

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN



WISKUNDE IN BEELD

Pygram-prijsvraag: de uitslag

Archimedes en de Codex C

47ste JAARGANG - NUMMER 6 - JUNI 2008

VAN VIERVLAK NAAR STER

Ruimte meetkunde wordt zoveel interessanter als je de figuren echt kunt vastpakken, helemaal als je de figuren zelf in elkaar hebt gezet. Het bouwplatenboekje van *Pythagoras* vormt daarvoor een mooie aanleiding. Het bevat de bouwplaten voor negen veelvlakken die samen een serie vormen. De kleinste figuur kun je zien als een viervlak waarvan de vier zijvlakken helemaal naar binnen gedeukt zijn. Vervolgens worden die deuken minder diep, komen dan precies vlak te liggen zodat je een echt viervlak krijgt. Maar daar stopt het niet: de zijvlakken komen naar buiten als piramides en vormen sterpunten die steeds verder naar buiten steken.



Het bouwplatenboekje kost € 2,50, exclusief verzendkosten.

De verzendkosten (minimaal € 1,18) hangen af van het aantal bestelde boekjes. Een bestelformulier is te vinden op www.pythagoras.nu.

HET PRODUCT PYTHAGORAS

Pythagoras is een blad voor en door echte liefhebbers van wiskunde in al zijn facetten. Ondanks de specifieke doelgroep zijn wij ervan overtuigd dat het aantal geïnteresseerden in ons blad groter is dan de huidige kring van abonnees. Daarom zal *Pythagoras*, met name onze recent aangestelde bladmanager, Tilman Grünwald, de komende tijd initiatieven ontplooiën om onze lezerskring te vergroten.

Maar onze eigen abonnees zullen altijd de spil zijn bij het werven van nieuwe abonnees. Van mond-tot-mondreclame zal *Pythagoras* het ook in de toekomst voor een groot deel moeten hebben. Doceert u wiskunde op een middelbare school en heeft u leerlingen die een extra stimulans of meer uitdagingen kunnen gebruiken? Vindt u het leuk om opdrachten en prijsvragen uit *Pythagoras* met de hele klas te doen? Weet u iemand met belangstelling voor wiskunde die ons blad nog niet kent? Schroom dan niet om ons blad aan te bevelen of

een bestelling te plaatsen via onze website www.pythagoras.nu. Heeft u suggesties hoe wij *Pythagoras* onder de aandacht kunnen brengen van potentiële lezers, mail dan naar bladmanager@pythagoras.nu.

Onvermijdelijk vragen we ons ook als redactie wel eens af, of we onze lezers optimaal bedienen. Ligt het gemiddelde wiskundeniveau niet te hoog? Bieden we genoeg variatie? Wordt *Pythagoras* in de les gebruikt of is daar helemaal geen tijd voor? Natuurlijk krijgen we af en toe feedback van lezers, bijvoorbeeld op de Nationale Wiskunde Dagen. Maar we horen graag van meer lezers commentaar op 'het product *Pythagoras*'.

Meningen over de inhoud van het blad kunnen worden gemaild naar hoofdredacteur Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu (we lezen alle reacties zorgvuldig, maar kunnen niet iedereen antwoorden). Bij voorbaat dank hiervoor!

INHOUD

- 2 Kleine nootjes
- 4 Gesneden koek
- 5 Oplossing Spiegelknippen

6 Mathemalisme

- 12 Pygramprijsvraag: de uitslag
- 16 De stelling van Goodstein
- 20 Journaal
- 21 Miskunde: Veel, veler, veelst
- 22 Archimedes (ca. 287 - ca. 212 BC): de onmetelijke
- 27 Meer dan 3000 zwoegers
- 28 Pythagoras Olympiade
- 30 Problemen - Oplossingen
- 32 Priemaire breuken vangen
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 5



NIVEAUBALKJES

Sommige pagina's hebben onder het paginanummer één of meer zwartgekleurde balkjes. Deze geven een moeilijkheidsgraad aan.

Eén zwart balkje is lastig.

Twee zwarte balkjes geven aan dat er wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas nodig is.

Pagina's met drie zwarte balkjes gaan net iets verder dan de middelbare schoolstof.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

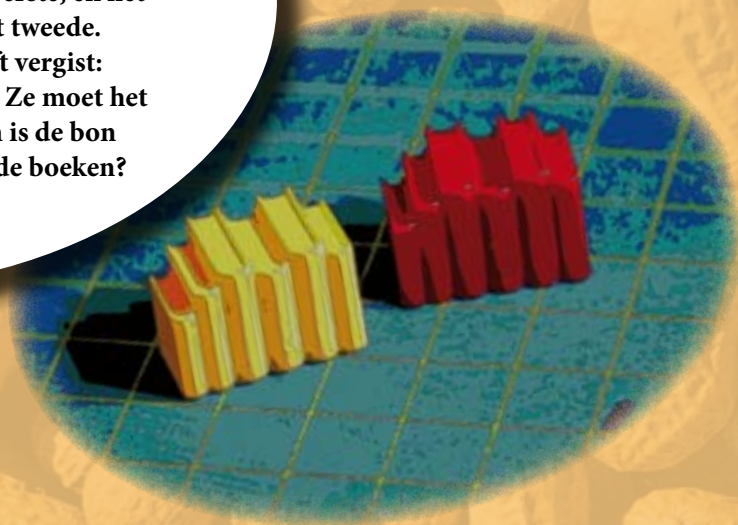
De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

BOEKENBON

Alie heeft een boekenbon van 40 euro gekregen. Ze zoekt drie boeken uit; elk boek kost meer dan 15 euro en elk boek kost een geheel aantal euro's. Het tweede boek is duurder dan het eerste, en het derde is evenveel duurder dan het tweede.

Bij de kassa blijkt dat ze zich heeft vergist: het bedrag van de bon is niet genoeg. Ze moet het goedkoopste boek achterlaten, dan is de bon precies voldoende. Hoeveel kosten de boeken?



VERMENIGVULDIGEN

Alle cijfers van 0 tot en met 9 komen elk een keer voor in de volgende vermenigvuldiging:

$$?02 \times 3? = ?5???$$

Vind jij de cijfers op de plaatsen van de vraagtekens?



EEN TIEN VOOR DE 10

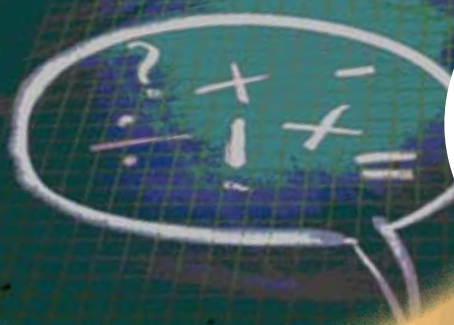
Columnist Battus merkte in *Het Parool* van 3 januari 2008 op dat er in de twintigste eeuw (1900 tot en met 1999) maar één enkel jaar is waarvan de som van de cijfers precies 10 is: 1900. In welke eeuw(en) (van de eerste tot en met de twintigste) is het aantal van deze jaren het grootst?



VREEMDE ZIN

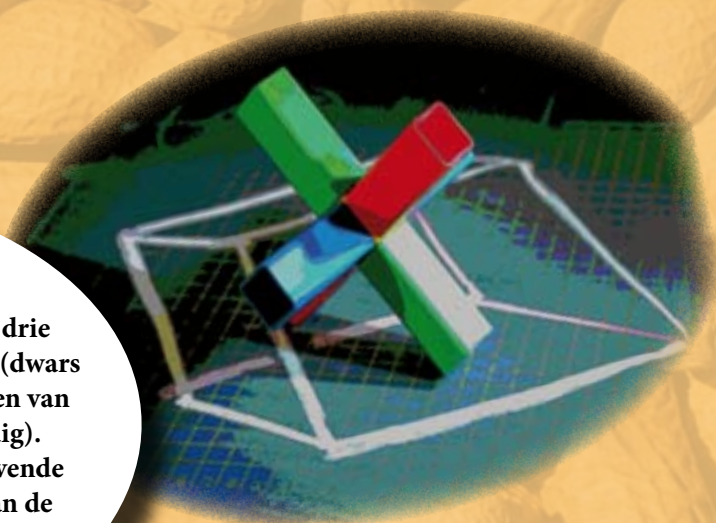
'Ik heb een grote $- \times$ van rijden op de verkeerde $-\frac{1}{2}$. Dan kan ik anderen :b.'

Maak hier eens goed Nederlands van.



GATEN IN EEN KUBUS

Ik maak in een houten kubus van $3 \times 3 \times 3$ drie vierkante gaten met een doorsnede van 1×1 (dwars door de kubus; loodrecht op en in het midden van de zijvlakken; ribben en vlakken evenwijdig). Wat is de totale oppervlakte van de overblijvende kubus met gaten? En als ik de gaten vlak aan de kant aanbreng en ze elkaar helemaal niet 'kruisen'?



Met z'n zessen gaan we op visite bij tante Mathema, ze is jarig. Tante Mat zit altijd vol verrassingen, daar kwamen we ook nu weer achter. Volgens ons heeft ze een graad in de taartsnijkunde.

■ door Tiemen Fahner

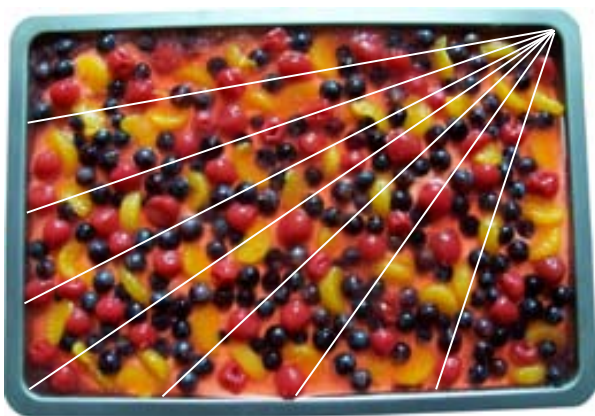
GESNEDEN KOEK

Het is altijd leuk om bij tante Mathema op bezoek te gaan. 't Is een ietwat wonderlijk tantetje, maar haar eigenaardigheden staan altijd garant voor een paar uurtjes puzzelplezier.

Ze schotelt ons daar even een heel interessante vruchtentaartpunt voor. We hebben allemaal een verschillende vorm, maar ze zijn echt alle even groot, belooft ze ons. Wat heeft ze bekookstofd?

Tante heeft een rechthoekige taart gebakken, die ze in zeven punten heeft gesneden met alle hetzelfde volume. En... onze tante Mat heeft alle punten gesneden vanuit één hoekpunt. Hoe heeft ze dat klaargespeeld?

EEN MACHT VAN TWEE Als een rechthoekige taart in twee, vier, acht, zestien, of algemeen 2^n stukken moet worden verdeeld, waarbij alle snijlijnen door eenzelfde hoekpunt moeten gaan, snij dan eerst langs een diagonaal, snij vervolgens vanuit het hoekpunt waar alle snijlijnen door moeten gaan naar het midden van de overstaande zijden. Op deze manier kun je eindeloos verder gaan: je krijgt steeds smallere driehoekvormige taartpunten met gelijk volume, zie onderstaande figuur, waarin de situatie met zeven snijlijnen is getekend (acht taartpunten).



Een rechthoekige taart wordt vanuit één hoekpunt verdeeld in acht gelijke stukken

IN ZEVEN STUKKEN De vraag aan jou is: hoe moet vanuit één hoekpunt van de taart het mes worden gehanteerd om de taart in zevenen te delen? De lijnen moeten worden *geconstrueerd*, en niet uitgemeten, dus alleen liniaal (zonder maatverdeling) en passer mogen worden gebruikt.

Hint: bedenk eerst hoe je de taart in drie gelijke stukken kunt snijden.

De taartverdeelsleutel komt in het volgende nummer van *Pythagoras*. ■

CONSTRUCTIES

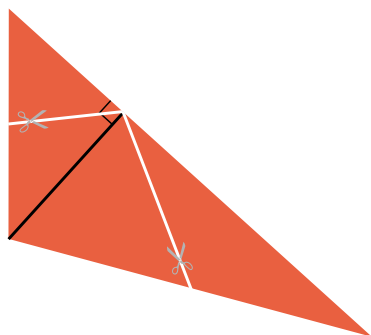
Meetkundige constructies maken doe je met passer en liniaal. De passer gebruik je natuurlijk om cirkels of cirkelbogen te tekenen. De liniaal is niks meer dan een recht latje om er lijnen langs te trekken, *niet* om afstanden te meten. Met dit gereedschap kun je een heleboel constructies maken. Hoe je een middelloodlijn of een bissectrice construeert, weet je waarschijnlijk wel. Maar hoe verdeel je een lijnstuk in n even lange segmenten? Of hoe construeer je een lijn evenwijdig aan een gegeven lijn? Hiernaast kun je zien hoe je een lijnstuk in drie even lange segmenten verdeelt. Andere constructies kun je zelf proberen te bedenken. Of kijk op internet; een website met duidelijke voorbeelden is <http://whistleralley.com/construction/reference.htm>

OPLOSSING SPIEGELKNIPPEN

■ door Arnout Jaspers

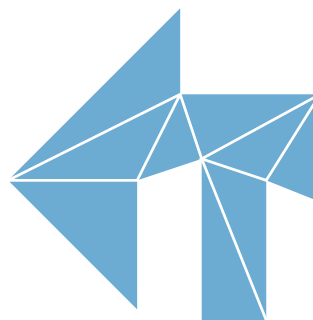
In het artikel 'Spiegelknippen' uit het vorige nummer ging het erom hoe je een driehoek, of een willekeurige veelhoek, kunt verknippen, zodanig dat je met de uitgeknipte stukjes het spiegelbeeld van de oorspronkelijke figuur kunt leggen, zonder dat de stukjes worden omgedraaid.

Je kunt elke ongelijkzijdige driehoek op de volgende manier in drie symmetrische stukken knippen. Teken eerst vanuit het hoekpunt tegenover de langste zijde de hoogtelijn (dat is de lijn die loodrecht op die langste zijde staat); in de figuur hieronder is die lijn met zwart aangegeven. Knip vanaf halverwege elk van de korte zijden naar het punt waar deze hoogtelijn de langste zijde snijdt; deze kniplijnen zijn met wit aangegeven.



Je hebt dan twee gelijkzijdige driehoeken en een ruit. Draai de twee driehoeken 180 graden en schuif ze tegen de andere kant van de ruit aan, dan is de oorspronkelijke driehoek gespiegeld.

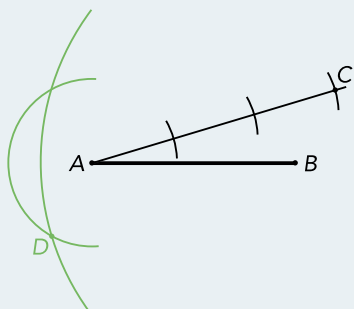
Het is nu niet moeilijk meer om een willekeurige veelhoek in zijn spiegelbeeld te veranderen. Je kunt elke veelhoek namelijk opdelen in een aantal driehoeken, die al dan niet ongelijkzijdig zijn. Dat kan op veel manieren; die in de onderstaande afbeelding is maar een willekeurig voorbeeld. De gelijkzijdige driehoeken kun je meteen 180 graden draaien, de ongelijkzijdige driehoeken behandel je zoals hierboven uiteengezet. Je kunt nu alle delen van de veelhoek in hun spiegelbeeld veranderen, dus ook de veelhoek als geheel. ■



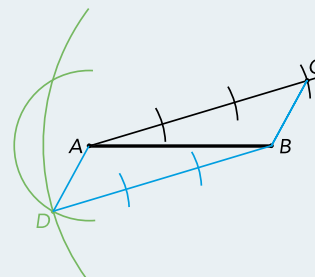
Een lijnstuk AB opdelen in drie even lange segmenten



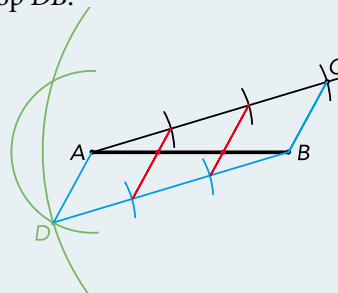
1. Teken een lijn door A en gebruik de passer om daarop drie punten te markeren zodat je drie even lange segmenten (vanaf A) krijgt. Noem het derde gemarkeerde punt C .



2. Teken twee cirkelbogen; een om A met straal $|BC|$ en een om B met straal $|AC|$. Noem het onderste snijpunt van de cirkelbogen D .



