PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Breuken bekeken

Hugo Brandt Corstius over wiskunde en taal

Evariste Galois en de vijfdegraadsvergelijking

47ste JAARGANG - NUMMER 5 - APRIL 2008

Wiskunde studeer je aan de VU

www.vu.nl/wiskunde

Meer perspectief

vrije Universiteit *amsterdam*

TAALGRAPPEN

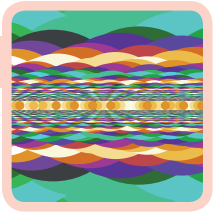
Weitzenböck was een Oostenrijks wiskundige die in 1921 in Amsterdam hoogleraar werd. In de inleiding van zijn boek *Invariantentheorie* uit 1923 stond op het eerste gezicht geen kwaad woord. Stiekem vlocht hij echter een vervloeking van de Fransen in de tekst, die in de Eerste Wereldoorlog immers de tegenstanders van Oostenrijk waren geweest. Klare taal zou Weitzenböck te veel in opspraak hebben gebracht. Uren moet hij besteed hebben aan het componeren van zijn verborgen boodschap. 'Nieder mit den Franzosen' is een zin met eenentwintig letters en zijn inleiding bevat precies eenentwintig zinnen. De lezer kan nu vast wel raden hoe de geheime boodschap verstopt was. Een kwajongensstreek van Weitzenböck.

Een wis- en taalkundige als Hugo Brandt Corstius grossiert in dit soort taalspelletjes. Normaliter publiceert hij zijn bevindingen over dit bijna onuitputtelijke onderwerp in beroemd geworden boeken als *Opperlans!*, maar nu doet hij dat in *Pythagoras*, op pagina 4 en verder.

Tevens laten we in dit nummer zien dat rationale getallen fascinerende plaatjes kunnen opleveren, zie pagina 16 en 17 en het omslag van dit nummer. Alles lijkt zo wel met alles samen te hangen: beeld, woord en getal. Al kun je zulke verbanden natuurlijk net zo vergezocht maken als nodig is voor het effect dat je wilt bereiken. Lees dit voorwoord er maar op na.

INHOUD

2 Kleine nootjes
4 Getallen zijn ook rijtjes letters
9 Miskunde: Opblazen
10 Spiegelknippen
12 Journaal
14 Priemaire breuken
16 Breuken in de getallenlijn
18 Pythagoras Olympiade
20 Zeven maanden trainen
22 Totaal geflipt!
24 Problemen - Oplossingen
26 Hyvende getallen, deel 2
28 Evariste Galois (1811-1832): revolutionair (en) wiskundige
33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 4



NIVEAUBALKJES

Sommige pagina's hebben onder het paginanummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

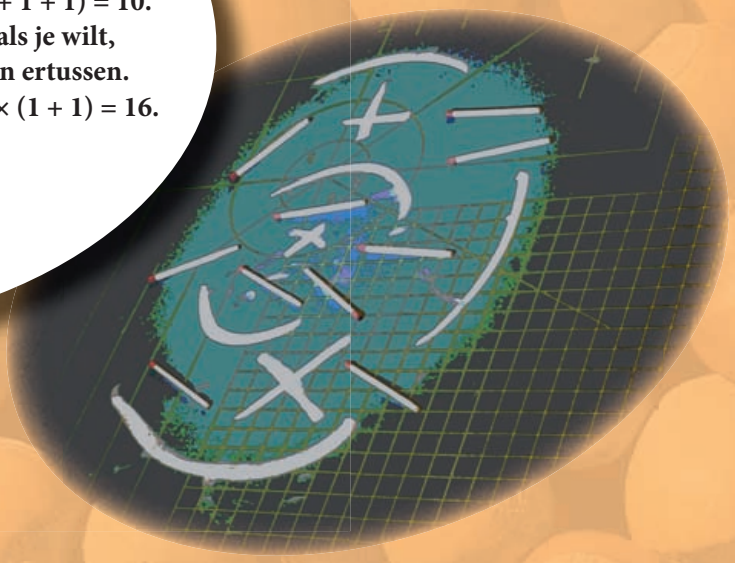
KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

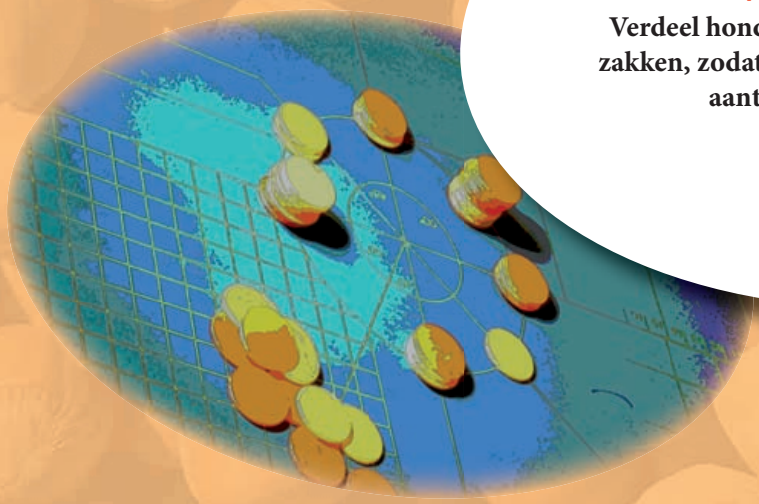
MALEN TUSSEN ENEN

**Schrijf 10 als volgt: (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10.
Vervang zo veel plustekens door maaltekens als je wilt,
en zet haakjes om de groepjes enen met plussen ertussen.
Bijvoorbeeld: (1) × (1) × (1 + 1 + 1 + 1) × (1 + 1) × (1 + 1) = 16.
Hoe krijg je het grootste getal?**



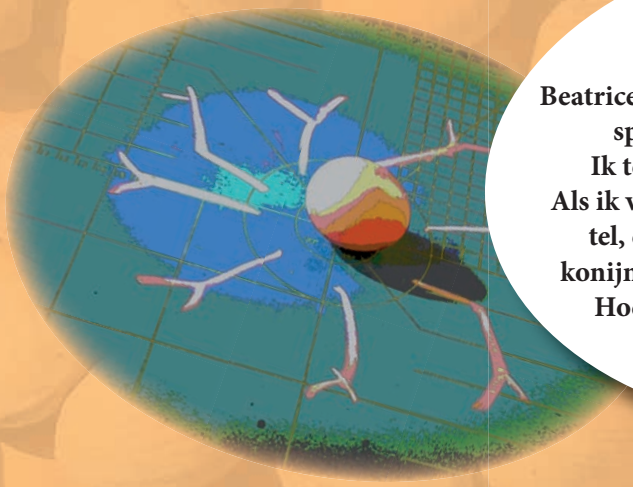
HANDIG UITBETALEN

Verdeel honderd munten van 1 euro over zeven zakken, zodat je elk bedrag van 1 tot 100 met een aantal zakken kunt uitbetalen.



GROETEN

Een club van acht leden komt bijeen. Ze geven elkaar allemaal een hand en spreken dan een groet uit. Hoeveel handen worden geschud? Hoeveel keer worden handen geschud? Hoeveel keer wordt een groet uitgesproken?



HOEVEEL SLANGEN?

Beatrice heeft een rare combinatie van veel dieren: spinnen, konijnen, kippen en slangen. Ik tel in totaal even veel koppen als poten. Als ik van de spinnen koppen en poten bij elkaar tel, en ik doe dat ook voor de kippen en de konijnen, dan krijg ik drie keer hetzelfde getal. Hoeveel slangen heeft Beatrice minstens?

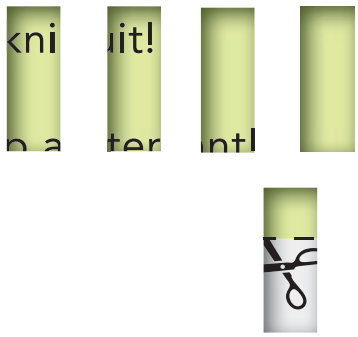
KORTSTE WANDELING

Op een rooster van 3 × 3 = 9 vierkantjes mag je alleen over de roosterlijnen lopen. Je wilt een zo kort mogelijke wandeling maken waarbij je elk van de 24 vierkantszijden aandoet; een enkel eindpunt is hierbij al voldoende. Wat is een zo kort mogelijke route?

Hugo Brandt Corstius (1935) studeerde wiskunde en algemene taalwetenschap in Amsterdam en was in de jaren zestig een van de eersten die de computer inzetten om de Nederlandse taal te bestuderen. Daarnaast schreef hij onder vele pseudoniemen (o.a. Piet Grijs, Stoker, Maaike Helder) talloze columns en artikelen in kranten en tijdschriften. Als Battus publiceerde hij in 1981 de veelgeprezen *Opperlandse taal- & letterkunde*, een boek vol pangrammen, palindromen en andere taalkundige rariteiten die hij vaak ook wiskundig analyseerde. In 2002 verscheen een grondige bewerking onder de titel *Opperlans! Taal- & letterkunde*. Als supplement bij dit 676 (het kwadraat van het aantal letters in het alfabet) pagina's tellende boek verscheen vorig jaar *Opperlans woordenboek*. Een fragment uit *Opperlans!* staat bij dit artikel.
De versie uit 1981 staat – legaal – op internet: www.dbnl.org/tekst/bran023oppe01.

■ door Hugo Brandt Corstius

GETALLEN ZIJN OOK RIJTJES LETTERS



Kijk eens naar de bovenste rij van de drie rijen met letters op je toetsenbord. Daar zie je aan de rechterkant tussen de letters u en p de twee letters i en o staan. Waarom staan die daar naast elkaar? Dat zal ik je vertellen.

De allereerste schrijfmachine, honderdveertig jaar geleden uitgevonden, had alleen maar hoofdletters. Het lijkt niet slim om de letters I en O naast elkaar te plaatsen, want er zijn in het Engels veel woorden waarin ze naast elkaar staan. Niet alleen dreigt dan dat je de twee letters verwisselt, maar bij die allereerste schrijfmachine raakten twee naburige staafjes, waar de letters op zaten, vaak aan elkaar vast als je te snel tikte.

De oplossing van het raadsel van die O en I zie je direct als je kijkt naar de rij cijfers die toen al boven de drie letterrijen stond. Die rij gaat van 2 tot en met 9. Het was kennelijk de bedoeling dat je voor het cijfer 1 de hoofdletter I en voor het cijfer 0 de hoofdletter O intikte. Handig bedacht van die mijnheer Sholes in Amerika.

Maar dat trucje uit 1868 kwam mij in 1968 duur te staan. Ik werkte toen op het Mathematisch Centrum in Amsterdam en dat kreeg een opdracht van het Centraal Boekhuis. In elk boek lag in die tijd een ponskaart zolang het in de winkel lag. Op die ponskaart stond de titel van het boek, de schrijver en de prijs. Werd het boek verkocht dan stuurde de boekhandelaar die kaart naar het Centraal Boekhuis, zodat die weer een nieuw exemplaar naar de boekwinkel kon brengen.

Elk jaar gaf de *Vereniging ter bevordering van de belangen des boekhandels* een catalogus uit. Ze vroegen of wij die catalogus niet konden zetten met behulp van de stapel ponskaarten. Ik ging het doen. De informatie in een ponskaart zit in rechthoekige gaatjes in het karton. De informatie voor een zetmachine zit in ronde gaatjes in een ponsband. Ik hoefde dus niets anders te doen dan alle schrijvers van de boeken te alfabetiseren en die onder elkaar te zetten, met hun boeken, om het auteursregister te maken. Daarna zette de computer alle titels van de boeken op alfabet en die kwamen onder elkaar te staan, met de schrijversnamen. Ik maakte ook een lijst van de stijgende boekenprijzen maar die wilden ze niet afdrukken.

Toen schrok ik. Cees Buddingh had een boek geschreven, dat heette: '128 vel schrijfpapier'. En wat kwam er in het zetsel voor het boek? Dit: 'I28 vel schrijfpapier'. Wat bleek? De Bull-code, die voor de ponskaarten werd gebruikt, deed wat Sholes een eeuw eerder had verzonnen: de letter I en het cijfer 1 waren hetzelfde gaatje en die voor O en 0 ook. Ik paste het programma aan: als een I of O tegen cijfers aan stond, dan ging het om een getal en drukte ik 1 of 0. Maar als het tegen letters aan stond, dan was het een woord en dus i of o.

Er was een tijdschrift met de naam 'i10' ('ietien'). Was dat honderdtien of iio, een getal of een woord? Het was een geheim mengsel van letters en cijfers dat geen computer ter wereld kon oplossen.

UKSI, KAKSI, KOLME Cijfers lijken op letters als je naar hun vormen kijkt. Volken zonder letters laten weinig informatie achter. Het ligt voor de hand dat een meloenenhandelaar op een doosje met drie meloenen drie streepjes zet. In het Romeinse getalschrift zie je dan: III. Maar de uitspraak 'drie' is niet af te leiden uit de drie streepjes.

Talen die woorden met letters schrijven, zoals het Nederlands, zetten een aantal lettersymbooltjes achter elkaar. Elk kind dat heeft leren lezen, weet welke klank bij elke letter hoort. Nou ja: een e kan de klank zijn in *pet*, *put* en *penis*, een è, een uh en een ee, zoals in de eerste drie lettergrepen van *lettergrepen*. Elke taal die onze letters gebruikt kan je lezen, zonder een woord te begrijpen als je die taal niet kent.

Het Chinees heeft voor elk woord een ander tekeningetje. Wie Chinees kan lezen, weet wat er staat maar niet hoe het klinkt. Zo is het ook met cijfers. Getallen worden overal anders uitgesproken, maar je begrijpt in een Finse tekst direct wat 8 en 9 betekenen, zonder te weten dat een Fin *kahdeksan* en *uhdeksan* zegt, wat eigenlijk betekent: twee (kaksi) minder dan tien, één (uksi) minder dan tien. Dat uksi kaksi kolme 1, 2, 3 betekent, weet iedereen die de namen kent van de gansjes van Niels Holgersson.

Als je even de Griekse letters leert kun je nog geen Grieks lezen. Je kunt het wel voorlezen, maar niet begrijpen. Het idiote van die Grieken van voor het jaar 0 is dat zij geen cijfers kenden, dus getallen alleen maar met letters konden opschrijven. Dat

maakte optellen en vermenigvuldigen niet gemakkelijk.

Een geniale Griekse wiskundige, niet Pythagoras maar Archimedes, schreef een heel boek over de interessante vraag: 'Hoeveel zandkorrels kunnen er in het heelal?' Die vraag kun je nu met een balpunt op je hand beantwoorden. Je moet alleen even weten hoeveel liter het heelal groot is en hoeveel zandkorrels er in een literfles gaan. Zeg dat het heelal tien tot de 94ste liters bevat (het wordt elke seconde groter) en dat er een miljoen zandkorrels in een literpak gaan. Dan passen er dus tien tot de macht honderd zandkorrels in het heelal. Archimedes verzon voor zulke grote getallen interessante omschrijvingen, maar hij kwam niet op het idee van tien cijfertjes waar je elk getal mee

ZESENTWINTIG RICHTINGEN IN ZINSCHAAK

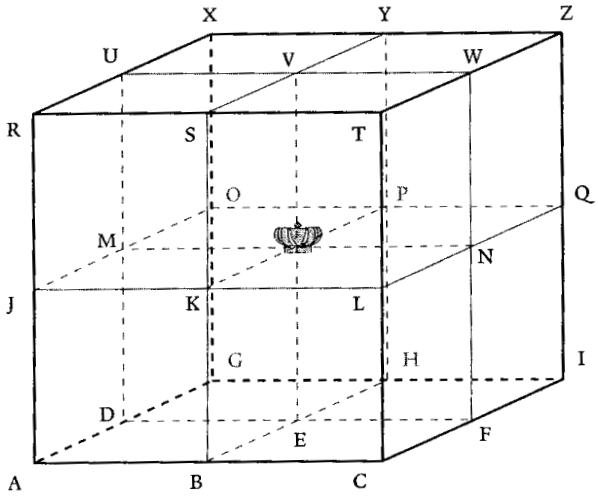
Waarom heeft ons alfabet 26 letters? Alfabetten tellen altijd tussen de 20 en 30 letters. Van al die getallen is 26 wel het allerstomste.

Als het 27 of 25 was geweest, dan hadden we een derdemacht ($3 \times 3 \times 3 = 27$) of tweedemacht ($5 \times 5 = 25$) gehad. Het woord *der-de-machts-wor-tel-trek-kin-gen* heeft 27 letters en 8 lettergrepen, die zich laten omzetten tot de 3 woorden: *machtsgen wortelde kindertrek*. 26 is het enige getal dat tussen een kwadraat en een derdemacht in ligt.

