



PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

de Google-dans

Kansen bij Texas Hold'em
Gauss: prins der wiskunde

48ste JAARGANG - NUMMER 1 - SEPTEMBER 2008

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap zoekt per 1 januari 2009 voor haar kwartaalblad het **Nieuw Archief voor Wiskunde** een enthousiaste

EINDREDACTEUR

De eindredacteur corrigeert en redigeert de door de redactie aangeleverde kopij, en let daarbij op de stijl van het NAW. Hij/zij wordt bijgestaan door twee bureauredacteurs. Het tijdschrift wordt gezet in ConTeX, een variant van TeX. De eindredacteur voert ook de beeldredactie.

Geboden: tijdelijke positie van 1 jaar voor 1 dag per week (0,2 fte); bij gebleken geschiktheid mogelijkheid tot verlenging; honorering in overleg.

Gevraagd:

- redactionele vaardigheden, journalistieke instelling
- wiskundige achtergrond, eventueel gepromoveerd
- belangstelling voor wiskunde in al haar facetten
- perfecte beheersing van de Nederlandse taal; goede beheersing van de Engelse taal
- goede communicatieve vaardigheden
- handigheid met LaTeX/ConTeX; enige ervaring met Linux of Unix



Standplaats: Leiden (UL); inwerkperiode november/december in Leiden

Reacties uiterlijk 15 oktober 2008 met cv en motivatiebrief naar: vacature@nieuwarchief.nl

25 jaar **ARS ET MATHEISIS** Lustrumprijsvraag

KRIJT EEN KUNSTWERK OP JE STOEP!!

Het oog bedrogen

Maak een vertekende afbeelding, die er slechts realistisch uitziet vanuit één bepaald punt (anamorfose). De stoepkrijttekening van Julian Beever (zie de foto hiernaast) is een mooi voorbeeld van zo'n anamorfose.

Hoe doe je mee?

De deelnemers maken, zelf of samen, een anamorfose op een vloer/straat, wand/muur of plafond. Maak van je anamorfose twee goede foto's van 20 x 30 cm (met 2400 x 3200 pixels). Op beide foto's ben je zelf ook te zien. Stuur er een omschrijving van maximaal 500 woorden van je werkwijze bij.

De prijzen

1e prijs: € 500 en een professioneel stoepkrijtpakket.

2e en 3e prijs: keramische illusiekunstwerken van Paul Baars ter waarde van € 195 resp. € 150.

Bovendien: 25 boeken *Kunst en Wiskunde* en 25 scheurkalenders van 2009 met optische illusies.



Deelname staat open zowel voor individuen als voor groepen, bijvoorbeeld schoolklassen.

Inzenden

Tot uiterlijk zaterdag 1 november 2008 naar:
Ars et Mathesis
Rietdekkershoek 21
3981 TNB unnik
of per e-mail: info@arsetmathesis.nl

Kijk ook op www.arsetmathesis.nl

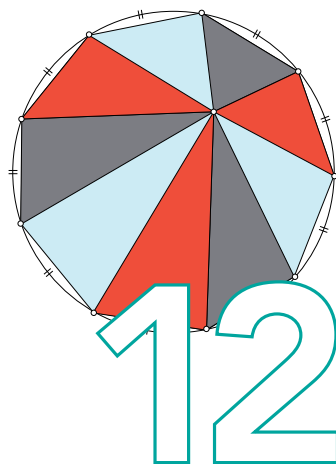
Sponsors: Cordon Art, Paul Baars Design, Epsilon Uitgaven en ARABESK

INHOUD



DE TOP-10.000.000.000 VAN GOOGLE

'Discrete wiskunde' is het thema van deze nieuwe jaargang *Pythagoras*. De eerste aflevering gaat over een toepassing in de informatica. Het internet is één groot netwerk, waarop Google eens per maand het 'PageRank-algoritme' loslaat. Hierdoor lukt het Google om uit miljarden websites juist die pagina's boven water te halen die jij zoekt.



SANGAKU, DE OPLOSSINGEN VAN 2007-2008

Ook in deze nieuwe jaargang presenteren we op de achterkaft steeds een *sangaku*, een zuiver visueel uitgebeelde wiskundige stelling. De *sangaku's* van de vorige jaargang leggen we in dit nummer uit.



KANS EN POKER

Om goed te kunnen poken, moet je een goed inzicht hebben in de psyche van de mens. Maar verstand van kansrekening is minstens zo belangrijk, om de factor 'geluk' deels te kunnen uitschakelen.

EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 10 Journaal
- 20 Problemen - Oplossingen
- 22 Carl Friedrich Gauss (1777-1855): de prins van de wiskunde
- 27 Verbreding van Flipit
- 28 Pythagoras Olympiade
- 30 Topprestatie op Internationale Wiskunde Olympiade
- 32 Taartverdeelsleutel
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 6

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

AAP, NOOT, MIES

Gelijke letters staan voor gelijke cijfers,
verschillende letters zijn verschillende cijfers.
Wat zijn de cijfers in onderstaande rekensom?

$$\text{AAP} + \text{NOOT} = \text{MIES}$$

NOOT
+ AAP

MIES

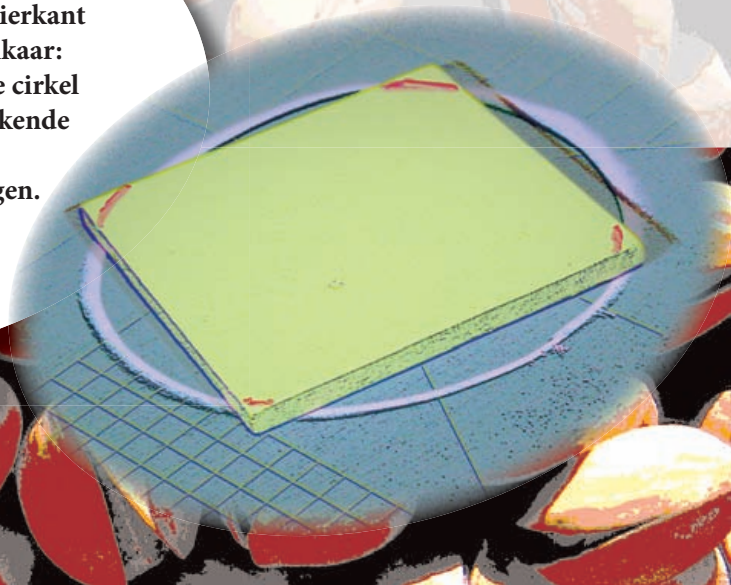
PATRIJSPOORTEN

Rederij Zeezicht wil vierkante patrijspoorten in zijn schip maken, in totaal 9 m^2 . Maar grote ruiten zijn veel duurder. De ruiten zijn te krijgen in 1 m^2 (€ 100 per m^2), 4 m^2 (€ 400 per m^2) en 9 m^2 (€ 900 per m^2). Kozijnranden kosten € 200 per meter.

Welke combinatie ramen kan de reder het goedkoopste laten maken?

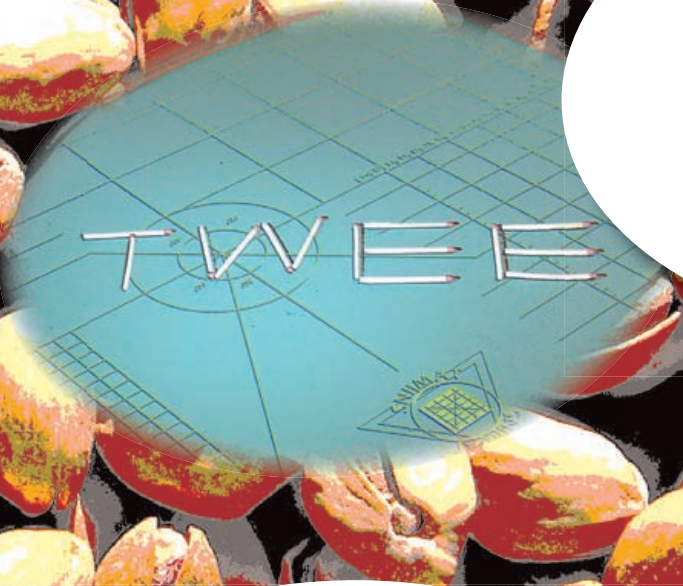
ZAGEN

Anneke zaagt uit een houten plaat een vierkant en een cirkel. Zij legt die netjes over elkaar: de middelpunten van het vierkant en de cirkel liggen precies op elkaar. De acht uitstekende stukjes zaagt Anneke af. Die blijken allemaal even veel te wegen. Wat leid je daaruit af?



GETALLEN SCHRIJVEN

Het getal 2 kun je als woord (TWEË) neerleggen met 14 lucifers. Welk getal, als woord geschreven, kun je met zijn eigen aantal lucifers neerleggen?



SCHRIKKELJAAR

Afgelopen 29 februari werd Liesje geboren. In welk jaar is zij voor het eerst weer 'echt' jarig op dezelfde dag van de week?

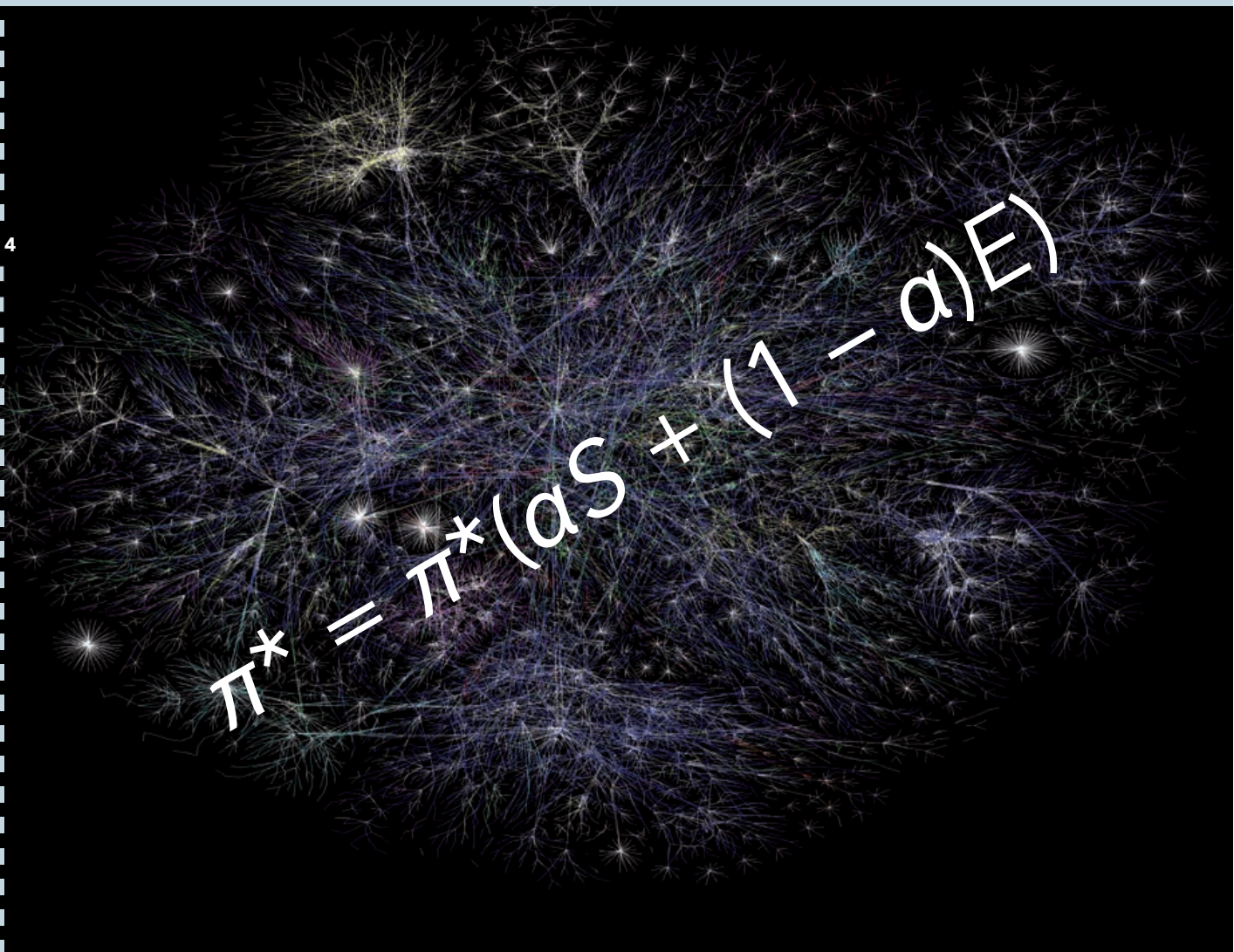


DE TOP-10.000.000.