3. Vierhoek $DBCA$ is een parallellogram. Gebruik de passer om de gemarkeerde punten op AC over te brengen op DB .



4. Door ten slotte de gemarkeerde punten op AC te verbinden met die op DB , vind je de punten op AB die dat lijnstuk in drie even lange segmenten opdelen.

Sinds computers kleurenplaten van fractals kunnen maken, heeft iedereen op z'n minst enig idee wat wiskundigen bedoelen met de schoonheid van hun vak. Ook sommige kunstenaars zijn er door gefascineerd. Ter afsluiting van het jaarthema 'wiskunde en kunst' exposeren we werk van drie beoefenaars van wat je 'mathemalisme' zou kunnen noemen: een kunstvorm die grotendeels wordt voortgebracht door de wiskunde zelf, waarbij de artiesten zelf eerder spreken van 'onderzoek' dan van 'inspiratie' of 'creativiteit'.

Rinus Roelofs plooit en vlecht tweedimensionale vlakken in bochten die je driedimensionaal niet voor mogelijk houdt. Astrofysicus Vincent Icke gebruikt de vergelijkingen waarmee hij rekent aan exploderende sterren, om evoluerende landschappen te creëren, waarvan hij in dit artikel snapshots presenteert. Gerard Caris lijkt welhaast behekt door de vormen die ook al voor de Pythagoreërs de meest magische waren: de regelmatige vijfhoek, het pentagon, en het regelmatige veelvlak van vijfhoeken, de dodecaëder.

MATHEMALISME



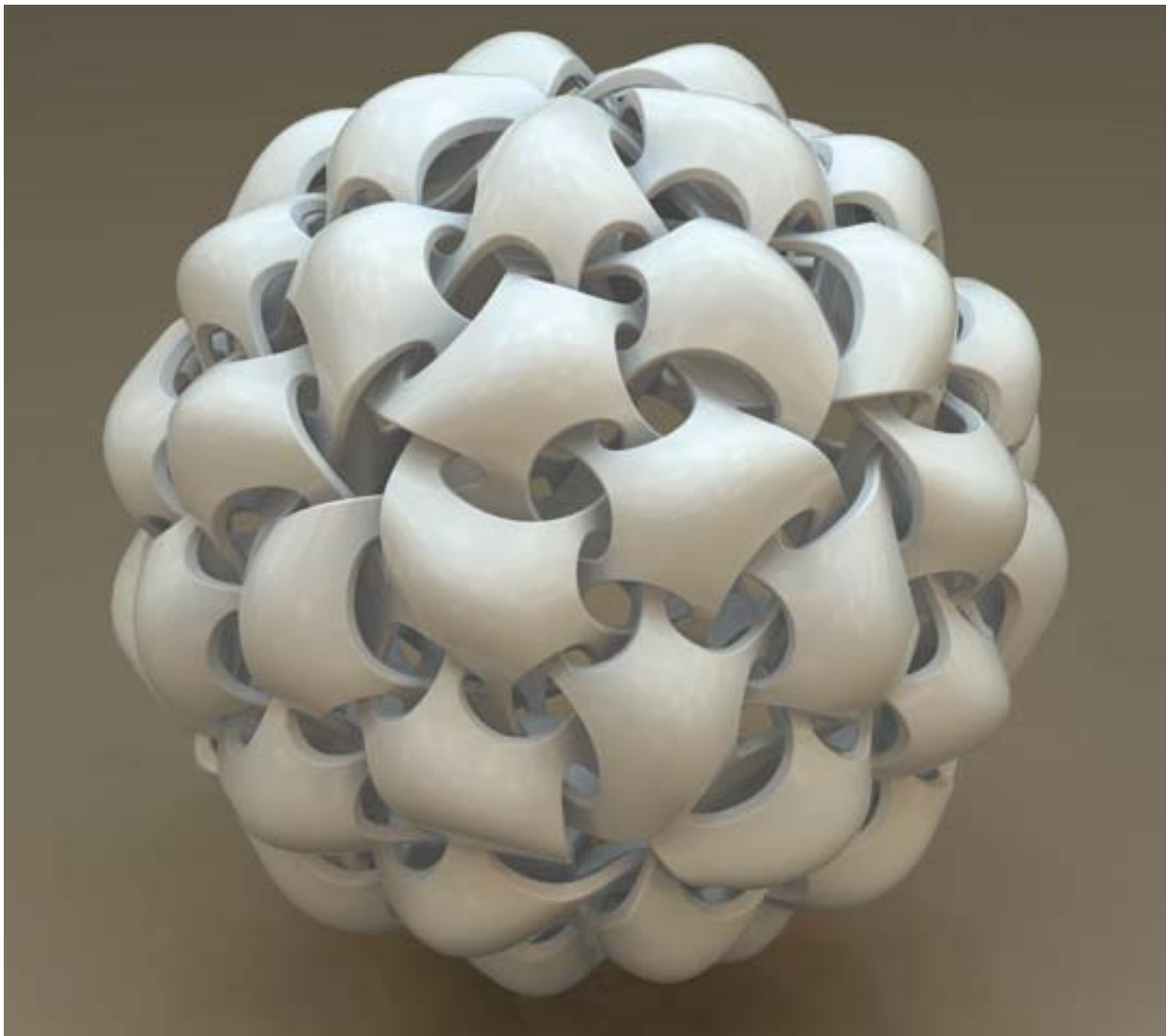
RINUS ROELOFS

"Mijn ideeën komen eigenlijk altijd voort uit eerdere projecten waar ik mee bezig was. Van het een komt het ander, en ik zie mezelf dat nog heel lang voortzetten. Een nieuwe serie objecten begint z'n bestaan misschien als een kartonnen modelletje of een kladje op de computer. Maar tegenwoordig resulteert dat al heel snel in een echt object, dankzij 3D-printers. Dat zijn laserprinters die aan de hand van een computerbestand bijna elk willekeurig object laagje voor laagje opbouwen uit een bak met nylon- of metaalpoeder (zie de foto linksonder op pagina 7). Zo kun je ook potentiële opdrachtgevers veel beter duidelijk maken wat je van plan bent. Het is verbazingwekkend wat er nog te ontdekken valt op dit gebied, dat schijnbaar zo simpel is en waar-

van je zou denken dat alles nu wel bekend is.

De laatste tijd experimenteer ik veel met 'verweven vlakken'. Die lijken uit meerdere lagen te bestaan, maar zijn in feite één vlak met een regelmatig patroon van gaten erin. Dat zie je als je in gedachten om zo'n gat heen loopt (zie de grote foto op pagina 7).

In mijn werk probeer ik mijn verwondering over wiskundige structuren te verbeelden. Soms hebben de door mij bedachte structuren ook praktische toepassingen. Ik heb nu bijvoorbeeld contacten met nanotechnologen aan de Universiteit Twente. Die zien overeenkomsten tussen mijn verknoopte vlakken en de manier waarop zij moleculen aan elkaar proberen te schakelen."



▲ Rinus Roelofs ontdekte dat het mogelijk is om een vrijdragende koepel te bouwen uit losse balken. Elke balk bevat alleen vier ondiepe inkepingen, maar geen verbindingen met touw, lijm of pennen.

Een driedimensionale ▶ schuifpuzzel; in de praktijk zijn de stukken onmogelijk nog uit elkaar te halen.



Meer werk van Rinus Roelofs:
www.rinusroelofs.nl

VINCENT ICKE

“Er zijn grote verschillen tussen kunst en wetenschap, maar er zijn ook veel overeenkomsten. De belangrijkste daarvan is: onderzoek. Door onderzoek ontstaat spanning en vooruitgang. Niet voor niets eindigt een schaakpartij bij ‘herhaling van zetten’ in remise: saaie prei.

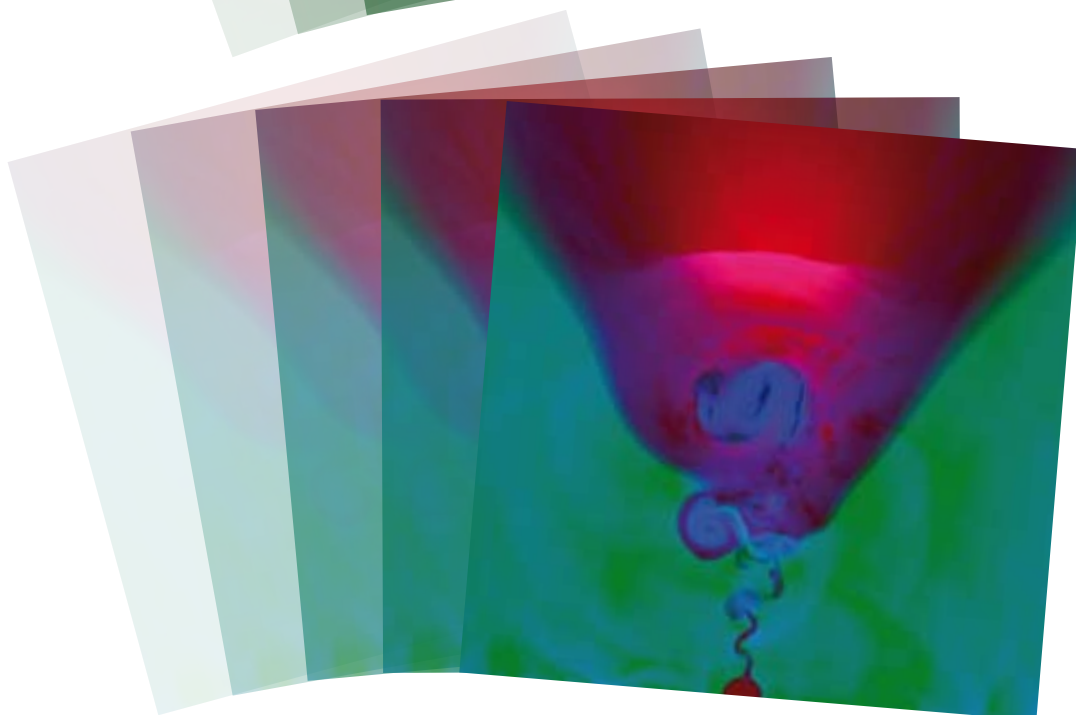
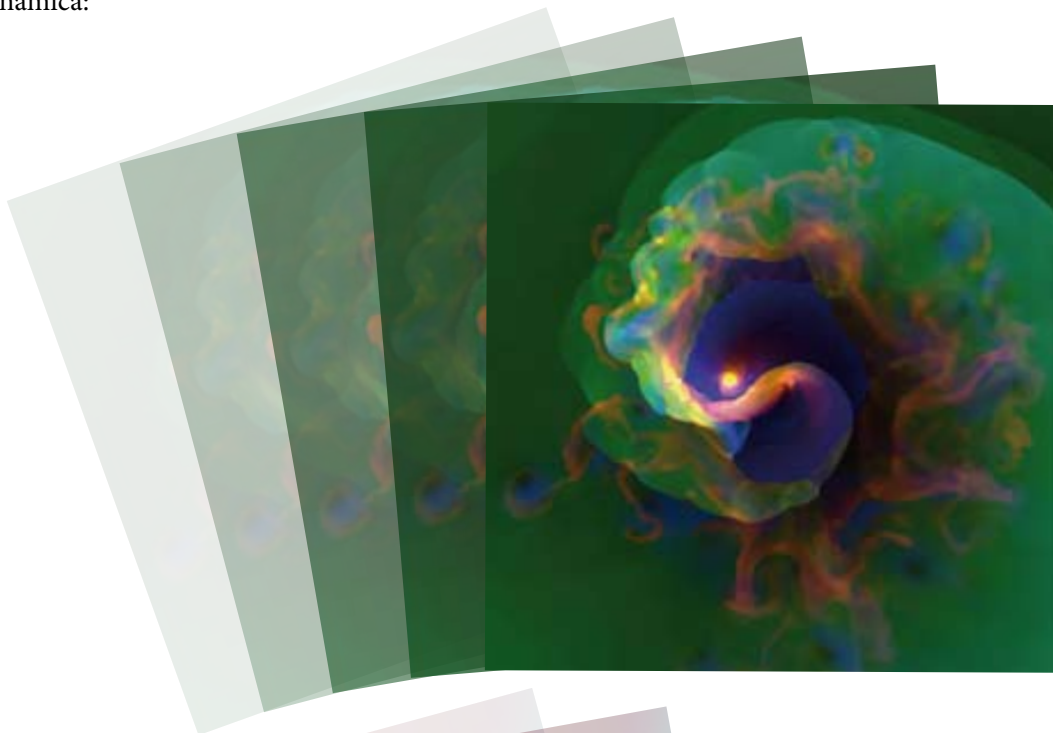
In mijn kunst onderzoek ik hoe bestaande natuurwetten kunnen worden gebruikt om beelden te maken. Met de regels van de klassieke mechanica en de zwaartekracht kan ik spannende ruimtelijke sculpturen maken, maar er is veel meer. Hieronder laat ik een paar beelden zien die zijn gemaakt door gebruik te maken van de wetten van de gasdynamica:

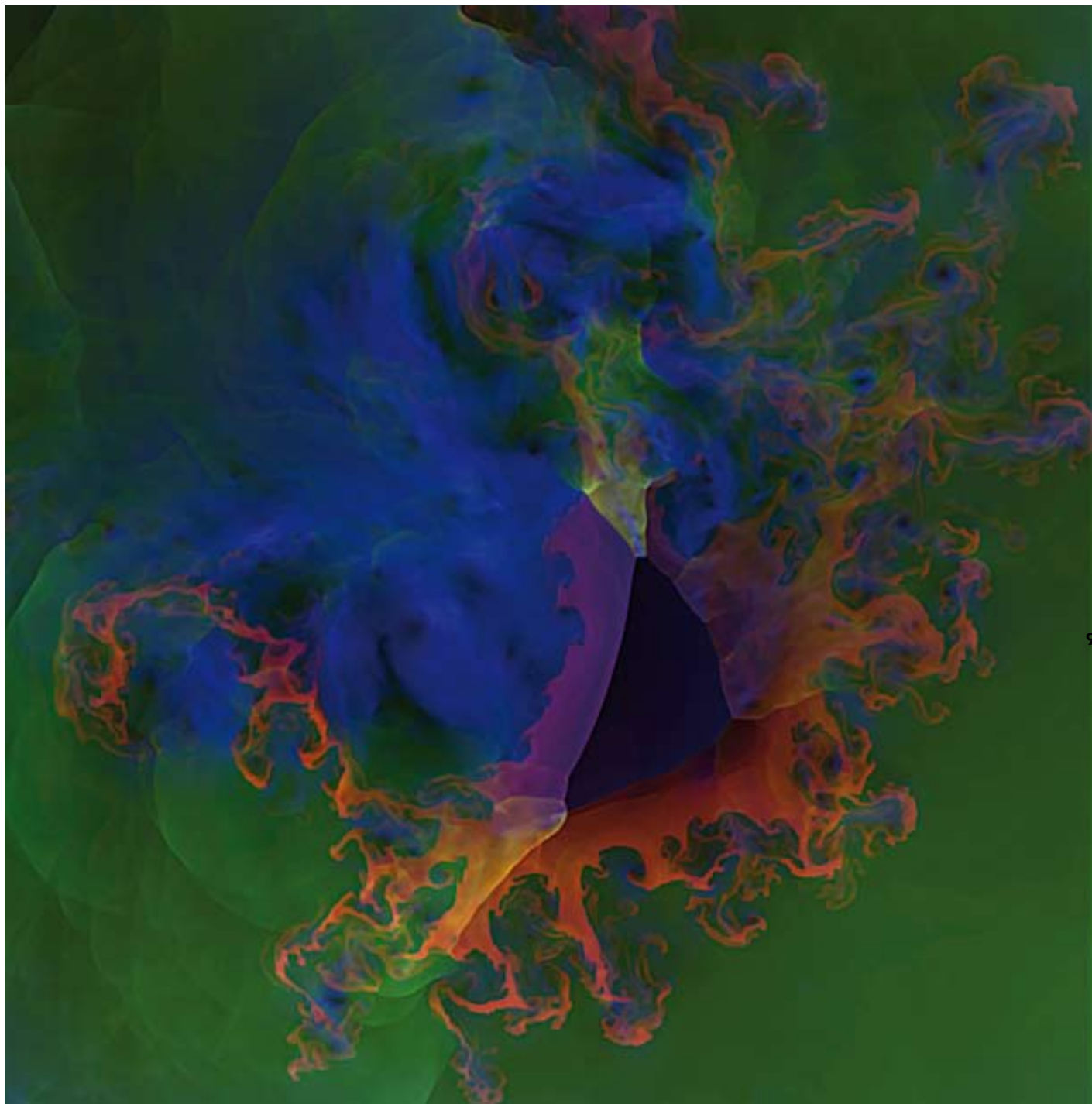
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_j + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_j v_k = - \frac{\partial P}{\partial x_j} + g_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + P \right) v_j \right) = v_j g_j$$

De dichtheid ρ en de druk P van het gas, de snelheid v_i en de zwaartekracht g_i beschrijven het systeem volledig. In de afbeeldingen wordt ρ weergegeven door de kleur rood, P door groen en v door blauw. Ik kies een begintoestand door in een afgebakende ruimte de dichtheid en de snelheid voor te schrijven, laat er mijn zelfgeschreven hydrodynamica-code op los, en ga zitten wachten als een fotograaf op het juiste moment. Klik!”