Als het 28 of 24 was geweest, dan sprong ik ook in de lucht. 28 is immers een zeldzaam getal dat gelijk is aan de som van al zijn delers: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. En 24 is een uitroepteken waard want het is gelijk aan het product van de eerste vier getallen: $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Als het 29 of 23 was geweest, dan zou het aantal letters prachtig priem zijn geweest. Maar het zijn er 26, even onnozel als het aantal rode kaarten in het kaartspel of het aantal weken in twee jaargetijden.

Vergeet de wiskunde. Denk aan schaak. Als we kijken wat we met letters kunnen doen op een schaakbord, dan zal 26 het enige juiste aantal blijken. Met letters maken we woorden. Je schrijft de eerste letter neer, bijvoorbeeld een s. Er zijn tienduizend woorden die met s beginnen. Nu schrijf je er een t achter. Er zijn nog duizend woorden die met st beginnen. Een a erbij: nog honderd mogelijkheden. Een p erachter: tien woorden beginnen met stap. Een j erbij, dan wordt de keus klein. Misschien is het met de e erachter afgelopen. Elke letter van *stapje* is een



stapje, een stapje van een koning over een schaakbord, die het spoor van een woordworm achterlaat.

Op een gewoon schaakbord kan de koning, als hij niet op de rand staat, acht kanten op. In een driedimensioneel schaakbord kan de koning 26 kanten op: naar links, rechts, boven, onder, naar voren, achter, linksboven, rechtsboven, linksonder, rechtsonder, l-achter, r-achter, l-voor, r-voor, o-achter, b-achter, o-voor, b-voor, blv, bla, brv, bra, olv, ola, orv, ora. Geef elk van de 26 mogelijke koningsstapjes een letter van het alfabet, zoals ik in de figuur heb gedaan.

De koning wil bijvoorbeeld het woord KON lopen. Eerst loopt hij naar de K. Die zit vooraan het liggende middenvlak. De richting O is de richting schuin naar achterlinks in hetzelfde middenvlak. Als de koning vanuit K een stapje in die richting doet, komt hij in M te staan. Nu wil hij de letter N maken, dat was een pasje naar rechts. Na drie stap-

knip uit!

kijk op achterkant!

kan opschrijven. Die kregen we van de Arabieren.

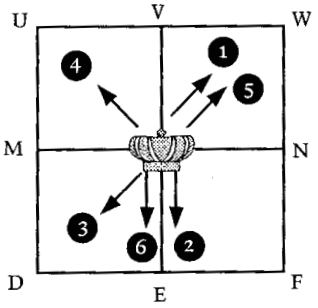
Hoe de Romeinen een vermenigvuldiging als IX × XI uitrekenden en dan misschien het antwoord als IC op wilden schrijven, is een raadsel. Hoe kan je de hele wereld veroveren en besturen zonder getallen behoorlijk in cijfers op te schrijven? Ach, mieren denken ook dat zij de wereld beheersen. Het is waar: als een mier een koekje ontdekt dat voor hem alleen te zwaar is, gaat hij terug naar het nest en neemt precies zoveel broertjes mee als nodig is om dat stukje eten te slepen. Hoe onthoudt hij dat aantal op weg naar huis?

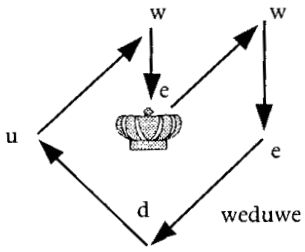
CIJFERS EN LETTERS Letters en cijfers verschillen niet alleen in hun functie, maar ook in de manier waarop ze woorden en getallen maken. In

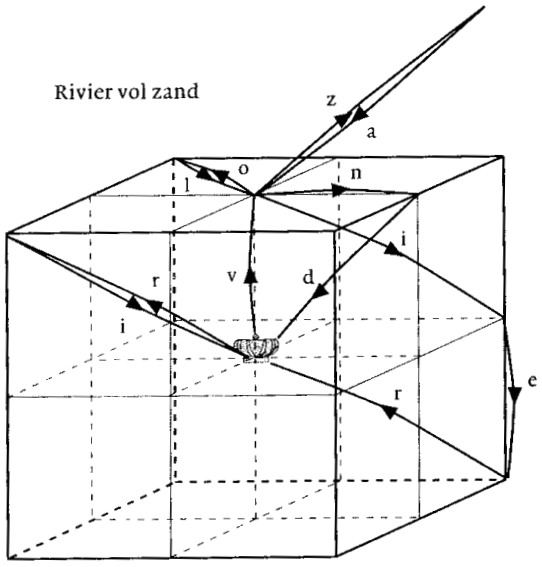
pen is de koning terug op zijn uitgangspunt en heeft hij het woord *kon* geschreven.

Zouden er meer woorden zijn waarbij de woordworm in zijn eigen staart bijt? We lichten even het vlak DFWU eruit, het staande middenvlak. In dat vlak heb ik de zes letters van het woord WEDUWE getekend als zes stapjes van de koning uit het middelpunt naar dat middelpunt.

Laten we nu de hele kubus gebruiken. Laat de koning de vier letters van het woord VIER wandelen. De eerste letter brengt hem in V, recht naar boven. De I is een stap naar onder-rechts-achter, dan staat de koning in Q. De E is een stapje recht omlaag, dat brengt hem naar de I. Nu nog de R, een stap naar boven-links-voren. Dan is de koning na de vier stappen van VIER weer thuis.







Uitbreiding van VIER tot RIVIER gaat eenvoudig: de twee extra letters, R en I, zijn symmetrisch ten opzichte van het middelpunt en vormen dus een retourtje van de koning naar R en terug. Loopt u nu zelf de dertien letters van RIVIER VOL ZAND af en u zult zien dat u na een vervaarlijke sprong, waarbij de diagonale letters Z en A een retourtje vormen, weer bij het middelpunt terugkeert. Mijn vriend Ross Eckler vraagt of er ook een woordworm is die een knoop in zichzelf legt voor hij weer in zijn staart bijt, maar dat laat ik graag over aan de computerbezitters onder u. Ik wilde alleen maar laten zien dat 26 het ideale getal is voor het aantal letters in het alfabet.

Uit: *Opperlans! Taal- & letterkunde* (Querido, 2002)

niet uitknippen!

niet op achterkant kijken!

Frankrijk heb je een televisieprogramma *Cijfers en Letters*. Voor *Cijfers* krijg je een stel getalletjes waar je een bepaald getal van moet maken. Je moet snel kunnen optellen en vermenigvuldigen. Wie het dichtste bij het getal komt, wint. Bij *Letters* krijg je een stelletje letters waar je een zo lang mogelijk woord van moet maken. Je moet snel kunnen spellen en veel woorden kennen.

Het valt steeds op dat sommige mensen beter zijn in *Cijfers* en andere in *Letters*. Ik heb een paar problemen bedacht die over cijfers én letters, getallen én woorden, gaan (zie het onderstaande kader) en ik ben benieuwd of je die oplost en in hoeveel minuten. Is het trouwens niet idioot hoe iedereen met gemak het 60-tallig en 12-tallig stelsel gebruikt om 12.45 te vertalen in kwart voor een?

Wij springen van cijfers naar letters en andersom. Als een wiskundige hoort: 'Wat is de helft van veertien?', antwoordt hij: 'zeven'. Als een taalkundige hoort: 'Wat is de helft van 14?', antwoordt hij: 'veer'. Dus let er bij de problemen op dat 'het getal vier' kan betekenen: 'de vier letters van het woord vier' maar ook gewoon: '4'. In het Nederlands is 4 het enige getal met de mooie eigenschap zijn eigen lettertal aan te geven. Weet jij in welke taal de getallen acht en negen elkaars lengte hebben? ■

NEGEN PROBLEMEN

1. Wat is het kleinste hele getal met tien verschillende letters? Het maakt niet uit of je de ij als één of twee letters rekent.

2. Wat is het grootste getal dat het kwadraat is van zijn eerste lettergreep?

3. Wat is het hele getal dat is opgebouwd uit een eerste (voorste) getal en een laatste (achterste) getal, die allebei priem zijn, terwijl het voorste getal één kleiner is dan een kwadraat en het achterste getal één kleiner is dan een derdemacht? Het getal zelf is trouwens één groter dan een kwadraat, en als je het van achter naar voren leest is het één groter dan het dubbele van datzelfde kwadraat.

4. Wat is het laatste getal in de alfabetische lijst van alle Romeinse getallen?

5. Welk getal is drie keer zo groot als zijn lengte in letters?

6. Welk getal van zeven letters is even lang als zijn helft en ook even lang als zijn dubbele?

7. Wat is het kleinste priemgetal waarin vijf keer dezelfde letter staat? Het is ook het kleinste gehele getal dat niet in het op internet beschikbare *Woordenboek der Nederlandsche Taal* staat.

8. De getallen 15 en 51 hebben veel gemeen, zoals dat ze alletwee drie puntjes boven hun uitgeschreven vorm hebben. Welk getal heeft met het getal 24 hetzelfde gemeen?

9. Wat moet het getal zijn dat het antwoord is op deze vraag?

Antwoorden: 35, 36, 37, XXXVIII, 39, 40, 41, 42, 43

MISKUNDE: rekenkundige missers uit kranten, tijdschriften, boeken, enzovoorts. Kom je zelf iets tegen dat geschikt is voor deze rubriek? Meld het ons via post@pythagoras.nu.

■ door Arnout Jaspers

OPBLAZEN

Je komt er niet achter wie of wat zoiets invoert, maar de laatste jaren worden inflatiecijfers door instanties en de media gepresenteerd op een manier die optimaal is om verwarring te zaaien. Een inflatiepercentage van, zeg, 2% betekent dat een standaard pakket aan boodschappen 2% duurder is geworden. Eerst kostte dat pakket € 100, nu € 102. Wat kan daar fout aan gaan?

Kijk eens naar het bericht hiernaast. Het is een willekeurig voorbeeld, geplukt van de website van RTLZ, in deze categorie zijn er talloze. Volgens dit bericht is de inflatie in december 2007 uitgekomen op 1,9%, net als in november 2007. Hoeveel duurder is een standaard pakket boodschappen van € 100 van 1 november tot 31 december dan geworden? Dat lijkt eenvoudig: € 100 × 1,019 × 1,019 ≈ € 103,84. Maar onderaan het bericht staat dat de inflatie over heel 2007 1,6% was. Hoeveel kostten die boodschappen dus op 1 januari 2007? Noem dat bedrag B, dan geldt, zou je denken: B × 1,016 = € 103,84, dus B = € 103,84/1,016 ≈ € 102,20. Je conclusie is dan dat de prijzen tussen januari 2007 en november 2007 *gedaald* zijn van € 102,20 naar € 100: een inflatie van –2,2%.

In feite klopt hier niets van. De inflatie tussen 1 januari en 1 november was niet negatief, de boodschappen werden in november niet 1,9% procent duurder, en in december ook niet. Wat er namelijk niet bij staat: de inflatiepercentages over november en december zijn *op jaarbasis*. Dit betekent zoiets als: 'Als de prijzen nog een heel jaar lang in hetzelfde tempo blijven stijgen als in november, zijn de boodschappen aan het eind van dat jaar 1,9% duurder geworden'. Om zo'n percentage op jaarbasis om te rekenen naar een echt stijgingspercentage per maand moet je de twaalfdemachtswortel nemen: $\sqrt[12]{1{,}019} \approx 1{,}0016$. Dus een pakket dat op 1 november € 100 kostte, kost op 1 december 1,0015 × € 100 = € 100,15. In plaats van € 1,90, zijn de boodschappen die maand dus maar 15 cent duurder geworden!

Nu snap je ook waarom de inflatie van januari tot november niet negatief was: de prijsstijging was in november 15 cent en in december ook maar

Nieuwsbrief | R

laatst gewijzigd: 10-01-2008 12:31

Nederlandse inflatie december 1,9%

De inflatie in Nederland is in december uitgekomen op 1,9%.

Inflatie Nederland blijft 1,9%

Autobrandstoffen
In november lag de inflatie ook al op 1,9%. Dat blijkt uit cijfers van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS). Vooral autobrandstoffen hadden in december een drukkend effect op de inflatie.

Duurder
Benzine, diesel en autogas waren bijna 12% duurder dan in 2006. In november was dit echter nog 15%. Ook voedingsmiddelen werden in december duurder, terwijl kleding en schoenen juist goedkoper werden.

Eurozone
De inflatie bedroeg over heel 2007 1,6%. De Nederlandse inflatie is daarmee de laagste in de eurozone. De gemiddelde inflatie in de eurozone ligt op 3,1%.

Zie ook:
Inflatie stijgt door hoge benzineprijzen

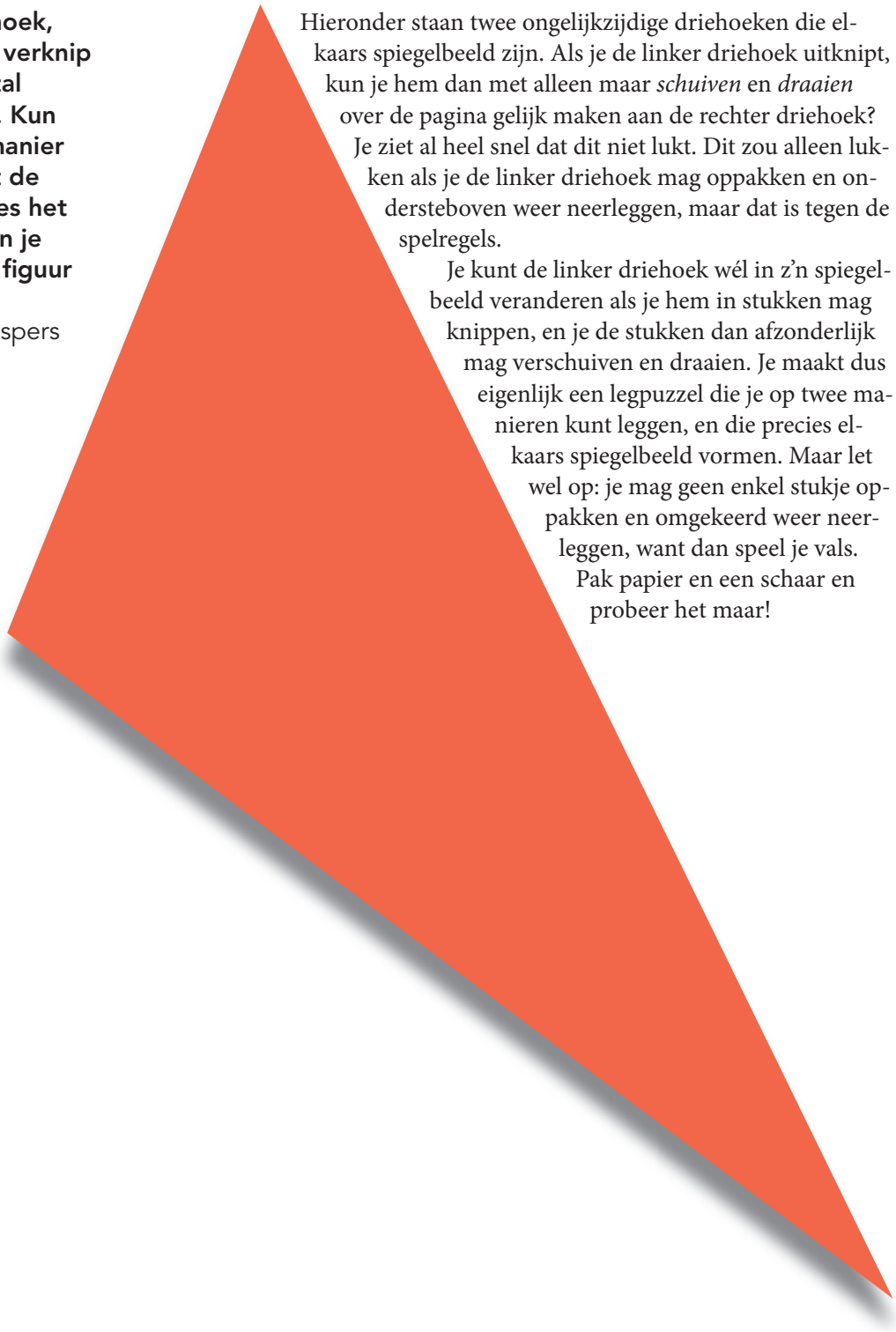
15 cent. Het standaardpakket kostte op 31 december € 100,30. Op 1 januari van dat jaar kostte het dus € 100,30/1,016 ≈ € 98,72. De inflatie in de eeste tien maanden van 2007 komt daarmee op 100/98,72 × 100% ≈ 1,3%.