Het thema van deze nieuwe, 48ste jaargang is 'discrete wiskunde'. Discreet betekent hier dat het over telbare aantallen objecten gaat. Combinatoriek is een bekend onderdeel van de discrete wiskunde; hierbij gaat het er bijvoorbeeld om hoeveel commissies van 8 personen je uit 20 kandidaten kunt samenstellen. Maar discrete wiskunde is méér. Een voorbeeld in de theorie van transportnetwerken: hoe kunnen zo veel mogelijk treinen over een spoorwegnet met beperkte capaciteit rijden? Een toepassing van coderingstheorie: als er één krasje op je muziekcd zit, geeft dat niet; daar is het systeem tegen bestand, dankzij een foutcorrigerende code. De afgelopen decennia heeft de discrete wis-

kunde vooral toepassingen gekregen in de informatica. Deze eerste aflevering gaat over de internetzoekmachine van Google.

De *PageRank-vergelijking* van Google is de $E = mc^2$ van het World Wide Web. De onbekende in deze vergelijking is π^* . In de vergelijkingen die je op school tegenkomt is de onbekende – meestal aangeduid met x – één getal. In de PageRank-vergelijking is π^* echter een *vector*, een rij getallen. In dit geval is die rij tien miljard getallen lang: het zijn de rapportcijfers voor alle webpagina's die Google kent. Hoe de PageRank-vergelijking in elkaar zit en hoe π^* uitgerekend wordt, staat in het kader op pagina 8.



$$\pi^* = \pi^*(aS + (1-a)E)$$

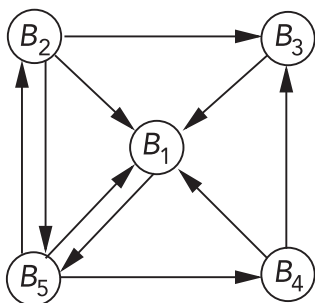
000 VAN GOOGLE

Google bewaart op zijn computers adressen en trefwoorden van tien miljard webpagina's en iedere dag voegen z'n zoekrobots er weer miljoenen pagina's aan toe. Hoe is het mogelijk, dat Google in deze berg informatie meestal precies de webpagina's vindt die jij zoekt? Wiskundig gezien is het internet een 'gerichte graaf', en het Google *PageRank-algoritme* laat op die graaf elke maand een gigantische berekening los om alle pagina's in een ranglijst te zetten. Jan Brandts, aan de Universiteit van Amsterdam specialist in lineaire algebra en matrixrekening, legt uit hoe het werkt.

■ door Jan Brandts

Als je bij Google een zoekterm intikt, zoeken diens computers in de totale lijst met tien miljard webpagina's alle pagina's bij elkaar waarin dit trefwoord voorkomt. Dat zijn er meestal veel te veel, maar omdat alle webpagina's een *rapportcijfer* hebben, laat Google slechts de selectie met de hoogste rapportcijfers zien. Die selectie stemt vaak verrassend goed overeen met wat je echt belangrijk vindt. Om uit te leggen hoe dat kan, introduceren we eerst een goede fee en een stel onbaatzuchtige kabouters.

KABOUTERS EN EEN GOEDE FEE Stel, er zijn vijf kabouters die we even B_1 , B_2 , B_3 , B_4 en B_5 noemen. Ieder van deze kabouters is sponsor van een aantal andere kabouters. In figuur 1 kun je zien wie een sponsor van wie is: bijvoorbeeld, de pijl van B_2 naar B_1 betekent dat B_2 sponsor is van B_1 .



Figuur 1 Een gerichte graaf van sponsorrelaties

Behalve kabouters is er ook een goede fee, in het bezit van enorme hoeveelheden goudstukken, die ze graag aan de kabouters wil uitdelen. Er is ech-

ter een probleem: zodra een kabouter goudstukken krijgt, zal hij ze eerlijk verdelen over alle kabouters die hij sponsort. Zo zitten kabouters nu eenmaal in elkaar. De fee besluit daarom elke kabouter een zodanig aantal goudstukken te geven (minstens één), dat nadat iedere kabouter zijn goudstukken heeft verdeeld over zijn gesponsorden, ze allemaal weer net zoveel goudstukken hebben als ervóór. Zo ontstaat dus een evenwichtsverdeling van de goudstukken over de kabouters. Maar hoe kan ze dit doen? Omdat dit niet even snel uit te leggen is, komen we er later op terug.

RAPPORTCIJFERS Het World Wide Web kan net als het sponsor-netwerk van de kabouters gezien worden als een gerichte graaf. Een pijl van B_1 naar B_2 geeft dan aan dat webpagina B_1 een hyperlink heeft waarmee je naar B_2 kunt surfen. De hoeveelheid goudstukken waarmee het raadsel is opgelost, komt overeen met het rapportcijfer van de webpagina. In die situatie heeft een kabouter veel goudstukken als:

- hij sponsors heeft met veel goudstukken,
- die sponsors niet veel andere sponsors hebben.

Dit komt overeen met de vuistregels die de oprichters van Google, Larry Page en Sergei Brin, in hun PageRank-model tot uitdrukking wilden laten komen, namelijk, een webpagina is belangrijk als:

- er naar verwezen wordt door belangrijke pagina's,
- die pagina's niet ook naar veel andere pagina's verwijzen.

Oftewel, je bent goed af als Koningin Beatrix op

WAT IS EEN GRAAF?

Een *graaf* in de wiskunde is ongeveer wat we in het dagelijks leven een netwerk noemen. Een graaf bestaat per definitie uit *knopen*, die verbonden kunnen zijn door *takken* (ook wel zijden of kanten genaamd). Grafen duiken overal in het dagelijks leven op. Als je treinstations beschouwt als knopen en rails als takken, vormen de spoorwegen een graaf. Het kan abstracter: je vriendennetwerk is ook een graaf. Uiteraard zijn alle knopen in die graaf door takken met jou verbonden, maar er loopt alleen een tak van vriend A naar vriend B, als die ook met elkaar bevriend zijn.

‘Bevriend zijn’ is wederkerig: als A bevriend is met B, is B dat ook met A. De takken hebben daarom geen richting, er hangt geen ‘pijl’ aan. Dat wordt anders als je een tak definieert als ‘heeft diens telefoonnummer in z’n mobieltje staan’. Als A het telefoonnummer van B heeft, hoeft B niet ook A’s telefoonnummer te hebben. De takken hebben dan een richting, en zo’n graaf heet een *gerichte graaf*.

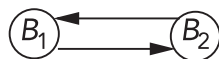
Het internet is een reusachtige gerichte graaf, met webpagina’s als knopen en de hyperlinks als takken. Deze graaf is gericht, omdat een hyperlink van de ene webpagina verwijst naar een andere, maar niet andersom (twee webpagina’s kunnen naar elkaar verwijzen, maar dat vergt twee aparte links).

6

haar webpagina naar de jouwe verwijst, maar al een stuk minder goed als ze naar al haar onderdanen blijkt te verwijzen!

Een evenwichtsverdeling van de goudstukken is in figuur 1 al niet zo eenvoudig te vinden. Bekijk daarom eerst de volgende eenvoudigere opgaven.

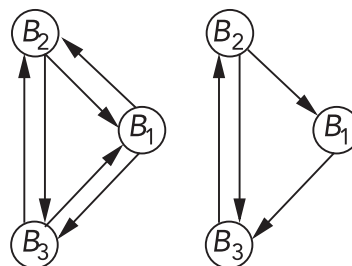
Opgave 1. Zie figuur 2. Hoeveel goudstukken moet je B_1 en B_2 geven om een evenwichtsverdeling te krijgen?



Figuur 2

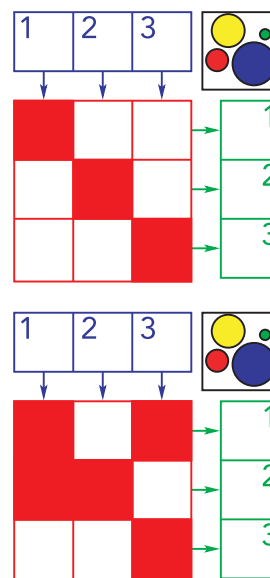
Dit is natuurlijk een heel eenvoudig geval. Merk wel op, dat als je een oplossing hebt gevonden, je alle kabouters ook tweemaal zoveel had kunnen geven. Sterker nog, ieder veelvoud van een oplossing is weer een oplossing. Dit zullen we nog vaker tegenkomen.

Opgave 2. In figuur 3 zie je nog twee grafen. De eerste evenwichtsverdeling is nog makkelijk te vinden, de tweede al wat moeilijker.



Figuur 3

GOOZZLE Waarschijnlijk heb je de oplossingen in opgave 2 gevonden door gewoon maar wat te proberen. We introduceren nu een andere grafische voorstelling van de raadsels als in opgave 1 en 2, de *Goozzle*, om ook moeilijker grafen aan te kunnen, zie figuur 4.



Figuur 4 De grafen van opgave 2 weergegeven als Goozzle

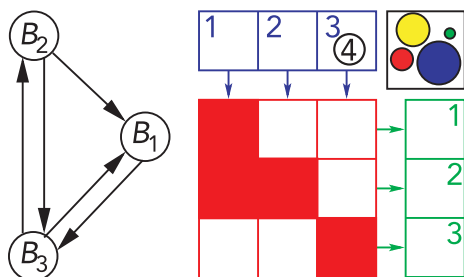
Hier is het idee als volgt: in het rooster is een hokje (x, y) open als er een pijl gaat van B_x naar B_y , anders is het dicht.

• Plaats goudstukken in de bovenste drie vakjes,

- verdeel ze per kolom eerlijk over de open vakjes er verticaal onder,
- verplaats ze per rij horizontaal naar de rechter drie vakjes.

Als de aantallen goudstukken in de rechter vakjes nu hetzelfde zijn als waarmee je bovenin begon, heb je de evenwichtsverdeling gevonden.

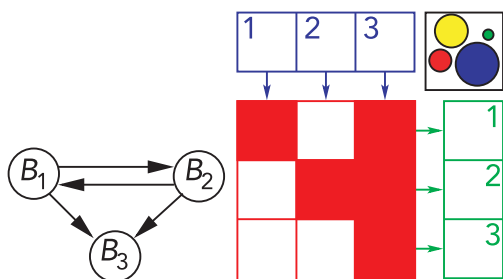
Opgave 3. Los de Goozzle in figuur 5 op. Om je op weg te helpen hebben we één van de drie gezochte getallen al ingevuld.



Figuur 5

Als je liever niet geholpen was bij deze Goozzle: de 4 die al ingevuld is, is niet echt een cadeau. We hadden immers al gezien dat veelvouden van een oplossing ook weer oplossingen zijn. Er is dan ook een veelvoud dat inderdaad een 4 op die positie heeft. Mocht dit tijdens het oplossen ergens tot gebroken goudstukken – breuken dus – leiden, is dat niet erg: na afloop vermenigvuldigen we dan alles met een getal zodanig dat alle breuken verdwijnen.

ONVOLKOMENHEDEN De voorgaande Goozles hebben allemaal een oplossing. Dit hoeft echter niet, zoals blijkt uit het voorbeeld in figuur 6.