Andere projecten op dit gebied van Vincent Icke:
www.alien-art.nl

GERARD CARIS

Fysicus Robbert Dijkgraaf:

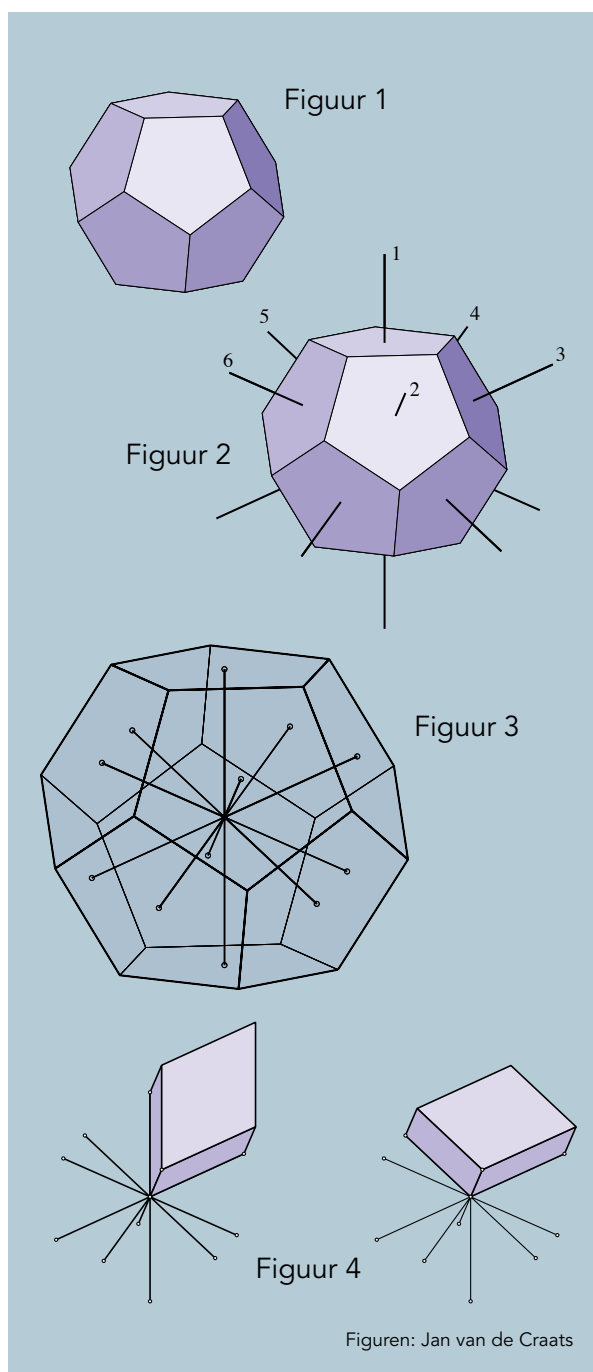
“Onder alle wiskundige curiositeiten is er één onvermijdelijke kandidaat om de allermooiste te zijn: de dodecaëder. Ik denk dat de vijfhoeken daarbij een speciale rol spelen. De andere regelmatige veelvlakken bestaan uit driehoeken of vierkanten die ook op andere manieren samengesteld kunnen worden. Bijvoorbeeld, je kunt er een vlak mee betegelen, een heel regelmatig maar saai patroon dat je oneindig ver kunt voortzetten. Zoiets kan met vijfhoeken niet, ze passen gewoon in geen enkel oneindig patroon. Ze hebben een sterke wil en laten zich alleen samenstellen tot een dodecaëder. Dit maakt de dodecaëder tot zo’n vruchtbaar object in de kunst van Gerard Caris. Hij heeft ons vele facetten van z’n schoonheid laten zien. Het is nauwelijks voorstelbaar dat hij net zulke fascinerende kunst had kunnen maken van kubussen.”

Wiskundige Jan van de Craats:

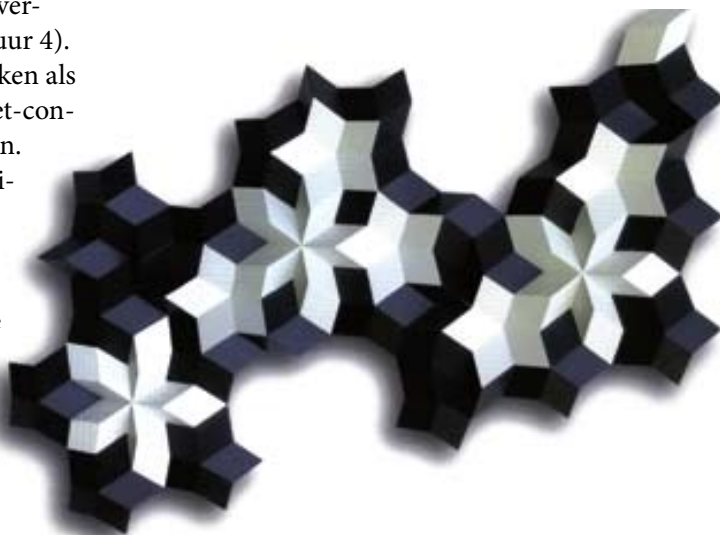
“Een ruitenveelvlak is een veelvlak met ruiten (vierhoeken met vier gelijke zijden) als zijvlakken. Caris gebruikt twee heel speciale ruitenveelvlakken als bouwstenen. Ze hebben allebei zes congruente ruiten als zijvlakken. Ze zien eruit als vreemde, scheve kubussen, en beide typen zijn verwant aan de dodecaëder (figuur 1) op een intrigerende, subtiële manier. Om dit te begrijpen, moet je eerst bedenken dat een dodecaëder zes vijfvoudige rotatieassen heeft, die door de middelpunten lopen van tegenoverliggende zijvlakken (figuur 2). Deze assen zijn zes rechte lijnen door het middelpunt van de dodecaëder (figuur 3). De hoek tussen elk paar assen is hetzelfde: ongeveer 63 graden, 26 minuten, maar de tangens is exact 2.

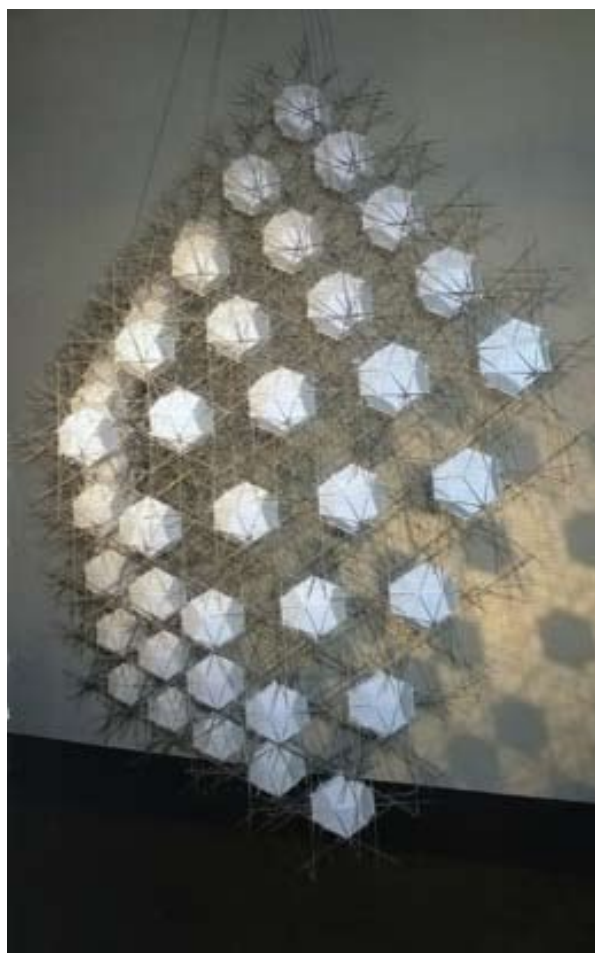
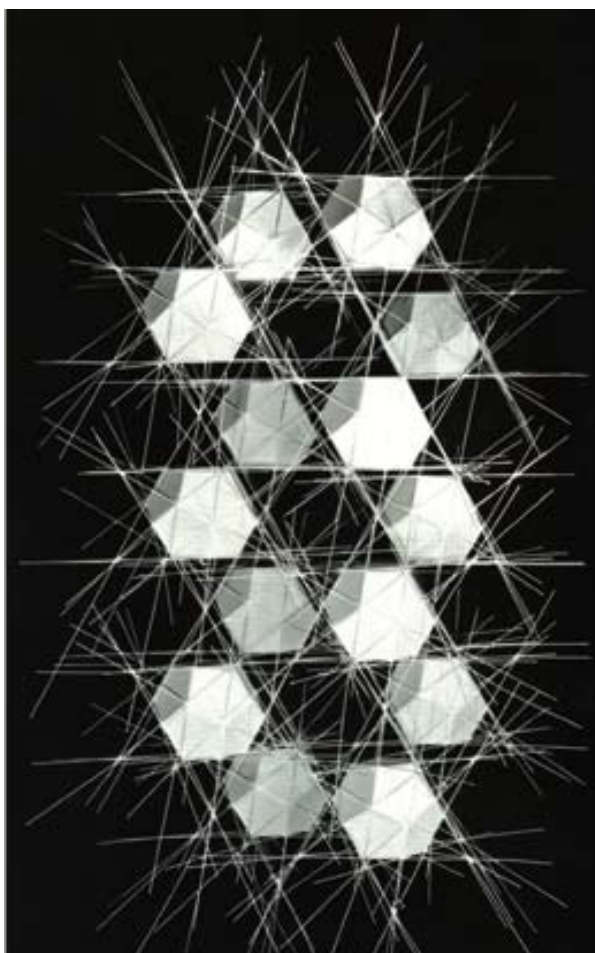
De volgende stap is, om drie van de zes assen te kiezen en een ruitenzesvlak te vormen met drie ribben langs die assen. Dat kan op precies twee verschillende manieren. Ze heten A6 en O6 (figuur 4). Gerard Caris gebruikt die twee ruitenzesvlakken als bouwstenen om esthetisch aantrekkelijke, niet-convexe configuraties, beelden en reliëfs te maken. A6 en O6 zijn beslist niet alleen maar curiositeiten; ze hebben belangrijke eigenschappen die verband houden met actueel wiskundig en kristallografisch onderzoek. Je kunt er bijvoorbeeld niet-periodieke, ruimtevullende stapelingen mee maken.”

(Zie ook ‘Gulden ruitenveelvlakken’ van Jan van de Craats in *Pythagoras* 41, nr. 6, pp. 10-15.) ■



Figuren: Jan van de Craats

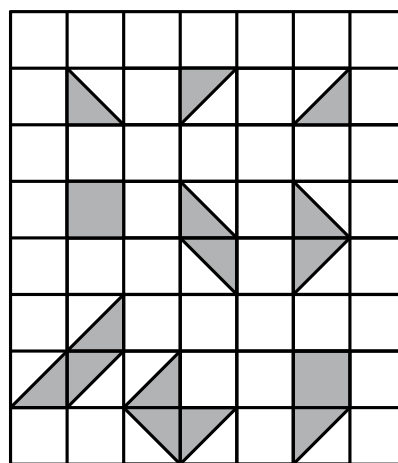
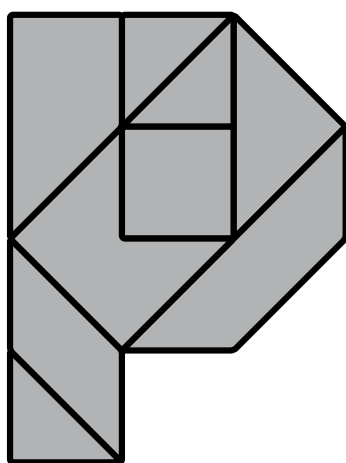




De teksten en beelden op deze twee pagina's zijn ontleend aan *Pentagonismus/Pentagonism*, een Duits/Engelstalig boek over Gerard Caris (ISBN 978-3-86560-252-0).

In het septembernummer schreef *Pythagoras* de Pygram-prijsvraag uit. Er waren zes opdrachten en even zoveel prijzen van elk honderd euro.
■ door Thijs Notenboom en Matthijs Coster

PYGRAMPRIJSVRAAG: DE UITSLAG



12 De prijsvraag van deze jaargang week af van de getallenprijsvragen van de afgelopen jaren. Dat was bij de 'W(iskunde)-opdrachten' te merken: met name W1 en W2 werden als heel lastig ervaren. Daar stond tegenover dat men zijn/haar creativiteit de vrije loop kon laten bij de 'A(rtistiek)-opdrachten'. Vooral op deze laatste vragen kwamen tientallen reacties binnen, variërend van A4-tjes (meer dan honderd) waarop de Pygramstukjes waren geplakt tot complete bouwwerken, en daarnaast een aantal foto's van dergelijke bouwwerken.

OPDRACHT W1 EN W2 Gebruik de negen Pygramstukjes om zo veel mogelijk verschillende convexe figuren te maken. Twee figuren zijn pas echt verschillend, als je ze niet door draaien of ondersteboven leggen op elkaar kunt passen. Je mag ook afzonderlijke stukjes ondersteboven draaien om een convexe figuur te leggen. Aldus luidde opdracht W1. Opdracht W2 was identiek, maar het vierkante figuurtje (in het midden van de P) moet worden weggelaten.

Essentieel voor een juiste beantwoording van deze vragen was het besef dat alle zijden veelvou-

den zijn van 1 en $\sqrt{2}$. Of anders geformuleerd dat alle stukjes kunnen worden opgebouwd uit basisdriehoekjes met zijden 1, 1 en $\sqrt{2}$.

Helaas kwam de jury regelmatig inzendingen tegen waarbij een zijde ter lengte 3 was geplakt tegen een zijde ter lengte $2\sqrt{2}$. Een dergelijke figuur kan nooit convex zijn. Wat ook heel lastig bleek te zijn, was na te gaan dat bepaalde convexe vormen niet meerdere malen werden ingestuurd.

Er waren vijf personen die zowel opdracht W1 als W2 helemaal goed instuurden. Zij vonden dertien oplossingen met negen Pygramstukjes (W1) en zestien oplossingen met acht Pygramstukjes (W2). Meer oplossingen zijn er (inderdaad) niet.

De jury besloot de prijzen in de categorie W1 en W2 toe te kennen aan Marcel Nijman en de Vrije School Den Haag (docent G.M. Alaerts). Marcel Nijman bedacht een slimme methode om te bepalen hoeveel oplossingen er zijn. Hij ging uit van rechthoeken waaruit maximaal vier hoeken geknipt konden worden. Hij ging voor elk van de situaties na hoeveel oplossingen er waren. De jury was onder de indruk van zijn benadering. De Vrije School Den Haag categoriseerde

de oplossingen door de omtrek van de convexe vormen te bepalen.

OPDRACHT W3 EN W4 Leg met de negen Pygramstukjes een figuur met een zo groot/klein mogelijke omtrek. Bereken de omtrek van je figuren door te stellen dat de zijden van het kleine vierkantje lengte 1 hebben. De figuur hoeft niet convex te zijn, maar er mag geen gat in zitten. Stukjes mogen alleen tegen elkaar aan gelegd worden als hun zijden passen. Dat wil zeggen: of de tegen elkaar aan liggende zijden zijn even lang, of er passen meerdere stukjes precies tegen een grotere aan. Aldus luidde opdracht W3. Opdracht W4 was identiek, maar dan met weglating van het vierkantje.

De beantwoording van deze opdrachten was een stuk eenvoudiger. Om tot een zo klein mogelijke omtrek te komen, moeten de stukjes zo gelegd worden dat het uiterlijk zoveel mogelijk lijkt op een cirkel. Bij W3 (negen stukjes) is de minimale omtrek, $6 + 4\sqrt{2}$, bij W4 (acht stukjes) $8 + 2\sqrt{2}$.

