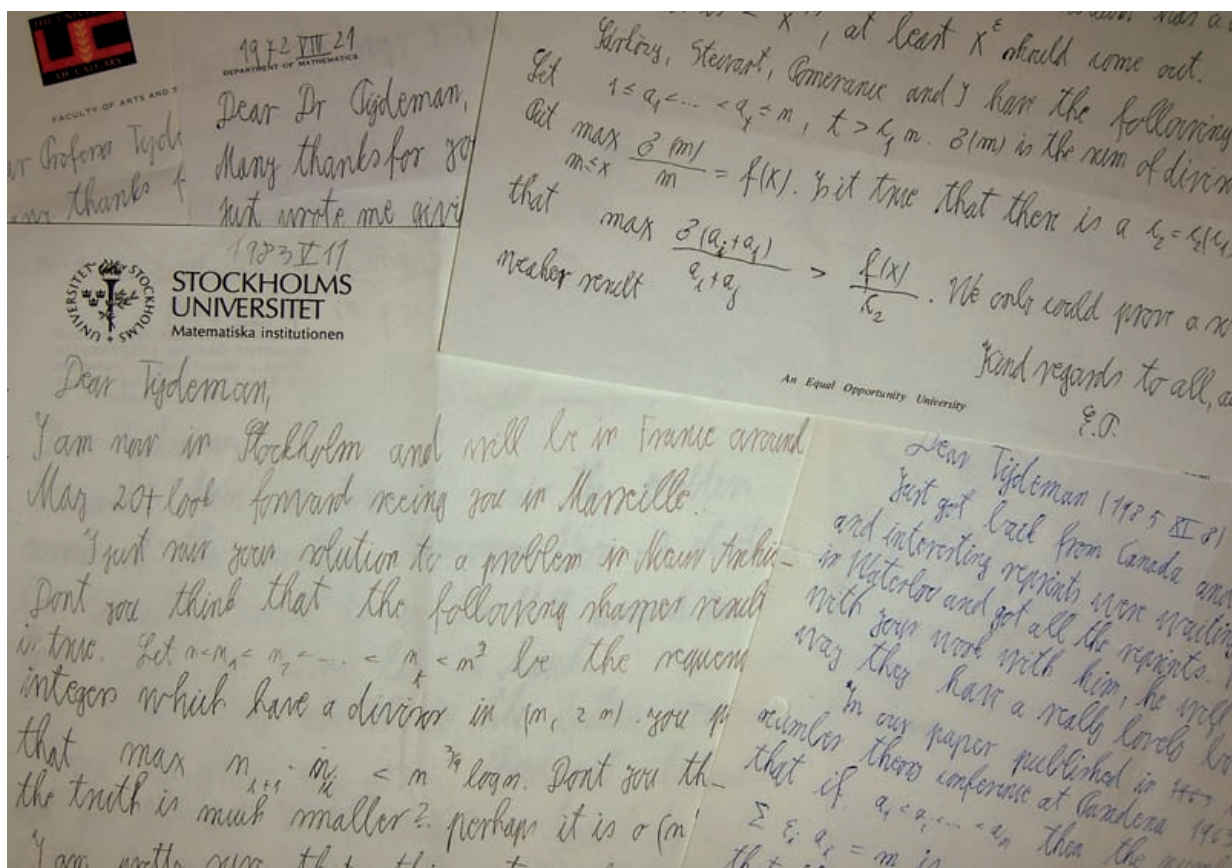
In 1896 werd dit door Hadamard en De la Vallée Poussin onafhankelijk van elkaar voor het eerst bewezen. Hun bewijs maakte gebruik van eigenschappen van de complexe zeta-functie: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Voor een wiskundige stelling bestaan soms verschillende bewijzen. Het mooiste, elegantste bewijs, door Erdős aangeduid als het 'Boekbewijs', was waar Erdős altijd naar op zoek was. Zo bleef, ondanks deze grote doorbraak in de wiskunde, voor Erdős de vraag of het vermoeden van Legendre en Gauss ook anders kon worden bewezen. In 1947 vertelde de toen dertigjarige Noor Atle Selberg, die afgelopen zomer overleed, aan Erdős een nieuwe aanpak om de priemgetalstel-

ling te bewijzen. Al na één dag wist Erdős een elementair bewijs te geven. Even later lukte dit Selberg zelf ook en toen deze hoorde dat Erdős verder was gegaan met het bewijsidee dat hij hem had geschetst, werd Selberg zo boos dat hij lange tijd niet met Erdős sprak. Erdős was hier behoorlijk van overstuur; het was helemaal niet zijn bedoeling om Selberg dwars te zitten.

Overigens moet het woord 'elementair' niet verkeerd worden geïnterpreteerd: een 'elementair bewijs' maakt geen gebruik van complexe analyse, het betekent niet dat het kort of eenvoudig is! Erdős' bewijs is erg ondoorzichtig; het woord 'elegant' is dan ook niet echt van toepassing op dit bewijs. In eerste instantie was er de hoop dat Erdős' bewijs zou leiden tot nieuwe inzichten, bijvoorbeeld in de Riemannhypothese, een tot op de dag van vandaag open staand probleem in de wiskunde. Dat is echter nooit gebeurd.