Overigens kun je er nu nog steeds niet zeker van zijn dat je de echte prijsstijging uit zo'n bericht gedestilleerd hebt. Soms worden namelijk de prijzen in november 2007 vergeleken met de prijzen in november 2006, en de prijzen in december 2007 met die in december 2006. Ook dan kan er doodleuk staan: 'de inflatie in december was 1,9%, net zo hoog als in november'. Zulke cijfers zeggen op zich niets meer over hoeveel duurder boodschappen in de laatste twee maanden van 2007 geworden zijn. Ze zouden zelfs goedkoper geworden kunnen zijn, als de prijzen een jaar daarvoor nog sterker gedaald waren. ■

S P I E G E L

Teken een veelhoek, knip hem uit en verknip hem in een aantal kleinere stukjes. Kun je dat op zo'n manier doen dat je met de verkregen stukjes het spiegelbeeld van je oorspronkelijke figuur kunt leggen?

■ door Arnout Jaspers



Hieronder staan twee ongelijkzijdige driehoeken die elkaars spiegelbeeld zijn. Als je de linker driehoek uitknipt, kun je hem dan met alleen maar *schuiven* en *draaien* over de pagina gelijk maken aan de rechter driehoek? Je ziet al heel snel dat dit niet lukt. Dit zou alleen lukken als je de linker driehoek mag oppakken en ondersteboven weer neerleggen, maar dat is tegen de spelregels.

Je kunt de linker driehoek wél in z'n spiegelbeeld veranderen als je hem in stukken mag knippen, en je de stukken dan afzonderlijk mag verschuiven en draaien. Je maakt dus eigenlijk een legpuzzel die je op twee manieren kunt leggen, en die precies elkaars spiegelbeeld vormen. Maar let wel op: je mag geen enkel stukje oppakken en omgekeerd weer neerleggen, want dan speel je vals.

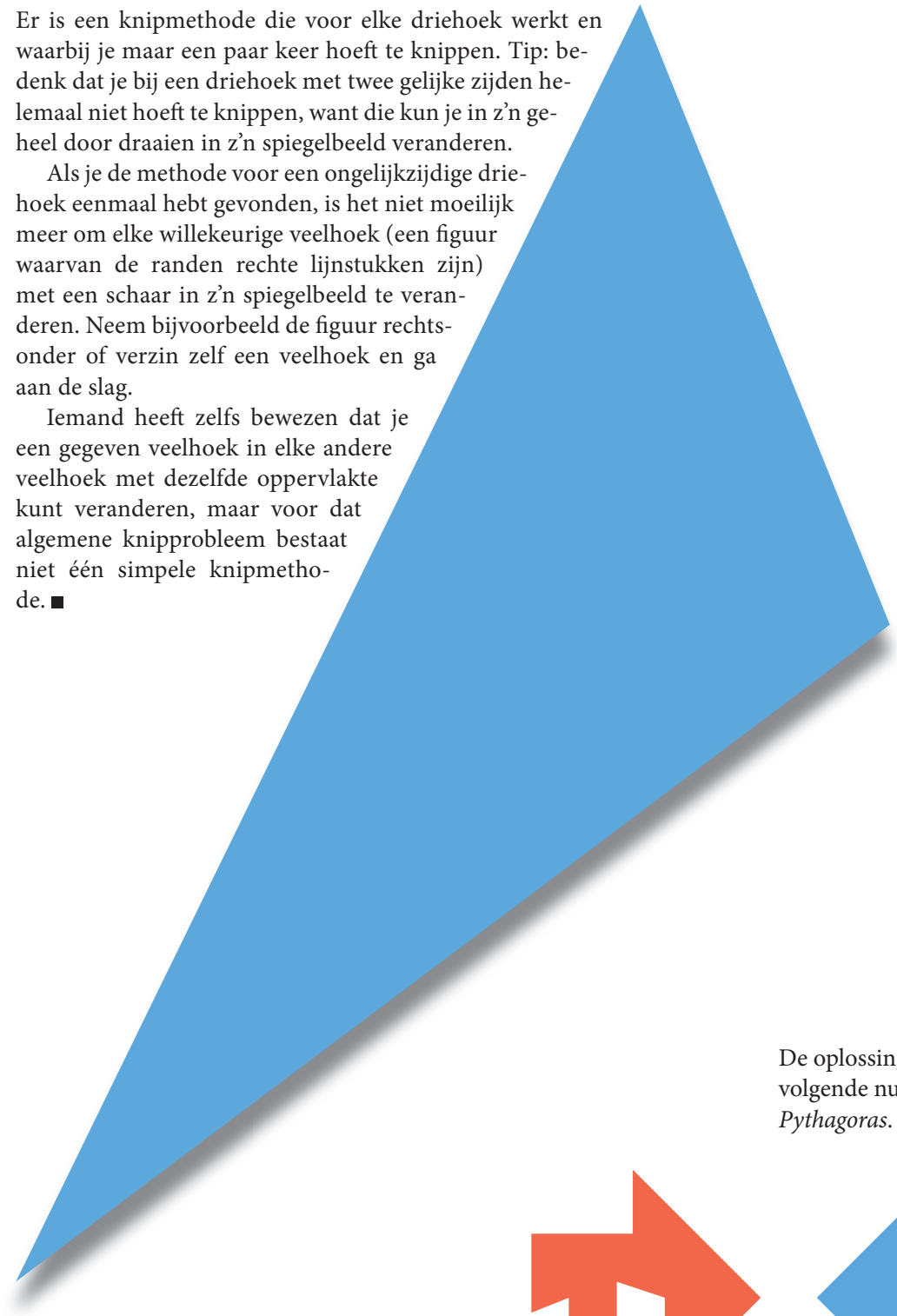
Pak papier en een schaar en probeer het maar!

K N I P P E N

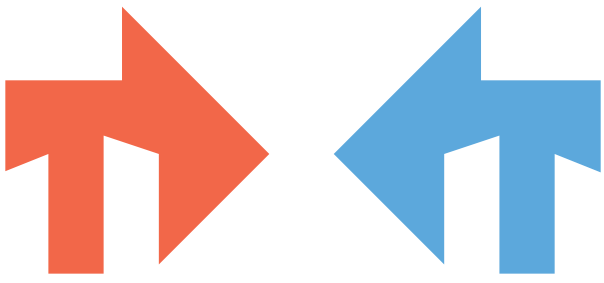
Er is een knipmethode die voor elke driehoek werkt en waarbij je maar een paar keer hoeft te knippen. Tip: bedenk dat je bij een driehoek met twee gelijke zijden helemaal niet hoeft te knippen, want die kun je in z'n geheel door draaien in z'n spiegelbeeld veranderen.

Als je de methode voor een ongelijkzijdige driehoek eenmaal hebt gevonden, is het niet moeilijk meer om elke willekeurige veelhoek (een figuur waarvan de randen rechte lijnstukken zijn) met een schaar in z'n spiegelbeeld te veranderen. Neem bijvoorbeeld de figuur rechtsonder of verzin zelf een veelhoek en ga aan de slag.

Iemand heeft zelfs bewezen dat je een gegeven veelhoek in elke andere veelhoek met dezelfde oppervlakte kunt veranderen, maar voor dat algemene knipprobleem bestaat niet één simpele knipmethode. ■



De oplossing komt in het volgende nummer van *Pythagoras*.



JOURNAAL

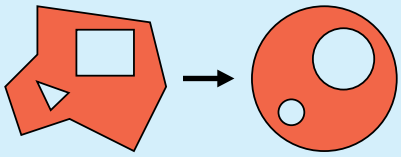
■ door Alex van den Brandhof

140 jaar oud probleem opgelost

Een wiskundig probleem waarover 140 jaar geleden voor het eerst werd nagedacht, is opgelost door de Britse wiskundige Darren Crowdy. Hij heeft een doorbraak bereikt op het terrein van *conforme afbeeldingen*, wiskundig gereedschap dat door onder meer ingenieurs en neurowetenschappers gebruikt wordt.

Het gaat om een klassieke formule, de *Schwarz-Christoffel-formule*, die breed kan worden toegepast in onder andere de bouwkunde en de natuurkunde. De Duitse wiskundigen Elwin Christoffel en Hermann Schwarz werkten eind jaren 1860 onafhankelijk van elkaar aan hetzelfde probleem en vonden min of meer tegelijkertijd eenzelfde resultaat. De formule kan worden gebruikt om een veelhoek af te beelden in een cirkel, zonder dat de hoek waaronder twee lijnen elkaar snijden, verandert. Een afbeelding die 'hoektrouw' (wiskundigen noemen het ook wel 'hoekinvariant') is, heet een *conforme afbeelding*.

De Schwarz-Christoffel-formule maakt het mogelijk om ingewikkelde vormen te transformeren in een cirkel, die veel eenvoudiger is om te analyseren. De Schwarz-Christoffel-formule had één grote beperking: de oorspronkelijke vorm mocht geen gaten of rare onregelmatigheden bevatten. Crowdy heeft de



Een vorm met twee gaten kan dankzij het werk van Darren Crowdy worden getransformeerd in een cirkel (met twee cirkelvormige gaten).

Schwarz-Christoffel-formule zodanig weten uit te breiden dat elk object - hoeveel gaten er ook in zitten - kan worden getransformeerd in een eenvoudiger te analyseren vorm. De sleutel ligt in het concept van 'Schottky-groepen', genoemd naar de Duitse wiskundige Friedrich Schottky.

Een Grammy voor de wiskunde

Een opname vol gekraak uit 1949 kon met behulp van wiskundige technieken worden gerestaureerd. De gerestaureerde opname heeft een *Grammy* gewonnen voor 'beste historische opname'.

Van de Amerikaanse muzikant en liedjesschrijver Woody Guthrie (1912-1967) werd enkele jaren geleden een tot dan toe onbekende live-opname gevonden. De tape was broos, het geluid kraakte, de toonhoogte was soms veel te hoog en dan weer veel te laag, en veel woorden waren onverstaanbaar. Geluidsingenieur Jamie Howarth en wiskundige Kevin Short hebben algoritmen ontwikkeld om oud opnamemateriaal op te poetsen. Zij zochten onder andere naar ritmische geluiden die eigenlijk niet in de opname thuishoren, zoals het draaien van een ventilator in de achtergrond. In plaats van deze geluiden te verwijderen, gebruikten zij het ritme ervan om de originele timing te reconstrueren en te ontdekken op welke plaatsen de band is versneld of vertraagd. Na de restauratie klonk de opname behoorlijk goed. Het resulterende album werd in september vorig jaar uitgebracht en heeft in februari van dit jaar een Grammy gewonnen.

Dankzij technieken van wiskundige Kevin Short heeft de oude Guthrie-opname een Grammy gewonnen.

(Douglas Prince, UNH Photo Services)

Riemannhypothese eindelijk bewezen?

De Frans-Amerikaanse wiskundige Louis de Branges claimt het bewijs te hebben geleverd van de Riemannhypothese. Dit is een van de belangrijkste open problemen in de wiskunde.

Bernhard Riemann formuleerde zijn hypothese, die iets zegt over de nulpunten van de complexe Riemann-zetafunctie, in de tweede helft van de negentiende eeuw. Nooit werd het probleem opgelost, ondanks diverse pogingen van al dan niet gerenommeerde wiskundigen. Op een website getiteld *Proposed (dis)proofs of the Riemann hypothesis* worden voorgestelde bewijzen van de Riemannhypothese verzameld.

Een wiskundige die diverse keren dacht het probleem te hebben gekraakt, is de inmiddels 75-jarige Louis de Branges van de Purdue University in Indiana. Onlangs kwam hij opnieuw met een vermeend bewijs. In de wiskundewereld werd hij in 1984 beroemd omdat hij toen het *vermoeden van Bieberbach* wist op te lossen.

Ondanks de prestaties van De Branges werden zijn claims betreffende de Riemannhypothese niet altijd serieus genomen. Zijn methoden zouden ontoereikend zijn. De Branges zelf zegt nu met nieuwe ideeën te zijn gekomen, die volgens hem wél toereikend zijn. Wat ook een rol lijkt te spelen is dat zijn methoden niet erg gangbaar zijn in de wereld van de analytische getaltheorie. Er gaat dan erg veel tijd zitten in het verifiëren van het bewijs en daar hebben sommige wiskundigen geen zin in: het uitpluizen van andermans bewijs willen ze alleen doen als ze de overtuiging hebben dat ze er zelf iets van kunnen opsteken en kunnen gebruiken bij hun eigen onderzoek.

Louis de Branges.

De Riemannhypothese zegt dat 'elk niet-triviaal nulpunt van de Riemann-zetafunctie reëel deel $\frac{1}{2}$ heeft'; in het juninummer 2006 van *Pythagoras* stond een artikel waarin Jan van de Craats de betekenis van deze cryptische zin uitlegt. De Riemannhypothese wordt zo belangrijk gevonden omdat het belangrijke gevolgen heeft. De hypothese impliceert bijvoorbeeld dat de priemgetallen in zeker opzicht 'regelmatig' verdeeld zijn. Dit maakt vele bewijzen waarin priemgetalverdeling een belangrijke rol speelt een stuk eenvoudiger. Vandaar dat men in de getaltheorie zo vaak stellingen tegenkomt van het type 'Als de Riemannhypothese waar is, dan geldt...'.

Als deze keer geen fouten in het bewijs van De Branges worden gevonden, kan hij aanspraak maken op het prijzengeld van een miljoen dollar dat het Clay Mathematics Institute uitlooft voor de eerste die de Riemannhypothese bewijst. Zo ver is het nog niet: eerst moet het bewijs worden gepubliceerd in een internationaal wiskundetijdschrift en daarna is het nog twee jaar wachten. Want soms komt het voor dat er pas ná publicatie een lek wordt ontdekt. Op de website van De Branges zijn zijn artikelen te downloaden: www.math.purdue.edu/~branges.

Abelprijs 2008 toegekend

John G. Thompson en Jacques Tits krijgen dit jaar de Abelprijs. De Abelprijs is vergelijkbaar met de Nobelprijs, die voor wiskunde niet bestaat.

De Noorse Abelprijs, die samen met de Fields Medal doorgaat voor de 'Nobelprijs voor Wiskunde', gaat dit jaar naar de Amerikaan John G. Thompson en zijn Belgisch/Franse collega Jacques Tits. Dit heeft de Noorse Academie voor Wetenschappen donderdag 27 maart in Oslo bekendgemaakt. Thompson is 75 jaar, maar hij is nog steeds werkzaam aan de universiteit van Florida. De in België geboren Tits, twee jaar ouder dan Thompson, is professor emeritus aan het Collège de France. Beide wetenschappers krijgen de prestigieuze en met 750.000 euro begiftigde prijs voor hun grote bijdragen in de algebra, in het bijzonder de groepentheorie.

Groepentheorie is de 'wetenschap van symmetrieën'. Het speelt onder andere een belangrijke rol bij het bewijs dat er geen algemene formule bestaat voor de oplossingen van een vergelijking van graad 5 of hoger, zie ook het artikel over Galois op pagina 28. Ook de wiskunde achter de Rubikkubus, de draaipuzzel met negen kleurrijke vakjes op elke zijde, maakt gebruik van groepentheorie. Ten slotte heeft de groepentheorie diverse toepassingen in de natuur- en scheikunde: de structuur van kristallen en de symmetrie binnen moleculen kunnen met behulp van groepentheorie worden beschreven.

Op 20 mei wordt de prijs in Oslo uitgereikt door de Noorse koning Harald V.

Britney Spears zal er niet van wakker liggen, maar is het geen wonderlijke samenloop van omstandigheden dat $\frac{1}{630} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{18}$, terwijl ook $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{630}$? We noemen dit een 'priemaire driebreuk'. In dit artikel gaan we op zoek naar meer priemaire twee-, drie- en veelbreuken.

■ door Arnout Jaspers

PRIEMAIRE BREUKEN

De priemaire veelbreuk is een soort omkering van het bekende begrip 'volmaakt getal'. Die zijn precies gelijk aan de som van hun delers, bijvoorbeeld 6 = 3 + 2 + 1 en 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1. Je ziet dat de delers geen priemgetal hoeven te zijn en dat de nepdeler 1 ook meedoet. Volmaakte getallen zijn heel zeldzaam; er zijn er momenteel slechts 44 bekend.