Om te zoeken naar de grootst mogelijke omtrek kan eerst het beste de omtrek van alle stukjes

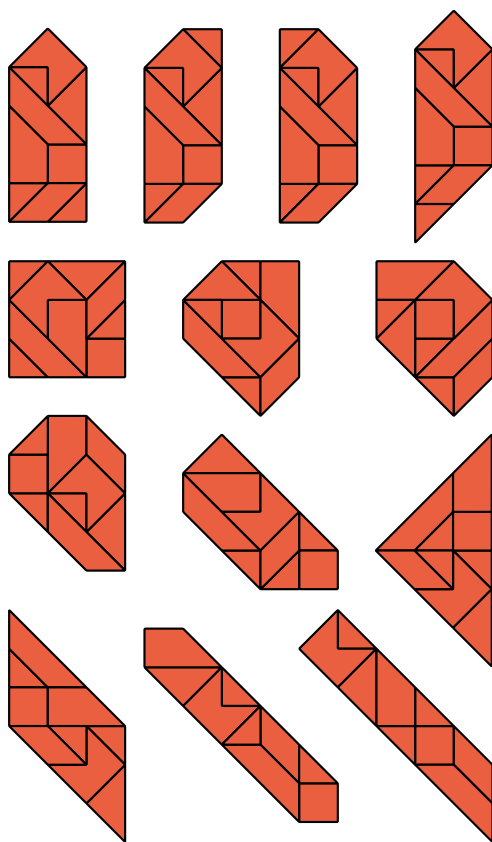
afzonderlijk worden bepaald. Deze totale omtrek (bij W3; negen stukjes) is $22 + 14\sqrt{2}$. Vervolgens wordt de totale omtrek steeds met tweemaal de lengte van de gemeenschappelijke zijde vermindert. Uiteraard proberen we deze gemeenschappelijke zijde zo klein mogelijk te kiezen. Dat gaat altijd, met uitzondering van de grote driehoek (met rechthoekszijden $\sqrt{2}$ en schuine zijde 2). Hier gingen de meeste inzenders (de jury inclusief) de fout in door deze grote driehoek met een rechthoekszijde tegen een ander Pygramstukje te leggen. De uiteindelijke omtrek wordt dan

$$22 + 14\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 14 = 8 + 12\sqrt{2},$$

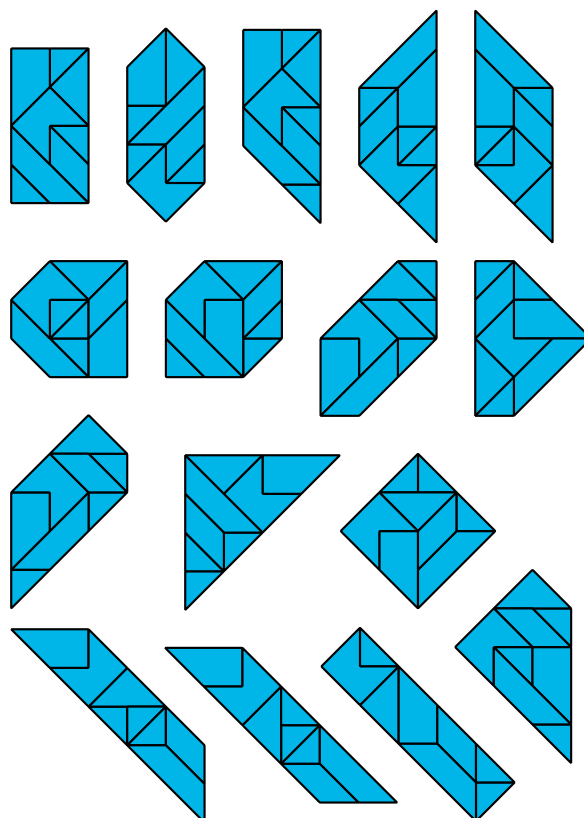
terwijl de schuine zijde ook aan twee andere stukjes gelegd kan worden. In dat geval is de omtrek $22 + 14\sqrt{2} - 16 = 6 + 14\sqrt{2}$.

Op dezelfde manier kun je het antwoord van W4 (acht stukjes) vinden. Hier is de grootst mogelijke omtrek $4 + 14\sqrt{2}$.

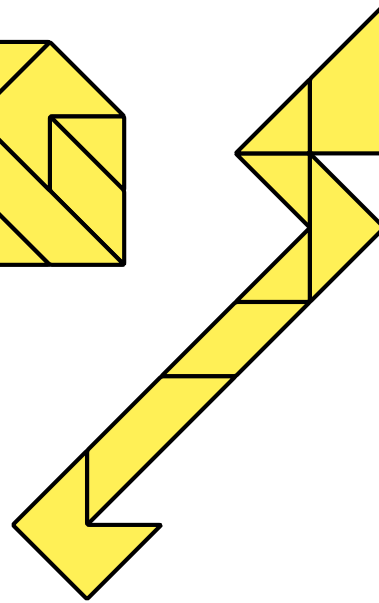
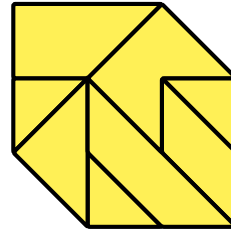
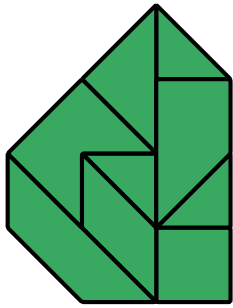
Jeroen Soesbergen leverde keurig verzorgde oplossingen van W3 en W4. De Stedelijke Scholengemeenschap Nehalennia (docent Paul Koster) stuurde een prachtige map op waarin overzichtelijk de



Opdracht W1: met de negen Pygramstukjes kun je dertien convexe figuren leggen



Opdracht W2: zonder het vierkante stukje kun je zestien convexe figuren leggen



Opdracht W3: de kleinst mogelijke omtrek die je met de negen stukjes kunt maken, is $6+4\sqrt{2}$, de grootst mogelijke omtrek is $6+14\sqrt{2}$

Opdracht W4: de kleinst mogelijke omtrek die je met de acht stukjes (vierkantje weggelaten) kunt maken, is $8+2\sqrt{2}$, de grootst mogelijke omtrek is $4+14\sqrt{2}$

verschillende vragen waren samengebracht. De jury heeft besloten de prijzen in de categorie W3 en W4 aan hen toe te kennen.

rischool uit Groningen. Lerares Stephanie Siersma wist haar leerlingen te mobiliseren om een collage te maken met in totaal 61 figuren, waarvan er heel wat in het rijk der dieren thuishoren.

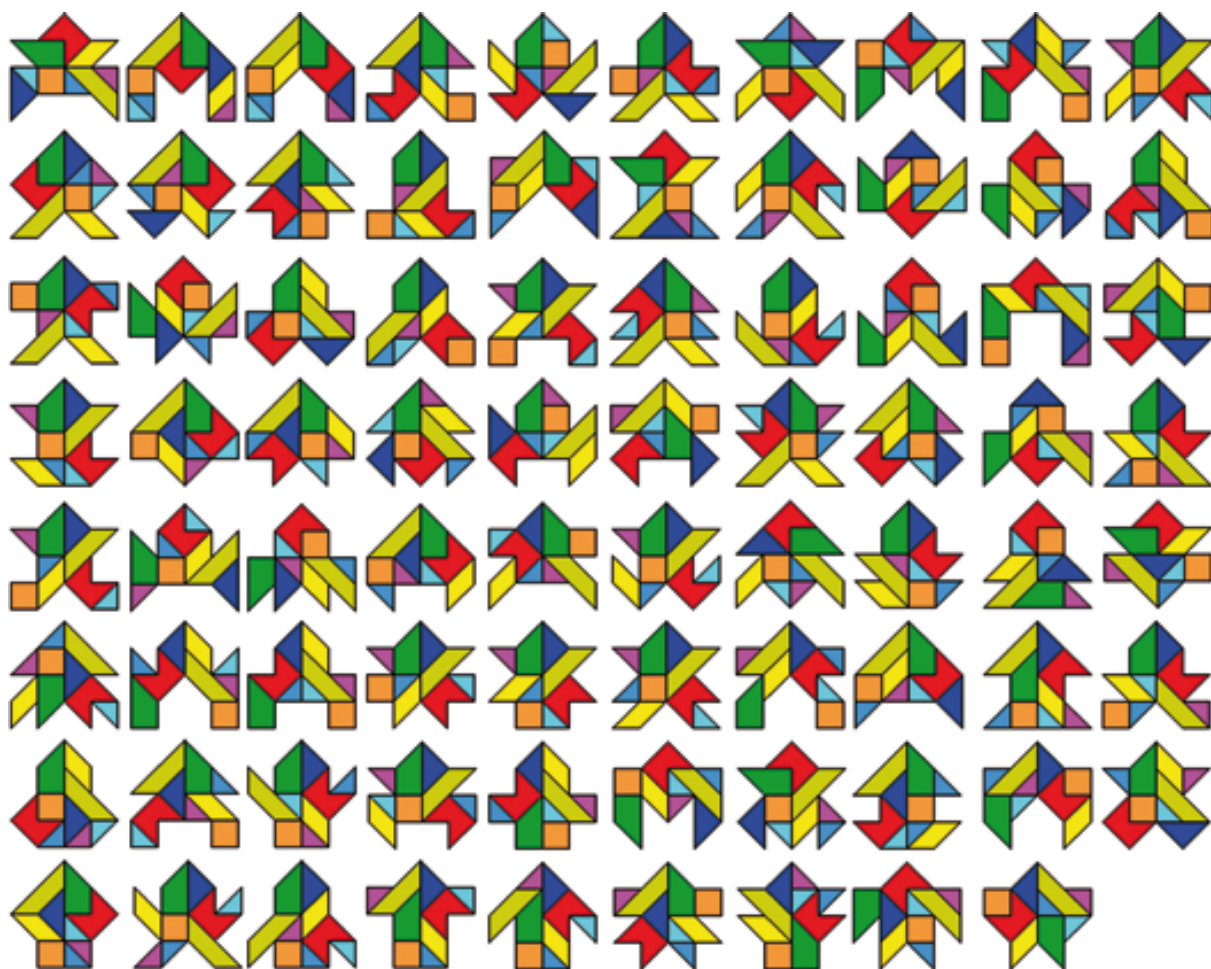
OPDRACHT A1 Kies een thema, bijvoorbeeld 'letters' of 'verkeersborden'. Maak met de Pygramstukjes zo veel mogelijk fraaie figuren die in het thema passen. De winnaar van deze opdracht is de Montesso-

OPDRACHT A2 Opdracht A2 was een vrije opdracht, waar vrijwel alles mocht. Dit was voor KSO Glorieux uit België aanleiding om groots uit te pak-

14



Vier van de 61 figuren uit de collage van de Montessorischool Groningen



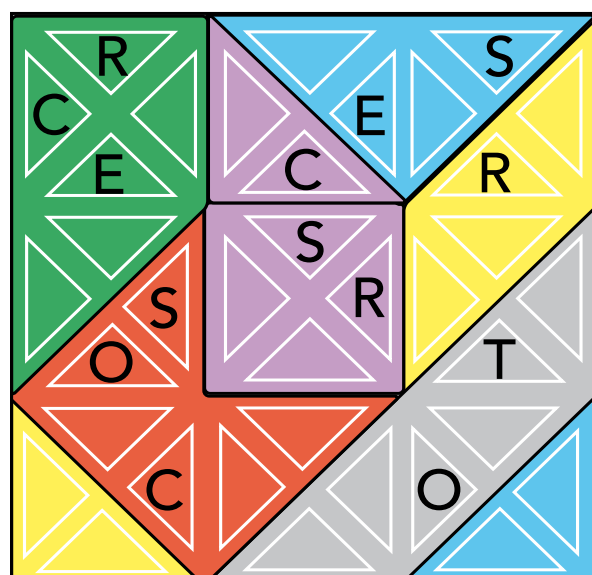
Figuren met een verticale symmetrie-as

ken. De onvolprezen docente Odette De Meulemeester heeft met haar leerlingen werk afgeleverd dat met kop en schouders boven elke andere inzending uitsteekt. Naast het correct beantwoorden van alle W-opdrachten zijn er bij de artistieke opdrachten meerdere thema's grootschalig uitgewerkt.

Deze school uit het Belgische Ronse zocht alle figuren die je met de Pygramstukjes kunt maken binnen een vierkant van 4 bij 4, die een verticale symmetrie-as hebben. Ze beperkten zich tot figuren zonder gaten en waarbij de stukjes met elkaar een zijde gemeenschappelijk hebben. Ze vonden er in totaal niet minder dan 347!

Verder bedachten ze een 'Pygram-sudoku'. Het diagram is een vierkant gevuld met de pygramstukjes. Deze sudoku heeft drie rijen en drie kolommen van elk zes vakjes (met de vorm $\times \times \times$). De acht Pygramstukjes (het vierkantje doet niet mee) hebben zes verschillende kleuren. Op elke rij, in elke kolom en op elke kleur moeten de letters C, O, S, T, E en R precies eenmaal voorkomen.

Ook bedachten de leerlingen van De Meulemeester een soort memoryspel op een bord dat de vorm van een 3-4-5-driehoek heeft, ze maakten



Een sudoku-variant met de Pygramstukjes

fantastische figuren met verschillende soorten symmetrie en ze ontwierpen kerst- en nieuwjaarskaarten met de Pygramstukjes.

De resultaten heeft de A2-winnaar op een aparte website geplaatst: <http://ksoglorieux.classy.be>. ■

Overbekend zijn de stelling van Pythagoras en de stelling van Fermat. Veel minder bekend maar minstens zo indrukwekkend is de stelling van Goodstein. De Engelse wiskundige R.L. Goodstein bedacht een manier om een lange reeks getallen te maken die schijnbaar alleen maar groter worden, en wel zo hard dat je de getallen al snel niet eens meer op een pagina kwijt kunt. Toch eindigt de rij getallen altijd op nul, welke startwaarde je ook kiest. Dat bewees Goodstein in 1944. Bij dat bewijs wordt gewerkt met *ordinaalgetallen*.