De vorig jaar overleden Amerikaan Donald Newman gaf in 1980 weer een ander bewijs van de priemgetalstelling. Dat bewijs is veel korter en eleganter dan de tot dan toe bekende bewijzen, maar maakt wél gebruik van complexe analyse.



Enkele brieven van Erdős aan de Nederlandse wiskundige Rob Tijdeman. Het stramien van een brief was steeds hetzelfde: Erdős schrijft waar hij de komende weken bereikbaar zal zijn en begint dan met wiskundeproblemen.

veel in Engeland rond en ontmoette vakgenoten als de beroemde Hardy en Littlewood. Drie keer per jaar ging Erdős terug naar Hongarije, met Pasen, in de zomer en met kerst. Dan zocht hij zijn ouders en vrienden op.

Vanaf 1938 zocht Hongarije toenadering tot Nazi-Duitsland. Het was voor Erdős te gevaarlijk om dat voorjaar naar zijn geboorteland terug te keren. In de zomer waagde hij het er op, maar toen in de herfst bij het Verdrag van München het Sudetenland aan Duitsland werd afgestaan, besloot Erdős uit te wijken naar de Verenigde Staten. Hij kreeg een slecht betaalde betrekking aan het beroemde Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey. Hier werkten grootheden zoals Einstein, Gödel en Von Neumann. In Princeton vond men Erdős echter zonderling en onaangepast. Zijn betrekking werd met slechts zes maanden verlengd.

Erdős bleef gedurende de Tweede Wereldoorlog in de Verenigde Staten, zonder te weten hoe het zijn familie en vrienden in Hongarije verging. Op 19 maart 1944 vielen de Nazi's Hongarije binnen. In drie maanden tijd werden bijna een half miljoen Joden naar Auschwitz afgevoerd. De 160 duizend Joden die in Boedapest achterbleven, hadden de daar-

opvolgende winter te lijden onder terreur, honger, kou en ziekte. Op 14 februari 1945 werd Boedapest door de Sovjettroepen bevrijd. In augustus van dat jaar kreeg Erdős voor het eerst in vier jaar bericht over zijn ouders. Zijn vader was al in 1942 aan een hartaanval overleden, maar wonderbaarlijk genoeg had zijn moeder de oorlog overleefd. De meeste andere familieleden waren omgekomen. Pas in 1948 keerde Erdős terug naar het inmiddels communistische Hongarije.

Tussen 1949 en 1953 reisde Erdős heen en weer tussen Engeland en Amerika om ten slotte een flexibele aanstelling te krijgen aan de universiteit van Notre Dame in de Amerikaanse stad South Bend. In deze tijd gaf hij een elementair bewijs van de priemgetalstelling, zie het kader op pagina 24. In South Bend moest hij één college geven; hij kreeg een assistent die het college zonodig kon overnemen. Erdős vond het niet erg op een katholieke universiteit te doceren. Hij vond alleen dat er te veel plustekens waren.

NOMADENBESTAAN In 1953 beëindigde Erdős zijn dienstverband met de universiteit van Notre Dame. Sindsdien reisde hij met een halflege koffer

en een plastic tas, zonder vaste verblijfplaats. Een vaste baan zou hem alleen maar beperkingen opleggen. Erdős verklaarde zichzelf 'wereldburger'. Hij reisde van het ene land naar het andere, rondkomend van hetgeen lezingen en gastdocentschappen aan universiteiten hem opleverden. Cheques of creditcards bezat hij niet. Overnachten deed hij bij collega's. Soms stond hij onaangekondigd met zijn koffer en plastic tas bij een collega op de stoep. 'My brain is open,' zei hij dan, waarmee hij bedoelde dat hij graag een paar dagen bleef logeren om samen te werken.

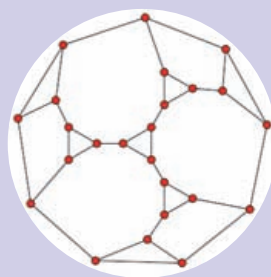
Werken met Erdős was leuk en eervol, maar vermoeiend. Toen J.F. Koksmá Erdős eens te gast had en ze 's avonds laat nog met wiskunde bezig waren, bleef Koksmá uit beleefdheid op, hij was immers gastheer. Erdős, die nog lang niet aan slapen moest denken, zei tegen de vermoeide Koksmá: 'Why don't you go to bed? I will help myself to find some food in the kitchen.' Bij vertrek liet hij de logeerkamer onopgeruimd achter. N.G. de Bruijn trof eens

zijn vuile, kapotte sokken aan, die hij had wegge-moffeld onder een matje in De Bruijns huis bij wie Erdős diverse keren verbleef.