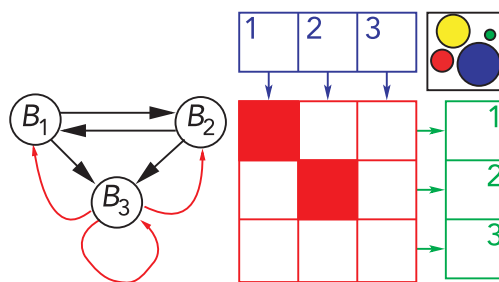


Figuur 6 Een onoplosbare Goozzle

In dit voorbeeld krijgt kabouter B_3 goudstukken van B_1 en B_2 , maar geeft zelf niets weg. Hij zal dus altijd meer bezitten dan ervoor, tenzij B_1 en B_2 geen goudstukken hadden. Maar de fee gaf iedere kabouter ten minste één goudstuk. Deze Goozzle heeft dus geen oplossing.

Wat is op internet het equivalent van een kabouter die niemand sponsort? Een webpagina waarnaar wel gelinkt wordt, maar die zelf geen links naar andere pagina's bevat. Beschouwd als graaf, noemen we zo iets een loshangende knoop (*dangling node*, in het Engels). Google-oprichters Page en Brin argumenteren dat als een surfer in een loshangende knoop aankomt, hij bij gebrek aan hyperlinks een willekeurig nieuw webadres in de browserbalk zal intikken. In een graaf komt dit erop neer dat je vanuit een loshangende knoop pijlen trekt naar alle andere knopen, inclusief de loshangende knoop zelf, hoewel deze takken dus eigenlijk niet echt bestaan, zie figuur 7. Het surfen naar een andere webpagina zonder daarbij een hyperlink te volgen, wordt *teleportatie* genoemd.

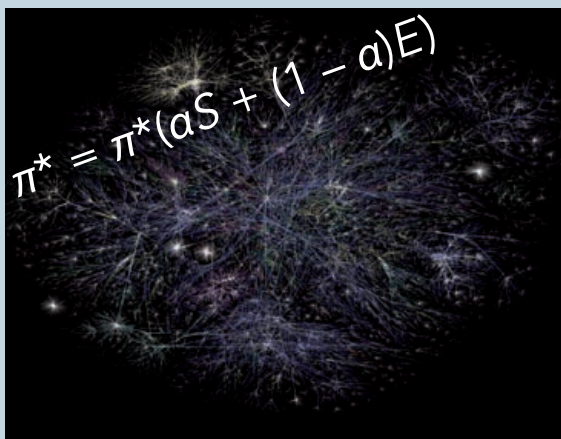
Je denkt misschien dat loshangende knopen zeldzaam zijn op internet, maar in feite is dit ongeveer viervijfde van alle bestanden op het World Wide Web! Plaatjes (.jpg, .gif) en pdf-bestanden bevatten namelijk geen links.



Figuur 7 Dezelfde Goozzle als in figuur 6, maar nu met teleportatie

Reden om ook een pijl te trekken naar de loshangende knoop zelf, is dat ieder van de pagina's B_1 , B_2 , B_3 even veel profiteert van de PageRank die B_3 uiteindelijk krijgt. Geen van de pagina's wordt dus bevoordeeld in deze behandeling van de loshangende knoop.

DE $E = mc^2$ VAN HET INTERNET



In de PageRank-vergelijking komen de vector π^* en matrices S en E voor. Verder is α een getal tussen 0 en 1. Een vector kun je voorstellen door een rij getallen, een matrix door een rechthoek van getallen. Vektoren en matrices vermenigvuldigen je met elkaar door hun getallen volgens bepaalde rekenregels te vermenigvuldigen en op te tellen.

Een *Goozzle* is de 'sudokumanier' om de PageRank-vergelijking op te schrijven. De bovenbalk stelt π^* voor, de kolom rechts ook, en de beide vierkanten stellen een matrix voor, met in elk dicht hokje een 0 en in de open hokjes getallen ongelijk aan 0.

De figuur hiernaast geeft de PageRank-vergelijking voor een internet met drie pagina's. Als je de PageRank van tien miljard pagina's wilt berekenen, bevat de vergelijking twee matrices van elk $10^{10} \times 10^{10} = 10^{20}$ getallen!

De enige praktische manier om een oplossing van zo'n enorme matrixvergelijking te vinden, is door min of meer op goed geluk een startvec-

tor $\pi^*(0)$ boven in de *Goozzle* in te vullen. Dat levert rechts een zekere $\pi^*(1)$ op, die je weer bovenin invult, zodat je $\pi^*(2)$ vindt, enzovoort. Deze procedure heet *iteratie*.

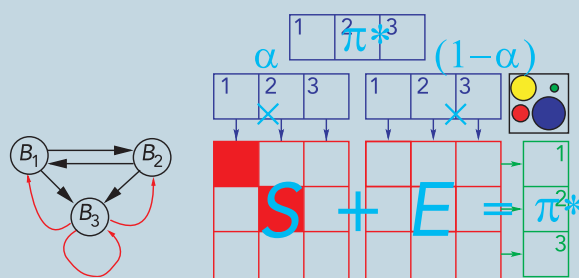
In formulevorm:

$$\pi^*(n+1) = \pi^*(n)(\alpha S + (1-\alpha)E)$$

De bedoeling is dat dit uiteindelijk een vector oplevert die niet meer verandert, want dan heb je de evenwichtsverdeling π^* gevonden. Google doet deze *Google dance* eens per maand.

Over matrixvergelijkingen is veel bekend, waardoor wiskundigen weten onder welke voorwaarden, en hoe snel, zo'n iteratie naar de evenwichtsverdeling 'toeloopt'. Voor de PageRank-vergelijking werkt iteratie goed.

De structuur van het internet verandert wel voortdurend, maar een groot deel van de hyperlinks zal na een maand nog bestaan. Je zou dus verwachten dat je de π^* van deze maand relatief snel vindt met de iteratie-procedure, door als startvector de π^* van de maand daarvoor te nemen. Dit blijkt echter niet waar te zijn: het meest efficiënt is om met een startvector te beginnen waarin alle PageRanks hetzelfde zijn en alles elke maand weer opnieuw uit te rekenen.



Toch zijn nu nog niet alle problemen de wereld uit. Bijvoorbeeld, het World Wide Web zou kunnen bestaan uit meerdere groepen pagina's die onderling geen links hebben. Pagina's uit verschillende groepen kunnen dan niet eerlijk met elkaar worden vergeleken, omdat de hoeveelheid goudstukken binnen iedere groep met een willekeurig getal vermenigvuldigd kan worden.

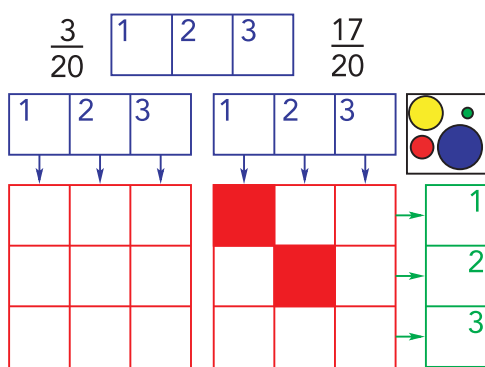
MEER TELEPORTATIE Het algoritme van Brin en Page houdt er ook nog rekening mee, dat een

surfer niet alleen een nieuw webadres in de browserbalk kan intikken als hij of zij in een loshangende knoop zit, maar ook op andere momenten. De vraag is wanneer, en hoe vaak. Een surfer zal een deel α ($0 < \alpha < 1$) van de tijd hyperlinks volgen, en een deel $1 - \alpha$ een nieuw adres in de browserbalk intikken. Googles uiteindelijke model bestaat uit een combinatie van het model dat we hadden na het repareren van de problemen die door loshangende knopen worden veroorzaakt, en het volledige teleportatiemodel. Dit laatste model gaat er (fictief)

vanuit dat er van iedere pagina een link is naar iedere andere pagina, inclusief zichzelf.

Hoe wordt deze combinatie in de praktijk gemaakt? Door te stellen dat een deel α van de goudstukken via de pijlen moet lopen van het oorspronkelijke model en het resterende deel volgens de pijlen van het volledige teleportatiemodel, zie het kader op pagina 8.

SPEURWERK Omdat andere zoekmachines graag van het succes van Google zouden meeprofiteren, houdt Google veel details van z'n model geheim, waaronder ook α . Wiskundig speurwerk heeft echter opgeleverd dat Google $\alpha = 0,85 = \frac{17}{20}$ gebruikt. Het linkerdeel van de Goozle in figuur 8 is het teleportatieblok; het $\frac{3}{20}$ -ste deel van de goudstukken dat hierin belandt wordt gelijkelijk verdeeld over alle andere pagina's.



Figuur 8 Goozle met teleportatie en α -factor

We zien dat het overeenkomstige kaboutertraad-
sel erg ingewikkeld kan worden. De vraag is nu

dus hoe de fee de kabouters goudstukken kan geven zodanig, dat als 85% van de goudstukken via het rechter blok in figuur 8 wordt verdeeld, en 15% van de goudstukken volgens het linker blok, de situatie weer is zoals tevoren. En voor het echte World Wide Web dan ook nog eens met zo'n tien miljard kabouters in plaats van de drie die we hier bekijken.

Het kost maar liefst drie dagen om deze tien miljard rapportcijfers uit te rekenen met behulp van grote hoeveelheden aan elkaar geschakelde supercomputers. Dat is erg duur en dus doet Google dit maar één keer per maand. Dit wordt ook wel de *Google-dance* genoemd. Dus maximaal eens per maand verandert de PageRank van een website.

Dit is de beschrijving van het model die Page en Brin zelf hebben gepubliceerd, maar natuurlijk is dit nog lang niet de hele waarheid. Google heeft ongetwijfeld nog heel wat kleinere en grotere slimigheden om efficiënt om te gaan met zoekopdrachten en pageranking. Maar zoals gezegd, die zijn voor het grootste deel geheim.

WEBKLAS Van half maart tot half april 2008 volgden zo'n 50 scholieren uit het hele land de UvA-webklas over Google's PageRank. De stof van deze webklas, goed voor zo'n 12-20 uur studie, is nog te vinden op www.science.uva.nl/~brandts onder 'google pagerank webklas'. Je kunt dit materiaal zelfstandig bestuderen, of gedurende vier weken onder online begeleiding van Jan Brandts tijdens de UvA-webklas wiskunde 2009, vanaf half maart, bijvoorbeeld voor een profielwerkstuk.

Algemene informatie over de UvA-webklassen vind je op www.studeren.uva.nl/webklassen. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Oprichter *Pythagoras* wint NWO Oeuvreprijs 2008

De grootste Nederlandse financier van wetenschappelijk onderzoek, NWO, bekroont elk jaar een wetenschapspopularisator. Na illustere voorgangers als Jan van de Craats en Midas Dekkers ontving dit jaar Hans de Rijk de NWO Oeuvreprijs. De volgende tekst is afkomstig uit het juryrapport.

Hans de Rijk, die vaak het pseudoniem Bruno Ernst gebruikt, is een verbazingwekkend man. In een tijd dat vrijwel niemand nog sprak over popularisering van de wetenschap, in 1960, richtte hij samen met enkele collega-leraren *Pythagoras* op. Binnen korte tijd had dit wiskundetijdschrift voor scholieren 30.000 abonnees. De Leidse hoogleraar Frank Israel zegt in een interview over Bruno Ernst: 'Andere mensen gaan bij elkaar zitten en zeggen tegen elkaar dat het goed zou zijn als er een tijdschrift over leuke wiskunde voor scholieren kwam. Ernst begon zo'n tijdschrift en deed ook daar in het begin alles zelf: stukken schrijven, plaatjes tekenen en de tijdschriften in elkaar zetten met lijm.'