■ door Tom Verhoeff

DE STELLING VAN GOOD

Naar de Engelse wiskundige Ruben Louis Goodstein (1912-1985) is een fascinerende stelling genoemd. Om te begrijpen waar die stelling over gaat, moeten we eerst uitleggen dat je getallen op allerlei manieren kunt noteren. Het meest gewend ben je natuurlijk aan de *decimale* notatie, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 100 \times 2 + 10 \times 6 + 1 \times 6 \\ &= 10^2 \times 2 + 10^1 \times 6 + 10^0 \times 6 \end{aligned}$$

Je ziet dat decimale getallen zijn opgebouwd uit veelvouden van oplopende machten van het grondtal 10 ($G = 10$): 1, 10, 100, 1000, enzovoorts. De *coëfficiënten* staan met opzet achter de machten en hebben een blauwe achtergrond, bij de machten is de achtergrond geel. Maar je kunt elk getal ook opbouwen met machten van 2 (*binair*; $G = 2$):

16

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Of met machten van 3 (*ternair*; $G = 3$):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 3^2 \times 2 + 3^1 + 3^0 \times 2 \end{aligned}$$

Goodstein ging nog een stap verder en gebruikte wat je de *super-G-notatie* kunt noemen. Dan schrijf je elke exponent ook weer als som van machten van het grondtal G met coëfficiënten kleiner dan G . Dat herhaal je met de nieuwe exponenten tot alle getallen ten hoogste G zijn. Met $G = 2$ wordt het getal 266:

$$\begin{aligned} 266 &= 2^8 + 2^3 + 2 \\ &= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2 \\ &= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \end{aligned}$$

en met $G = 3$ wordt het

$$\begin{aligned} 266 &= 3^5 + 3^2 \times 2 + 3 + 2 \\ &= 3^{3+2} + 3^2 \times 2 + 3 + 2 \end{aligned}$$

$$3 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 2}} 2^1 + 2^0 \xrightarrow{\text{vervang elke 2 door 3}} 3^1 + 3^0 = 4$$

$$3 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 3}} 3^1 \xrightarrow{\text{vervang elke 3 door 4}} 4^1 = 4$$

$$3 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 4}} 4^0 \times 3 \xrightarrow{\text{vervang elke 4 door 5}} 5^0 \times 3 = 3$$

$$2 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 5}} 5^0 \times 2 \xrightarrow{\text{vervang elke 5 door 6}} 6^0 \times 2 = 2$$

$$1 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 6}} 6^0 \xrightarrow{\text{vervang elke 6 door 7}} 7^0 = 1$$

Figuur 1 De Goodsteinrij die begint met 3: 3, 3,

$$4 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 2}} 2^2 \xrightarrow{\text{vervang elke 2 door 3}} 3^2 = 9$$

$$26 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 3}} 3^2 \times 2 + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2 \xrightarrow{\text{vervang elke 3 door 4}} 4^2 \times 2 + 4^1 \times 2 + 4^0 \times 2 = 104$$

$$41 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 4}} 4^2 \times 2 + 4^1 \times 2 + 4^0 \xrightarrow{\text{vervang elke 4 door 5}} 5^2 \times 2 + 5^1 \times 2 + 5^0 = 252$$

Figuur 2 De eerste vier waarden van de Goodsteinrij

$$8 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 2}} 2^3 \xrightarrow{\text{schrijf de exponenten óók als som van machten van 2}} 2^{2^1+2^0} = 8$$

$$80 \xrightarrow{\text{schrijf als som van machten van 3}} 3^3 \times 2 + 3^2 \times 2 + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2 \xrightarrow{\text{vervang elke 3 door 4}} 4^3 \times 2 + 4^2 \times 2 + 4^1 \times 2 + 4^0 \times 2 = 416$$

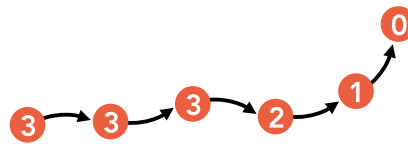
Figuur 3 Als de startwaarde 8 is, begin je die te schrijven als $2^{2^1+2^0}$. De exponent is 3 en dat is groter dan 2; daarom schrijf je die ook als macht van 2; dit heet de *super-2-notatie*.

$$266 \xrightarrow{\text{schrijf in super-2-notatie}} 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \xrightarrow{\text{vervang elke 2 door 3}} 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 = 443...886$$

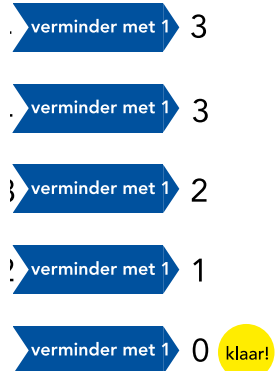
$$443...886 \xrightarrow{\text{schrijf in super-3-notatie}} 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \xrightarrow{\text{vervang elke 3 door 4}} 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 = 323...681$$

$$323...681 \xrightarrow{\text{schrijf in super-4-notatie}} 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \xrightarrow{\text{vervang elke 4 door 5}} 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 2 = 266$$

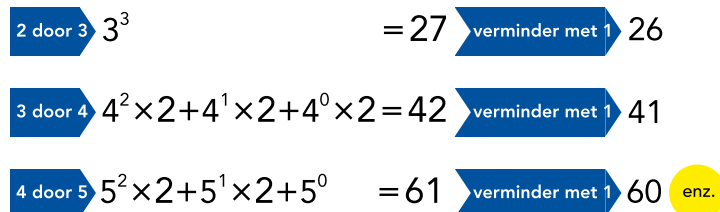
Figuur 4 Als de startwaarde 266 is, is het vierde getal van de Goodsteinrij 266



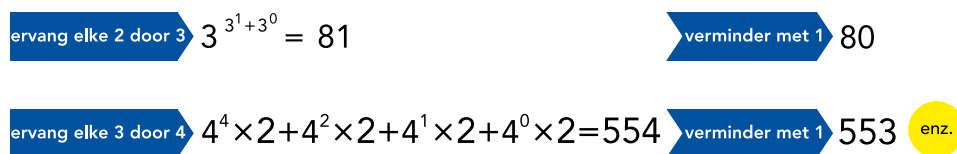
GOODSTEIN



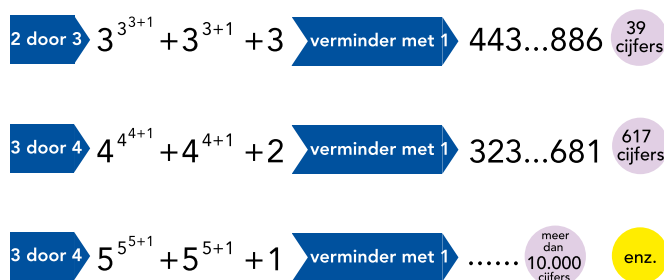
3, 2, 1, 0.



rij die begint met 4: 4, 26, 41, 60.



schrijven als macht van 2, dus als 2^3 .
schrijf je deze exponent óók weer



getal in de Goodsteinrij al meer dan 10.000 cijfers lang!

GOODSTEINRIJ EN DE STELLING VAN GOODSTEIN

Met de *super-G-notatie* definieerde Goodstein een systeem om rijen getallen te maken, beginnend met een natuurlijk getal N . Het recept kun je lezen in het kader op deze pagina.

Als je als startwaarde 3 neemt, is de rij goed te overzien: 3, 3, 3, 2, 1, 0; zie figuur 1. Met startwaarde 4 wordt de rij meteen veel minder overzichtelijk: 4, 26, 41, 60, 83, ...; zie figuur 2. Na negen stappen ben je bij 253 en lijkt het erop dat de rij naar oneindig gaat. Dat is echter niet zo: ook deze rij komt uiteindelijk op nul uit, maar pas na ongeveer $10^{121.210.700}$ stappen! Het is al een pittige opgave om te bepalen hoeveel stappen het precies kost om beginnend met 4 uit te komen op 0.

In de figuren 3 en 4 zie je hoe de Goodsteinrij begint als je start met 8 respectievelijk 266. Zoals je ziet, groeien de getallen in de Goodstein rij fenomenaal snel. Toch publiceerde Goodstein in 1944 een bewijs voor het volgende verrassende resultaat:

Stelling van Goodstein. *Elke Goodsteinrij eindigt met $N = 0$.*

HOE MAAK JE EEN GOODSTEINRIJ BIJ EEN GEGEVEN STARTGETAL N ?

Recept

1. Begin met $G = 2$.
2. Schrijf N in *super-G-notatie*.
3. Vervang hierin elke G door $G+1$.
4. Verminder met 1; dit geeft de nieuwe N .
5. Verhoog G met 1; dit geeft de nieuwe G .
6. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 2 herhalen.

Voorbeeld

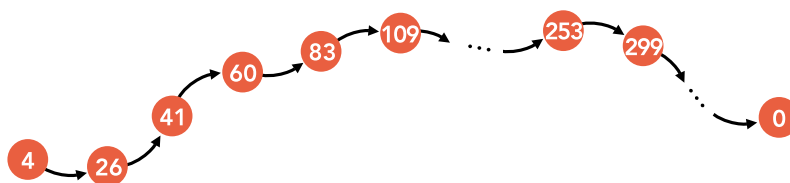
$$N = 8$$

$$8 = 2^{2+1}$$

$$3^{3+1} = 81$$

$$N' = 80$$

$$G' = 3$$



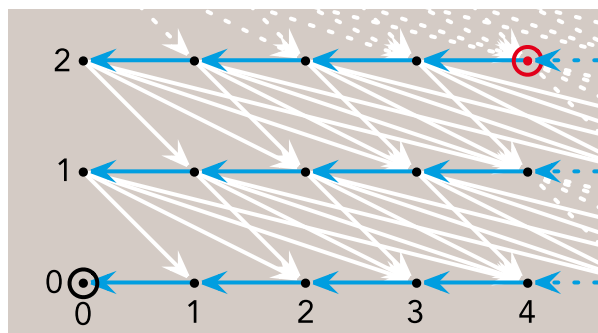
Dit klinkt ongelooflijk als je ziet hoe hard de getallen groeien. Later is bovendien bewezen dat de stelling van Goodstein niet te bewijzen is met uitsluitend de basisregels van de rekenkunde (*axioma's van Peano*), waaronder het principe van *volledige inductie*. Het bewijs van Goodstein is gebaseerd op *ordinaalgetallen* en *transfiniete inductie*. De details voeren te ver, maar er is wel wat van te begrijpen.

KNIKKERSPELLEN Om enig gevoel te krijgen voor die ordinaalgetallen beschouwen we het volgende knikkerspel. In een zak zitten blauwe en witte knikkers. Telkens haal je er één knikker uit. Als die wit is stop je een blauwe terug; voor een blauwe stop je niks terug. Eindigt dit spel altijd, ongeacht de begintoestand?

Laat W het aantal witte knikkers zijn en B het aantal blauwe. De waarde van de uitdrukking $2 \times W + B$ neemt bij elke stap met precies 1 af. Als je immers een witte pakt, dan neemt W met 1 af en B met 1 toe:

$$2 \times (W - 1) + (B + 1) = 2 \times W + B - 1.$$

Dus is het na $2 \times W + B$ keer pakken afgelopen. De volgorde waarin je knikkers pakt maakt niet eens uit. De witte knikkers 'wegen' zwaarder dan de blauwe: elke witte knikker moet ook nog eens 'als blauwe door het leven'. Als je voor elke witte knikker 2 blauwe moet terugleggen, dan duurt het $3 \times W + B$ stappen, enzovoorts.



Figuur 5 Spelgraaf voor het aangepaste spel; de rode toestand rechtsboven heeft 2 witte en 4 blauwe knikkers; pijlen geven mogelijke toestandsveranderingen aan; linksonder is de zak leeg.

Nu veranderen we het spel. Je mag voor een witte knikker een *willekeurig* positief maar eindig aantal blauwe terugleggen. Het aantal stappen is nu niet vooraf te berekenen. Er is zelfs geen bovengrens voor te bepalen. Geen enkele (eindige) weegfactor volstaat: $N \times W + B$ is niet goed genoeg als bovengrens, voor welke eindige N dan ook. Toch kun je met figuur 5 inzien dat ook dit spel altijd eindigt.

ORDINAALGETALLEN De speltoestanden met alleen blauwe knikkers ($W = 0$, zie figuur 5) zijn op te vatten als de natuurlijke getallen. De toestanden met $W \geq 1$ zijn allemaal 'groter' dan elk natuurlijk getal. De 'kleinste' van die toestanden, $(B, W) = (0, 1)$, correspondeert met het kleinste getal groter dan alle natuurlijke getallen. Dit getal wordt wel aangeduid met ω , de kleine Griekse letter *omega*.

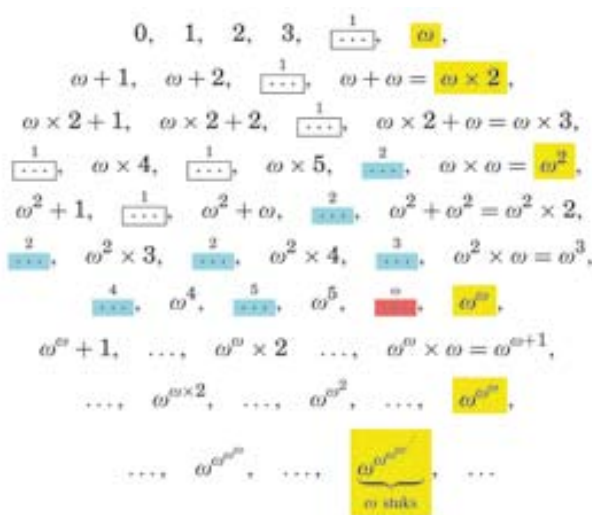
Een (ordinaal)getal is op te vatten als een rijtje (van turfjes), dat bij doorlopen van rechts naar links altijd in een eindig aantal stappen tot het begin leidt. Ordinaalgetal α is gedefinieerd als *de rij van alle ordinaalgetallen $< \alpha$* . (Ordinaal)getal 0 correspondeert met de *lege rij*, 1 met de rij waarin alleen 0 staat, 2 met de rij bestaande uit 0 (rechts) gevolgd door 1, enzovoorts. Het ordinaalgetal ω correspondeert dan met *de rij van alle natuurlijke getallen*. Zo worden de natuurlijke getallen uitgebreid met 'oneindige' getallen.

Met ordinaalgetallen kun je rekenen: één erbij doen (de eerstvolgende in de rij bepalen), optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen gaan 'net' als bij natuurlijke getallen. In figuur 6 zie je een stukje (met gaten) van de rij van ordinaalgetallen. Let wel dat niet alle vertrouwde eigenschappen meer gelden:

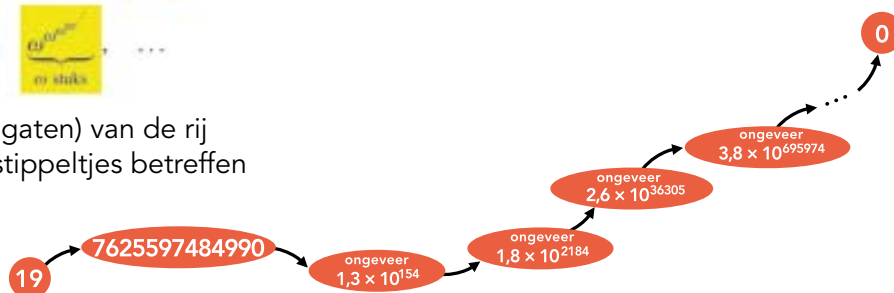
$$1 + \omega = 1 + 1 + \dots = \omega \neq \omega + 1$$

$$\begin{aligned} 2 \times \omega &= \overbrace{2 + \dots}^{\omega \text{ stuks}} = \overbrace{1 + 1 + \dots}^{\omega \text{ stuks}} = \\ &= \overbrace{1 + \dots}^{\omega \text{ stuks}} = 1 \times \omega = \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \times 2 &= \omega + \omega = \\ &= \overbrace{1 + \dots}^{\omega \text{ stuks}} + \overbrace{1 + \dots}^{\omega \text{ stuks}} \neq \omega \end{aligned}$$



Figuur 6 Een stukje (met gaten) van de rij van ordinaalgetallen, de stippeltjes betreffen limietovergangen.



Dit is ook de reden dat we de coëfficiënten in de super- G -notatie rechts van de machten schrijven en niet links ervan. Dadelijk gebruiken we namelijk ω als grondtal.

In het aangepaste knikkerspel is het ordinaalgetal $f(W, B) = \omega \times W + B$ wel een bovengrens, dat wil zeggen: met de oneindige weegfactor ω in plaats van 2. Bij weghalen van een blauwe knikker hebben we immers $f(W, B - 1) < f(W, B)$, omdat voor $B \geq 1$ geldt

$$\omega \times W + B - 1 < \omega \times W + B.$$

Bij weghalen van een witte waar het eindige aantal $K \geq 1$ van blauwe voor wordt teruggelegd vinden we $f(W - 1, K + B) < f(W, B)$, want voor $W \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} \omega \times (W - 1) + K + B &< \\ < \omega \times (W - 1) + \omega + B = \omega \times W + B. \end{aligned}$$

Ordinaalgetallen zijn *welgeordend*, dat wil zeggen: er bestaan geen oneindige dalende rijen ordinaalgetallen. Zo'n dalende rij slaat noodzakelijkerwijs (oneindig) vele ordinaalgetallen over als de rij start met ω of meer. Bij dit knikkerspel kunnen we toe met ordinaalgetallen kleiner dan $\omega \times \omega = \omega^2$.

Het bewijs van Goodstein werkt met ordinaalgetallen kleiner dan



(dit noemt men wel epsilon-nul: ϵ_0). Het bewijs gaat ruwweg als volgt.

Schrijf N in super- G -notatie. Vervang hierin iedere G door ω . Het resultaat $f(N, G)$ is een ordinaalgetal. Voorbeeld: $f(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$.

Bewering: als $N \neq 0$ en de opvolger van (N, G) in de Goodsteinrij is $(N', G + 1)$, dan geldt dat $f(N', G + 1) < f(N, G)$.

Voorbeeld: als $(N', G + 1)$ de opvolger van $(N, G) = (266, 2)$ is, dan is $f(N', G + 1) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 2$.