Erdős onderhield zijn contacten en had een fenomenaal geheugen. Hij wist precies met wie en wanneer hij over welk onderwerp had gesproken. Hij moet duizenden brieven hebben geschreven; alleen De Bruijn al ontving er 175. De telefoonrekening van zijn gastheren kon flink oplopen, want Erdős belde veel, zonder zich af te vragen hoe laat het aan de andere kant van de lijn was. Een typische conversatie verliep als volgt: 'Hallo, Erdős hier, laat p een priemgetal zijn...' Jan Turk moest in Amerika eens onverwachts in een ziekenhuis worden opgenomen. Turk was verbaasd Erdős daar aan de lijn te krijgen. Hij kwam zeer snel to the point: 'Will you die?' Dit gedrag was karakteristiek voor Erdős. Turk vond het prettig met Erdős te spreken; hij was heel menselijk en hield zeker niet 'alleen maar van getallen'. De sociale kant van Erdős bleek ook uit het feit dat hij van het geld dat hij als spreker

VERMOEDENS VAN ERDŐS Erdős' favoriete terreinen uit de wiskunde waren getaltheorie, combinatoriek en grafentheorie. Behalve problemen oplossen, bedacht hij ook problemen waar hij zelf (nog) geen oplossing voor had. Met het geld dat hij met zijn lezingen en gastcolleges verdiende, loofde hij prijzen uit voor de persoon die een bepaald probleem zou oplossen. Sommige prijzen waren symbolische geldbedragen, maar voor ingewikkelde problemen kon het prijzengeld aardig oplopen. De hoogste prijs die Erdős betaald heeft, was aan Szemerédi, 3000 dollar. Van de nog openstaande problemen heeft Ronald Graham, een vooraanstaand wiskundige op de befaamde Bell Labs en na de dood van Erdős' moeder zijn toeverlaat, er een aantal geadopteerd en zich garant gesteld voor eventuele uitbetaling. Ben Green won vorig jaar de SASTRA Ramanujanprijs, onder andere omdat hij in 2003 het vermoeden van Cameron-Erdős bewees. Drie nog onopgeloste problemen van Erdős vermelden we hieronder.

Het nog onbewezen **Erdős-Gyárfás vermoeden** stamt uit 1995. Het zegt dat een graaf met minimale graad 3 altijd een simpele cykel (een rondwandeling waarbij geen punt, behalve begin- en eindpunt, meer dan één keer wordt bezocht) bevat waarvan de lengte een macht van 2 is. Voor degene die dit bewijst, ligt 100 dollar klaar. Wie een tegenvoorbeeld vindt, ontvangt 50 dollar.



Deze graaf heeft geen simpele cykel van lengte 4 of 8, maar wel van lengte 16.

Het **Erdős-Straus vermoeden** zegt dat voor elk geheel getal $n > 1$ het getal $\frac{4}{n}$ kan worden geschreven als som van drie stambreuken, dat wil zeggen:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

met x , y en z geheel. Voor alle waarden van n tot aan 10^{18} is dit vermoeden geverifieerd, maar een algemeen bewijs ontbreekt nog.

Erdős' **vermoeden over rekenkundige rijen**, waar een prijs van 3000 dollar op staat, luidt: Als A een verzameling gehele getallen is waarvoor geldt dat

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty,$$

dan bevat A rekenkundige rijen van willekeurige lengte.

en gastdocent verdiende, delen afstond aan onder meer weeshuizen.

UNIEK PASPOORT In 1954 bezocht Erdős Amsterdam, waar dat jaar het Internationaal Congres van Wiskundigen werd georganiseerd. Hij kwam toen weer bij De Bruijn, die zich herinnert dat Erdős nogal overstuur was: de FBI had hem gemeld dat hij geen *re-entry permit* zou krijgen wanneer hij Hongarije zou bezoeken. In die tijd heerste in Amerika namelijk een panische angst voor echte of vermeende communisten.

Erdős kwam na zijn Amsterdamse bezoek terecht in Israël, waar hij een aanstelling had van drie maanden aan de Hebrew University in Jeruzalem. Hij kreeg een verblijfsvergunning voor Israël, maar weigerde het staatsburgerschap. In 1955, twee jaar na Stalins dood, bezocht Erdős Hongarije weer. Dankzij invloedrijke vrienden, die betoogden dat Erdős een uniek kleinood in de wereld van de wiskunde was, en inspanningen van zijn moeder, verkreeg Erdős een paspoort dat vermeldde dat hij Hongaars staatsburger was én een Israëlische verblijfsvergunning had. Erdős was daardoor zo'n beetje de enige Hongaar die dit land achter het IJzeren Gordijn in en uit mocht gaan wanneer hij maar wilde.

Op 23 oktober 1956 brak een massale volksopstand uit tegen het stalinistische bewind, het begin van de Hongaarse Opstand. Dertien dagen later viel de Sovjet-Unie Hongarije binnen, omsingelde Boedapest en sloeg de opstand neer. János Kádár kwam aan de macht. Zelfs hij ging akkoord met het bijzondere paspoort van Erdős.

In 1961 en 1962 werden verzoeken om de Verenigde Staten te bezoeken door de Amerikaanse autoriteiten geweigerd. In de zomer van 1963 verzamelden Amerikaanse collega's de handtekeningen van een paar honderd wiskundigen voor een petitie aan de Amerikaanse regering om Erdős toe te laten. In november 1963 werd de gevraagde toestemming uiteindelijk verleend. De ergste communisten-paranoia was toen ook in Amerika weer voorbij.