De Rijk richtte in 1961 de eerste volkssterrenwacht in Nederland op, in Oudenbosch. In het begin was dat niet meer dan een kamer en een kijker op het dak. Inmiddels zijn er meer dan dertig plaatsen in Nederland en België waar iedereen door een telescoop naar de hemel kan kijken.

Hans de Rijk was een persoonlijke vriend van Maurits Escher, en heeft zijn grafisch werk voor een groot publiek ontsloten in het boek *De Toverspiegel*, dat in zestien talen is vertaald. Hij voelt zich thuis op het raakvlak van wiskunde en kunst, en richtte daarom de stichting *Ars et Mathesis* op.

De Rijks onblusbare nieuwsgierigheid, zijn originele invallen, zijn bevlogenheid zijn voor hele generaties een bron van inspiratie geweest. De jury is er



Het huis van Hans de Rijk staat vol met optische illusies, waaronder dit 'schaakbord'

trots op dat zij de NWO Oeuvreprijs mag overhandigen aan deze nestor, de eeuwige vlam van de popularisering in Nederland.

WK Hoofdrekenen

Van 2 tot en met 6 noveber 2008 wordt in Neurenberg (Duitsland) het Wereldkampioenschap Hoofdrekenen voor elf-tot twintigjarigen gehouden. Weet jij in een mum van tijd de uitkomst van $4155 - 2154$, of kun je uit het hoofd de priemfactoren van 306 vinden? Dan is het Wereldkampioenschap Hoofdrekenen iets voor jou.

Een van de doelen van dit WK is om kinderen uit verschillende culturen met elkaar te laten kennismaken. Zo kunnen zij ervaren hoe het reken- en wiskunde-

onderwijs in andere landen is.

De huidige (volwassen) wereldkampioen hoofdrekenen, Gert Mittring, zal aanwezig zijn om de jonge talenten te trainen. Naast het rekenen zijn er nog diverse andere gezellige programma-onderdelen.

Ook Nederland moet natuurlijk worden vertegenwoordigd bij dit prachtige WK. Als je je wilt opgeven, stuur dan voor 30 september een e-mail (in het Engels of Duits) naar kontakt@i-do-maths.de. Meer informatie kun je vinden op www.i-do-maths.de.

Jongens en meisjes even goed in wiskunde

Het moet maar weer eens gezegd worden: meisjes zijn niet slechter in wiskunde dan jongens.

Dat blijkt uit onderzoek van de Amerikaanse psychologe Janet Hyde. Zij bekeek de resultaten van zeven miljoen kinderen tussen zeven en vijftien jaar in tien Amerikaanse staten uit de jaren 2005, 2006 en 2007. De kinderen werden getoetst op kennis van wiskundige feiten en eenvoudige

algoritmes. Ook werd gekeken naar hun probleemoplossend vermogen, strategisch denken en logisch redeneren.

Gemiddeld gezien doen meisjes het net zo goed als jongens. Twintig jaar geleden bleek uit eenzelfde grootschalig onderzoek van dezelfde Janet Hyde al dat er slechts een klein, 'triviaal' verschil was tussen beide sexen. Zelfs dat triviale verschil is nu verdwenen.

Wel is het zo dat er in de top

van de piramide meer jongens dan meisjes zitten, tenminste: als je alleen de blanke kinderen in ogenschouw neemt. Bij Aziatische kinderen is het namelijk precies andersom: in de top van de rekenpiramide zitten meer Aziatische meisjes dan Aziatische jongens. De conclusie van Hyde is dan ook dat sociale en culturele verschillen meer bijdragen aan wiskundetalent dan seksverschillen.

Bron: VPRO Noorderlicht

Zesde Taxicab-getal bekend

Waarom is 24153319581254312065344 een bijzonder getal? Omdat het het kleinste getal is dat op zes manieren kan worden geschreven als som van twee derdemachten. We hebben hier te maken met een zogeheten *Taxicab-getal*.

De Engelse wiskundige Godfrey Harold Hardy (1877-1947) haalde in 1913 het Indiase genie Srinivasa Ramanujan (1887-1920) naar Engeland. Toen Hardy hem eens met een taxi opzocht in het ziekenhuis, merkte hij op dat het nummer van de taxi oninteressant was geweest: 1729. 'Nee, dat is juist een heel interessant getal,' moet Ramanujan toen hebben opgemerkt. 'Het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden uitgedrukt als een som van twee derdemachten. Het is de som van $1 \times 1 \times 1$ en $12 \times 12 \times 12$, en ook van $9 \times 9 \times 9$ en $10 \times 10 \times 10$.'

De anekdote van Ramanujan en Hardy's taxinummer heeft de wiskunde een begrip rijker gemaakt: 'taxicab-getal'. Wiskundigen bedoelen met '*Taxicab*(n)' het kleinste getal dat op precies n manieren als som van twee positieve derdemachten kan worden geschreven. *Taxicab*(1) is snel gevonden: dat is 2, want het is ge-



lijk aan $1^3 + 1^3$. *Taxicab*(2) kennen we van Ramanujan: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

Taxicab-getallen groeien razendsnel. *Taxicab*(3) heeft al acht cijfers: $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$. Dit

werd ontdekt in 1957 door John Leech (1926-1992), waarbij hij gebruik maakte van de computer. Ondanks de snelle computers van tegenwoordig, zijn er op dit moment nog maar zes *Taxicab*-getallen bekend. Het vierde en vijfde *Taxicab*-getal werden gevonden in respectievelijk 1991 en 1997. Een getal dat op zes manieren te schrijven is als som van twee derdemachten werd gevonden in 2002, maar pas onlangs werd bewezen dat het het *kleinste* getal is met die eigenschap.

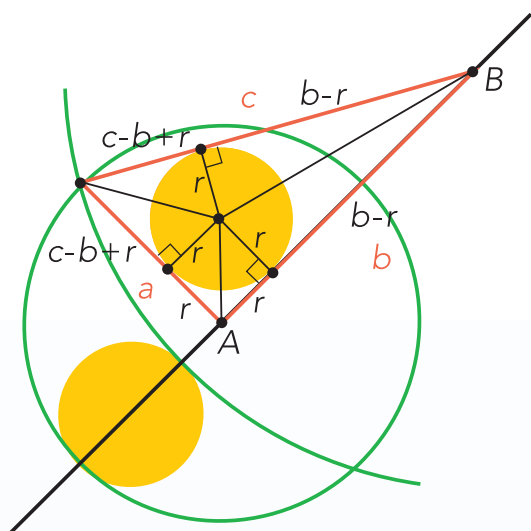
Van de getallen *Taxicab*(7) tot en met *Taxicab*(19) zijn al bovengrenzen bekend. Bijvoorbeeld: het getal 24885189317885898975235988544 is op zeven manieren te schrijven als som van twee derdemachten, maar we weten nog niet zeker of dit het kleinste getal is met die eigenschap.

Lees meer over *Taxicab*-getallen op www.kennislink.nl.

De afgelopen jaargang presenteerden we op de achterkant steeds een *sangaku*, een zuiver visueel uitgebeelde wiskundige stelling. We zetten de serie komende jaargang voort. In dit eerste nummer geven we ook de oplossingen van de sangaku's 2007-2008.

■ door Arnout Jaspers

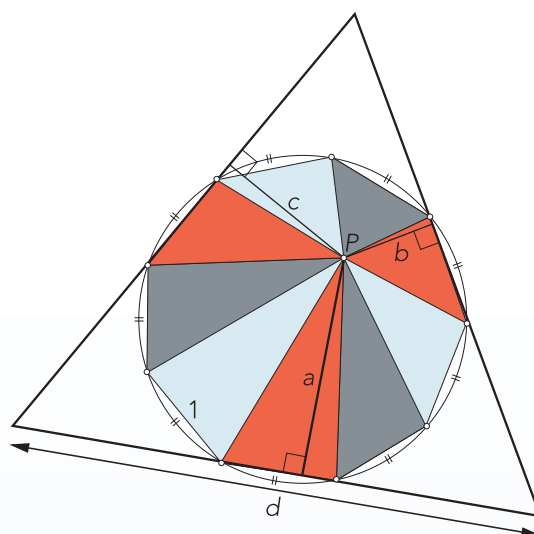
SANGAKU DE OPLOSS



SEPTEMBER 2007

Te bewijzen: De ingeschreven cirkel in elke rechthoekige driehoek is even groot als de maximale cirkel die links past tussen de cirkel met straal a om punt A en de cirkel met straal b om B .

Bewijs: Trek vanuit het middelpunt van de ingeschreven cirkel loodlijnen (r) naar de drie zijden van de driehoek (a , b en c) en lijnen naar de drie hoekpunten van de driehoek. Je krijgt dan zes rechthoekige driehoeken waarvan er telkens twee congruent zijn. Daardoor kun je, beginnend linksonder en tegen de klok in werkend, alle lijnstukken op de randen uitdrukken in b , c en r . Conclusie: $a = c - b + 2r$, dus $a + b - c = 2r$, en $a + b - c$ is juist de diameter van de onderste gele cirkel.

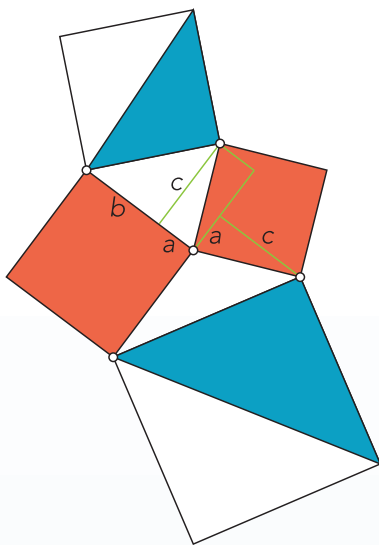


NOVEMBER 2007

Te bewijzen: Gegeven een regelmatige negenhoek. Kies een willekeurig punt P in de negenhoek en trek rechte lijnen naar alle hoekpunten. Kleur de negen ontstane gebieden om-en-om met drie kleuren. Dan hebben alle kleuren dezelfde oppervlakte.

Bewijs: Neem aan dat de zijden van de negenhoek lengte 1 hebben. Kies een van de drie kleuren (hier: rood) en teken de gelijkzijdige driehoek D die aan de drie rode gebieden grenst. De grootte van de driehoek is onafhankelijk van de gekozen kleur. De oppervlakte van D is gelijk aan $\frac{1}{2}d(a + b + c)$, met d de lengte van de zijde van D en a , b en c de lengtes van de hoogtelijnen uit punt P . We weten dus dat $a + b + c$ onafhankelijk is van de gekozen kleur. Maar de oppervlakte van het gebied in de gekozen kleur is $\frac{1}{2}(a + b + c)$, zodat de drie verschillend gekleurde gebieden dezelfde oppervlakte hebben.

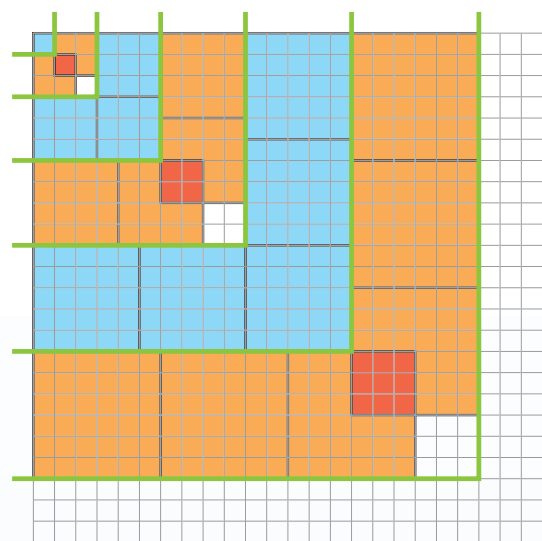
INGEN VAN 2007-2008



JANUARI 2008

Te bewijzen: De oppervlakte van de middelste twee vierkanten is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de vierkanten onder en boven.