Ordinaalgetallen zijn welgeordend, dus op den duur is $N = 0$. (Einde bewijs)

Telkens die -1 doen is toch de nagel aan de doods-kist. ■

VERDER LEZEN Het oorspronkelijke artikel van Goodstein heet 'On the restricted ordinal theorem'. Het verscheen in *Journal of Symbolic Logic*, Volume 9 (1944), pp. 33-41. Een mooie doe-het-zelf inleiding tot de verzamelingenleer inclusief ordinaalgetallen en de stelling van Goodstein is *An Outline of Set Theory* van James M. Henle. Het is nog verkrijgbaar via *Dover Publications*. Een dictaat verzamelingenleer van K.P. Hart voor wiskundestudenten, waarin ook de stelling van Goodstein aan de orde komt, is te vinden op <http://dutiaw37.twi.tudelft.nl/~kp/onderwijs/verzamelingenleer>.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

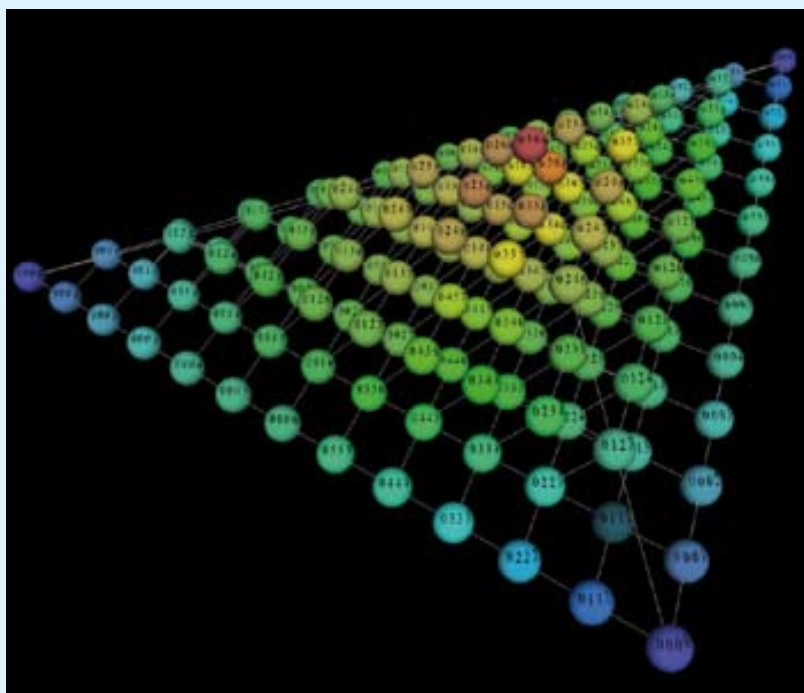
Muziek in een meetkundig jasje

Drie musicologen van Amerikaanse universiteiten hebben een nieuwe manier gevonden om muziek op een wiskundige manier te categoriseren. Hun methode heet *geometrical music theory*.

Professor Dmitri Tymoczko van de Princeton Universiteit is een van de drie onderzoekers. Het mooiste resultaat van het onderzoek is volgens hem dat het duidelijk maakt hoe verschillende muzikale concepten, die ogenschijnlijk niets met elkaar te maken hebben, op een logische manier met elkaar verbonden zijn. Het model kan helpen bij het zoeken naar verbanden tussen klassieke muziek en popmuziek, of wat de relatie is tussen tonale en atonale muziek.

De musicologen hebben een methode bedacht om de taal van de muziek om te zetten in die van de (moderne) meetkunde. Door middel van een rij noten – bijvoorbeeld de noten van een akkoord, een melodie of een ritme – worden verschillende muziekstukken gegroepeerd. Elke rij noten wordt gerepresenteerd door een punt in een meetkundige ruimte, eigenlijk net zoals je een punt (x, y) in een tweedimensionaal assenstelsel kunt weergeven. De onderzoekers hebben bij elke groep een wiskundige structuur gevonden.

De afbeelding laat zien hoe de 'geometrical music theory' vierklanken representeert. De verzameling van deze akkoor-



den wordt gevisualiseerd als een tetraëder (viervlak). De kleuren geven aan hoe groot de afstand is tussen de noten in een akkoord: in de blauwe bolletjes liggen de noten dicht bij elkaar, hoe warmer de kleuren worden, hoe verder de noten van elkaar

liggen. In de klassieke muziek is er één groep van vierklanken die binnen de theorie ervan een zeer belangrijke plaats inneemt: de septiemakkoorden. Het rode bolletje in de top representeert het verminderd septiemakkoord (bijvoorbeeld c-es-g-bes).

Spoorboekje bekroond dankzij wiskunde

Wiskundige modellen liggen ten grondslag aan de dienstregeling van de Nederlandse Spoorwegen. Onderzoekers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica zijn voor hun werk op dit gebied bekroond.

Het team, waaronder professor Lex Schrijver, ontving vo-

rige maand de Franz Edelman Award, de Oscar onder de innovatie awards, voor hun wiskundige algoritmen voor de dienstregeling. Het systeem dat het team van Schrijver ontwikkelde, houdt rekening met veel factoren, zoals beschikbare sporen, knooppunten, perrons, treinen en personeel.

VEEL, VELER, VEELST

In dit laatste nummer van jaargang 47 wijden we ‘miskunde’ aan de meest voorkomende vorm van getalblindheid in de media: de foutieve vertaling van billion en trillion (uit het (Amerikaans-)Engels of Frans) naar het Nederlands.

Eerst een overzicht:

getal	Nederlands	Engels
10^3	duizend	thousand
10^6	miljoen	million
10^9	miljard	billion
10^{12}	biljoen	trillion
10^{15}	biljard	quadrillion
10^{18}	triljoen	quintillion

Zo blijkt, dat billion vertalen met biljoen het desbetreffende getal een factor 1000 groter maakt, en trillion vertalen met triljoen zelfs een factor 1.000.000. Je zou toch verwachten dat zoiets meteen opvalt als het over getallen uit het dagelijks leven gaat, maar nee. Van sommige natuurvolkeren wordt wel gezegd dat hun cijfermatig inzicht zich beperkt tot één, twee, drie, ... veel, maar de doorsnee werknemer in de media komt ook niet verder dan ‘tien, honderd, duizend, ... heel veel’.

Zulke fouten zouden niet meer voorkomen als ook de algemene media de exponentiële notatie gebruikten, zoals in de linker kolom van de tabel. Maar ja, ten eerste rinkt dat naar wiskunde, en ten tweede loop je het risico dat de exponent ergens in het traject van journalist naar drukker van zijn voetstuk valt. Dan komt 10^{12} in de krant als 1012 en ben je nog verder van huis. Het blijft tobben.

VOORBEELDEN Vaak hebben de uitspraken iets te maken met hoeveelheden geld, zoals in de volgende zinnen. ‘Shell-topman Jeroen van der Veer van Shell verdiende vorig jaar € 9 miljoen.’ (*Elsevier*, 29 maart 2008), ‘De rijkste man op aarde, Warren Buffett, bezit € 41 miljard.’ (*Forbes Top 10*), ‘Het feestje voor de 84ste verjaardag van president Robert Mugabe van Zimbabwe kostte 3 biljoen Zimbabwaanse dollar (= € 6,78 miljoen).’ (*Spits*, 12



NRC Handelsblad, 20 augustus 2007



NRC Handelsblad, 30 januari 2006

februari 2008) en ‘Het Bruto Mondiaal Product is € 30 biljoen.’

Maar wat denk je van de volgende citaten? ‘De opwarming van de aarde zal de wereldeconomie elk jaar tot 5,5 triljoen euro per jaar kosten indien de regeringen geen drastische maatregelen nemen in de komende tien jaar.’ (Belgische Senaat, 1 maart 2007), ‘De klimaatverandering kost in het totaal 20 triljoen dollar.’ (NUjj.nl/Wetenschap, 1 februari 2008) en ‘2 biljoen mensen (gelijk aan één derde van de wereldbevolking) is geïnfecteerd met Tuberculose (TBC).’ (Erasmus Universiteit, vertaling van *Masterthesis ‘Pride, Dignity and Respect’*).

En wat is er mis met de informatie in de NRC-artikelen op deze pagina? ■

Samen met Euclides behoort Archimedes tot de belangrijkste wiskundigen van de Klassieke Oudheid. Hij vond een nauwkeurige benadering van π , verklaarde het drijfvermogen in vloeistoffen en gebruikte een verre voorloper van Newtons integraalrekening om de oppervlakte of inhoud van ronde vormen te berekenen. Maar bij Archimedes komen zelfs de *Mythbusters* er aan te pas om feiten van mythen te scheiden.

door Arnout Jaspers

ARCHIMEDES (CA. 287-212 BC):

DE ONMETELIJKE

Zijn dood is een schoolvoorbeeld van wat legerwoordvoerders tegenwoordig *collateral damage* noemen. Archimedes (ca. 287-212 voor Christus) woonde in Syracuse, destijds de hoofdstad van Sicilië, dat door de Romeinen werd belegerd omdat de stad in de Tweede Punische oorlog de kant van de Carthagers gekozen had. Het beleg slaagde, Romeinse soldaten plunderden de stad en troffen Archimedes aan, die als altijd zijn in het zand getekende diagrammen bestudeerde. 'Kom niet aan mijn cirkels!' riep hij uit, maar dat moet je tegen een soldaat die net je voordeur heeft ingetrapt niet zeggen, dat was toen ook al zo. In strijd met de vooraf gegeven orders van de Romeinse bevelhebber Marcus Marcellus maakte de soldaat de be-roemde Archimedes een kopje kleiner.

Het is echter heel onwaarschijnlijk dat het letterlijk zo gegaan is. In de tijd van Archimedes waren de meeste mensen analfabeet en werden verhalen mondeling doorverteld totdat iemand die wel kon schrijven ze noteerde, vaak pas tientallen jaren later. Eeuwenlang schreven kopiisten zo'n verhaal dan weer van elkaar over, met weglatingen, fouten en verfraaiingen.

Ook de anekdote over Archimedes die 'Eureka! Eureka!' roepend naakt door de straten van Syracuse rende, is vast een co-productie van generaties creatieve overschrijvers. Eureka is Grieks voor 'Ik heb het gevonden'. Volgens deze mythe stapte Archimedes in bad toen hij bedacht hoe hij het goudgehalte van de kroon van koning Hiëro de Tweede kon controleren. Hiëro vermoedde namelijk dat het lichtere en goedkopere zilver in het materiaal voor de kroon was bijgemengd. Het bad was tot aan de rand gevuld, dus toen Archimedes er in stapte, liep er precies zoveel water over de rand als het volume van zijn ondergedompelde lichaam.

Dat was ook de oplossing voor de kroon: maak met behulp van een balans eerst een klomp zuiver



goud die precies even veel weegt. Dompel vervolgens de balans met de kroon en de klomp goud onder in een waterbassin. Als de balans doorslaat naar de kant van de goudklomp, heeft de smid gefraudeerd. Blijft de balans in evenwicht, dan is ook de kroon van zuiver goud.

Archimedes beseft namelijk dat beide voorwerpen in het water een opwaartse kracht (drijfvermogen) ondervinden, gelijk aan het gewicht van het eigen volume aan water. Als het lichtere zilver in de kroon is bijgemengd, heeft deze meer volume dan de goudklomp en dus meer drijfvermogen.

Overigens zou deze test nu minder zekerheid geven: plutonium is nog net iets zwaarder dan goud, dus zou de frauduleuze smid door bijmengen

van plutonium en zilver een kroon kunnen maken met precies hetzelfde volume als de goudklomp.

PALIMPSEST In Archimedes' tijd bestonden er geen universiteiten, geen betaalde banen voor onderzoekers of wetenschappelijke tijdschriften waarin die onderzoekers konden publiceren. Archimedes beschreef zijn ontdekkingen daarom in brieven – opgerolde vellen papyrus – die hij per schip naar vrienden in Alexandrië (Egypte) stuurde. Daar was een grote en beroemde bibliotheek waarin afschriften van die brieven werden bewaard. In de eerste eeuwen na Christus werden afschriften op papyrus heel geleidelijk vervangen door het duurzamere perkament (gemaakt van dierenhuid).

De bibliotheek van Alexandrië is later in vlammen opgegaan, maar gelukkig waren inmiddels afschriften van belangrijke werken over het Middellandse Zeegebied verspreid. Er is dus geen sprake van dat enig, door Archimedes zelf geschreven, werk nog bewaard is gebleven. Sterker nog, we weten dat van sommig werk zelfs geen afschriften bewaard zijn gebleven, omdat de titels door anderen genoemd worden maar de tekst nergens is teruggevonden.

Het was dan ook een sensatie toen in 1907 in Constantinopel een palimpsest opdook met nooit eerder gevonden afschriften van teksten van Ar-

chimedes. Een palimpsest is een beschreven perkament dat is schoongeschrapt en opnieuw beschreven. Dit gebeurde in de middeleeuwen veel, omdat perkament toen schaars en duur was. De teksten van Archimedes op deze palimpsest – *Codex C* genaamd – waren vrijwel onleesbaar door het schrapen en doordat er christelijke teksten overheen geschreven waren.

In de chaos na de Eerste Wereldoorlog verdween ook *Codex C* ergens tussen Turkije en Griekenland uit het zicht, tot hij eind jaren negentig weer opdook in Frankrijk en geveild werd door Christie's in New York. Een anonieme koper betaalde 2,2 miljoen dollar voor het beschimmelde, door brand aangetaste en vrijwel onleesbare boekje.

RESTAURATIE De Archimedes-palimpsest is nu in het Walters Art Museum in Baltimore, waar deze de afgelopen jaren gerestaureerd is en waar de teksten met geavanceerde beeldtechnieken weer deels leesbaar zijn gemaakt. Conservator van dat museum William Noel schreef er in 2007 samen met wiskundig historicus Reviel Netz een boek over, *De Archimedes-codex*, waarin zijn hoofdpersoon zo met hem op de loop gaat dat hij hem zo ongeveer tot het grootste genie ooit uitroept.

De achterflap van de Nederlandse vertaling van het boek maakt het nog bonter: 'Archimedes (wist)



Een losgehaald folio uit de Archimedes-palimpsest, gefotografeerd bij verschillende kleuren LED-licht. Horizontaal de religieuze tekst van een middeleeuwse monnik, verticaal de oudere Archimedes-tekst die was weggeschrapt om het perkament opnieuw te kunnen gebruiken. (Bron: de (anonieme!) eigenaar van de Archimedes-palimpsest.)

2200 jaar geleden meer van wis- en natuurkunde dan Isaac Newton in de zeventiende eeuw.' Dat is natuurlijk kletsboek. Archimedes wist niet dat de aarde om de zon draaide of dat licht een golfverschijnsel is. Hij kon van sommige krommen de oppervlakte bepalen door ingenieuze ad hoc-constructies, maar had niet, zoals Newton, een algemeen toepasbare methode, en zo liggen de voorbeelden voor het oprapen.

Hoewel het boek af en toe te gedetailleerd en nogal warrig is, weet Noel heel veel van oude manuscripten en hij weet heel goed over te brengen hoe fascinerend het is om het gedachtengoed te reconstrueren van iemand die 2200 jaar geleden leefde. En dat geldt heus niet alleen maar voor bibliothecarissen.

De anonieme koper gaf de Archimedes-codex voor onbepaalde tijd te leen aan het Walters museum en betaalde ook nog de specialisten en de modernste apparatuur om de bijna weggeschrapte teksten en diagrammen weer zichtbaar te maken. Zelfs een van de grootste deeltjesversnellers ter wereld, de Stanford Lineair Accelerator, kwam er aan te pas om met röntgenstraling de laatste restjes tekst uit de vergane bladzijden te destilleren.

DODENDE STRAAL Noel en Netz willen uit die nieuw ontdekte tekstfragmenten te verstrekkende conclusies trekken, namelijk dat Archimedes eigenlijk Newton en Leibniz het gras al voor de voeten had weggemaaid. Enigszins begrijpelijk is dat wel: op een historisch personage waarvan we maar heel

fragmentarische kennis hebben, hebben ook anderen graag hun favoriete mythes geprojecteerd.

Een van de fantastische prestaties die door antieke geschiedschrijvers aan Archimedes werden toegeschreven, was een brandglas dat op afstand vijandelijke schepen in brand stak. We kennen het principe allemaal van het vergrootglas waarmee je buiten – mits de zon schijnt – een fikkie kunt steken.

Volgens Griekse en Romeinse historici bouwde Archimedes deze antieke voorloper van Star Wars tijdens de Romeinse belegering van Syracuse. Er zijn diverse pogingen ondernomen om dit sterke staaltje experimenteel te testen. Dat Archimedes dit presteerde met een gigantisch brandglas is uitgesloten. Daar is een lens met een diameter van meters voor nodig, en het slijpen van zo'n lens is zelfs tegenwoordig technisch vrijwel niet te doen. Maar ook een parabolische spiegel kan zonlicht in één punt concentreren, en het is relatief eenvoudig om met een groot aantal kleine, vlakke spiegels de vorm van een parabool te benaderen.