Bij onze priemaire veelbreuken laten we de nepterm 1 niet meedoen. Verder is meteen duidelijk (toch?) dat je met positieve gehele getallen en alleen optellen nooit een priemaire veelbreuk kunt maken, dus we definiëren een priemaire veelbreuk $1/Q$ als

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} \pm \cdots$$

met $Q = a \times b \times c \times \cdots$.

Waarom noemen we dit een *priemaire* veelbreuk? De noemers hoeven geen priemgetal te zijn, maar a, b, c, ... zijn wel altijd *relatief priem*: er is geen enkel paar dat een gemeenschappelijke deler heeft. Zie het voorbeeld bovenaan deze pagina: 18 is niet priem, maar geen van de paren (5, 7), (5, 18) en (7, 18) heeft een deler gemeen. Deze fraaie eigenschap stellen we niet als eis, maar volgt automatisch uit de definitie. Het bewijs is vrij simpel, maar voor het geval je het zelf niet kunt vinden staat het in het kadertje op de volgende pagina.

ZELDZAAM Je kunt natuurlijk naar priemaire veelbreuken zoeken door in het wilde weg getallen uit te proberen (of een computer dat te laten doen). Als je onderaan begint, vind je als eerste tweebreuk $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ en als eerste driebreuk $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$. Ze blijken weliswaar minder zeldzaam dan volmaakte getallen, maar toch dunnen ze snel uit naarmate je hoger komt. Zo zijn van de vele miljarden veelbreuken met delers tot 500 er slechts 440 priemair ($\frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{97} - \frac{1}{272}$ is een voorbeeld). Interessanter is de vraag, of er formules bestaan waarmee je systematisch veelbreuken kunt maken. Voor volmaakte getallen bestaat zo'n formule niet, voorzover nu bekend.

TWEEBREUKEN Je kunt inderdaad een heel simpele formule voor priemaire tweebreuken vinden, sterker nog, daarmee 'vang' je ze meteen allemaal. En als je die formule hebt, kun je die in één moeite door gebruiken om een speciaal soort priemaire

drie-, vier-, vijf-, enzovoortbreuken te maken (bijvoorbeeld $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{13}$ of $\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{57}-\frac{1}{3193}$). Probeer het maar eens. Als je een veelbreukformule gevonden denkt te hebben, controleer je of dat echt zo is door alle breuken gelijknamig te maken en op te tellen. Boven de streep moet dan precies 1 overblijven. Zo levert

$$\frac{1}{2p+3}-\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{p^2+p-1}$$

een priemaire driebreuk op voor elke p, omdat $(2p-1)(p^2+p-1)-(2p+3)(p^2+p+1)+(2p+3)(2p-1)=1$ voor elke p.

Deze formule 'vangt' zeker niet alle priemaire driebreuken, er bestaan simpeler formules die weer andere exemplaren opleveren. Ga vooral zelf aan de slag en probeer je eigen formule voor priemaire veelbreuken te vinden. Of zet met een zelfgeschreven programmaatje je computer aan het werk om grote veelbreuken met bijzondere eigenschappen te vinden.

In het volgende nummer geven we de oplossing van de hier opgeworpen vragen. ■

RELATIEF PRIEM

Stelling. *In een priemaire veelbreuk*

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}\pm\frac{1}{c}\pm\frac{1}{d}\pm\cdots$$

zijn de noemers a, b, c, d, ... relatief priem: geen enkel paar (a, b), (a, c), ... heeft een gemeenschappelijke deler.

Om het bewijs overzichtelijk op te schrijven nemen we alleen de eerste vier termen mee, en 'absorberen' eventuele mintekens in de getallen a, b, c, d, die nu dus positief of negatief mogen zijn. Je kunt makkelijk nagaan dat dit voor het bewijs geen verschil maakt.

Maak alle termen gelijknamig:

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=$$
$$=\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}.$$

Per definitie is $Q=abcd$, dus

$$bcd+acd+abd+abc=1. \quad (*)$$

Stel nu dat er een paar getallen is – bijvoorbeeld (a, b) – met een gemeenschappelijke deler n. Alle termen op één na bevatten a, dus die zijn deelbaar door n. De ene term zonder a bevat zeker b, want in elke term ontbreekt maar één van de getallen a, b, c, d. Dus ook die laatste term is deelbaar door n.

Deel nu (*) door n:

$$\frac{bcd+acd+abd+abc}{n}=\frac{1}{n}.$$

Links staat een geheel getal, dat gelijk moet zijn aan $\frac{1}{n}$. Dit kan natuurlijk niet, dus was de veronderstelling dat (a, b) een gemeenschappelijke deler had onjuist. Omdat het paar (a, b) willekeurig gekozen was en alle paren getallen op dezelfde manier in (*) voorkomen, geldt dit voor elk paar. Dus zijn a, b, c en d relatief priem.

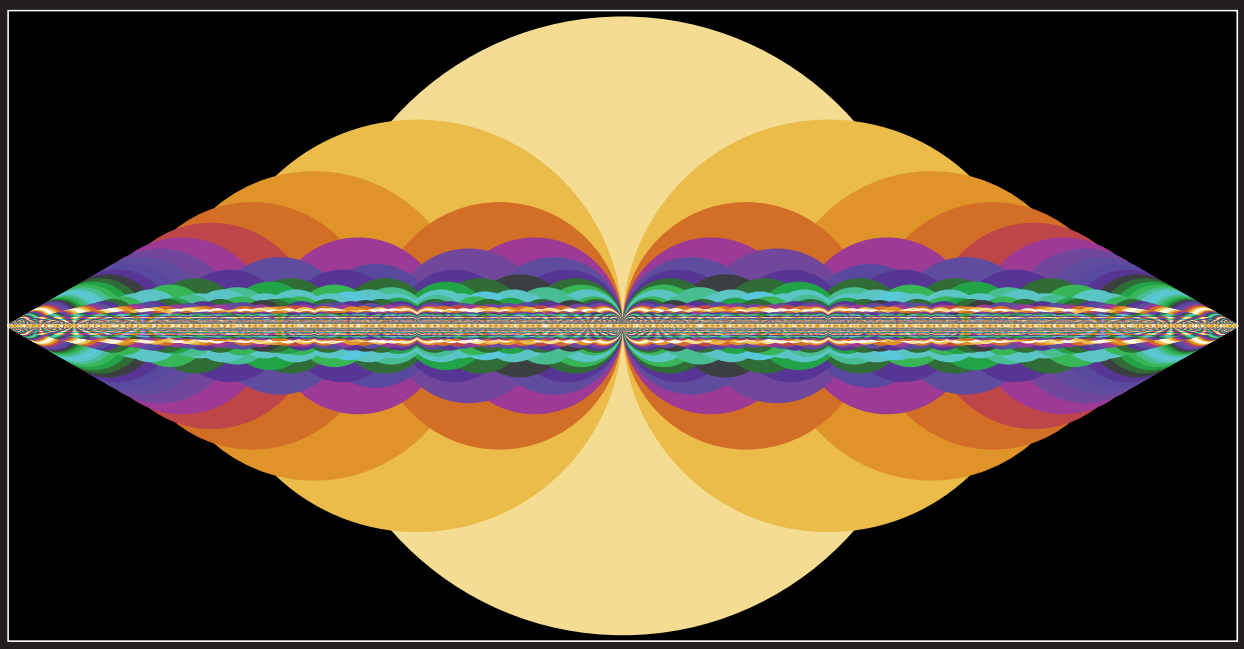
BREUKEN IN DE GETAL

door Arnout Jaspers

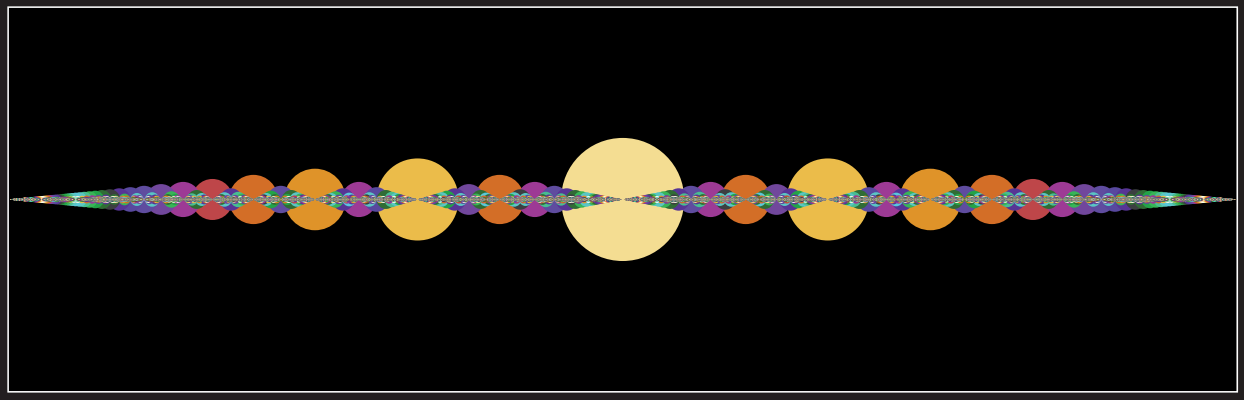
Je kunt de getallen tussen 0 en 1 als punten op een getallenlijn uitbeelden. Er zijn dan twee soorten punten: *rationale* en *irrationale*. Een rationaal getal is een getal dat te schrijven is als een breuk $\frac{p}{q}$, met gehele getallen p en q. Voor de breuken tussen 0 en 1 geldt natuurlijk dat $p < q$. Maar tussen getallen als $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ en $\frac{147}{1321}$ liggen nog veel meer getallen die *niet* als een breuk te schrijven zijn. Zulke getallen heten irrationaal. In het interval [0, 1] zitten bijvoorbeeld de irrationale getallen $\frac{1}{10}\pi$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, maar ook een getal als 0,10100100010000100000 1... is irrationaal.

Zo'n schijnbaar saaie getallenlijn is eigenlijk een mysterieus object: tussen twee rationale getallen, hoe dicht bij elkaar ook, ligt altijd nog een irrationaal getal, en tussen twee irrationale getallen ligt altijd nog een rationaal getal. Van beide soorten zijn er natuurlijk oneindig veel.

De Utrechtse wiskundige Frits Beukers heeft een fraaie manier bedacht om de structuur van de getallenlijn in beeld te brengen. Hij doet dat door elk rationaal getal $\frac{p}{q}$ te bedekken met een schijfje. Als je alle schijfjes even groot maakt, blijft er al snel niets



Figuur 1



Figuur 2

LLENLIJN

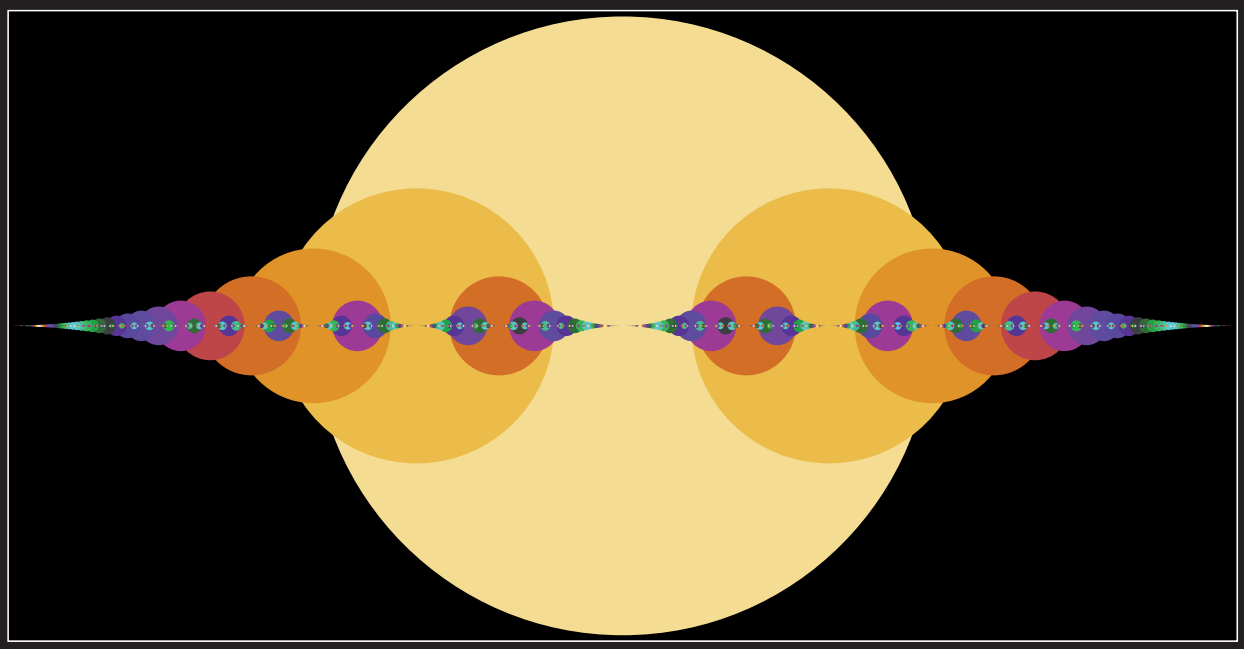
van de getallenlijn over, maar als je de straal afhankelijk maakt van de noemer q, ziet het er veel interessanter uit.

In figuur 1 is elk punt $\frac{p}{q}$ bedekt met een schijfje met straal $0{,}5/q$, in figuur 2 met straal $0{,}1/q$. De getallenlijn raakt in beide gevallen helemaal overdekt. Je kunt ook vrij makkelijk bewijzen dat dit zo is.

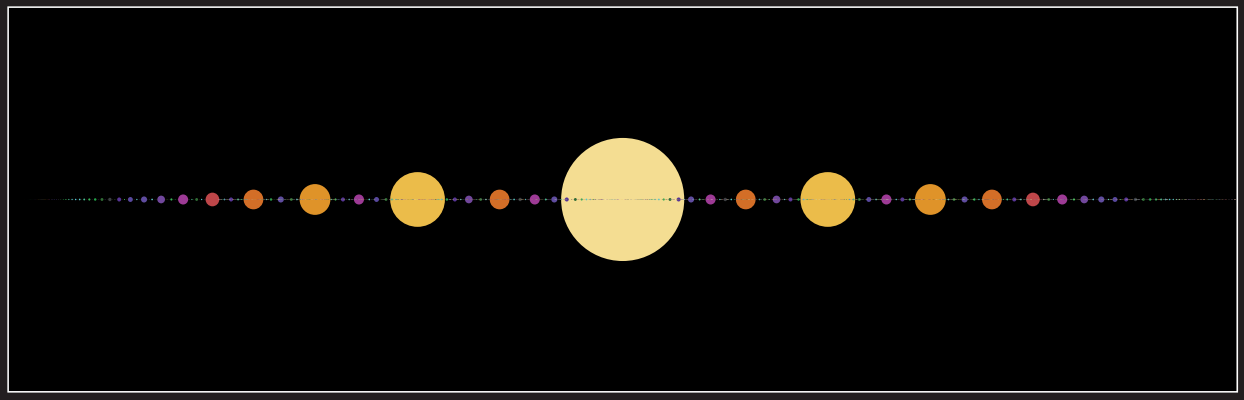
Bij schijfjes met straal $1/q^2$, zie figuur 3, raakt de getallenlijn nog steeds overdekt, maar bij schijfjes met straal $0{,}2/q^2$, zie figuur 4, niet meer. Dit is heel wat moeilijker te bewijzen!

Je kunt ook een getallen*vierkant* maken en elk punt $(\frac{p}{q}, \frac{r}{q})$ met een schijfje bedekken. Het resultaat als de stralen gelijk zijn aan $0{,}1/q^{1{,}5}$ zie je op het omslag van dit nummer.

Op www.math.uu.nl/people/beukers/realdisks/realdisks.html zijn twee postscript-bestanden te downloaden. In een teksteditor kun je zelf de parameters wijzigen en kijken wat dat oplevert. ■



Figuur 3



Figuur 4

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.
Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.

HOE IN TE ZENDEN?
Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs).
Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 15 juni 2008.

OPGAVE 154

Bepaal alle positieve gehele getallen x, y en z die voldoen aan

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{z+2}.$$

OPGAVE 155

De functie f heeft domein $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ (alle reële getallen behalve 0). Deze functie heeft verder de volgende eigenschappen:

- voor alle x en y in het domein geldt:
  $f(x)-f(y)=f(x)f(\frac{1}{y})-f(y)f(\frac{1}{x})$;
- er is een x in het domein met $f(x)=\frac{1}{2}$.

Bepaal $f(-1)$.