SEKS EN DRUGS Vanaf 1964 reisde Erdős' moeder, 84 jaar oud, met hem mee, behalve naar India uit vrees voor ziekten. Zijn moeder had een hekel aan reizen, ze sprak geen woord Engels, maar ze wilde bij hem zijn. Wanneer Erdős zich met wiskunde bezighield, zat ze tevreden te wachten. Zo waren zij een bijzonder stel: dol op elkaar en heel zorgzaam voor elkaar. In 1971 overleed zij in Calgary, Canada, terwijl Erdős een voordracht gaf. Dit was een groot verlies voor Erdős en snel begon zijn gebruik van pillen, eerst antidepressiva en later



Paul Erdős met zijn moeder.

speed, uit de hand te lopen. Na een weddenschap met vrienden om 500 dollar bleef hij een maand clean. Hij nam echter daarna zijn oude gewoonte weer op, protesterend dat de wiskunde een maand vertraging opgelopen had.

Erdős heeft in zijn leven niet veel blijk gegeven van seksuele interesse. Hij heeft wel eens een vriendin gehad – een in Amerika werkzame Nederlandse – die hem vergezelde bij een reis naar Amsterdam. Samen bezochten zij De Bruijn en het grappige was dat De Bruijn haar al kende uit zijn studietijd in Leiden. Tussen Erdős en haar is het nooit echt wat geworden. Zelf zei Erdős eens: 'Ik ben abnormaal in de zin dat seksueel genot mij tegenstaat. Een eigenaardige en bijna unieke afwijking.'

Erdős bleef wiskundig actief, ondanks ouderdomsgebreken. Hij moest enkele keren in een ziekenhuis worden opgenomen. Dan veranderde hij de ziekenhuiskamer in een werkkamer. Erdős zat in zijn bed, temidden van stapels papieren en tijdschriften. Ook daar kon hij het niet laten collega's uit te nodigen. Dan sprak hij Hongaars met een groepje links, Duits met groepje rechts en Engels met een groepje aan het voeteneind. Wanneer de arts kwam, moest die een paar uur later terugkomen, de wiskunde ging voor. Tijdens een conferentie in Warschau op 20 september 1996 overleed Erdős, 83 jaar oud, aan een hartaanval. Sindsdien is voor wiskundigen 2 het laagst haalbare Erdősgetal.

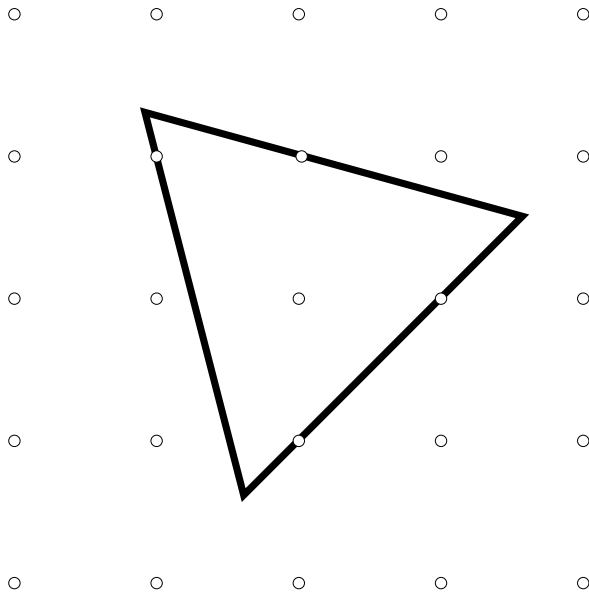
BRONNEN Dit artikel kwam tot stand dankzij bijdragen van prof. dr. N.G. de Bruijn, prof. dr. R. Tijdeman en dr. J.W.M. Turk. Verder zijn de volgende bronnen gebruikt:

G. Csicsery, *N is a number*, Zala Films 1993;
D. van Delft, 'Een wiskundige nomade; Paul Erdős (1913-1996)', *NRC Handelsblad*, 4 december 1998;
P. Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*, Hyperion (New York) 1998. ■

PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

GEVANGEN DRIEHOEK Een gelijkzijdige driehoek in het vlak zit 'gevangen' in het rooster van punten met gehele coördinaten, zie de figuur. Wat is de lengte van de zijden van de driehoek?



28

COMPETITIE Vijf teams spelen onderling een voetbalcompetitie. Elke twee teams spelen precies eenmaal tegen elkaar. Voor iedere gespeelde wedstrijd krijgt een team 3 punten als het wint, 1 punt als het gelijk speelt en 0 punten als het verliest. Nadat alle wedstrijden zijn gespeeld, zijn de totale scores van de vijf teams 2, 4, 5, 6 en 7 punten. Kun je de uitkomst van elk van de tien gespeelde wedstrijden achterhalen?

DEUREN Bij een spelshow zit een prijs verstopt achter één van acht deuren. Om achter de juiste deur te komen mag jij, de kandidaat, vragen stellen die de quizmaster met 'ja' of 'nee' beantwoordt. Maar, de quizmaster mag eenmaal liegen! Kun je met zeven vragen achter de juiste deur komen? En met zes vragen? Met vijf?