Bewijs: Trek een loodlijn c vanuit een hoekpunt van een van de middelste vierkanten naar zijn buurman. Dit deelt de zijde in twee stukken a en b . Er ontstaat een rechthoekige driehoek met zijden a en c . Teken deze zelfde driehoek nog twee keer, zoals aangegeven. Bedenk dat de stelling van Pythagoras gaat over de kwadraten van de zijden van een rechthoekige driehoek, dus eigenlijk over de oppervlakte van de vierkanten op die zijden. Je ziet dan makkelijk in dat de oppervlakte van de middelste vierkanten gelijk is aan $(a+b)^2 + (a^2 + c^2) = 2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$ en de oppervlakte van de vierkanten onder en boven is gelijk aan $(b^2 + c^2) + ((b+2a)^2 + c^2) = 4a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab$.



FEBRUARI 2008

Zodra je ziet welke stelling bewezen moet worden, zie je het bewijs meteen vóór je. Begin in de hoek linksboven en kijk hoeveel vierkantjes telkens in een omhullend vierkant (groene lijnen) passen:

$$1 \times 1^2 = 1^2,$$

$1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 = (1+2)^2$ (het dubbel bedekte rode vierkantje wordt gecompenseerd door het gat, dit geldt voor alle dubbel bedekte vierkanten op de diagonaal),

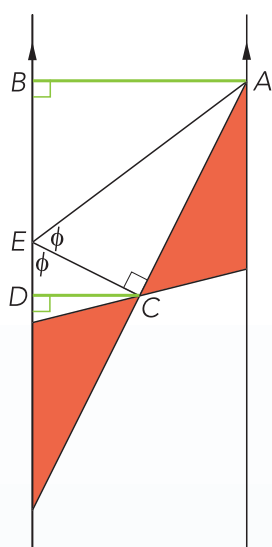
$$1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 = (1+2+3)^2,$$

$$1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 4 \times 4^2 = (1+2+3+4)^2, \text{ enzovoort.}$$

Dit is dus een grafische voorstelling van de algebraïsche stelling

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

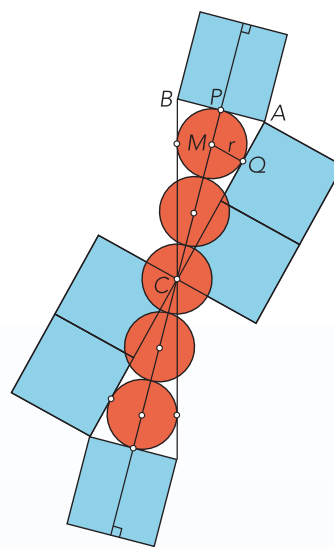
SANGAKU DE OPLOSSINGEN VAN 2007-2008



APRIL 2008

Te bewijzen: De twee rode driehoeken zijn congruent als de twee aangegeven hoeken (φ) gelijk zijn.

Bewijs: Trek eerst loodlijnen vanuit C en A naar de linker verticale lijn. Het is nu voldoende om te bewijzen dat AB twee keer zo lang is als CD, want dan ligt punt C midden tussen de twee parallelle verticale lijnen. Een zuiver meetkundig bewijs is lastig, maar met wat goniometrie is het bewijs niet moeilijk. Bekijk eerst de grote driehoek EAB; hiervoor geldt dat $|AB| = |AE| \sin(180^\circ - 2\varphi) = |AE| \sin 2(90^\circ - \varphi)$. Gebruik nu de sinus-verdubbelingsformule $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$: $|AE| \sin 2(90^\circ - \varphi) = 2 |AE| \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi) = 2 |AE| \cos \varphi \sin \varphi$. Bekijk nu ook de kleine driehoek EDC: $|AB| = 2 |AE| \sin \varphi \cos \varphi = 2 |AE| \times |CD|/|EC| \times |EC|/|AE| = 2 |CD|$.



JUNI 2008

Te bewijzen: In een diabolo-figuur ('zand-loper') met als basis een vierkant en langs de lange zijde $2n$ even grote vierkanten, passen $2n + 1$ ingeschreven cirkels.

Bewijs: Noem de bovenste driehoek ABC, met AB de zijde van het bovenste vierkant. De ingeschreven cirkel van ABC heeft middelpunt M en straal r , en raakt AB in punt P en AC in Q. De driehoeken PAC en QMC zijn gelijkvormig (ze hebben dezelfde hoek bij C en allebei een rechte hoek, dus is ook de derde hoek gelijk). Daarom geldt: $|MC|/|MQ| = |AC|/|PA|$. Enerzijds is duidelijk dat $|AC|/|PA| = 2n$, anderzijds is $|MQ| = r$, de straal van de ingeschreven cirkel. Dus $|MC| = 2nr$. Conclusie: $|PC| = |MC| + r = 2nr + r$. De middellijn tussen de twee basisvierkanten heeft dus lengte $2(2nr + r) = (2n + 1)2r$, ofwel $2n + 1$ maal de diameter van de ingeschreven cirkel.

Vroeger zaten we allemaal te klaverjassen, tegenwoordig pokeren we graag. De dozen met kleurrijke fiches treffen we aan in menige winkel, en krantenkiosken hebben schappen vrijgemaakt voor diverse pokertijdschriften. De *World Series of Poker* en alle media-aandacht de laatste jaren hebben vooral de variant *Texas Hold'em* populair gemaakt. Ook via internet wordt het veel gespeeld en er gaat behoorlijk wat geld in om. Naast een goed inzicht in de psyche van de mens moet je voor dit spel ook een goed gevoel voor kansrekening hebben.

■ door Korik Alons en Sandjai Bhulai



KANS EN POKER

Om goed te kunnen pokeren, is psychologisch inzicht natuurlijk belangrijk. Een speler moet inschatten of zijn tegenstander bluft en zijn eigen strategie zo goed mogelijk verbergen. Je zou zeggen dat geluk ook een rol speelt. De spelers weten immers niet welke kaarten op tafel komen en moeten hun strategie dus bepalen zonder die kennis. Kansrekening is echter in staat de factor 'geluk' grotendeels uit te schakelen. Pas als je de basisprincipes van de pokerwiskunde beheerst, kun je een goede speler worden.

MOGELIJKE STARHANDEN In Texas Hold'em krijgt iedere speler aan het begin van een potje uit een spel van 52 kaarten twee kaarten gedeeld, de starthand. Er zijn dus $\binom{52}{2} = 1326$ verschillende starthanden. Maar deze 1326 starthanden zijn lang niet allemaal in waarde verschillend, en dat is waar het bij Texas Hold'em om gaat. Er is namelijk geen

hiërarchie in de kleur van de kaarten. De hand '♥4 en ♣J' heeft dezelfde waarde als de hand '♣4 en ♥J'.

Als je alleen naar de waarde kijkt, zijn er veel minder verschillende starthanden. Of de twee kaarten van dezelfde kleur zijn, is hierbij een belangrijk onderscheid. De handen '♥4 en ♠J' en '♣4 en ♣J' hebben een verschillende waarde, omdat twee kaarten van dezelfde kleur een grotere kans hebben op een *flush* (vijf kaarten van dezelfde kleur).

Hoeveel starthanden houden we nu over? Ten eerste zijn er 13 mogelijke paren (A;A, K;K, enzovoort, tot en met 2;2). Verder zijn er 78 starthanden waarbij de twee kaarten dezelfde kleur hebben. Je ziet dit in door een willekeurige kleur te kiezen, zeg 'ruiten'. Dan kun je $\binom{13}{2} = 78$ verschillende ruitenparen maken. Maar elk paar in ruiten heeft dezelfde waarde als het overeenkomstige paar in schoppen, klaveren of harten, dus er zijn in totaal niet meer dan 78 verschillende paren van gelijke kleur.

Snel kunnen hoofd-
rekenen is nodig bij
poker, en heeft mis-
chien ook wel iets
met intelligentie te
maken. Deze spe-
ler is lid van MENSA,
een internationale
club van mensen met
een hoog IQ.



De kleur op zich maakt niet uit voor elk van die paren, maar er is wel verschil in waarde tussen ongelijke/gelijke kleur. Er zijn dus ook nog 78 start-
handen van ongelijke kleur (die geen paar zijn).

Samenvattend zijn er 169 in waarde verschil-
lende starthanden: 13 paren, 78 handen van dezelf-
de kleur, en 78 handen van verschillende kleur die
geen paar zijn.

WEGBLUFFEN Kansrekening wordt in poker heel
belangrijk vanaf het moment dat je, bijvoorbeeld,
ervan overtuigd bent dat je dit potje zult winnen als
je een *flush* maakt. Hoe je aan die overtuiging komt
is nauwelijks te berekenen. Of een *flush* wint is na-
melijk afhankelijk van de kaarten van je tegenstan-
ders, en ook van de kans dat je ze kan wegbuffen
terwijl ze eigenlijk een hogere hand hebben. Erva-
ren pokeraars schatten dat in op basis van de in-
zetten van hun tegenstanders, hun kennis van hun
gedrag in alle vorige potjes en hun reacties op de ei-
gen eerdere inzetten.

HANDVERHOUDING De kans dat je een bepaal-
de hand maakt – in bovengenoemd voorbeeld dus
de *flush* – bepaalt de *handverhouding*, en die is wel
goed te berekenen.

Een handverhouding van $X : 1$ betekent dat de
kans dat de hand gemaakt wordt, gelijk is aan $\frac{1}{X+1}$.
Oftewel, de handverhouding wordt gegeven door
($1/\text{kans} - 1$) : 1.

Een voorbeeld: stel dat een speler een paar 2'en
heeft en op de *Flop* ligt geen 2. De handverhouding
om een 2 op de *Turn* te krijgen is 22,5 : 1 en om een
2 op de *Turn* of op de *River* te krijgen is 10,9 : 1. Hoe
je deze handverhoudingen kunt berekenen komt
zodadelijk aan de orde.

Allereerst is het belangrijk om het aantal *outs*
te kennen. Een out is gedefinieerd als een kaart die

ervoor zorgt dat de speler zijn hand maakt. Stel,
een speler heeft twee schoppen en er liggen op de
Flop nog twee schoppen, dan zijn er nog $13 - 4 = 9$
schoppenkaarten in het spel. De speler heeft dus 9
outs om een *flush* te maken.

Het is natuurlijk best mogelijk dat een van de
andere spelers een schoppenkaart heeft, wat uiter-
aard het aantal outs vermindert. Echter, normaal
gesproken weet een speler niet wat de andere
spelers hebben. Hij kan zijn outs dus alleen bereke-
nen op basis van de informatie die hij heeft.

Nu we weten hoe we het aantal outs kunnen be-
palen, is het tijd om te berekenen wat de kans is dat
een speler zijn hand maakt. Voor één kaart is dat
eenvoudig. De kans is dan het aantal outs gedeeld
door het aantal kaarten dat nog over is in 'het pak-
je'. Maar voor twee kaarten (van de *Flop* naar de *Ri-
ver*) is dat iets lastiger. De kans wordt dan als volgt
berekend (# betekent 'aantal'):

$$1 - \frac{47 - \#outs}{47} \times \frac{46 - \#outs}{46}.$$

Het getal 47 is het aantal kaarten dat nog in 'het
pakje' zit (52 totaal – 2 eigen kaarten – 3 kaarten
op de *Flop* = 47 kaarten). Natuurlijk zijn er geen 47
kaarten in de hand van de gever, omdat andere spe-
lers ook kaarten hebben. Hier kan de speler echter
geen rekening mee houden, omdat hij daar geen in-
formatie over heeft.

Laten we het voorbeeld van de schoppen-*flush*
er weer even bij pakken. Stel, we willen weten wat
de handverhouding is dat we een *flush* maken op de
Turn of op de *River*. Er zitten nog 9 schoppenkaar-
ten in het pakje, dus het aantal outs is 9. De kans
dat er een schoppen valt, is dan

$$1 - \frac{47 - 9}{47} \times \frac{46 - 9}{46} = \frac{378}{1081}.$$

Zelfs mensen die de regels niet kennen, kijken soms op tv naar poker, onder andere wegens het bloemrijke jargon van de live commentatoren.