OPLOSSING 150

Het vlak wordt verdeeld in evenwijdige banen, allemaal met breedte 1. Elk van die banen wordt of wit of zwart gekleurd. Bewijs dat je bij elke mogelijke kleuring, en elke gelijkzijdige driehoek met gehele zijden, een manier kunt vinden om de driehoek op het vlak te leggen zodat de drie hoekpunten op banen van dezelfde kleur liggen.

OPLOSSING Stel dat er een kleuring en een gelijkzijdige driehoek met gehele zijden van lengte n is, waarbij het niet mogelijk is om de driehoek met alledrie de hoekpunten op een baan van dezelfde kleur te leggen. Dan weten we dat er ten minste één zwarte baan is met daarnaast een witte baan. Leg nu de driehoek zo neer, dat één van de zijden precies op de lijn tussen de witte en de zwarte baan ligt. Omdat het een gelijkzijdige driehoek is, weten we dat de hoogtelijn van de driehoek loodrecht op de banen ligt. Met de stelling van Pythagoras berekenen we dat de lengte van deze hoogtelijn $\sqrt{n^2 - (\frac{1}{2}n)^2} = \frac{1}{2}n\sqrt{3}$ is. Dit is geen geheel getal, dus het derde hoekpunt kan niet op een lijn tussen twee banen liggen, maar moet óp een baan liggen. Schuif de driehoek nu zover opzij, dat de eerste twee hoekpunten in de zwarte baan komen te liggen en het derde hoekpunt niet van baan verandert. Deze baan moet nu wel wit van kleur zijn, anders lagen alle hoekpunten op zwart. Schuif de driehoek nu een klein beetje de andere kant op, zodat de eerste twee hoekpunten op de witte baan komen te liggen en het derde hoekpunt nog steeds op dezelfde (witte) baan blijft liggen. Nu liggen echter alledrie de hoekpunten op een witte baan, terwijl we hadden aangenomen dat dit niet mogelijk was.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Frederick Fasseur** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Jelle van den Hooff** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren te Arnemijden en **Celina Szanto** van Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel. De boekenbon gaat naar Celina Szanto.

OPLOSSING 151

Is het mogelijk om 10^{10} te schrijven als het product van twee gehele getallen met de eigenschap dat in geen van die twee getallen (in de decimale notatie) het cijfer 0 voorkomt? Zo ja, geef dan twee getallen. Zo nee, bewijs dat het niet mogelijk is.

OPLOSSING Het is niet mogelijk om het getal 10^{10} te schrijven als product van twee gehele getallen a en b met de eigenschap dat in geen van die twee getallen (in de decimale notatie) het cijfer 0 voorkomt. De priemfactorontbinding van 10^{10} bevat immers 10 factoren 2 en 10 factoren 5 (want $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$). Deze factoren moeten we nu verdelen over de getallen a en b. Merk op dat als in één van deze getallen zowel een factor 2 als een factor 5 voorkomt, dit getal deelbaar is door 10 en dus eindigt op een 0. Daarom is de enige mogelijkheid nog dat $a = 2^{10}$ en $b = 5^{10}$ (of andersom en/of beide negatief). Echter $2^{10} = 1024$, dus ook dit getal bevat een 0. Er bestaan dus geen gehele getallen a en b met $a \cdot b = 10^{10}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henrik Jan van Eijsden** uit Capelle aan den IJssel, **Jelle van den Hooff** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Jeroen Huijben** van het Theresialyceum te Tilburg, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Tiara Kobald** van KSG Apeldoorn te Apeldoorn, **Sander Konijnenberg** van RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren te Arnemijden, **Celina Szanto** van Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel, **Han Verhulst** uit Gouda, **Puck Rombach** uit Middelburg en **Bart Wiersma** van Dalton Voorburg te Voorburg. De boekenbon gaat naar Jeroen Huijben.

ZEVEN MAANDEN TRAINEN

In januari vond de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade plaats. De ruim honderd beste deelnemers (uit verschillende klassen) worden uitgenodigd om op 12 september 2008 mee te doen aan de tweede ronde op de Technische Universiteit Eindhoven. En als je daar hoog scoort, word je uitgenodigd voor een intensief trainings- en selectieprogramma. In juni 2009 worden uit deze circa twintig kandidaten de zes teamleden geselecteerd om Nederland te vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in juli 2009 in Duitsland. Waarom is dat nodig, zo'n intensief trainingstraject? En hoe ziet die training er eigenlijk uit?

door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

De eerste Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) vond plaats in Roemenië in 1959. Sinds die tijd is het niveau van de opgaven steeds hoger geworden. Wil je enige kans maken, dan moet je behalve de schoolwiskunde nog een hoop meer van wiskunde hebben gezien. Daarom worden de deelnemers ruim een half jaar getraind in diverse wiskundige technieken die kunnen helpen bij het oplossen van de opgaven.

Naast de koordenvierhoekstelling en de bissectricestelling zie je bijvoorbeeld ook de cirkel van Apollonius, de rechte van Wallace, de stelling van Ceva en de stelling van Menelaos. Verder krijg je onderwerpen die pas op de universiteit aan bod komen, zoals getaltheorie en algebra. Na een paar maanden training kijk je niet meer raar op van woorden als modulorekenen, restklasse, polynoom of Euler-φ-functie. Ook ongelijkheden van meerdere veranderlijken, zoals $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, en algemene bewijsmethoden, zoals inductie en het ladenprincipe, komen aan bod. Hieronder kun je lezen over een probleem uit de combinatoriek dat op de training wordt behandeld.

De training start met een trainingsweekend half november. Vanaf dat moment krijg je elke week een setje van vier opgaven thuisgestuurd om aan te werken, dat vervolgens door een van de begeleiders wordt nagekeken. Verder is er iedere maand een trainingsdag en in februari een tweede trainingsweekend; dat zijn de momenten dat je echt nieuwe theorie leert. Bij het zelf werken aan de opgaven kun je de theorie dan proberen toe te passen. In de week na het Centraal Examen (in juni) is de afsluitende trainingsweek, die eindigt met een eindtoets. Vanaf dan is het team van zes leerlingen bekend en die gaan er natuurlijk nog even een maand heel hard tegenaan!

Kandidaat-teamleaden trainen voor de IMO komende zomer (foto: Bart van Overbeeke)

PAASEIEREN VERVEN De paashaas staat op het punt 20 eieren te verstoppen, maar eerst wil hij deze eieren nog een vrolijk kleurtje geven. Elk ei krijgt één kleur en daarvoor heeft hij 5 kommetjes met verf tot zijn beschikking: blauw, geel, paars, rood en zilver. Door elk ei met één van de vijf kleuren naar keuze te beschilderen, heeft hij uiteindelijk bijvoorbeeld 2 blauwe, 0 gele, 8 paarse, 4 rode en 6 zilveren eieren in zijn mandje liggen. Maar het resultaat zou net zo goed uit 3 blauwe, 2 gele, 5 paarse, 7 rode en 3 zilveren eieren kunnen bestaan. En zo kunnen we nóg wel een paar manieren beden-

ken hoe hij de 20 eieren zou kunnen beschilderen. Hoeveel van zulke eierkleuringen zijn er eigenlijk? Oftewel, op hoeveel manieren is het mogelijk 20 eieren te beschilderen als het ons er alleen om gaat hoeveel eieren er uiteindelijk van de verschillende kleuren zijn? We hebben twee manieren gezien, die we kunnen aanduiden met (2, 0, 8, 4, 6) en (3, 2, 5, 7, 3).

Voor het eerste ei zijn er 5 keuzes, voor het tweede ei ook, enzovoort. Nu zou je misschien denken dat er 5^{20} mogelijkheden zijn om de eieren te verven. Toch gaat hier iets mis. Een kleurenreeks als BBBGGPPPPPRRRRRRRZZZ heeft immers hetzelfde resultaat als BGBGBPPPPPZZZRRRRRRR: in beide gevallen hebben we uiteindelijk 3 blauwe, 2 gele, 5 paarse, 7 rode en 3 zilveren eieren. Het blijkt dat er maar liefst $\binom{20}{3,2,5,7,3}$ = 55.870.214.400 van zulke kleurenreeksen zijn die allemaal leiden tot dit resultaat (3, 2, 5, 7, 3), zie eventueel het artikel 'Slim coderen en handig dubbel tellen' uit de vorige *Pythagoras*. De eierkleuring (3, 2, 5, 7, 3) is dus 55.870.214.399 keer teveel geteld!

Laten we het probleem eens op een andere manier bekijken. We leggen de eieren op een rij (00000000000000000000) en pakken vier messen (aangeduid met +). Die messen schuiven we willekeurig tussen de eieren; het maakt niet uit of we ze naast elkaar leggen of niet, of helemaal voorraan of helemaal achteraan. De volgorde waarin we dit doen, maakt ook niet uit. De situatie kan er dan na afloop bijvoorbeeld als volgt uit zien: 000+00+00000+0000000+000. We spreken nu af dat de paashaas alle eieren vóór het eerste mes blauw verft, de eieren tussen eerste en tweede mes geel, enzovoort. Op die manier correspondeert bovenstaande 0+-rij precies met de eierkleuring (3, 2, 5, 7, 3). En omgekeerd hoort bij bijvoorbeeld (0, 0, 10, 0, 10) de 0+-rij ++0000000000++0000000000.

Bij elke eierkleuring hoort nu precies één zo'n 0+-rijtje en andersom. Dus kunnen we net zo goed het aantal 0+-rijtjes gaan tellen. Nu is zo'n 0+-rijtje uiteindelijk niets anders dan een opsomming van 20 0-tekens en 4 +-tekens in willekeurige volgorde. Dat zijn in totaal 24 tekens waarvan we er 4 moeten uitkiezen als + (of juist 20 als 0). Op deze manier vinden we dat er $\binom{24}{4} = \binom{24}{20}$ = 10.626 verschillende 0+-rijtjes zijn. Dus zijn er 10.626 manieren om de eieren te verven!

In wiskundige termen hebben we nu het volgende probleem opgelost: *Hoeveel vijftallen niet-negatieve gehele getallen* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *voldoen aan de vergelijking* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$?

Ter afsluiting presenteren we een paar soortgelijke telproblemen. ■

Opgave 1. Hoeveel vijftallen *positieve* gehele getallen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ voldoen er aan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$?

Opgave 2. Hoeveel viertallen positieve oneven getallen (x_1, x_2, x_3, x_4) voldoen er aan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$?
(uit *Titu Andreescu en Zuming Feng*, 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team)

Opgave 3. Hoeveel oplossingen (x_1, x_2, x_3, x_4) (met de x_i niet-negatief geheel) heeft $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$?

ANTWOORDEN

Opgave 1. Oplossing A: Door over te gaan op $y_i = x_i - 1$, zie je in dat je in feite op zoek bent naar vijftallen niet-negatieve gehele getallen met som 15. Dat zijn er met de paaseieren methode $\binom{19}{4} = 3.876$.

Oplossing B (variatie op paaseieren methode): Bekijk weer de 20 eieren. Daartussen zitten 19 tussenruimtes, aangeduid met T: 0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0. Van die 19 T'tjes moeten er 4 een + worden; dat kan op $\binom{19}{4} = 3.876$ manieren.

Opgave 2. Door x_i te schrijven als $x_i = 2y_i + 1$, zie je dat je in feite op zoek bent naar vijftallen niet-negatieve gehele getallen met som 47. Dat zijn er met de paaseieren methode $\binom{50}{3}$.

Opgave 3. Oplossing A: Je zou kunnen zeggen: dan moet dus óf wel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ($\binom{3}{3}$ oplossingen), óf wel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ($\binom{4}{3}$ oplossingen), óf wel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ ($\binom{5}{3}$ oplossingen), etc. Dus het antwoord is (elke keer met de paaseieren methode) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{23}{3}$.

Oplossing B: Je kunt ook een niet-negatieve gehele spookvariabele x_5 introduceren die $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ aanvult tot 20, dus $x_5 = 20 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$; dan hoort er bij elke oplossing precies een vijftal niet-negatieve gehele getallen met som 20. Dat zijn er met de paaseieren methode $\binom{24}{4}$.
Gevolg: Met deze twee verschillende antwoorden hebben we meteen dit bewezen:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{23}{3} = \binom{24}{4}.$$

Dit wordt wel de 'sok van Pascal' genoemd (maar je mag het net zo goed een hockeystick noemen): als je al deze binomiaalcoëfficiënten even omcirkelt in de driehoek van Pascal, snap je waarom het zo heet!

FlipIt en _Fiver_ zijn twee namen voor hetzelfde spelletje. Het is beschikbaar voor allerlei mobiele telefoons en je kunt het downloaden op je computer of spelen op het internet. Over het spel kun je vanuit wiskundig oogpunt interessante vragen stellen.

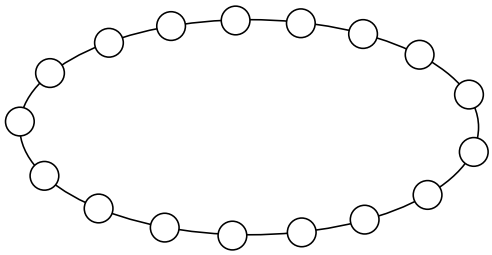
■ door Jaap en Jordi Top

TOTAAL GEFLIPT!

Fiver kun je spelen op bijvoorbeeld www.maze-works.com/fiver/index.htm. Hierbij speel je op een $n \times n$ bord, waarbij je n zelf mag kiezen tussen 3 en 8. *FlipIt* kun je op www.novelgames.com/flash-games/game.php?id=7 (of ook via www.math.rug.nl/~top) spelen op een $n \times m$ bord, waarbij je n en m kiest tussen 2 en 10.

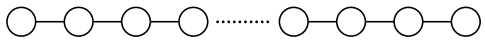
Het spelbord bestaat uit een aantal schijven, die aan het begin van het spel allemaal wit zijn. Het is de bedoeling alle schijven zwart te maken. Dat doe je door sommige schijven aan te wijzen. Wijs je een schijf aan, dan verandert deze, en ook al z'n buren, van kleur (dus wit wordt zwart en zwart wordt wit). De naam 'flipit' slaat op dit omflippen van de kleur. De naam 'fiver' slaat op het rechthoekige bord waarop je het speelt: wijs je een schijf aan die niet aan de rand van het bord ligt, dan flip je precies 5 schijven van kleur (de schijf zelf, z'n linker- en rechterbuur, en z'n beneden- en bovenbuur). Thuis spelen we dit spel ook wel met rijen speelkaarten, die dan omgedraaid moeten worden.

Je zou het spel ook op heel andere netwerken van allemaal schijven kunnen spelen, waarin je zelf bepaalt welke schijven elkaars buren zijn en welke niet. Bijvoorbeeld een kring van schijven:



In dit geval lukt het om alle schijven van kleur te flippen. Immers, wijs ze gewoon allemaal aan. Elke schijf heeft precies twee buren, dus hij verandert in totaal drie keer van kleur (namelijk, als hij zelf aangewezen wordt, en als de ene buur wordt aangewezen, en als de andere aan de beurt is). Elke witte schijf wordt zo eerst zwart, dan weer wit, en ten slotte zwart.

Nog een voorbeeld: een rij (witte) schijven:

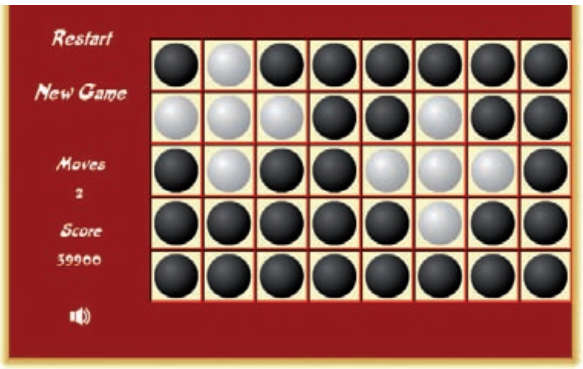


Wijzen we de tweede schijf in de rij aan, dan worden de eerste drie zwart. Vervolgens ook de vijfde, dan zijn al de eerste zes zwart. Is het totaal aantal schijven een veelvoud van 3, dan kun je door zo door te gaan ervoor zorgen dat ze allemaal zwart worden. Dat lukt ook voor rijen van een andere lengte: voor $3n + 2$ schijven wijs je eerst de meest linkse aan, en dan blijft een rij bestaande uit precies $3n$ witte schijven over; hiervoor weten we al hoe we alles zwart kunnen maken. En voor een rij bestaande uit $3n + 1$ schijven wijzen we zowel de meest linkse als de meest rechtse aan. Hierna blijft middenin een rij bestaande uit $3(n - 1)$ schijven over, en die konden we al flippen.