Archimedes bewees dat de oppervlakte onder een paraboolsegment gelijk is aan 4/3 maal de oppervlakte van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Hij gebruikte daarvoor een redenering die een curieuze mix was van de hefboomregel uit de natuurkunde en een voorloper van het door Newton ontdekte integreren. Eerst bewees hij met ook nu nog gangbare redeneringen over verhoudingen tussen lijnstukken dat

$$|MX| : |SH| = |TK| : |KN| \quad (*)$$

(TK is per definitie even lang als KC, en SH is het parallel verplaatste lijnstuk OX), met MX een willekeurig gekozen lijn parallel aan de as BD van de parabool.

Archimedes doet nu alsof de lijnstukken MX en SH fysieke objecten zijn, die aan de balans TN met draaipunt K hangen. Uit (*) en zijn eigen hefboomregel volgt dat die twee lijnstukken in balans zijn. Maar anderzijds is de lijn MX een willekeurige parallel, en SH heeft altijd dezelfde lengte als het stuk van MX onder de parabool, OX.

Hieruit concludeert Archimedes dat wat voor één lijnstuk geldt, ook geldig moet zijn voor de (oneindig grote) verzameling lijnstukken die samen het paraboolsegment vormen. Dit is de stap die een voorproefje lijkt op Newtons en Leibniz' integraalrekening, zoals je dat in de vijfde

24



Het experiment met de spiegels op het MIT



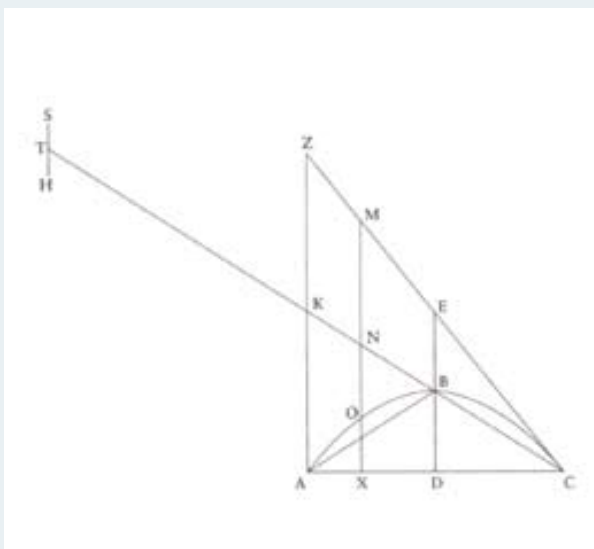
Het oorlogsschip dat op het MIT in brand werd gestoken

In oktober 2005 probeerden tientallen studenten van het Massachusetts Institute of Technology (een Amerikaanse universiteit) met 129 vlakke spiegels van 30 bij 30 centimeter een model van een Romeins houten oorlogsschip vanaf dertig meter afstand in brand te steken. Het lukte uiteindelijk wel, maar



De Mythbusters in actie

het bleek in de praktijk erg lastig. De gereflecteerde lichtvlekken van alle spiegels moesten natuurlijk op hetzelfde punt terecht komen, maar dat lukte slechts nauwkeurig door ze één voor één op een vast mikpunt te richten (terwijl de andere afgedekt waren). Vanwege de draaiing van de aarde verschuift het ge-



klas op school leert: een oppervlak wordt verdeeld in verticale strookjes waarvan de hoogte bekend is, waarna de breedte van de strookjes 'naar nul gaat' en het er dus oneindig veel worden, zodat je de exacte oppervlakte onder een kromme kunt bepalen (zie ook het artikel over Newton en Leibniz in het januarinumnummer van deze jaargang van *Pythagoras*).

Via nog een aantal redeneerstappen leidt Archimedes vervolgens af dat de driehoek AZC in balans zou zijn met het parabolosegment ABC als dat aan de linkerkant van de balans hing. Omdat de linkerarm drie keer zo lang is als de rechterarm, is drie-

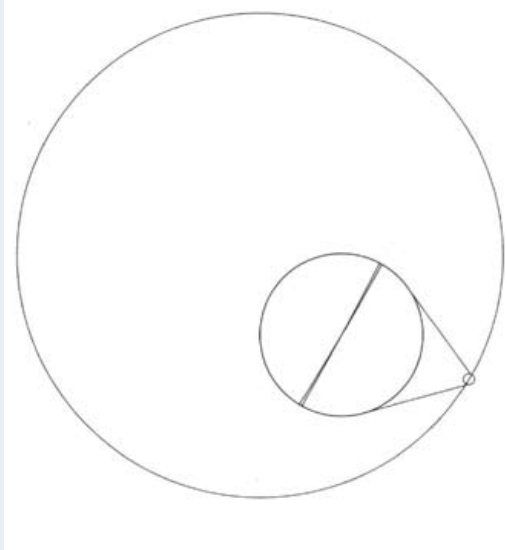
hoek AZC dus drie keer zo 'zwaar' als parabolosegment ABC. Maar Archimedes had al eerder aangetoond (dat is niet heel moeilijk) dat driehoek AZC vier keer zo groot is als de ingeschreven driehoek ABC, waaruit de oppervlakteverhouding 4/3 met het parabolosegment ABC volgt.

De volledige redenering is ingenieus maar erg omslachtig en geldt bovendien alleen voor een parabool. Tegenwoordig zouden we zeggen, met Newton als leermeester: de vergelijking van deze parabool is te schrijven als $y = k^2 - x^2$, dus de oppervlakte van het segment boven de x -as is

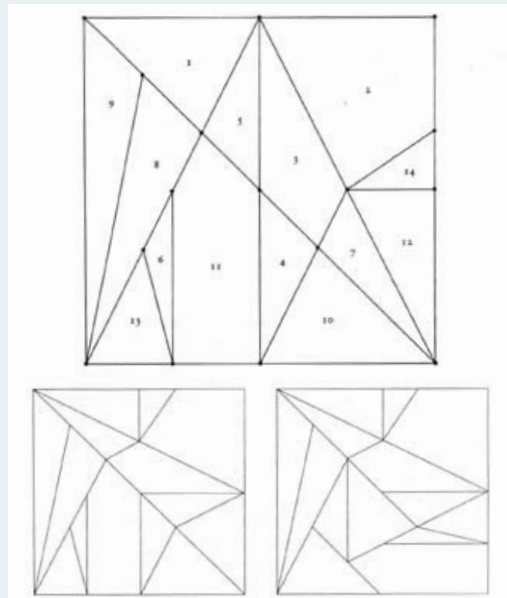
$$\int_{-k}^k y \, dx = \left[k^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-k}^k = \frac{4}{3} k^3.$$

De oppervlakte van de ingeschreven driehoek is $\frac{1}{2} \times 2k \times k^2 = k^3$, dus hun verhouding is 4/3. Maar het hele idee dat een kromme kan worden beschreven door een formule, waar je dan slim mee kunt rekenen, is pas opgekomen in de tijd van Descartes, in de zeventiende eeuw.

Archimedes moest zich in bochten wringen om dergelijke resultaten zonder algebra en differentiaal- of integraalrekening af te leiden. Zijn bewijs dat het volume van een bol $2/3$ is van het volume van de cilinder waar hij precies in past, beschouwde hij zelf volgens de legende als zijn grootste prestatie, terwijl dit nu middelbare-school-stof is.



De waarde van het getal π is te benaderen door een regelmatige veelhoek in een cirkel te construeren. Als je begint met een zeshoek, vind je $\pi \approx 3$. Archimedes slaagde erin de omtrek van een regelmatige 96-hoek te bepalen, en bepaalde zo dat de waarde van π lag tussen $\frac{223}{71}$ en $\frac{22}{7}$.



Deze puzzel, die waarschijnlijk niet door Archimedes zelf verzonnen is, was het onderwerp van zijn grotendeels verloren gegane verhandeling *Stomachion* ('maagpijn'). Nog leesbare fragmenten tekst in de *Codex C* wijzen er volgens Noel en Netz op, dat Archimedes bestudeerd heeft op hoeveel manieren van deze puzzel een vierkant gelegd kon worden. Hij zou daarmee de grondlegger van de combinatoriek zijn.

26

meenschappelijke brandpunt op die afstand met een meter of tien per uur, dus was ook precieze timing belangrijk. Verder bleek zelfs een beetje sluibewolking al roet in het eten te gooien, omdat de reflecties van de spiegels te diffuus werden. Later probeerden Mythbusters Adam Savage en Jamie Hyneman in hun tv-programma hetzelfde met 300 vlakke spiegels. In beide gevallen lukt het onder ideale omstandigheden om op één, vooraf bepaald brandpunt hout tot ontvlaming te brengen. Is deze *myth* dus *confirmed*? De Mythbusters vonden van niet, en bestempelden het verhaal als *busted*.

In werkelijkheid is de vijand natuurlijk niet zo vriendelijk om op maar dertig meter van de kade voor anker te gaan, precies op de plek waar jouw 129 spiegels op gericht zijn. Zou je het brandpunt ook verder weg kunnen richten, zeg op honderd of duizend meter? Helaas: omdat de zon geen puntbron is, maar een schijf aan de hemel met een diameter van ongeveer een halve graad (ongeveer $1/114$ radiaal), reflecteert ook een perfect vlakke spiegel een bundel zonlicht die een halve graad divergeert. Je kunt simpel uitrekenen (elke 114 centimeter afstand komt er 1 centimeter bundeldiameter bij) dat de doorsne-

de van de bundel na dertig meter al ruim drie keer zo groot is als de spiegel, na honderd meter vijftien maal zo groot en na duizend meter negenhonderd maal. Om dezelfde lichtintensiteit als op dertig meter afstand te bereiken (en dat bepaalt hoe heet het er wordt) heb je dus respectievelijk minstens $129 \times 15 \approx 1900$ en $129 \times 900 \approx 116.000$ spiegels nodig.

Het kan bijna niet anders, of Archimedes beseftte dat ook en heeft niet eens geprobeerd zo'n dodende straal te maken. Hij concentreerde zich zelfs tijdens de belegering liever op z'n cirkels in het zand, en dat is hem fataal geworden. ■

MEER WETEN De Nederlandse vertaling van het boek van Reviel Netz en William Noel verscheen in 2007 onder de titel *De Archimedes-codex, de geheimen van een opzienbarende palimpsest ontsluit* (ISBN 978 90 253 6322 2). De website www.archimedespalimpsest.org bevat uitgebreide informatie, met veel beeldmateriaal, over de Archimedes-codex. De experimenten op MIT en bij Mythbusters zijn te vinden op http://web.mit.edu/2.009/experiments/deathray/10_Mythbusters.html#details.

MEER DAN 3000 ZWOEGERS

Op vrijdagmiddag 25 januari werd de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade op 201 scholen georganiseerd. Niet minder dan 3005 leerlingen bogen zich over de opgaven. We bespreken in dit artikel de resultaten.

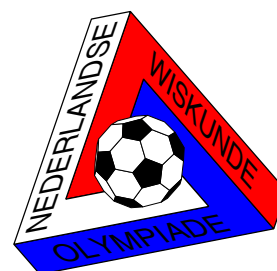
■ door Melanie Steentjes

Dit jaar werd de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade voor de 47ste keer gehouden. Wedstrijdleiders van 201 scholen hadden zich van tevoren aangemeld. Zij zorgden ervoor dat op vrijdagmiddag 25 januari leerlingen over het hele land verspreid hun tanden konden zetten in acht vijfkeuzevragen en vier open vragen. De vraagstukken van de olympiade doen voornamelijk een beroep op de creatieve en logische vermogens van de deelnemers. Een van de vijfkeuzevragen (A7) is in het februarinummer van *Pythagoras* uitgebreid besproken; de complete opgavenset, inclusief oplossingen, is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.

In tabel 1 staat de verdeling van de deelnemers over klassen en schooltypen. Ter vergelijking zijn de getallen voor 2006 en 2007 ook opgenomen. Dit jaar waren er 3005 deelnemers, het hoogste aantal sinds jaren!

De resultaten waren dit jaar iets beter dan vorig jaar. In tabel 2 staat per opgave vermeld hoeveel procent van de deelnemers de opgave goed heeft opgelost. Ter vergelijking zijn de cijfers van 2006 en 2007 ook opgenomen.

CESUUR Leerlingen uit lagere klassen dan 5-vwo werden extra uitgedaagd om mee te doen. De cesuur was dit jaar namelijk voor het eerst afhankelijk van de klas waarin je zat. In totaal konden er voor de twaalf vraagstukken 36 punten gehaald worden. Drie leerlingen slaagden erin ook daadwerkelijk deze maximale score te halen. Helaas waren er ook



24 leerlingen die helemaal geen enkel punt wisten te scoren.

Leerlingen uit de eerste, tweede of derde klas met 18 punten of meer mogen door naar de tweede ronde. In de vierde klas moet je ten minste 22 punten gehaald hebben en in de vijfde klas 26 punten. Uiteindelijk gaan er 56 leerlingen uit 5-vwo, 1 leerling uit 5-havo, 45 leerlingen uit 4-vwo, 26 uit de derde klas, 3 uit de tweede klas en zelfs 1 leerling uit de eerste klas door naar de tweede ronde, die op 12 september op de Technische Universiteit Eindhoven wordt gehouden.

SCHOLENPRIJS Elk jaar wordt er ook een scholenprijs uitgereikt. De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen. Dit jaar ging de scholenprijs, net als twee jaar geleden, naar het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Zij haalden 147 van de in totaal 180 te behalen punten. Van deze school gaan ook de meeste leerlingen door naar de tweede ronde, maar liefst acht! Tijdens een feestelijke uitreiking in mei heeft de winnaar van vorig jaar, het Hermann Wesselink College uit Amstelveen, de scholenprijs overgedragen aan het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. ■

jaar	aantal scholen	aantal leerlingen	klas 1	klas 2	klas 3	4-havo	4-vwo	5-havo	5-vwo
2006	171	2192	*	*	268	129	604	75	1116
2007	185	2742	*	*	344	190	859	105	1244
2008	201	3005	16	49	320	135	1038	109	1338

Tabel 1. Verdeling van de deelnemers over klassen en schooltypen van de laatste drie jaar. (* In het verleden werden de aantallen leerlingen van eerste, tweede en derde klas bij elkaar opgeteld; deze aantallen staan dan bij klas 3.)

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B1	B2	B3	B4
percentage 2006	56	64	61	44	49	79	38	48	12	11	20	14
percentage 2007	33	65	34	36	56	39	18	27	17	15	1	0
percentage 2008	78	68	47	40	37	52	22	16	42	11	3	5

Tabel 2. Percentage deelnemers dat de opgaven goed wist op te lossen.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



28

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu

of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs).
Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn
vóór 15 september 2008.

OPGAVE

156

De getallen 1 tot en met 9 worden op twee verschillende manieren in groepjes verdeeld. Bewijs dat er twee getallen x en y zijn, die bij elke verdeling in groepjes van dezelfde grootte terecht komen. (Bijvoorbeeld eerst allebei in een groepje van grootte 2, en daarna allebei in een groepje van grootte 1).

OPGAVE

157

Een verstrooide professor is zijn eigen telefoonnummer (weer eens) vergeten. Hij weet nog maar een paar dingen:

- ▶ Als je het nummer omgekeerd opschrijft, is het eerste cijfer deelbaar door 1, het getal gevormd door de eerste twee cijfers deelbaar door 2, het getal gevormd door de eerste 3 cijfers deelbaar door 3, en zo verder zodat het gehele getal deelbaar door 10 moet zijn.
- ▶ De cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 komen allemaal precies één keer voor.

Wat is zijn telefoonnummer?

OPLOSSING

152

Bepaal alle gehele getallen met precies 100 delers waarbij onder de delers ten minste tien opeenvolgende getallen zijn. Bij de delers van n rekenen we ook 1 en n zelf.

OPLOSSING Als n een getal is met tien opeenvolgende delers, dan zijn er onder die delers zeker veelvouden van 5, 7, 8 en 9. Dit betekent dat n deelbaar is door 5, 7, 2^3 en 3^2 , en dus ten minste vier verschillende priemfactoren heeft. Anderzijds kunnen we het aantal delers van een getal $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ (met de p_i verschillende priemgetallen en de a_i positieve getallen) gemakkelijk bepalen. Om een deler te construeren, kunnen we van elke priemfactor p_i kiezen hoe vaak we hem in de deler stoppen: 0, 1, 2, ... of a_i keer. Dit biedt $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_k + 1)$ verschillende mogelijkheden om een priemfactor te maken. Omdat ons getal n ten minste vier verschillende priemfactoren heeft, en 100 delers, moeten we 100 nu schrijven als product van ten minste vier getallen boven de 1. Dat kan alleen zo: $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Dit betekent dat n ook precies vier priemfactoren heeft, en dat deze met machten 1, 1, 4 en 4 voorkomen. Omdat de 2 en de 3 al vaker dan één keer in n moesten voorkomen, moet nu gelden dat $n = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 45360$. Dit getal is deelbaar door 1, 2, 3, ..., 10.

Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbergs** uit Leersum, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Jelle van den Hooff** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Damaz de Jong** van het Lorentz Casimir Lyceum te Eindhoven, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Tiara Kobald** van de Koninklijke Scholengemeenschap Apeldoorn te Apeldoorn, **Bram Kuijvenhoven**, **Pallieter Muyldermans** van het Sint-Pieters College te Leuven, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren te Middelburg, **Philippe Nimmegeers** van het Sint-Pieters College te Leuven, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Bart Wiersma** van het Dalton te Voorburg.

De boekenbon gaat naar Philippe Nimmegeers.

OPLOSSING

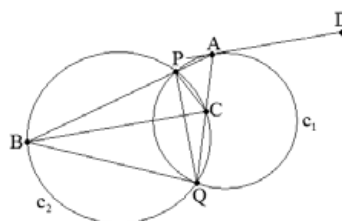
153

Twee cirkels snijden elkaar in de punten P en Q . Op een van de twee cirkels kiezen we een punt A . AP en AQ snijden de andere cirkel nog eens in de punten B en C . Bewijs dat de raaklijn aan de cirkel in A evenwijdig is met BC .

OPLOSSING Bij deze opgave moeten een aantal verschillende gevallen bekeken worden. Als c_1 de cirkel is waar A op ligt, kan dit punt zowel binnen als buiten cirkel c_2 vallen. Bovendien kunnen de diagonalen van de vierhoek op c_2 die ontstaat gelijk zijn aan BQ en PC of BC en PQ of PB en QC voor A buiten c_2 en worden het PB en QC als A binnen c_2 valt.

De bewijzen voor al deze gevallen lijken echter enorm op elkaar, dus we geven er hier maar een.

Neem de situatie waar A buiten c_2 valt en de diagonalen PQ en BC zijn. Kies D op de raaklijn door A , aan de kant van c_1 . Nu geldt dat $\angle QAD = \angle QPA$ (extreem geval van gelijke koorde $\Rightarrow$ gelijke hoek), $\angle QPA = 180^\circ - \angle QPB = 180^\circ - \angle QCB$ (gelijke koorde $\Rightarrow$ gelijke hoek), zodat $\angle QAD = 180^\circ - \angle QCB = \angle ACB$. Nu kunnen we dankzij Z-hoeken concluderen dat BC evenwijdig is met de raaklijn AD in A .



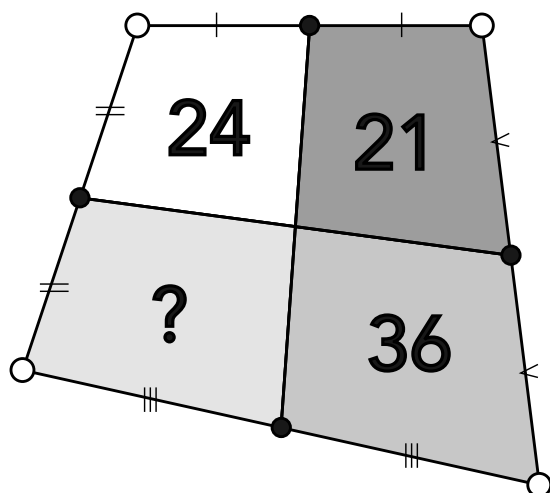
Deze opgave werd goed opgelost door **Bernard Asselbergs** uit Leersum, **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Jelle van den Hooff** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Alexander van Hoorn** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam, **Fabian Hulpia** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Tiara Kobald** van de Koninklijke Scholengemeenschap Apeldoorn te Apeldoorn, **Sander Konijnenberg** van het RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Bram Kuijvenhoven**, **Arie van der Kraan** uit Nuth, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren te Middelburg, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Celina Szanto** van Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel en **Bart Wiersma** van het Dalton te Voorburg.

De boekenbon gaat naar Bart Wiersma.

PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

VIERHOEK In de figuur zie je een vierhoek. Twee lijnen, die door de middens van twee overstaande zijden gaan, delen de vierhoek in vieren. Van drie stukken is de oppervlakte gegeven, maar wat is de oppervlakte van het vierde stuk?



30

MERKWAARDIGE SOM Gracia heeft tien breuken: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{10}$. Ze kiest telkens één of meer van deze breuken uit en berekent het product. Als ze bijvoorbeeld $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{10}$ kiest, dan krijgt ze als product $\frac{1}{120}$. Gracia kan op 1023 manieren een keuze maken uit de tien breuken. Wat is de som van de 1023 producten die ze daarmee vindt?

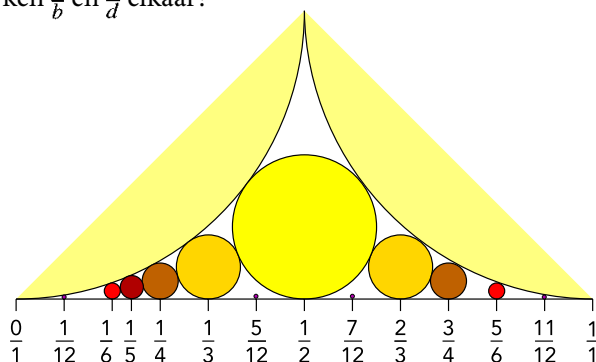
RACE Anne, Bob, Clair, Daisy en Edina rijden met constante snelheid over een lange weg. Elk tweetal passeert elkaar op een zeker moment.

Na afloop vertelt Anne: 'Eerst haalde ik Bob in, toen werd ik ingehaald door Clair. Daarna haalde ik Daisy in en ten slotte werd ik ingehaald door Edina.'

'Ja, als eerste kwam ik Anne tegen, en direct daarna werd ik ook nog ingehaald door Edina,' vertelt Bob.

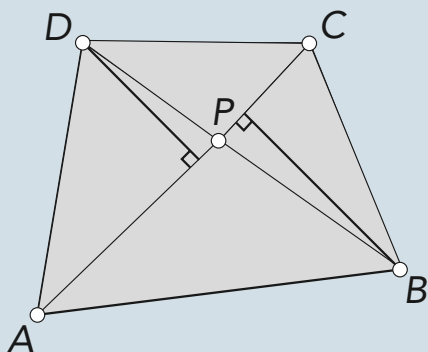
Wie reed het allersnelste?

BREUKEN In de figuur zie je de getallenlijn. Bij iedere vereenvoudigde breuk $\frac{p}{q}$ maken we een cirkel met straal $\frac{1}{2q^2}$ die de getallenlijn in die breuk raakt. In de figuur zijn voor een aantal breuken de bijbehorende cirkels getekend. Het lijkt erop dat de cirkels elkaar nooit doorsnijden. Kun jij dat bewijzen? Wanneer raken de cirkels behorende bij twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ elkaar?

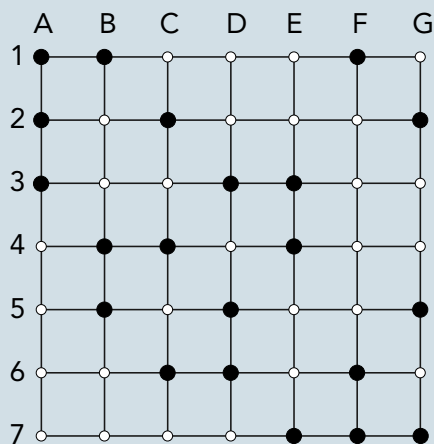


OPLOSSINGEN

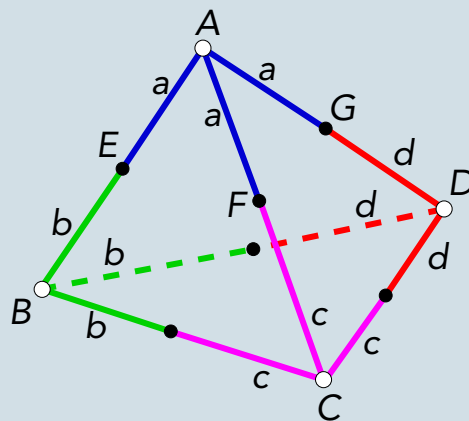
VIER OPPERVLAKTES De verhouding tussen de oppervlaktes van de driehoeken DAP en CDP is gelijk aan de verhouding tussen de oppervlaktes van de driehoeken ABP en BCP , namelijk $|AP| : |CP|$. De gevraagde oppervlakte is dus $\frac{20}{30} \times 45 = 30$.



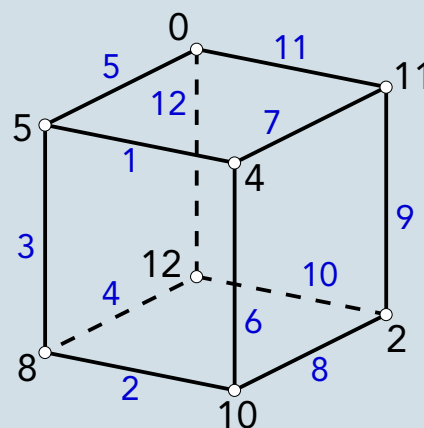
PIONNEN PLAATSEN Het maximale aantal pionnen dat je kunt plaatsen is 21. Op symmetrie na, is er één oplossing:



VIERVLAK Laat de bol middelpunt M hebben en straal r . De raakpunten op de zes ribben zijn E tot en met I . Merk op dat $|AE| = |AF| = |AG|$, want volgens de stelling van Pythagoras zijn ze alledrie gelijk aan $\sqrt{|AM|^2 - r^2}$. Voor de andere drie hoekpunten geldt iets vergelijkbaars. Zo vinden we vier onbekende lengtes a, b, c, d , waarvan we weten: $a + b = 11$, $a + c = 34$, $a + d = 38$ en $b + c = 35$. Oplossen geeft $a = 5$, $b = 6$, $c = 29$, $d = 33$. De gevraagde lengtes zijn dus $b + d = 39$ en $c + d = 62$.



VERSCHILLENDE VERSCHILLEN



PRIEMAIRE BREUKEN VANGEN

■ door Arnout Jaspers

In het vorige nummer wierpen we de vraag op hoe je systematisch priemaire tweebreuken, driebreuken en nog grotere priemaire breuken kunt maken. Alle tweebreuken laten zich simpel vangen, want:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

voor alle $n > 0$, bijvoorbeeld $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$.

Daarmee heb je ook een formule om driebreuken te maken: kies een getal $p = n(n+1)$, ook voor deze p geldt:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)},$$

dus

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)+1} &= \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)} \end{aligned}$$

bijvoorbeeld $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{57} = \frac{1}{3192}$.

Zo doorgaand kun je natuurlijk ook vier-, vijf- en 'nog veel meer'-breuken maken. Maar deze methode vangt ze lang niet allemaal, omdat de formule alleen werkt voor speciale waarden van p .

Eerst nog twee expliciete uitdrukkingen voor driebreuken:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n}$$

en

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n^2-1}$$

Hiermee is de voorraad nog niet uitgeput. Sander Henstra uit Utrecht ontdekte een methode die alle driebreuken $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ genereert. Laat c alle gehele

WAT IS EEN PRIEMAIRE BREUK?

Het getal $\frac{1}{630}$ is een voorbeeld van een *priemaire driebreuk*, want $\frac{1}{630} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{18}$ én $\frac{1}{630} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{18}$. In het algemeen: een breuk $\frac{1}{Q}$ heet *priemair* als het te schrijven is als

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} \pm \dots$$

met de speciale eigenschap dat

$Q = a \times b \times c \times \dots$. Automatisch geldt dan dat $a, b, c, \dots$ relatief priem zijn (geen enkel paar noemers heeft een gemeenschappelijke deler). Afhankelijk van het aantal termen spreken we van een tweebreuk, driebreuk, enzovoorts.

getallen (positief en negatief) doorlopen, vind alle delers D (ook de negatieve) van $1 + c^2$ en stel dan $b = D - c$ en $a = (1 + c^2)/D - c$.

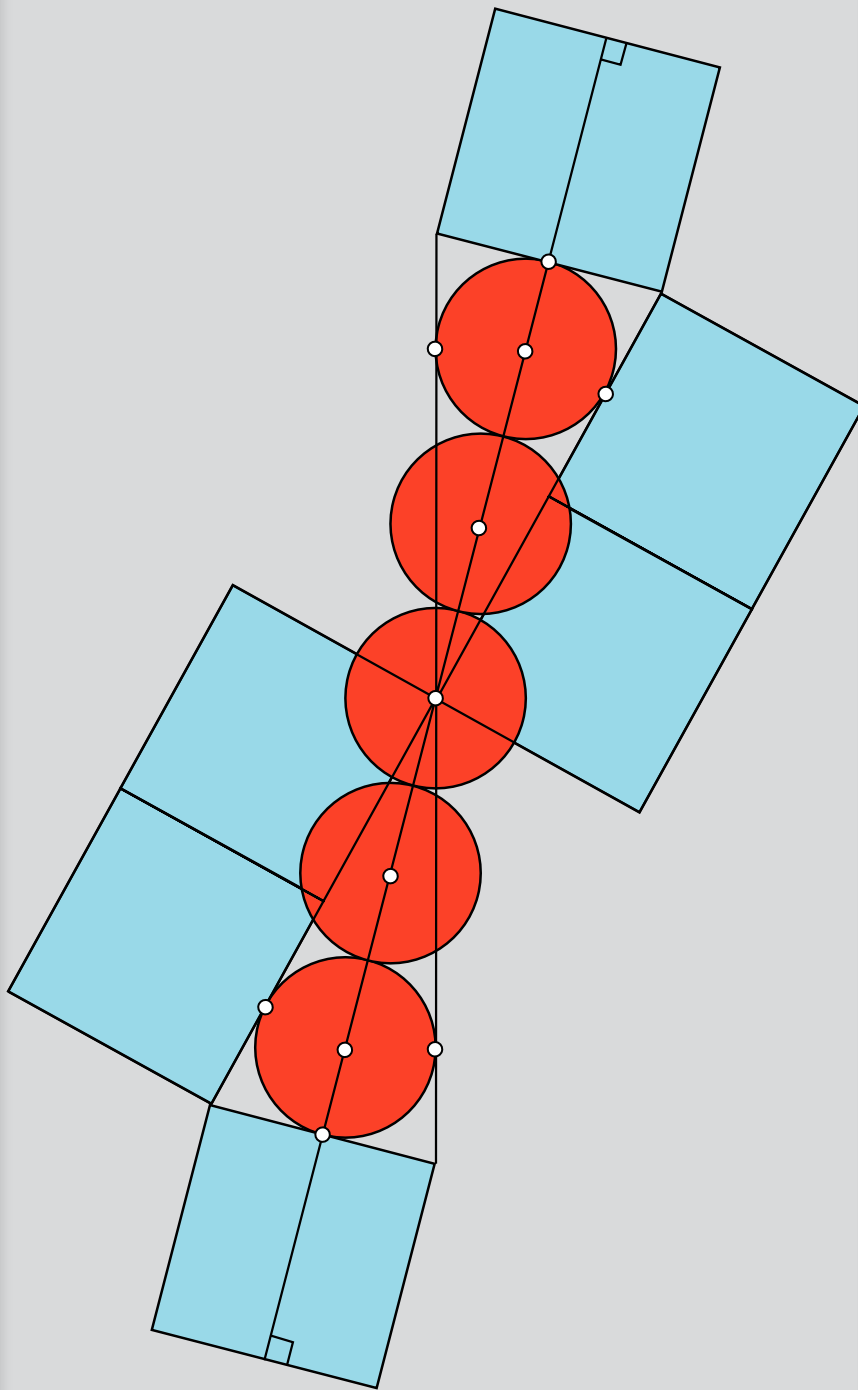
Ook vond hij een recept dat vierbreuken $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ genereert. Kies eerst gehele getallen (positief of negatief) p en q (als $q = 1$ mag p geen 0 of -1 zijn) en dan:

$$\begin{aligned} a &= pq(q^2 - q + 1) + 1 \\ b &= a - q \\ c &= (ab - q^2 + q - 1)/q \\ d &= (abc + 1)/(q^2 - q + 1) \end{aligned}$$

Voorbeeld: neem $p = 5$ en $q = 7$, dan is $\frac{1}{1506} - \frac{1}{1499} + \frac{1}{322.493} - \frac{1}{16.930.837.501}$ een vierbreuk.

Een fraaie zesbreuk, gevonden door de computer, is $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{17} + \frac{1}{53} + \frac{1}{151}$. ■

SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.