Dit is een kans van ongeveer 35% dat er een schoppen valt op de *Turn* of op de *River*. Dat betekent dat de handverhouding gelijk is aan $(\frac{1}{0,35} - 1) : 1 \approx 1,9 : 1$.

Omdat deze manier van rekenen tijdens het spelen nogal wat tijd in beslag neemt, is er ook een sneller trucje. Als er nog twee kaarten moeten komen, dan kun je simpelweg het aantal outs vermenigvuldigen met 4; als er nog slechts één kaart komt (de *River*), dan kun je het aantal outs vermenigvuldigen met 2 om de kans op het maken van je hand te benaderen. Deze benadering is gebaseerd op het

feit dat twee pakjes kaarten 104 kaarten bevatten, en dat is ongeveer gelijk aan 100.

POTVERHOUDING We weten nu hoe een speler zijn handverhoudingen kan bepalen. Waarom is dat zo belangrijk? Om deze vraag te beantwoorden, moeten we eerst een nieuw begrip introduceren, de zogenoemde *potverhouding*. Die is gedefinieerd als de verhouding tussen de hoeveelheid geld in de pot ten opzichte van de hoeveelheid geld die het kost om te *callen*. Stel dat er € 100 in de pot zit en het € 10 kost om te *callen*. Dan is de potverhouding

10 : 1. Een potverhouding van $X : 1$ betekent dat een speler deze hand 1 op de $X + 1$ potten moet winnen om quitte te spelen.

Als we nu handverhoudingen en potverhoudingen gaan vergelijken, wordt het nut hiervan duidelijk. Een voorbeeld: stel er is € 15 in de pot en de tegenstander verhoogt met € 5, dat betekent dat jouw potverhouding $20 : 5 = 4 : 1$ is. Dit houdt dus in dat je 1 op de 5 potjes moet winnen om quitte te spelen. Je hebt echter een handverhouding van 1,9 : 1, die ervoor zorgt dat je ongeveer 1 op de 3 potjes wint. Op de lange termijn zul je dus niet quitte spelen, maar zelfs geld verdienen.

Als we dit over 100 handen berekenen is de winst (opbrengst – kosten) als volgt:
$$\text{winst} = (100 \text{ handen} \times 35\% \times € 25) - (100 \times € 5) = € 875 - € 500 = € 375.$$

Spelers die aan de pokertafel potverhoudingen en handverhoudingen goed uit kunnen rekenen nemen goede beslissingen. Het basisprincipe is dat als de potverhoudingen groter zijn dan de handverhoudingen, het verstandig is om te callen, omdat je dan op de lange termijn geld wint.

18

Veel spelers vergeten echter dat er na een call op de *Flop* ook best verhoogd kan worden op de *Turn*. Stel, een speler heeft na de *Flop* een schoppenkaart nodig om zijn *flush* te maken. De handverhouding om vanaf de *Flop* naar de *River* een schoppenkaart te krijgen, is 2 : 1. Rekenen op deze manier kan heel erg fout gaan. De handverhoudingen dien je namelijk kaart voor kaart te vergelijken met de potverhoudingen. We geven een voorbeeld waarin de fout duidelijker wordt.

Stel Speler A heeft een *Flush Draw*.

Flop: € 10 Pot + € 10 verhoging.

Speler A maakt de *Call*: € 10 (en krijgt zo 2 : 1 potverhouding).

Turn: € 30 Pot + € 10 Bet. Speler A maakt weer de *Call*: € 10 (en krijgt 4 : 1 potverhouding).

Het resultaat op lange termijn is dan:

$\text{Kosten} = 100 \text{ handen} \times (\text{€ 10 Flop Call} + \text{€ 10 Turn Call}) = \text{€ 2000}.$

$\text{Opbrengst} = 100 \text{ handen} \times 35\% \text{ kans om te winnen} \times \text{€ 50 Pot} = \text{€ 1750}.$

DE REGELS VAN TEXAS HOLD'EM

Het doel van Texas Hold'em is om een zo hoog mogelijke combinatie van vijf kaarten (*hand*) te maken uit twee kaarten die je als speler zelf krijgt en vijf kaarten die open op tafel komen. Er kunnen maximaal tien spelers meedoen. Degene met de hoogste combinatie wint de pot: het geld dat door de spelers op diverse momenten tijdens het spel is ingezet. Een pokerwedstrijd bestaat altijd uit een groot aantal potjes, zodat stom geluk bij het delen van de kaarten zo min mogelijk invloed heeft. Ook krijgen spelers zo de kans om het spel van hun tegenstanders te analyseren: wie speelt heel voorzichtig, wie bluft vaak, wie knippert zenuwachtig met z'n linkeroog als hij een goede *hand* heeft?

Tijdens het spel hebben de spelers de volgende opties:

- *Fold*: de speler legt zijn kaarten weg en geeft hiermee zijn kansen op om de pot nog te winnen;
- *Check/call*: de speler evenaart de inzet van de andere spelers en mag mee blijven spelen. Wanneer het bieden nog niet is ingezet, spreekt men van een check. Anders heeft men het over een call;
- *Bet/raise*: de speler verhoogt de inzet. Als er nog niet is ingezet, gaat het om een bet. Als er al is verhoogd zal men eerst deze inzet moeten evenaren, voordat men daar overheen kan gaan met een raise.

Speler A maakt hier de fout op de *Flop* door te *callen*. Hij weet dat hij 1,9 : 1 handverhouding heeft om zijn *flush* te maken, maar beseft niet dat hij daarvoor rekent met zowel de *Turn* als de *River*. De handverhouding van alleen de *Turn* is namelijk ongeveer 4 : 1. Hij had zijn hand dus beter op kunnen geven op de *Flop*.

COMPUTERS VERLIEZEN NOG Als een speler zijn hand- en potverhoudingen goed berekent, dan zal hij weinig slechte beslissingen nemen en net-

De volgorde van spelen is als volgt:

- *De Deler.* De kaarten worden gedeeld vanaf de positie van de Deler. De positie van de Deler schuift na elk potje één plaats door.
- *De Blinden.* Aan het begin van een potje moet de speler links van de Deler de 'small blind' inzetten (meestal de helft van de minimale inzet) en de speler die links daarnaast zit de 'big blind' (meestal de minimum inzet), zodat er in ieder geval geld in de pot zit. Deze spelers heten 'blinden' omdat ze geld in moeten zetten zonder hun kaarten gezien te hebben.
- *Het delen.* Elke speler ontvangt twee kaarten, die alleen hij te zien krijgt.
- *Inzetten of Betting.* Na het delen starten de eerste ronden *betting*. De speler links van de big blind begint. Afhankelijk van zijn hand en eerdere activiteit aan de tafel kan elke speler *folden*, *checken/callen* of *raisen/betten*. Een ronde van *betting* gaat telkens de tafel rond totdat alle spelers de laatste *bet* *gecalled* of *gefold* hebben.
- *De Flop.* De eerste drie kaarten van de stapel worden open op tafel gelegd. Daarna volgt weer een ronde *betting*.
- *De Turn.* De vierde kaart wordt open op tafel gelegd. Daarna volgt weer een ronde *betting*.
- *De River.* De vijfde en laatste kaart wordt open op tafel gelegd. Er volgt nogmaals een ronde *betting*.
- *De Showdown.* Na afloop van de laatste *bet* vergelijken de overgebleven spelers hun combinatie van vijf kaarten uit de twee kaarten die zij ontvangen hebben en de vijf kaarten die open op tafel liggen. De speler met de hoogste combinatie wint de pot. Als meerdere spelers dezelfde combinatie hebben wordt de pot gedeeld.

De rangorde van de *hands* is, van hoog naar laag:

- 1 *Royal flush:* vijf opeenvolgende kaarten van dezelfde kleur, met de Aas als hoogste kaart. Bijvoorbeeld: ♠A ♠K ♠Q ♠J ♠10.
- 2 *Straight flush:* vijf opeenvolgende kaarten van dezelfde kleur. Bijvoorbeeld: ♦Q ♦J ♦10 ♦9 ♦8.
- 3 *Four of a kind:* vier kaarten met dezelfde waarde. Bijvoorbeeld: ♣4 ♦4 ♥4 ♠4 ♥9.
- 4 *Full house:* drie kaarten van dezelfde waarde, gecombineerd met twee andere kaarten van dezelfde waarde. Bijvoorbeeld: ♣9 ♥9 ♠9 ♥2 ♣2.
- 5 *Flush:* vijf willekeurige kaarten van dezelfde kleur. Bijvoorbeeld: ♠K ♠J ♠8 ♠4 ♠3.
- 6 *Straight:* vijf in waarde opeenvolgende kaarten van willekeurige kleur (de Aas kan hier gebruikt worden als volgend op de Koning, of als 1, dus komend voor de 2). Bijvoorbeeld: ♦5 ♥4 ♠3 ♦2 ♦A.
- 7 *Three of a kind:* drie kaarten van dezelfde waarde. Bijvoorbeeld: ♣7 ♥7 ♠7 ♦K ♠2.
- 8 *Two pair:* twee kaarten van dezelfde waarde, gecombineerd met een ander paar kaarten van dezelfde waarde. Bijvoorbeeld: ♣A ♦A ♥8 ♠8 ♠Q.
- 9 *One pair:* twee kaarten van dezelfde waarde. Bijvoorbeeld: ♥9 ♠9 ♣A ♠J ♥4.
- 10 *High card:* ook bekend als een zogenaamde High hand. Het volgende voorbeeld wordt beschouwd als een Ace high: ♦A ♦10 ♠9 ♣5 ♣4.

to geld kunnen verdienen. Het element van geluk blijft wel bestaan, maar heeft op de lange termijn eigenlijk weinig invloed. Toch is poker niet alleen een spel van de wiskunde. Psychologie en inschattingsvermogen moeten niet onderschat worden. Op dit moment wordt er hard gewerkt aan computers die van pokerprofs moeten winnen, zoals de supercomputer *Deep Blue* in 1997 won van wereldkampioen schaken Gary Kasparov.

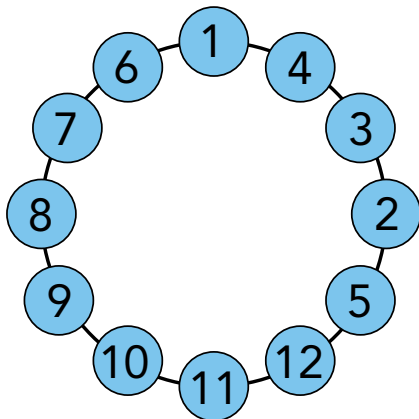
De computers verliezen het echter nog altijd, vooral door het inschattingsvermogen van de profs.

De professionele pokerspeler kunnen heel goed een strategie doorzien. De technologie staat echter niet stil. Op dit moment bestaan er al computers die de uitdrukking van iemands gezicht kunnen lezen en wie weet ligt daarin juist de sleutel om in de toekomst poker-profs te verslaan. ■

PROBLEMEN

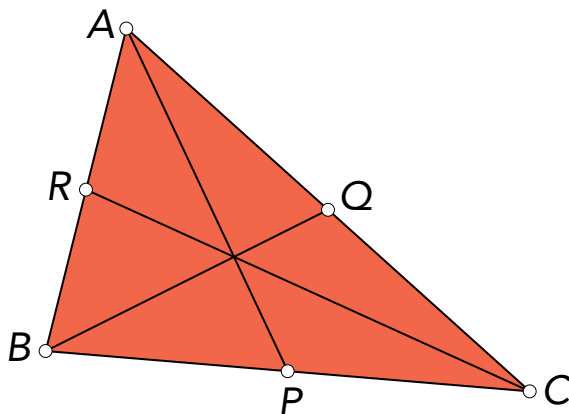
■ door Dion Gijswijt

HEKSENKRING Hieronder zie je een *heksenkring* van de getallen 1 tot en met 12: de getallen staan in een kring, zó dat elk getal een deler is van het verschil van de kwadraten van zijn burenen, bijvoorbeeld 5 is een deler van $12^2 - 2^2$.