Je gaat je na dit succes afvragen of je ieder netwerk van schijven geheel kan flippen. Het antwoord is: JA! Dat is gemakkelijk gezegd, maar een bewijs ervoor vergt nog best wat lastige wiskunde. Afgelopen jaar was dit een van de opgaven in de LIMO, de jaarlijkse wedstrijd waarin teams van wiskundestudenten van Nederlandse universiteiten hun tanden in een aantal problemen zetten. Niemand van hen had de opgave over FlipIt/Fiver helemaal goed, al zaten een paar teams behoorlijk op de goede weg.

Het idee is het volgende. Nummer de schijven 1, 2, 3,... Als je tijdens het spel de schijven 2, 5, 6 zou willen aanwijzen, dan noteer je dit als (0, 1, 0, 0, 1, 1,...). Dus als een rij nullen en enen, met op de n-de plek een nul als de n-de schijf niet wordt aangewezen, en een één als je die schijf wel aanwijst. Het effect van zo'n rij aan te wijzen punten is dat sommige schijven zwart worden en andere misschien wit blijven. Ook dat noteer je als een rij nullen en enen zoals (0, 0, 0, 1, 1, 0, ...) (dit voorbeeld betekent: vierde en vijfde schijf worden zwart, eerste en tweede en derde en zesde blijven wit).

Als we met V de verzameling van alle (onein-

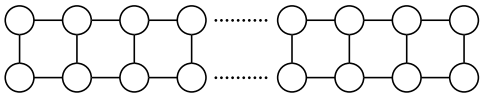


dige) rijtjes nullen en enen noteren, kun je het hele spel zien als een voorschrift

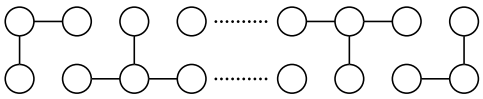
$$F : V \to V.$$

De kunst is dan te laten zien dat het rijtje (1, 1, 1, 1, ...) (dus, alle schijven zwart) in het beeld van de afbeelding F zit. Daar is wiskunde voor nodig die niet op de middelbare school wordt behandeld; als je het echt graag wilt zien, kun je op de LIMO-website (http://limo.a-eskwadraat.nl) zoeken naar de oplossingen van de LIMO 2007.

Wij kijken naar nog een voorbeeld, namelijk de $2 \times n$ rechthoek:

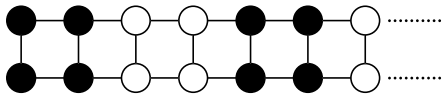


Is n oneven, dan vatten we dit op als vereniging van een L-vormig netwerkje aan de ene kant, vervolgens een aantal T-vormige netwerkjes (beurtelings rechtop of omgedraaid), en aan het andere eind nog een L-vorm (rechtop of ondersteboven, afhankelijk van $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 3$).



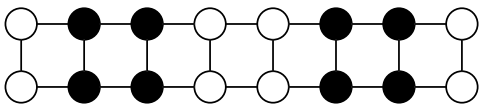
Door in ieder van deze mini-netwerkjes de centrale schijf aan te wijzen flipt het hele netwerk. Dus dit is een oplossing. Je kunt deze oplossing spiegelen (dus als je ergens een schijf in de onderste rij had aangewezen, dan wijs je nu op die plek de schijf in de bovenste rij aan, en omgekeerd), en dat is een andere oplossing. In termen van het voorschrift F bij dit voorbeeld, betekent dit dat er verschillende rijtjes $r \neq s$ zijn met $F(r) = (1, 1, 1, 1, ...) = F(s)$. Dus er zitten minder rijtjes in het beeld van F dan er 'aanwijsrijtjes' zijn. Niet elke combinatie van zwarte en witte schijven is dus in dit geval te bereiken. (Ken je een voorbeeld van zo'n onbereikbare combinatie?)

Bovenstaande strategie levert alleen voor oneven n een oplossing voor het $2 \times n$ bord. Een andere strategie is om steeds in een 2×2 vierkant alle schijven aan te wijzen, dan in het ernaastgelegen 2×2 vierkant geen enkele schijf aanwijzen, daarnaast weer 2×2 wel, enzovoort.



Een schijf die hier aangewezen wordt, flipt in totaal drie keer van kleur (namelijk als hij zelf aangewezen wordt, en als z'n beneden- of bovenbuur aan de beurt is, en als z'n linker- of rechterbuur aan de beurt is). Heb je een schijf die niet zelf aangewezen wordt en die bovendien niet helemaal links of helemaal rechts zit, dan heeft deze precies één buur die wel wordt aangewezen. Dus ook deze schijf flipt naar zwart. Maar als er helemaal links een 2×2 vierkant met niet aangewezen schijven staat, dan blijven de twee linkse schijven daarvan wit. En hetzelfde geldt voor een 2×2 vierkant niet aangewezen schijven aan de rechterkant: de twee meest rechtse schijven ervan zouden wit blijven.

We zien dus dat deze strategie werkt, behalve als er helemaal links of helemaal rechts een 2×2 vierkant met niet aangewezen schijven overblijft. Je kunt nu de mogelijkheden voor n langslopen: voor $n = 4k$ wijs je de twee schijven helemaal links (en ook helemaal rechts) niet aan, daarnaast 2×2 wel, daarnaast niet, enzovoort.



Voor $n = 4k + 2$ begin je meteen links met een 2×2 vierkant dat je aanwijst. Daarnaast een vierkant niet, dan weer wel, enzovoort. Je eindigt dan helemaal rechts met een vierkant dat wordt aangewezen. Ook voor $n = 4k + 3$ begin je meteen links met een 2×2 vierkant dat je aanwijst, daarnaast een vierkant niet, enzovoort. Aan het eind blijven dan precies twee schijven over die je niet aanwijst.

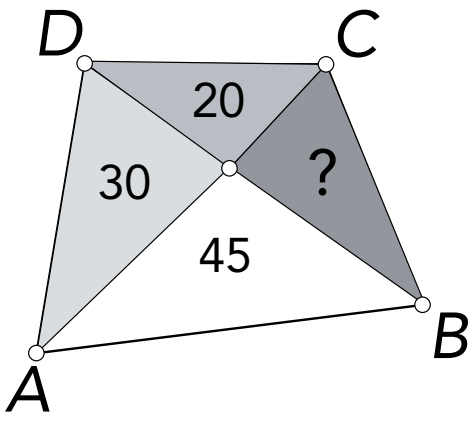
De strategie werkt niet als $n = 4k + 1$. Maar dat is niet erg, want zulke n zijn oneven getallen. En daarvoor hadden we al een andere strategie! Voor alle even n werkt het wel, en dus hebben we nu voor elke n een oplossing bij het $2 \times n$ bord.

Misschien lukt het ook wel om manieren te bedenken die voor een $3 \times n$ bord altijd een oplossing geven. Wij hebben dit niet geprobeerd. Als iemand een oplossing kent, dan horen we dit graag! ■

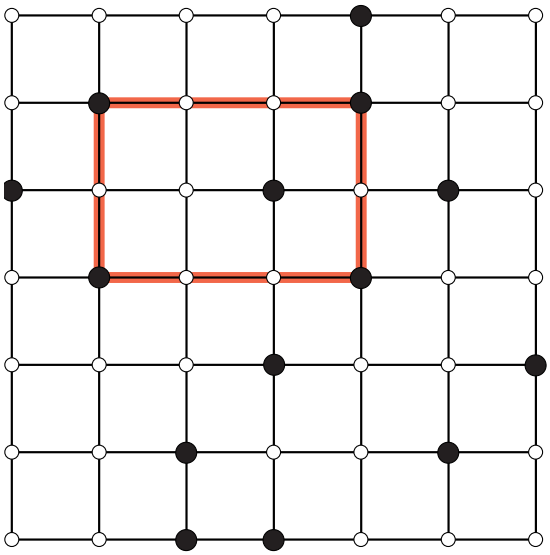
PROBLEMEN

door Dion Gijswijt

VIER OPPERVLAKTES In de figuur zie je een vierhoek die door zijn diagonalen in vier driehoekjes is verdeeld. Van drie driehoekjes is de oppervlakte al gegeven. Vind jij de vierde oppervlakte?

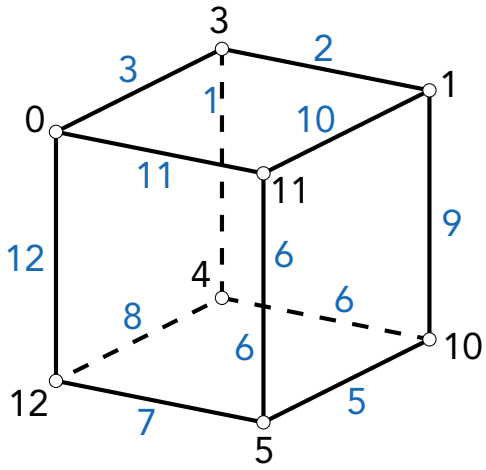


PIONNEN PLAATSEN Gegeven is een rooster van 7 × 7 stippen. Je mag op elke stip een pion neerzetten. Maar er mogen nooit vier pionnen zijn die de hoekpunten van een rechthoek vormen. Dat wil zeggen: als je twee verticale en twee horizontale lijnen neemt, dan mogen niet alle vier de snijpunten bezet worden door een pion. In de figuur zie je een situatie waarbij het fout gaat. Wat is het maximale aantal pionnen dat je kunt plaatsen?



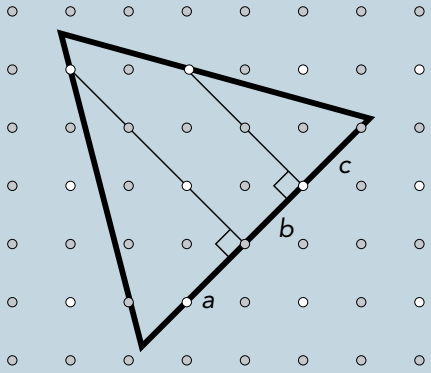
VIERVLAK Gegeven is een viervlak $ABCD$ en een bol die aan alle zes de ribben van het viervlak raakt. Als je weet dat $|AB| = 11$, $|AC| = 34$, $|AD| = 38$ en $|BC| = 35$, wat zijn dan de lengtes van de ribben BD en CD?

VERSCHILLENDE VERSCHILLEN Geef elk van de acht hoekpunten van een kubus een getal uit 0 tot en met 12. De acht getallen moeten verschillend zijn. Schrijf nu op elk van de twaalf ribben het verschil van de twee eindpunten. Kun je de acht getallen zó kiezen dat de twaalf verschillen precies de getallen 1 tot en met 12 zijn? In de figuur zie je een 'bijna-oplossing'. Er is alleen geen ribbe met verschil 4.

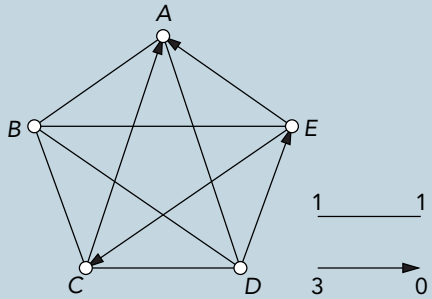


OPLOSSINGEN

GEVANGEN DRIEHOEK We berekenen $a + b + c$, zie onderstaande figuur. Het is duidelijk dat $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Omdat a de helft is van de zijde van een gelijkzijdige driehoek met hoogte $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, weten we dat $a = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. Net zo geldt $c = \frac{2}{2}\sqrt{6}$. Dus $a + b + c = \frac{5}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



COMPETITIE Noem de teams met score 2, 4, 5, 6, 7 respectievelijk A, B, C, D, E. In totaal zijn 24 punten gescoord, dus er werd 30 – 24 = 6 keer gelijk gespeeld. Team A speelde 2 keer gelijk en verloor 2 keer. Teams B, C, D, E speelden onderling 4 keer gelijk en daarmee elk ten minste 1 keer. Team D speelde 0, 3 of 6 keer gelijk en dus precies 3 keer. Team E speelde 1 keer gelijk, team C precies 2 keer en team B speelde alleen gelijkspel. Nu zien we snel dat er maar één oplossing is:



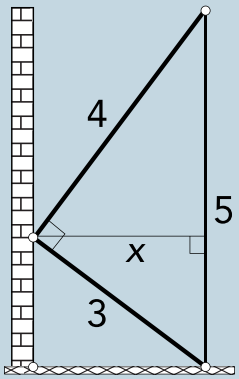
DEUREN Nummer de acht deuren met drie bits a, b, c elk gelijk aan 0 of 1. Als de quizmaster niet mocht liegen, waren drie vragen genoeg: vraag van elke bit of die gelijk is aan 0.

In ons geval zijn drie extra vragen voldoende: vraag of $a + b$, $a + c$ en $b + c$ even zijn. Met 1 of 3 antwoorden 'ja' weet je dat er een leugen is uitgesproken, zodat de eerste drie antwoorden de juiste deur wijzen. Met 0 of 2 keer 'ja' bij de laatste drie antwoorden, zijn deze drie antwoorden correct. We kunnen nu van elk tweetal antwoorden op de eerste drie vragen zien of er een leugen bij zit. Daarmee zijn a, b en c eenvoudig te bepalen.

OPEENVOLGENDE KWADRATEN

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2,$$
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

LADDERS De twee ladders vormen een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. De oppervlakte van deze driehoek is zowel gelijk aan $\frac{1}{2} \times 3 \times 4$ als aan $\frac{1}{2} \times x \times 5$. Dus $x = \frac{12}{5}$.



Met dank aan Elias Buissant des Amorie.

In de vorige *Pythagoras* heb je kunnen lezen over volmaakte en bevriende getallen. Een voorbeeld van een bevriend getallenpaar is (220, 284), omdat de som van de delers (inclusief 1 maar zónder het getal zelf) van 220 gelijk is aan 284, en omgekeerd de som van de delers van 284 gelijk is aan 220. In deze tweede aflevering van 'hyvende' getallen bekijken we hoe je bevriende getallenparen kunt vinden uit andere bevriende getallenparen, en hoe je ze met brute rekenkracht kunt vinden.

■ door Herman te Riele

HYVENDE GETALLEN

DEEL 2

In 1750 publiceerde Leonhard Euler een lijst van maar liefst 59 bevriende getallenparen. Lang geleden zat ik eens naar deze lijst te kijken. Bij de volgende twee paren:

$$(2^4 \cdot 23 \cdot 47,\ 2^4 \cdot 1151)$$

en

$$(2^4 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 9767,\ 2^4 \cdot 1583 \cdot 7103)$$

viel me op dat het eerste getal in het eerste paar een deler is van het eerste getal in het tweede paar. Dit suggereert de volgende vraag: Als (au, ap) een *gegeven* bevriend getallenpaar is met p priem en $\text{ggd}(a, p) = 1$, kan dan ook (auq, ars) met q, r en s verschillende priemgetallen, een bevriend getallenpaar zijn?

Enig rekenwerk geeft het antwoord en de volgende **regel**: *als* (au, ap) *een bevriend getallenpaar is met* p *priem en* $\text{ggd}(a, p) = 1$, *en als* r *en* s *beide priem zijn die voldoen aan de zogenaamde* bilineaire *vergelijking*

$$(r - p)(s - p) = (p + 1)(p + u)$$

en als

$$q = r + s + u$$

óók priem is, met $\text{ggd}(au, q) = \text{ggd}(a, rs) = 1$, *dan is* (auq, ars) *een bevriend getallenpaar.*

Je kunt zelf proberen om deze regel te bewijzen. (Hint: volgens de definitie van bevriende getallen, zoals gegeven in deel 1, moet je bewijzen dat $\sigma(auq) = \sigma(ars)$, en dat $\sigma(auq) = a(uq + rs)$; gebruik hierbij alles wat gegeven is over a, u, p, r, s en q.)

We hebben nu een regel gevonden die *uit een gegeven bevriend getallenpaar* (soms) andere bevriende getallenparen kan genereren. Nemen we het bovengenoemde voorbeeld met $a = 16$, $u = 23 \cdot 47 = 1081$ en $p = 1151$, dan vinden we voor r en s:

$$(r - 1151)(s - 1151) =$$
$$= 1152(1151 + 1081) = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 31$$

en voor q:

$$q = r + s + 1081.$$

We zoeken dus priemgetallen r, s en q die aan deze

twee relaties voldoen. Dit doen we door het rechterlid van de vergelijking voor r en s op alle mogelijke manieren te schrijven als een product $A \cdot B$ van twee even getallen met $A < B$, en daaruit $r = 1151 + A$ en $s = 1151 + B$ te berekenen.