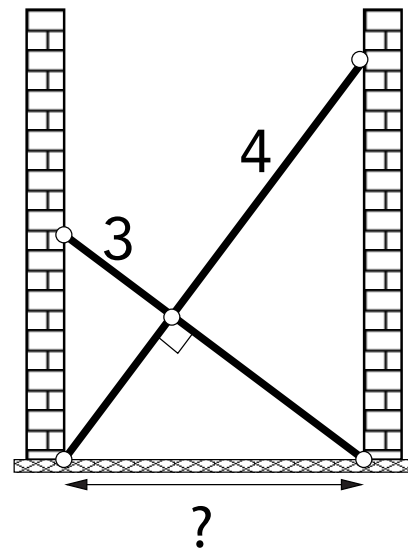
OPEENVOLGENDE KWADRATEN

Zoals je weet, geldt $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ook geldt $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Kun je zeven opeenvolgende gehele getallen vinden, zó dat de som van de kwadraten van de eerste vier getallen gelijk is aan de som van de kwadraten van de laatste drie getallen? Hoe zit het met negen opeenvolgende gehele getallen?

LADDERS In een smal steegje staan twee ladders op de grond, een van 3 meter en een van 4 meter lang. Met hun uiteinden rusten ze tegen de muren aan weerszijden van de steeg. De ladders maken ten opzichte van elkaar een hoek van 90 graden. Wat is de breedte van de steeg?



OPLOSSINGEN

NEGEN GEWICHTEN Als alle gewichten verschillend zijn, zijn er drie oplossingen:

12, 11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 1;
12, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2;
12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1.

Met minder dan negen gewichtjes kan het niet.

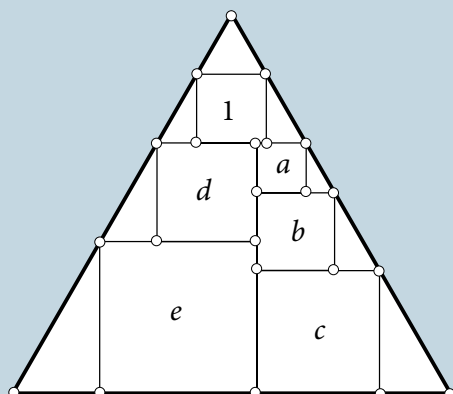
MAGISCH LETTERVIERKANT Plaats acht letters 'A' in het vierkant, zó dat elke rij, kolom en diagonaal er precies twee bevat. Door vier van dergelijke figuren te combineren, kun je vrij eenvoudig een oplossing vinden:

A			A	B		B		C		C		D	D		
	A	A			B		B	C		C				D	D
A			A		B		B		C		C	D	D		
	A	A		B		B			C		C			D	D

Wanneer je nu de letters A, B, C, D door 1, 2, 4, 8 vervangt en per hokje bij elkaar optelt, krijg je een 'panmagisch vierkant'!

15	8	6	1
4	3	13	10
9	14	0	7
2	5	11	12

VIERKANTEN STAPELEN Noem de lengtes van de zijden a , b , c , d , e .



Er gelden de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} b &= a(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ c &= b(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = a(\frac{7}{4} + \sqrt{3}) \\ e &= d(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ a + d &= 1 + \sqrt{3} \\ a + b + c &= d + e \end{aligned}$$

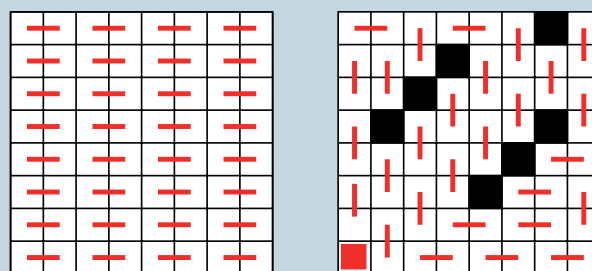
Dit geeft $a(15 + 6\sqrt{3}) = d(8 + 2\sqrt{3})$ en $a + d = 1 + \sqrt{3}$.

Oplossen geeft

$$a = \frac{14 + 10\sqrt{3}}{23 + 8\sqrt{3}} = \frac{82 + 118\sqrt{3}}{337}.$$

De andere zijden zijn nu eenvoudig te vinden.

SLANGENSPEL Deel de 64 hokjes van het eerste speelbord op in 32 tweetallen, zoals in de linker figuur. Speler 2 kan winnen door telkens als speler 1 een hokje heeft gekozen, het andere hokje van het tweetal te kiezen, totdat speler 1 geen zet meer kan doen.



Op het tweede bord kan speler 1 winnen. Deel alle witte hokjes, behalve het hokje linksonder, op in tweetallen, zoals in de rechter figuur. Speler 1 kleurt eerst het hokje linksonder. Daarna kiest hij na elke zet van speler 2 het andere hokje van het tweetal, tot speler 2 geen zet meer kan doen.

Kies een positief geheel getal m . Bepaal alle delers van dat getal (inclusief 1 maar zónder het getal zelf), tel ze op en noem het resultaat $s(m)$. Als $s(m) = m$, hebben we een volmaakt getal. Maar er zijn ook getalparen n en m die samen pas volmaakt zijn, namelijk als $s(n) = m$ en $s(m) = n$. Zulke getallen heten bevriend. Net zoals op Hyves de vrienden van je vrienden weer vrienden zijn, kun je ook naar langere ketens zoeken, zoals $s(n) = m$, $s(m) = p$ en $s(p) = n$. In twee afleveringen bekijken we interessante eigenschappen van zulke 'hyvende' getallen.