Kun jij een heksenkring maken van de getallen 1 tot en met 10? Bestaat er een heksenkring van de getallen 2 tot en met 2008? En tot slot: bewijs dat als de getallen x tot en met 20 een heksenkring vormen, x gelijk moet zijn aan 1.

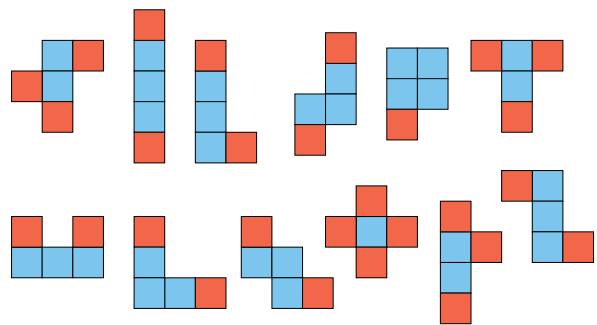
ZWAARTELIJNEN In driehoek ABC zijn de drie zwaartelijnen getekend. Als $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 = 12$, wat is dan de waarde van $|AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2$? Met dank aan Karst Koymans.



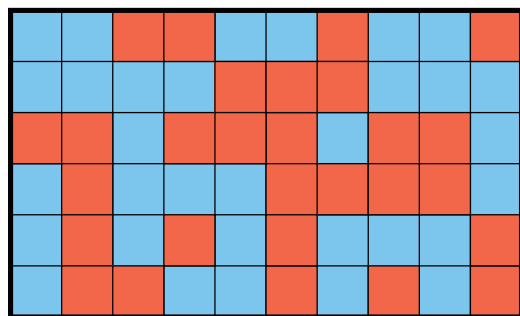
RARE RIJ Maak een rij getallen $a_1, a_2, \dots$ door $a_1 = a_2 = 1$ te nemen en $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ voor $n \geq 1$.

Bevat deze rij oneindig veel negatieve getallen?

PENTOMINO-PUZZEL Hieronder zie je de twaalf *pentomino's*. Van elke pentomino zijn de 'uiteindes' rood gekleurd.

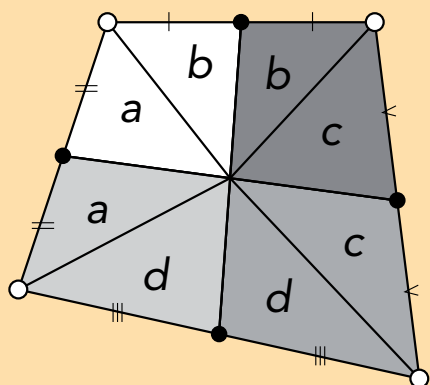


Vul de onderstaande 6×10 rechthoek met de twaalf pentomino's en wel zo, dat de 28 uiteindes op de aangegeven plaatsen terecht komen. Je mag de pentomino's draaien en spiegelen.



OPLOSSINGEN

VIERHOEK De vierhoeken kunnen elk worden verdeeld in twee driehoeken, zodat de resulterende acht driehoeken vier paren vormen met dezelfde basis en hoogte. De gevraagde oppervlakte is $(a + d) = (a + b) + (c + d) - (b + c) = 24 + 36 - 21 = 36$.



MERKWAARDIGE SOM Gracia maakt producten door voor elke $k = 1, \dots, 10$ óf een factor $\frac{1}{k}$ te kiezen, óf een factor 1. De som van al deze producten is daarom

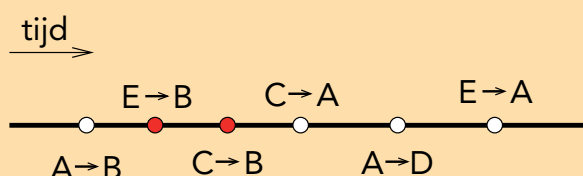
$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{11}{10} = 11.$$

Omdat het geval dat ze geen enkel getal kiest niet meedoet, is het antwoord $11 - 1 = 10$.

RACE Duidelijk is, dat E en C sneller waren dan A , die weer sneller was dan B en D . Als persoon x persoon y inhaalt, schrijven we $x \rightarrow y$ en is $t(x \rightarrow y)$ het tijdstip van inhalen.

Ga zelf na dat als $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow z$, $t(x \rightarrow z)$ tussen $t(x \rightarrow y)$ en $t(y \rightarrow z)$ in ligt.

Gegeven is dat $t(A \rightarrow B) < t(C \rightarrow B)$, dus ligt $t(C \rightarrow B)$ tussen $t(A \rightarrow B)$ en $t(C \rightarrow A)$. Omdat B persoon E als tweede ontmoet, ligt $t(E \rightarrow B)$ tussen $t(A \rightarrow B)$ en $t(C \rightarrow B)$ in:



Stel nu dat E sneller zou zijn dan C . Dan moet $t(E \rightarrow C) \geq t(E \rightarrow A)$ en $t(E \rightarrow C) \leq t(E \rightarrow B)$, maar dat is onmogelijk! De enige mogelijkheid is dat C het snelst is. Dat er inderdaad een oplossing mogelijk is, mag je zelf uitpuzzelen.

BREUKEN Het kwadraat van de afstand tussen de middelpunten van de cirkels bij $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ is

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2.$$

Het kwadraat van de som van de stralen is

$$\left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2.$$

De cirkels raken als deze getallen gelijk zijn, en overlappen als het eerste getal kleiner is dan het tweede. Uitwerken geeft dat de cirkels raken als $(ad - bc)^2 = 1$ en overlappen als $(ad - bc)^2 < 1$. Dat laatste gebeurt alleen als $ad = bc$: als de twee breuken gelijk zijn.

Deze cirkels heten wel *Ford cirkels* naar de bedenker Lester Ford.

Carl Friedrich Gauss is een van de grootste wiskundigen ooit. Zodra je een studieboek wiskunde openslaat, kom je zijn naam tegen, want in bijna alle vakgebieden in de wiskunde hebben zijn ideeën grote invloed gehad.

■ door Jeanine Daems

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855):

DE PRINS VAN DE WISKUNDE

22

Hoewel Gauss vaak 'de prins van de wiskunde' genoemd wordt, was zijn afkomst allesbehalve koninklijk. Hij werd geboren in een arme, eenvoudige familie in Brunswijk (Braunschweig, Duitsland). Zijn vader, Gebhard Diederich Gauss, was onder meer tuinman en metselaar, maar hij kon wel lezen en schrijven. Gauss' genie komt vermoedelijk van moeders kant. Zijn moeder heette Dorothea Benz en ze was de tweede vrouw van Gebhard. Zij kon waarschijnlijk wel lezen, maar niet schrijven. Ze had een erg slimme jongere broer, Friederich, die bekend was om zijn mooi geweven damasten. Carl Friedrich Gauss werd geboren op 30 april 1777. Officieel heette hij Johann Friederich Carl Gauss, maar hij signeerde zijn werk altijd met de naam Carl Friedrich Gauss.

WONDERKIND Er bestaan mooie verhalen over zijn jeugd, want Gauss bleek een heus wonderkind te zijn. Op een zaterdag toen de kleine Gauss nog geen drie jaar oud was, zat vader Gebhard de wekelijkse uitbetaling van het salaris van de andere arbeiders te berekenen. De kleine Gauss zat mee te kijken zonder dat zijn vader het in de gaten had, en



ontdekte een fout in een lange berekening. Op dat moment had Gauss zichzelf al leren lezen door de klanken van letters te vragen aan de mensen om hem heen.

Kort na zijn zevende verjaardag ging Gauss voor het eerst naar school, waar de eerste twee jaar niet veel opmerkelijks gebeurde. Pas toen Gauss voor het eerst rekenen kreeg kwam zijn talent aan het licht. Gauss' leraar, Büttner, gaf een lange optelsom op aan zijn leerlingen. Gauss had de opgave binnen een paar seconden opgelost. Het was een probleem van het type: wat is $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$? Gauss

had meteen door dat $1 + 100$ gelijk is aan $2 + 99$ en aan $3 + 98$, enzovoort. Het antwoord is dus $50 \times 101 = 5050$. Dit is een eenvoudig trucje als je het eenmaal kent, maar om het zelf zo snel te verzinnen is knap. De rest van de klas zat natuurlijk lang te rekenen, maar uiteindelijk was Gauss een van de weinigen met het goede antwoord. Büttner, een strenge man, was onder de indruk en kocht van zijn eigen geld het beste rekenboek dat hij kon vinden. Gauss ging er als een speer doorheen en toen kon zijn leraar hem niets meer leren. Gelukkig had Büttner een assistent, Johann Martin Bartels, een jongeman met een passie voor wiskunde die eigenlijk als taak had de kinderen te helpen met leren schrijven en die hun pennen moest snijden. Bartels was toen 17, en samen met Gauss bestudeerde hij

verdere wiskunde. Ze zijn altijd vrienden gebleven. Bartels is later wiskundeprofessor geworden.

In 1788 ging Gauss naar het gymnasium. Daar leerde hij Latijn, maar ook Hoogduits (want van tevoren had hij alleen het lokale dialect gesproken). In 1791 werd Gauss voorgesteld aan hertog Carl Wilhelm Ferdinand van Brunswijk-Wolfenbüttel, die onder de indruk van hem was en hem voortaan een jaarlijkse toelage gaf. Van 1792 tot 1795 zat Gauss op het Collegium Carolinum (later werd dit de Technische Universiteit), waar hij al indrukwekkende wiskunde bedacht.

BREDE BELANGSTELLING In 1795 vertrok Gauss naar de universiteit in Göttingen. Hij was ingeschreven als student wiskunde, maar was ook

DE CONSTRUCTIE VAN DE REGELMATIGE ZEVENTIENHOEK

Al in de Griekse oudheid werden constructieproblemen veel bekeken. Een constructieprobleem heeft als opdracht een bepaalde figuur te tekenen. Maar er zijn beperkingen: je mag alleen een passer en een latje (zonder schaal aanduiding, dus geen liniaal!) gebruiken.

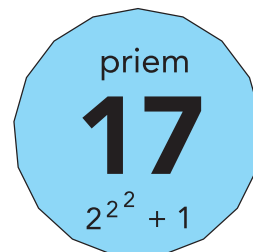
Veel figuren zijn op die manier te construeren, rechte hoeken bijvoorbeeld, of een lijn die een gegeven hoek precies in tweeën deelt, of de middelloodlijn op een lijnstuk. Maar voor andere figuren is het moeilijker om te bepalen of ze te construeren zijn of niet. Als het na veel proberen niet lukt, betekent dat natuurlijk niet dat het ook echt niet kán, misschien heb je het nog niet lang genoeg geprobeerd. Maar van sommige objecten is *bewezen* dat het onmogelijk is om ze te construeren. Er bestaat bijvoorbeeld geen methode waarmee je een willekeurige, gegeven hoek in drie gelijke hoeken kan verdelen. Voor bepaalde hoeken is dat wel mogelijk: uit een hoek van 90 graden kun je een hoek van 30 graden construeren. Maar uit een hoek van 30 graden is het niet mogelijk om met alleen een passer en een latje een hoek van 10 graden te construeren.