Controleer zelf dat het getal $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 31$ op 45 manieren kan worden geschreven als product van even getallen A en B met $A < B$.

Als r en s beide priem zijn, dan gaan we na of $q = r + s + 1081$ ook priem is. Zo ja, dan is (*auq*, *ars*) een bevriend getallenpaar. Op deze manier vinden we *twee* bevriende getallenparen: $A = 2^4 \cdot 3^3$, $B = 2^6 \cdot 3 \cdot 31$ geeft de drie priemgetallen $r = 1583$, $s = 7103$ en $q = 9767$ en dus het (al bovengenoemde) bevriende getallenpaar

$$(168930032, 179904784) = \\ = (2^4 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 9767, 2^4 \cdot 1583 \cdot 7103),$$

en $A = 2^3 \cdot 31$, $B = 2^7 \cdot 3^4$ geeft de drie priemgetallen $r = 1399$, $s = 11519$ en $q = 13999$ en dus het bevriende getallenpaar

$$(242126704, 257841296) = \\ = (2^4 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 13999, 2^4 \cdot 1399 \cdot 11519).$$

Dit laatste komt niet voor in Eulers lijst en is pas veel later, in 1929, door de Fransman P. Poulet gevonden. Euler was kennelijk niet op de hoogte van deze regel om bevriende getallenparen te 'fokken'.

DE VIJVER-LEEGPOMPMETHODE Een andere, misschien meer voor de hand liggende, manier om bevriende getallenparen te vinden is hierboven al gesuggereerd: reken voor *alle* getallen m die onder een gegeven grens G liggen $n := s(m)$ uit en, als $n > m$, reken vervolgens $s(n)$ uit. Als $s(n) = m$, dan hebben we een bevriend getallenpaar (m, n) gevonden. Naarmate de computers steeds sneller werden, heeft men deze berekeningen uitgevoerd voor steeds grotere waarden van G. De Duitser Walter Borho was niet zo gecharmeerd van deze 'exhaustive' methode. Hij vergeleek hem met een visser die een vijver leegpompt om dan de vissen daaruit te gaan 'vangen'. Daar staat tegenover dat het bekijken van tabellen van met de vijver-leegpompmethode berekende bevriende getallenparen aanwijzingen kan geven voor het vinden van bepaalde regels, zoals de in het vorige nummer besproken regels van Thābit ibn Qurra en van Euler.

Verder komen er in deze tabellen ook vele bevriende getallenparen voor van de vorm (*au*, *ap*) en daaruit konden met behulp van bovengenoemde regel vele andere bevriende getallenparen worden gevonden.

De onderstaande tabel geeft een overzicht van wat er tot nu toe bereikt is met de vijver-leegpompmethode. In de tweede kolom staat $A(G)$, het totale aantal bevriende getallenparen (m, n) met $1 < m \leq G$. We zien dat $A(G)$ groeit met G, maar kunnen we dat groeigedrag ook in een formule vangen? Het antwoord daarop is niet bekend, maar stel eens dat $A(G)$ zich gedraagt als G^α, dan kunnen we voor iedere regel in de tabel $\log(A(G))/\log(G)$ uitrekenen (derde kolom) en als dit naar een bepaalde waarde zou convergeren voor stijgende waarden van G, dan zouden we een aanwijzing voor de waarde van α (als die bestaat) kunnen vinden. De derde kolom laat zien dat er inderdaad convergentie lijkt te gaan plaatsvinden. Wat is de limiet? Eenderde? Niemand weet het (nog), maar het zou wel een stimulans kunnen zijn om de vijver-leegpompmethode nog een stuk door te zetten voorbij $G = 10^{14}$!

In 1995 is de Deen Jan Munch Pedersen begonnen met een website waarop hij alle bekende bevriende getallenparen bijhoudt, zie http://amicable.homepage.dk/knwnap.htm. Op de datum van de laatste update, 28 september 2007 op het moment dat we dit schrijven, waren er bijna 12 miljoen bevriende getallenparen bekend! De twee getallen in het grootste bevriende getallenpaar in Pedersens lijst hebben elk 24.073 decimale cijfers. Dit roept de vraag op of er misschien *oneindig veel* bevriende getallenparen zijn. Ook op deze vraag is het antwoord niet bekend! ■

G	$A(G)$	$\log(A(G))/\log(G)$
10^5	13	0,222
10^6	42	0,271
10^7	108	0,290
10^8	236	0,297
10^9	586	0,3075
10^{10}	1427	0,3154
10^{11}	3340	0,3203
10^{12}	7642	0,3236
10^{13}	17519	0,3264
10^{14}	39374	0,3282

Aantallen bevriende getallen $A(G)$ met $\log(A(G))/\log(G)$

Evariste Galois is waarschijnlijk de jongst gestorven bekende wiskundige. Hij werd geboren in 1811 en stierf op twintigjarige leeftijd in een duel. Tijdens zijn korte leven heeft hij ideeën ontwikkeld die pas decennia later door anderen begrepen werden en die daarna van grote invloed zijn geweest, vooral in de algebra.

■ door Jeanine Daems

EVARISTE GALOIS (1811-1832):

REVOLUTIONAIR (EN) WISKUNDIGE

Op 25 oktober 1811 werd Evariste Galois geboren in het dorpje Bourg-La-Reine, vlakbij Parijs. Zijn ouders waren goed opgeleid en hadden veel verstand van filosofie, klassieke literatuur en religie. Vader Nicholas Gabriel Galois was een liberaal en een tegenstander van de Franse monarchie.

Het leven van Galois is sterk beïnvloed door de politieke situatie in het Frankrijk van zijn tijd. De Franse Revolutie brak uit in 1789, toen de burgers van Parijs in opstand kwamen tegen koning Lodewijk XVI en de macht van de adel en de geestelijkheid. Lodewijk XVI werd afgezet en onthoofd. Vanaf 1800 was Napoleon aan de macht, en hij was nog volop bezig om te proberen de rest van Europa te veroveren toen Galois werd geboren.

Voor Napoleon was zijn mislukte veldtocht tegen Rusland, waarbij zijn leger enorme verliezen leed, het begin van het einde. Uiteindelijk werd Napoleon in 1815 in de Slag bij Waterloo verslagen door de Engelsen en de Pruisen. Napoleon droeg de troon over aan zijn zoon, Napoleon II, maar al snel kwam Lodewijk XVIII aan de macht.

Galois groeide dus op in een erg onrustige periode. Galois' vader was politiek betrokken: toen Evariste vier jaar oud was, werd zijn vader gekozen tot burgemeester van Bourg-La-Reine. Tot zijn twaalfde kreeg Evariste thuis onderwijs van zijn moeder. Ze leerde hem Grieks, Latijn en theologie, waarbij ze haar eigen kritische houding overdroeg op haar zoon. Toen hij twaalf was, ging hij voor het eerst naar school, naar het Lycée Louis-le-Grand. Ook op school was de situatie onstabiel: in zijn eerste semester daar werd er een leerlingenopstand gepland. Het gerucht ging dat de school weer onder

invloed van de kerk zou komen, en de kerk werd sterk in verband gebracht met de monarchie. De leerlingen waren vooral republikeinen, dus tegen de monarchie. De plannen voor de opstand werden ontdekt, en de verantwoordelijke leerlingen werden van school gestuurd. Galois was nog te jong om mee te doen.

WISKUNDE In februari 1927 kreeg Galois voor het eerst wiskunde. Hij werd zo enthousiast dat hij zijn andere schoolvakken liet sloffen. Een docent schreef:

Deze leerling werkt alleen op de hoogste niveaus van de wiskunde. De jongen is waanzinnig bezeten van wiskunde. Mij dunkt dat het voor hem het beste zou zijn als zijn ouders hem zouden toestaan zich alleen hierop toe te leggen. Voor de rest verknoeit hij hier zijn tijd, doet niets dan zijn docenten kwellen en haalt zich alleen maar straffen op de hals.

In 1828 deed Galois toelatingsexamen voor de Ecole Polytechnique, de beste universiteit van Parijs, waar veel republikeinse studenten op zaten. Ondanks zijn uitzonderlijke intelligentie zakte hij, waarschijnlijk door zijn houding (Galois schijnt een nogal opvliegend karakter gehad te hebben) en doordat hij te grote stappen maakte in zijn redeneringen. Terug op school ging hij verder met wiskunde. Hij kreeg les van Louis-Paul-Emile Richard, die zelf in zijn vrije tijd wiskundecolleges volgde aan de Sorbonne en het wiskundig onderzoek van die tijd bijhield. Galois begon de boeken van de beste wiskundigen te bestuderen, zoals die van Legendre en Langrange. In 1829 al publiceerde hij zijn eerste artikel, over kettingbreuken, in de *Annales de mathématiques*. Ook stuurde hij twee artikelen over het oplossen van vergelijkingen naar de Academie van Wetenschappen. De bekende wiskundige Cauchy moest ze beoordelen.

Op 2 juli 1829 gebeurde er iets vreselijks: Galois' vader pleegde zelfmoord. De aanleiding was de komst van een nieuwe jezuïtische priester in Bourg-La-Reine, die zich stoorde aan de republikeinse ideeën van burgemeester Galois. Hij begon een lastercampagne tegen de burgemeester. Galois schreef altijd al geestige gedichtjes, en de priester maakte daar gebruik van door een aantal beledigende gedichtjes te publiceren onder zijn naam. Dat veroorzaakte een rel, burgemeester Galois kon de schande niet aan en sloeg de hand aan zichzelf.

Dat jaar zakte Galois weer voor het toelatingsexamen van de Ecole Polytechnique. Hij besloot naar de Ecole Normale Supérieure te gaan. Daarvoor moest hij eerst een soort eindexamen halen, wat hem lukte. Maar de examinator voor literatuur schreef:

Dit is de enige student die zwak geantwoord heeft, hij weet absoluut niets. Ik heb gehoord dat deze student buitengewone capaciteiten heeft voor wiskunde. Dat verbaast me zeer, want na zijn examen geloofde ik dat hij maar weinig intelligentie bezat.

Galois stuurde nieuw werk over vergelijkingen naar Cauchy, maar hij ontdekte al snel dat een deel van zijn werk hetzelfde was als een artikel van de Noor Niels Henrik Abel, die inmiddels overleden was. Op advies van Cauchy, die erg onder de indruk was van zijn resultaten, combineerde Galois zijn werk tot één nieuw artikel met al zijn ideeën erin. Hij wilde daarmee meedoen aan een wiskundige prijsvraag van de Academie van Wetenschappen, de *Grand Prix* voor de wiskunde. Hij stuurde het artikel naar Joseph Fourier, de secretaris van de Academie, die alle inzendingen moest doorsturen. Fourier overleed een tijdje voor de beoordelingen, en bij de uitslag bleek dat Galois niet alleen niet had gewonnen, maar zelfs niet was ingeschreven! Zijn ingestuurde artikel is nooit meer teruggevonden. Galois geloofde dat zijn artikel expres was zoekgemaakt en hij vermoedde dat de Academie deel was van een samenzwering om hem uit te sluiten van de wiskundige gemeenschap.

MEER POLITIEKE ONRUST In juli 1930 brak er weer een revolutie uit in Parijs. Karel X wilde zijn macht niet inperken en trad af. Er waren rellen in Parijs en de directeur van de Ecole Normale, Guigniault, sloot zijn studenten op in de school om ze ervan te weerhouden mee te vechten. Galois was daar erg boos over, maar het lukte hem niet om te ontsnappen. De republikeinen verloren. Guigniault schreef in de krant aanvallende artikelen over

zijn studenten. Toen Galois daar een antwoord op schreef, werd hij van de universiteit gestuurd. Zo kwam er een einde aan zijn officiële wiskundestudie. Hij begon les te geven in zijn eigen ontdekkingen, maar er kwamen nauwelijks studenten, en hij stopte tijdelijk met wiskunde.

Galois werd lid van de artillerie van de Nationale Garde, een republikeins deel van de burgerwacht. Lodewijk-Filips, de nieuwe koning, schafte de Nationale Garde snel daarna af uit angst voor meer rellen. Galois ging weer aan de slag met wiskunde. Maar in mei 1931 kwam een aantal leden van de Nationale Garde vrij uit de gevangenis. Er was een diner om dat te vieren, en tijdens een toost uitte Galois bedreigingen aan de koning, terwijl hij een dolk in zijn hand had. Hij werd gearresteerd, maar werd vrijgesproken: een slimme advocaat en zijn vrienden konden de jury ervan overtuigen dat door het lawaai niemand goed had kunnen horen wat hij precies zei.

Op 14 juli 1831, de dag waarop het begin van de Franse Revolutie werd gevierd, provoceerde Galois de autoriteiten door het uniform van de verboden Nationale Garde aan te trekken. Hij werd opnieuw gearresteerd. Toen hij in de gevangenis zat, kreeg hij van Poisson een afwijzing van een nieuwe versie van zijn artikel over vergelijkingen. Poisson schreef: *Zijn argument is niet voldoende duidelijk en niet voldoende ontwikkeld om ons in staat te stellen de wiskundige strengheid te controleren.* Hij moedigde Galois wel aan om zijn artikel wat verder uit te werken.

Er gebeurde van alles in de gevangenis. Galois, die nooit alcohol had gedronken, werd voor het eerst dronken. Een scherpschutter schoot vanuit een dakgoot een kogel de gevangenis in. De man in de cel naast die van Galois raakte gewond, en Galois was ervan overtuigd dat de kogel voor hem bedoeld was. Hij raakte in een depressie en probeerde zelfmoord te plegen met een dolk, maar zijn medegevangenen voorkwamen dat. In maart 1832 brak er een cholera-epidemie uit in Parijs. De gevangenen

DE WISKUNDE VAN GALOIS

Van een eerstegraadsvergelijking, dat is een vergelijking van de vorm $ax + b = 0$, is de oplossing gauw gevonden: $x = -b/a$. Hetzelfde geldt voor een tweedegraadsvergelijking: met de *abc*-formule vind je de oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Je verwacht misschien dat er voor vergelijkingen met alle hogere machten van x ook dergelijke formules bestaan. Voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen bestaan die formules inderdaad. Men heeft lang gezocht naar een formule voor oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking. Evariste Galois ontdekte een algemene theorie waaruit onder meer volgt dat zo'n formule niet bestaat.

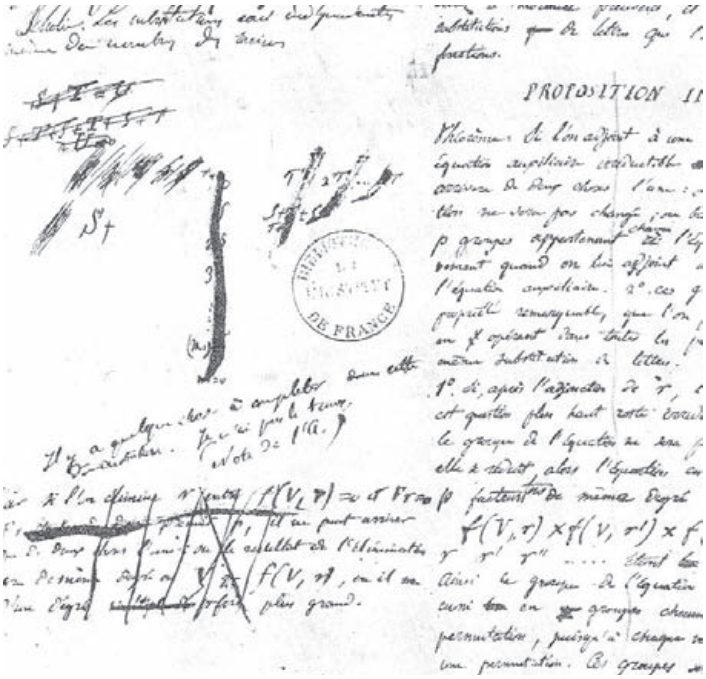
Chevalier en Galois' broer bewerkten na diens tragische dood de wiskundige manuscripten van Galois om ze een beetje begrijpelijker te maken en stuurden ze naar beroemde wiskundigen als Gauss en Jacobi. De eerste jaren na zijn dood werd zijn werk helemaal niet erkend, totdat Joseph Liouville ze onder ogen kreeg. Hij besteedde maanden aan het begrijpen en het opschrijven van Galois' ideeën en publiceerde ze in 1846 in zijn tijdschrift *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. In deze artikelen stond in grote lijnen de theorie die nu bekend is als *Galoistheorie*.