■ door Herman te Riele

HYVENDE GETALLEN

DEEL 1

30

De som van alle delers van een getal m inclusief m zelf, noteren we met $\sigma(m)$; er geldt dus $\sigma(m) = s(m) + m$. Natuurlijk kun je ook weer de σ bepalen van $\sigma(m)$, enzovoort. Een voorbeeld:

$$\begin{aligned}\sigma(6) &= \sigma(2 \cdot 3) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12, \\ \sigma(12) &= \sigma(2^2 \cdot 3) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28, \\ \sigma(28) &= \sigma(2^2 \cdot 7) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56\end{aligned}$$

Hierbij zien we dat het, om $\sigma(m)$ uit te rekenen, handig is als we de ontbinding in priemfactoren van m kennen, want dan kunnen we de delers van m gemakkelijk opsporen. Daarbij is het nog handiger om te weten dat σ een zogeheten *multiplicatieve functie* is, dat wil zeggen dat $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ voor alle paren a, b die relatief priem zijn ten opzichte van elkaar (de getallen a en b heten relatief priem indien a en b geen gemeenschappelijke delers hebben; dus bijvoorbeeld 4 en 9 zijn relatief priem, hoewel ze individueel geen van beide priem zijn).

Je kunt zelf bewijzen dat σ multiplicatief is (begin simpel, door eerst aan te nemen dat a en b alle-

bei uit maar twee priemfactoren bestaan).

De relatie $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ geldt dus met name als a en b machten van verschillende priemgetallen zijn. Bovendien geldt, als p een priemgetal is en e een natuurlijk getal, dat

$$\sigma(p^e) = p^e + p^{e-1} + \dots + p + 1 = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}.$$

Hieruit volgt, als we de ontbinding in priemfactoren van m kennen en als deze gegeven wordt door $m = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$, dat

$$\sigma(m) = \sigma\left(\prod_{i=1}^r p_i^{e_i}\right) = \prod_{i=1}^r \sigma(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Controle van bovenstaande voorbeelden:

$$\sigma(6) = \sigma(2 \cdot 3) = 3 \cdot 4 = 12, \quad \sigma(12) = \sigma(2^2 \cdot 3) = 7 \cdot 4 = 28, \quad \sigma(28) = \sigma(2^2 \cdot 7) = 7 \cdot 8 = 56.$$

Omdat voor $n \geq 2$ geldt dat $\sigma(n) \geq n + 1 > n$, weten we dat de rijen die we krijgen door de σ -functie herhaald toe te passen *monotoon stijgen*.

De som van de delers van een getal m waarbij m zelf niet wordt meegerekend, $s(m)$ dus, vertoont

veel interessanter gedrag, dat heel verschillend kan zijn voor verschillende getallen. Zo is $s(12) = 16$, $s(16) = 15$, $s(15) = 9$, $s(9) = 4$, $s(4) = 3$ en $s(3) = 1$. Een ander voorbeeld: $s(6) = 1 + 2 + 3 = 6$, dus hier geeft het herhalen van de s -bewerking een, je zou kunnen zeggen, cyclus van lengte 1. Getallen met deze eigenschap heten *volmaakte getallen*.

Over volmaakte getallen is door wiskundigen al heel veel geschreven, maar ze zijn erg zeldzaam: er zijn er momenteel maar 44 bekend. Maar net als bij mensen geldt ook voor getallen, dat wie niet volmaakt is, best nog vrienden kan hebben.

BEVRIENDE GETALLEN Zijn er ook cycli van lengte groter dan 1? Dat kost even wat zoekwerk, maar als we starten met 220, dan vinden we

$$\begin{aligned} s(220) &= \sigma(220) - 220 = \sigma(2^2 \cdot 5 \cdot 11) - 220 = \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 12 - 220 = 284, \\ s(284) &= \sigma(2^2 \cdot 71) - 284 = 7 \cdot 72 - 284 = 220. \end{aligned}$$

Hier hebben we dus een cyclus van lengte 2. Dit soort paren van getallen staat bekend als *bevriende getallen*, omdat ze via de s -functie met elkaar verbonden zijn: het zijn dus *getallenparen* (a, b) met $a < b$ waarvoor geldt dat $s(a) = b$ en $s(b) = a$. Men noemt ze ook wel s -cycli van lengte 2. Het paar

(220, 284) was al bekend in de tijd van de Pythagoreërs (ongeveer 500 voor Christus) en het is het kleinste in z'n soort. De Pythagoreërs beschouwden 220 en 284 als symbolen van vriendschap.

In 1636 schreef Fermat in een brief aan Mersenne dat hij de bevriende getallen (17296, 18416) had ontdekt en twee jaar later kondigde Descartes, ook in een brief aan Mersenne, de bevriende getallen (9363584, 9437056) aan. In een tijd zonder zakrekenmachines was dat nog een hele prestatie, maar zelf kun je nu redelijk snel controleren dat de getallenparen van Fermat en Descartes inderdaad bevriend zijn.

Om langere s -cycli te vinden, is zelfs voor getallen onder de honderd eigenlijk al een computer nodig. Zo'n zoekprogrammaatje hoeft maar een paar regels code te hebben, dus je zou je krachten daar eens op kunnen beproeven. Wiskundigen hebben zich traditioneel vooral op s -cyclus 2 gericht.

DE REGELS VAN THĀBIT IBN QURRA EN VAN EULER Een goede aanleiding voor dit artikelje over bevriende getallen is het feit dat het in 2007 driehonderd jaar geleden was dat Euler werd geboren. Totdat Euler zich met bevriende getallen ging bemoeien, waren alleen de genoemde drieparen bekend, maar in 1750 publiceerde Euler een lang artikel met een lijst van maar liefst 59 nieuwe



paren van bevriende getallen!

Als we de ontbinding in priemfactoren van de drie genoemde paren van bevriende getallen bekijken:

$$(2^2 5 \cdot 11, 2^2 71), \\ (2^4 23 \cdot 47, 2^4 1151), \\ (2^7 191 \cdot 383, 2^7 73727),$$

dan valt op dat ze alle van de vorm $(2^k p \cdot q, 2^k r)$ zijn, met p, q en r priem, $q = 2p + 1$ en $r = (p + 1)(q + 1) - 1$. In feite zijn dit speciale gevallen van een formule voor het vinden van bevriende getallenparen. Deze gaat terug tot de negende eeuw van onze jaartelling en staat bekend als de **regel van Thābit ibn Qurra**: de twee getallen $2^k p q$ en $2^k r$ vormen een bevriend getallenpaar als

$$p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^k - 1$$

en

$$r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$$

32

alle priem zijn voor een of andere $k > 1$.

De gegeven voorbeelden leren ons dat deze regel inderdaad bevriende getallenparen geeft voor $k = 2, 4, 7$, maar helaas konden tot nu toe geen andere bevriende getallenparen van deze vorm gevonden worden, ondanks dat men deze regel voor alle $k \leq 191.600$ heeft getest!

In zijn beroemde artikel uit 1750 heeft Euler de regel van Thābit ibn Qurra gegeneraliseerd tot wat nu bekend staat als de **regel van Euler**: de twee getallen $2^k p q$ en $2^k r$ vormen een bevriend getallenpaar als

$$p = 2^{k-l} f - 1, \quad q = 2^k f - 1$$

en

$$r = 2^{2k-l} f^2 - 1$$

alle priem zijn voor $f = 2^l + 1$ en $k > l \geq 1$.

Je kunt bovenstaand recept controleren door f in de formules voor p, q en r in te vullen en p, q en r weer in de uitdrukking voor het bevriende getallenpaar. Vervolgens maak je zorgvuldig een lijst met alle mogelijke delers en neem je daarvan de som. Als je in die uitgebreide boekhouding geen fout maakt, rolt de regel van Euler eruit. Hoe Euler daar ooit op gekomen is, is heel wat moeilijker uit te leggen.

Voor $l = 1$ geeft dit de regel van Thābit ibn Qurra. Voor $l > 1$ zijn nog slechts twee oplossingen bekend, namelijk voor $l = 7, k = 8$, en voor $l = 11, k = 40$, zie onderstaande figuur. Je ziet dat de getallen heel groot kunnen worden: het aantal decimalen van de twee getallen in het laatste paar is veertig! Na Euler zijn er nog vele andere regels gevonden voor het vinden van bevriende getallenparen. Walter Borho, een Duitser die in de jaren zeventig van de vorige eeuw een aantal mooie artikelen over bevriende getallenparen heeft gepubliceerd, was hier erg goed in, en hij heeft zelfs, als enige tot nu toe, regels voor s -cycli van lengte groter dan 2 gevonden. Naarmate de getallen in deze regels groter worden, wordt de kans op priem zijn normaal gesproken kleiner, omdat de kans dat een willekeurig gegeven getal priem is daalt, naarmate dat getal groter wordt. Karakteristiek voor al die regels is dat ze per stuk hooguit enkele bevriende getallenparen opleveren.

In het aprilnummer van *Pythagoras* kun je deel 2 van de Hyvende getallen lezen, over het vinden van vriendenparen uit andere vriendenparen. ■

$$(2^8 \cdot 257 \cdot 33023, 2^8 \cdot 8520191) = (2172649216, 2181168896)$$

$$(2^{40} \cdot 1100048498687 \cdot 2252899325313023, 2^{40} \cdot 2478298520505800166853312511)$$

De bevriende getallenparen voor $l = 7, k = 8$, en voor $l = 11, k = 40$

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 3

ZES KEER ZOVEEL

Samen hebben ze € 1,19.
Cathy heeft twaalf munten:
7 keer 1 cent en 5 keer 2 cent, óf
10 keer 1 cent en 1 keer 2 cent
en 1 keer 5 cent. Janna heeft
twee munten: 1 keer 1 euro
en 1 keer 2 cent.

LETTERS SCHRAPPEN

Streek de 10 letters ZESLETTERS
door en houd BANANEN over.

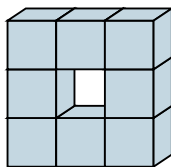
DOBBELSTENEN

Van drie dobbelstenen ziet
hij maar één kant, dus maxi-
maal drie zessen. Van drie stenen
ziet hij twee kanten, dus drie zessen
en drie vijven. Van één steen ziet hij
drie kanten, dus één zes, één vijf
en één vier. Samen dus
maximaal 66.
Minimaal is het 18.