POLYNOOMVERGELIJKINGEN Galois hield zich bezig met het oplossen van bepaalde vergelijkingen: *polynoomvergelijkingen*. Een polynoom is een uitdrukking die bestaat uit getallen en machten van een variabele x. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1$ is een polynoom, $x - 85$ ook, net zoals $15x^{37} + 26x^{36} - 3x^2 + 1$ en $3x^3 - \pi x + 2\frac{1}{2}$ en 37. De getallen die vóór de machten van x staan noemen we *coëfficiënten*.

Een polynoomvergelijking is een vergelijking die bestaat uit polynomen en een =-teken, bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 1 = 0$, of $x^2 + 2x + 1 = x$, of $x^3 - 5 = x^4 + x^3 - 2$. Als je twee polynomen van elkaar aftrekt, krijg je natuurlijk weer een polynoom. Daarom kun je elke polynoomvergelijking herschrijven zodat er een 0 aan de rechterkant van het =-teken staat. De polynoomvergelijking $x^2 - 2x + 1 = x$ wordt dan $x^2 - 3x + 1 = 0$, en deze twee vergelijkingen hebben natuurlijk precies dezelfde oplossingen.

Een polynoom heeft een *graad*: de graad van een polynoom is de hoogste macht van x die voorkomt. De graad van $x^2 + 2x + 1$ is dus 2, de graad van x^{85} is 85, de graad van $x - \pi$ is 1.

Een n-degraadsvergelijking is een polynoomvergelijking waarin de hoogste macht van x die voorkomt n is. Een tweedegraadsvergelijking heeft dus de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij a, b en c getallen



De brief die Galois vlak voor zijn dood schreef. Links onder het bibliotheekstempel zijn noodkreet: 'Je n'ai pas le temps.' ('Ik heb geen tijd.)

werden verplaatst en op de een of andere manier ontmoette Galois een vrouw: Stéphanie-Félicie Poterine du Motel. Hij werd verliefd op haar en toen hij vrij kwam schreven ze brieven, waarin Stéphanie afstand probeerde te nemen van de affaire.

DUEL In mei 1832 daagde Pescheux d'Herbinville, een goede schutter, Galois uit voor een duel. De reden is niet helemaal duidelijk, maar het zou best kunnen dat het met Stéphanie te maken had. Galois kende de reputatie van zijn tegenstander en hij was ervan overtuigd dat hij het niet zou overleven. In de nacht voor het duel schreef hij afscheidsbrieven aan zijn vrienden. Ook stuurde hij zijn wiskundige ontdekkingen aan Auguste Chevalier, een goede vriend, met het verzoek ze in het geval van zijn overlijden door te sturen aan de grootste wiskundigen van Europa. In de manuscripten is op sommige plaatsen de naam Stéphanie te lezen, en uitroepen als: 'Dit

voorstellen. Op school leer je de *abc*-formule: de oplossingen van een dergelijke vergelijking zijn gelijk aan $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Je ziet: alle oplossingen van een tweedegraadsvergelijking zijn (als ze bestaan) uit te drukken in de coëfficiënten a, b en c door gebruik te maken van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. De *abc*-formule was al in de tijd van de Babyloniërs bekend, zij het in een vorm die wij maar heel moeilijk zouden herkennen.

De vraag die een wiskundige zich vervolgens gaat stellen, is: is er een soortgelijke '*abc*-formule' voor hogeregraadsvergelijkingen? Ofwel: is het voor polynoomvergelijkingen van graad n met $n \geq 3$ mogelijk om de oplossingen van een n-de graadsvergelijking uit te drukken in de coëfficiënten door alleen gebruik te maken van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en wortels trekken? Onder 'wortels' verstaan we hier de gewone kwadraatwortels, maar ook derde- en hogeremachtswortels.

Voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen is het antwoord ja. De formules die daar ontstaan zien er veel ingewikkelder uit dan de *abc*-formule, maar ze bestaan wel. De formules werden allebei gevonden in Italië, in 1545 werden ze gepubliceerd door Cardano. Maar eigenlijk is de formule voor graad 3 gevonden door Tartaglia en die voor de vierdegraadsvergelijking door Ferrari.

GRAAD 5 EN HOGER Het duurde nog eeuwen voor er een antwoord voor de vijfdegraadsvergelijking kwam. Vanaf 1770 bekeek Lagrange het probleem op een nieuwe manier. Hij legde een link tussen de oplossingen van een polynoomvergelijking en een ander wiskundig concept: *permutaties*. Een permutatie is in feite het omwisselen van een aantal dingen. En het blijkt handig te zijn voor ons probleem om voor die dingen oplossingen van vergelijkingen te nemen.

Een derdegraadsvergelijking heeft maximaal drie oplossingen. Er zijn zes permutaties van drie oplossingen: als we de oplossingen even x_1, x_2 en x_3 noemen, kunnen we ze omwisselen tot x_1, x_3, x_2 of x_2, x_1, x_3 of x_2, x_3, x_1 of x_3, x_1, x_2 of x_3, x_2, x_1. We tellen de 'flauwe' permutatie x_1, x_2, x_3 ook mee. Lagrange bekeek bepaalde uitdrukkingen waarin de drie oplossingen voorkwamen, en hij ontdekte dat het omwisselen van de oplossingen vaak helemaal niets uitmaakte voor de uitkomst! Dat leidde tot belangrijke inzichten. Ruffini ging op deze voet verder en hij beweerde in 1799 dat een '*abcde*-formule' voor de vijfdegraadsvergelijking helemaal niet bestaat. Zijn bewijs klopte echter niet helemaal. In 1824 publiceerde de Noorse wiskundige Abel wel een echt bewijs.

Galois was ook met deze vragen bezig. Hij was de eerste die begreep dat het bestaan van een dergelijke formule voor de oplossingen van een vergelijking samenhangt met de structuur van een bepaalde *permutatiegroep*. Een groep is een abstract wiskundig concept, dat in de tijd van Galois nog niet helemaal ontwikkeld was. Wel werkten wiskundigen al met een speciaal geval: de permutatiegroepen. Galois had een erg goed in-

moet nog verder worden uitgewerkt. Maar ik heb geen tijd!'

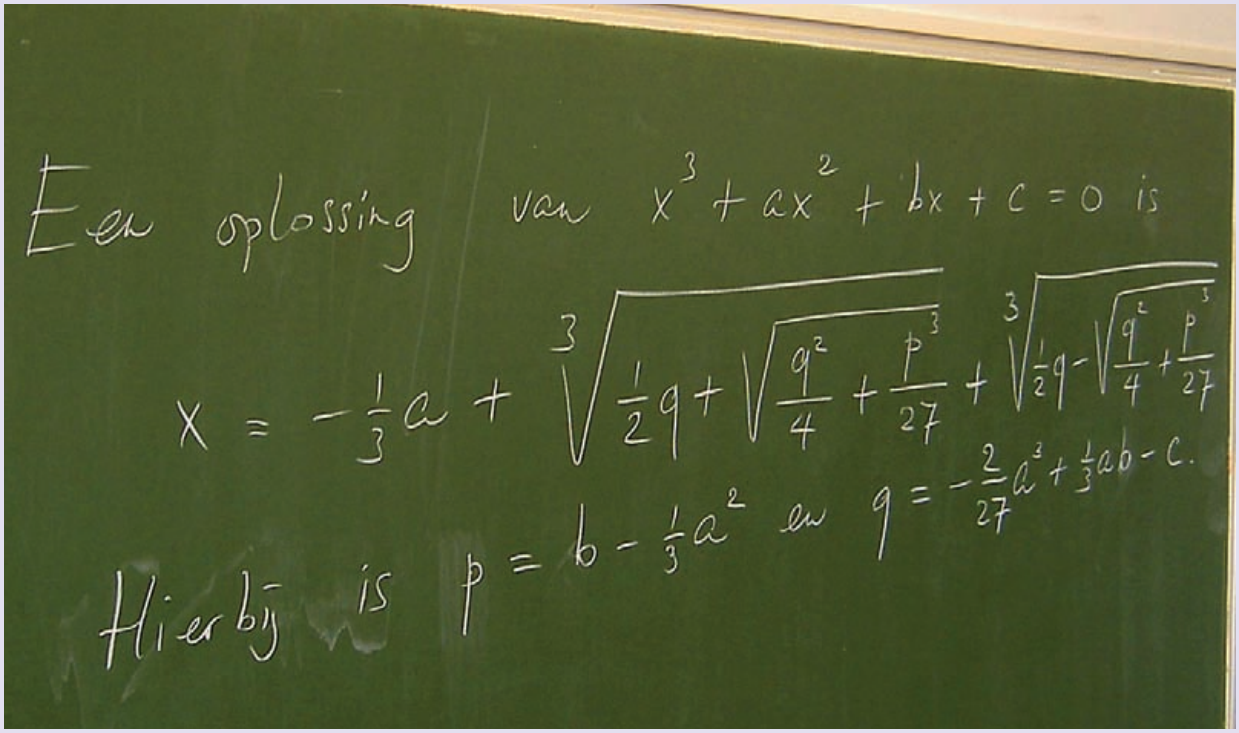
De volgende ochtend stonden Galois en D'Herbinville tegenover elkaar en ze schoten. D'Herbinville was niet geraakt, maar Galois was in zijn buik geschoten. Hij lag op de grond en leefde nog, maar er was geen arts in de buurt en pas later op de dag werd hij naar het ziekenhuis gebracht. Daar overleed hij de volgende dag, op 31 mei 1832.

Galois' begrafenis leidde tot rellen. Een aantal van zijn republikeinse vrienden waren voor de zekerheid al opgepakt, maar de bezoekers van zijn begrafenis raakten er steeds maar van overtuigd dat Galois' dood veroorzaakt was door een politiek complot, en dat Stéphanie hem had verleid om een duel uit te lokken. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

E.T. Bell, *Men of mathematics 2*, Penguin Books, 1965 (eerste druk 1937)
Simon Singh, *Het laatste raadsel van Fermat*, De Arbeiderspers, 1997
Galois biography, op http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Galois.html

zicht in de structuur van deze groepen in het geval van zijn probleem. Hij ontwikkelde een methode waarmee we kunnen beslissen voor welke *n*-degraadsvergelijkingen we een oplossing uitgedrukt in de coëfficiënten (gebruikmakend van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken) kunnen vinden. Zijn ideeën waren zo nieuw en abstract dat het niet verwonderlijk is dat het even duurde voor andere wiskundigen ze precies begrepen. De theorie die hij ontwikkelde heet tegenwoordig *Galoistheorie*, en de groepen die in deze context zo'n belangrijke rol spelen heten nu *Galoisgroepen*. ■



Op de foto zie je een formule om een oplossing van een derdegraadsvergelijking, uitgedrukt in de coëfficiënten, te vinden. De coefficiënt van x^3 is hier 1; als deze coëfficiënt ongelijk is aan 1, kun je de vergelijking eerst herschrijven door elke term door die coëfficiënt te delen. Om de oplossing nog enigszins behapbaar te maken, worden er twee 'hulpvariabelen' p en q, uitgedrukt in de coëfficiënten, ingevoerd.

Een derdegraadsvergelijking heeft over het algemeen drie oplossingen. Met de oplossing die voldoet aan de formule op de foto (noem die oplossing k) en de 'factorstelling' kun je $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ schrijven als $(x - k)(x^2 + \cdots) = 0$. Met de bekende *abc*-formule kun je vervolgens de andere twee oplossingen vinden. De formule om oplossingen van een vierdegraadsvergelijking te vinden, ziet er nóg ingewikkelder uit dan de formule op de foto!

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 4

TELLEN IN DE EU

De rij geeft de eerste letters van de telwoorden 1 tot en met 10 in het Engels: one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten. Dus op de plaats van het vraagteken staat een F.

TWEE KEER WEGEN

Noem de gewichtjes 1, 2, 3 en 4. Zet eerst 1 en 2 op de balans. Als ze even zwaar zijn, zijn dus ook 3 en 4 even zwaar. Zet 1 en 3 (of 1 en 4, of 2 en 3, of 2 en 4) op de balans om uit te maken welke lichter is. Als 1 lichter of zwaarder dan 2 is, zet dan vervolgens 3 en 4 op de balans om uit te maken welke van die twee lichter is.

EEN PRIEMENDE VRAAG

Neem uit de rij priemgetallen telkens de som van twee opvolgende: (2 + 3), (3 + 5), (5 + 7), enzovoorts. Dan komt er 19 + 23 = 42 op de plaats van het vraagteken.

DUBBELE DRIEHOEKEN

Er zijn 5 mogelijkheden voor stokje T waaraan de twee driehoeken vastzitten. Het aantal figuren met twee driehoeken aan één zijde van T (geheel of gedeeltelijk overlappend) is gelijk aan het aantal met de twee driehoeken aan weerszijden (je kunt de ene overlappende driehoek 'uitslaan' naar de andere kant). Zoek de niet overlappende. Een tweede stokje kun je aan een van de eindpunten vastleggen (maakt niet uit welk stokje, maakt niet uit aan welk eindpunt, de richting volgt als je de andere neerlegt). Voor de overige drie stokjes heb je respectievelijk 3, 2 en 1 mogelijkheden. In totaal geeft dat $2 \times (5 \times 3 \times 2 \times 1) = 60$ mogelijkheden.

KIJKEN DOOR EEN TWAALFVLAK

Neem een gaatje *G*. De gaatjes op de drie vijfhoeken die samenkomen bij *G* kan Tycho niet gebruiken. Dat zijn er 9. Door de overige 10 kan hij via *G* wel kijken. Voor de 20 mogelijkheden (20 hoekpunten) voor *G* levert dat $20 \times 10/2 = 100$ mogelijkheden op (delen door 2, omdat elk tweetal 2 keer wordt genomen).

PYTHAGORAS

47ste jaargang nummer 5
april 2008
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.**

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Alex van den Brandhof, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.

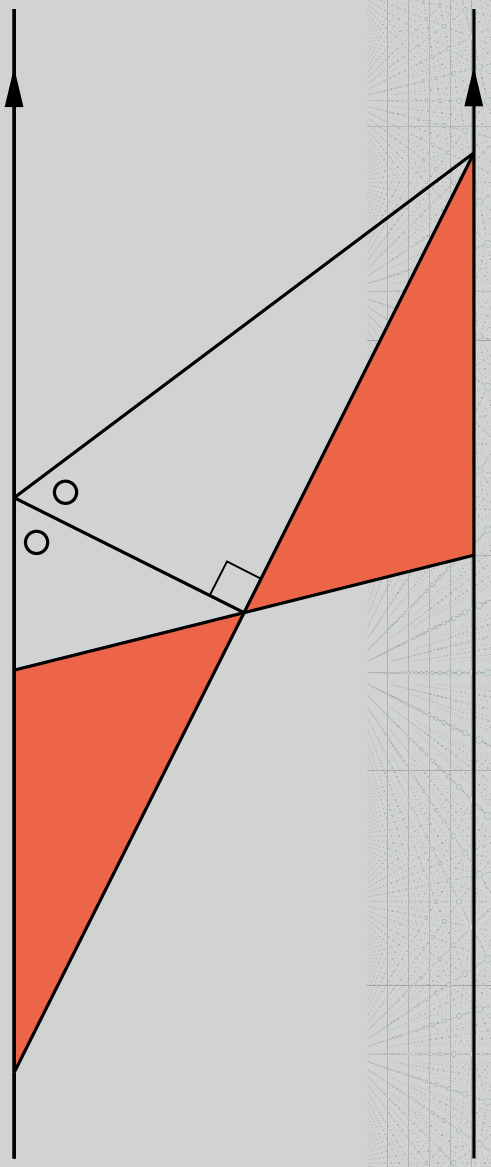
Abonnementen, bestellingen en mutaties
Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs
(6 nummers per jaargang)
€ 21,00 (Nederland) € 23,00 (België),
€ 27,00 (overig buitenland),
€ 17,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 21,00 (leerlingabonnement België),
€ 11,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 13,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), H. Brandt Corstius (Battus), wis- en taalkundige in Parijs (bchugo@gmail.com), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems, aio wiskunde aan de UL (jeanine@pythagoras.nu), drs. B.E. van Dalen, aio wiskunde aan de UL (dalen@math.leidenuniv.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (anne@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (arno@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), dr. G.W.Q. Puite, docent wiskunde aan de TUE en de Hogeschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl), dr.ir. H.J.J. te Riele, onderzoeker bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (Herman.te.Riele@cwi.nl), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (iris@pythagoras.nu), prof. dr. J. Top, hoogleraar wiskunde aan de RUG (j.top@rug.nl), J. Top, leerling van het Gomaruscollege te Groningen (jorditop@hotmail.com)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:

SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit.
De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.