ACHT KUBUSJES

Een kubus van $2 \times 2 \times 2$ geeft de
minimale oppervlakte: 24. Alle blokjes
op een rij geeft de maximale oppervlakte:
34. Het lukte de redactie om bouwwerkjes
te maken met oppervlakte 28, 30 en 32; van de
laatste zie je hieronder een plaatje.

Is het iemand
gelukt een
bouwwerkje met
oppervlakte 26
te maken?



GOEDKOOP NAAR MAASTRICHT?

Een Amsterdammer hoeft niet in
Amsterdam te beginnen.

**PYTHA
GORAS**

47ste jaargang nummer 4
februari 2008
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder
auspiciën van de Nederlandse Onder-
wijscommissie voor Wiskunde en richt
zich tot alle leerlingen van vwo en
havo. Pythagoras stelt zich ten doel
jongeren kennis te laten maken met de
leuke en uitdagende kanten van wis-
kunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine
Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal,
Korteweg-de Vries Instituut voor
Wiskunde,

Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per
e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar,
jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout
Jaspers, arnout@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Alex van den
Brandhof, Faculteit der Exacte Weten-
schappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan
1081a, 1081 HV Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten
Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 21,00 (Nederland) € 23,00 (België),
€ 27,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 21,00 (leerlingabonnement België),
€ 11,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 13,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

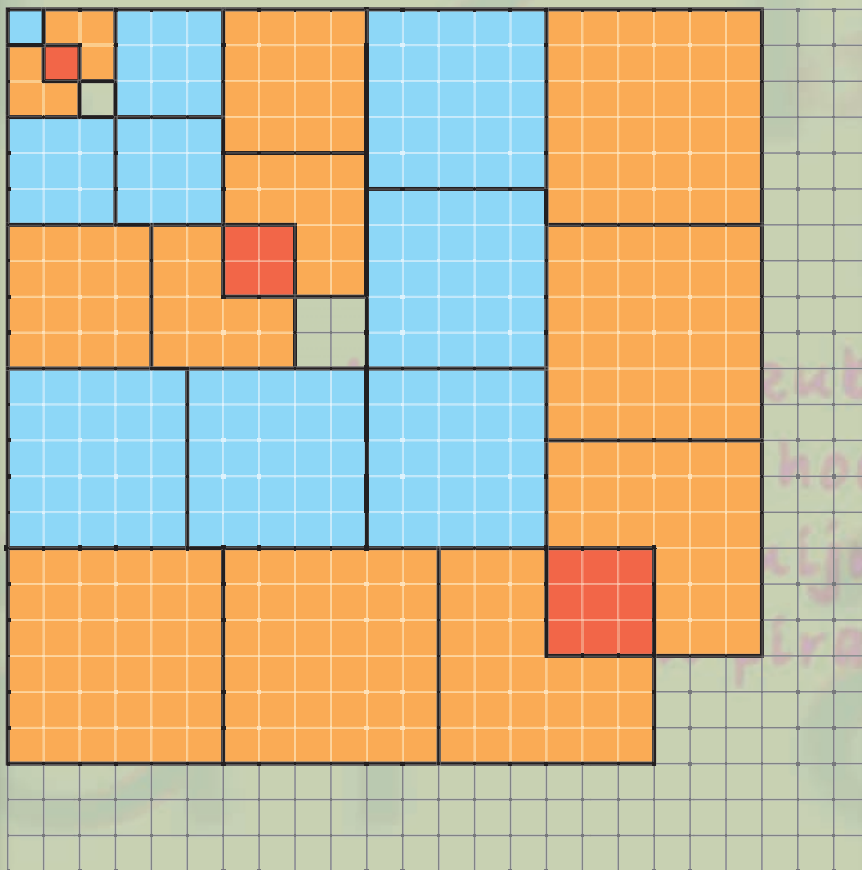
N.C.M. Bakker, docent wiskunde op het
Da Vinci College te Purmerend
(ncm.bakker@quicknet.nl), ir. D. Beek-
man, auteur van diverse breinbrekerboe-
ken (dh.beekman@hetnet.nl),

drs. A.J. van den Brandhof, docent
wiskunde op het Vossiusgymnasium te
Amsterdam (alex@pythagoras.nu),
dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onder-
zoeker bij het Ministerie van Defensie
(matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems,
aio wiskunde aan de UL (jeanine@pythagoras.nu), dr. D.C. Gijswijt, postdoc
combinatorische optimalisering aan de
UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guiche-
laar, voormalig directeur van Interconfes-
sionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student
wiskunde aan de UvA (anne@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan
de TUD (kp@pythagoras.nu),
drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist
(arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student
wiskunde aan de UL (arno@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig
docent wiskunde op de Hogeschool van
Utrecht (thijs@pythagoras.nu),
dr. G.W.Q. Puite, docent wiskunde
aan de TUE en de Hogeschool Utrecht
(g.w.q.puite@tue.nl), dr.ir. H.J.J. te Riele,
onderzoeker bij het Centrum voor
Wiskunde en Informatica (Herman.
te.Riele@cw.nl), I.M. Smit, student wis-
kunde aan de UvA (iris@pythagoras.nu)

Sponsors Pythagoras wordt mede mo-
gelijk gemaakt door de bijdragen van de
volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.