Het constructieprobleem waarmee Gauss zich bezighield, was de vraag: is het mogelijk om met alleen passer en latje een *regelmatische zeventienhoek* te construeren? Gauss loste deze vraag op doordat hij een verband zag tussen de oplossingen van een bepaalde vergelijking en het constructieprobleem van de regelmatige veelhoeken. Dat verband komt voort uit de algebra en getaltheorie. Gauss slaagde erin om een veel al-

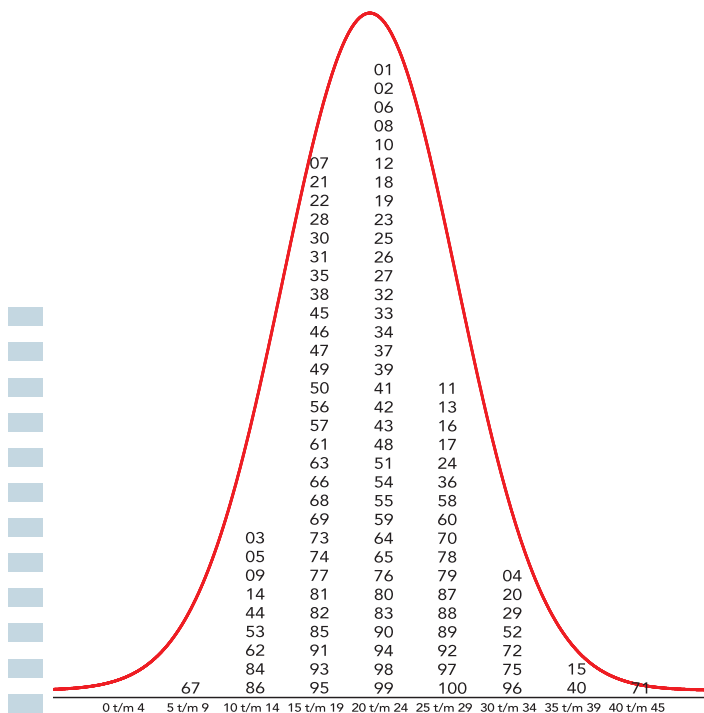
gemenere stelling te bewijzen. Hij kon namelijk bepalen voor welke getallen n een regelmatige n -hoek construeerbaar is.

Stelling. Laat n een geheel getal groter dan 2 zijn. Je kunt n nu schrijven als $n = 2^k \cdot m$, waarbij $k \geq 0$ en m oneven is. De regelmatige n -hoek kan geconstrueerd worden als ófwel $m = 1$, ófwel m een priemgetal is van de vorm $2^{2^t} + 1$ (waarbij $t \geq 0$), ófwel m het product is van *verschillende* priemgetallen van die vorm, en anders niet.

De zeventienhoek kan dus geconstrueerd worden, want 17 is een priemgetal en $17 = 2^{2^2} + 1$. De regelmatige 32-hoek is ook te construeren, want $32 = 2^5 \cdot 1$, dus dan is $m = 1$. De regelmatige vijftienhoek kan ook geconstrueerd worden: $15 = 3 \cdot 5$ en 3 en 5 zijn verschillende priemgetallen en ze hebben de goede vorm: $3 = 2^1 + 1$ en $5 = 2^2 + 1$. De regelmatige zevenhoek en negenhoek kunnen bijvoorbeeld niet geconstrueerd worden.



Een regelmatige zeventienhoek kun je construeren, want 17 is een priemgetal en $17 = 2^{2^2} + 1$



De Gauss-kromme duikt vaak op als veel toevalligheden een eindresultaat beïnvloeden; voorbeelden zijn de gewichten van een grote partij sinaasappelen of de IQ's van een groot aantal mensen. Om dit te simuleren, hebben we honderd keer vijf willekeurige decimalen van π opgeteld. Zo'n som is dus minimaal $5 \times 0 = 0$ en maximaal $5 \times 9 = 45$. De decimalen van π zijn in zekere zin toevalsgetallen, dus het resultaat van elke optelling is 'toeval'. Als je slechts tien uitkomsten bekijkt, kan de verdeling heel scheef zijn (kijk maar naar de 70ste tot en met de 79ste uitkomst). Maar alle honderd uitkomsten passen samen wel netjes onder een Gauss-kromme met de top bij het gemiddelde, 22,5.

zeer geïnteresseerd in klassieke talen, en hij was veel meer onder de indruk van zijn professor in de klassieke talen dan van zijn wiskundeprofessor Kästner. Zijn eerste grote ontdekking, de constructie van de regelmatige zeventienhoek en een algemene stelling over de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken (zie het kader op pagina 23), deed hij in deze jaren. In 1798 keerde hij terug naar Brunswijk. In de periode die toen aanbrak was hij zeer productief. Voor het eerst wijdde hij zich ook systematisch aan de toegepaste wiskunde, in het bijzonder de theoretische en experimentele sterrenkunde. In deze periode maakte Gauss veel vrienden en maakte hij verscheidene reizen.

Zijn werk in deze periode bestreek een breed gebied. In 1799 promoveerde Gauss op een proef-

DE BESTE LIJN DOOR EEN PUNTENWOLK

De eerste vermelding van de *kleinste-kwadraatenmethode* in de wiskundige literatuur stamt uit 1806, in een artikel van Legendre. Uit de nalatenschap van Gauss is gebleken dat hij de methode al eerder dan Legendre had gevonden en hem veel gebruikte in zijn berekeningen van de banen van planetoïden. Hij had echter nooit de moeite genomen om hem te publiceren, omdat hij eigenlijk verwachtte dat de methode helemaal niet nieuw was.

De kleinste-kwadraatenmethode is een slimme manier om uit een flink aantal onnauwkeurige gegevens 'de beste' conclusie te trekken. Eerst een simpel voorbeeld: stel, je wilt weten hoeveel je weegt, maar je hebt alleen maar een krakemikkige weegschaal in een badkamer met een hobbelige vloer. Iedere keer dat je op de weegschaal gaat staan, geeft die een ander gewicht aan, waarbij het verschil wel 2 of 3 kilo kan zijn. Het is intuïtief duidelijk wat dan het beste is: weeg jezelf een keer of tien met de weegschaal telkens op andere posities in de badkamer en neem het (rekenkundig) gemiddelde van alle metingen: $a = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})/10$. Waarschijnlijk is a dan wel je ware gewicht tot op een kilo nauwkeurig.

Maar wat doe je, als de grootte die je meet in de tijd verandert? Stel je voor dat je in een auto zit die probeert met een constante snelheid van 120 km/u te rijden. Als je echt gemiddeld 120 km/u rijdt, haal je nog net je afspraak in een stad 90 kilometer verderop. Helaas kun je door de andere auto's op de weg niet perfect gelijkmatig rijden, en bovendien wijken de snelheidsmeters van personenauto's meestal behoorlijk af.

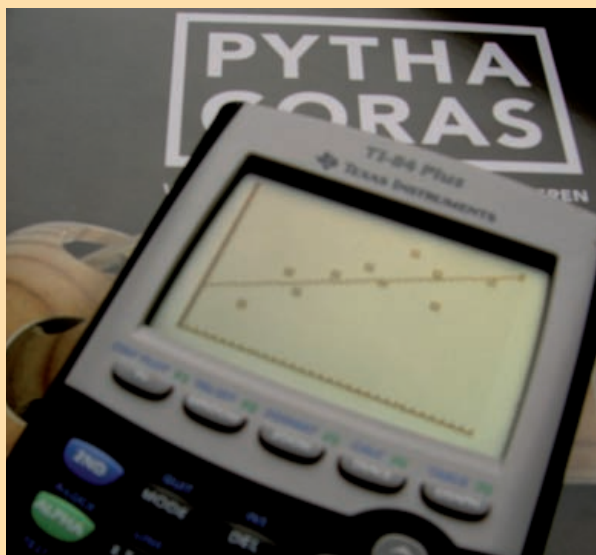
Meet dan, bijvoorbeeld, zo nauwkeurig mogelijk tien keer met je horloge de tijd wanneer je langs een kilometerpaaltje rijdt. Als je die tijden

schrift over de zogeheten *hoofdstelling van de algebra*. In 1801 verscheen zijn beroemde boek over getaltheorie: *Disquisitiones Arithmeticae*. Maar ook op astronomisch vlak deed Gauss baanbrekend werk. In 1801 was de eerste planetoïde, Ceres, ontdekt, die al snel weer uit het zicht verdwenen was. Gauss gaf een voorspelling voor de baan van Ceres die heel anders was dan de voorspellingen van anderen, maar toen men de planetoïde weer zag bleek hij erg dicht bij de plaats te staan die Gauss had voorspeld. Op dat moment maakte hij niet bekend hoe hij zijn

tegen de afstand uitzet, liggen ze niet perfect op een rechte lijn, maar vormen een langwerpige wolk punten in de grafiek. Als je nu de 'beste' rechte lijn door die puntenwolk trekt en kijkt wanneer die het punt 90 kilometer verderop bereikt, heb je de best mogelijke voorspelling van je aankomsttijd. Maar wat is de beste rechte lijn?

Dit lijkt sterk op het probleem van Gauss toen hij wilde voorspellen waar een bepaalde planetoïde op een zekere dag aan de hemel te zien zou zijn, op basis van oudere, onnauwkeurige waarnemingen (positie aan de hemel op een zeker tijdstip t).

In het geval van de auto nemen we aan dat er geen trend in zijn snelheid zit: hij gaat niet systematisch steeds harder of zachter. Daarom nemen we aan dat het verband tussen de tijd t en de afgelegde afstand y lineair is, dus $y = at + b$. Nu wil je de lijn vinden die het 'beste' past bij de gemeten punten (t_i, y_i) . Bepaal voor elk meetpunt de afwijking $(at_i + b) - y_i$, ofwel: je kijkt naar het verschil tussen de y -coördinaat van het gemeten punt (t_i, y_i) en de



Het principe van de kleinste kwadraten wordt ook door de grafische rekenmachine gebruikt bij het berekenen van *regressiemodellen*

y -coördinaat die volgens het nog onbekende verband $y = at + b$ bij de t -coördinaat t_i hoort. Die afwijking kwadrateer je (daardoor tellen afwijkingen naar beneden en naar boven gelijkwaardig mee). Al die kwadraten tel je bij elkaar op.

Het principe van de kleinste-kwadratenmethode is nu dat je dit getal zo klein mogelijk maakt. Zoek dus de 'beste' waarden voor a en b door de uitdrukking $((at_1 + b) - y_1)^2 + ((at_2 + b) - y_2)^2 + \dots + ((at_n + b) - y_n)^2$ te minimaliseren. Hoe je dat precies doet laten we hier buiten beschouwing, maar daar is een wiskundig recept voor.

Om de kleinste-kwadratenmethode toe te passen, hoeft het verband tussen de twee grootheden geen rechte lijn te zijn. Je kunt voor een willekeurig verband tussen y en t uitrekenen wat in elk meetpunt het verschil is, dit kwadrateren, optellen en minimaliseren. Ook voor het rekenkundig gemiddelde geldt trouwens, dat de som van de kwadratische afwijkingen minimaal is.

In het geval van Gauss' planetoïden was het wiskundig verband inderdaad niet lineair, maar het was wel bekend, omdat dit volgt uit de zwaartekrachtswetten van Newton. Daarom kon hij verrassend nauwkeurig voorspellen op welk stukje van de hemel de astronomen hun telescopen moesten richten om op een zekere dag een verre planetoïde weer in het oog te krijgen.

De kleinste-kwadratenmethode is zelfs toepasbaar als het verband tussen de grootheden niet bekend is. Je spreekt dan van *curve fitting*: probeer een aantal standaardformules uit ($y = at + b$; $y = at^2 + bt + c$; $y = ae^t + b$, enzovoort), bepaal telkens de optimale a , b , c , ... en kijk dan welke curve het beste bij de puntenwolk past. Uiteindelijk is die afweging subjectief, dus je kunt hiermee nooit bewijzen dat het verband tussen twee grootheden aan een van die formules voldoet. Toch blijkt curve fitting vaak redelijk nauwkeurige voorspellingen op te leveren.

voorspelling berekend had, maar later bleek dat hij de *kleinste-kwadratenmethode* had bedacht en gebruikt (zie het kader hierboven). Deze goede voorspelling verspreidde Gauss' faam onder astronomen en hij werd bekend in heel Europa.

Op 9 oktober 1805 trouwde Gauss met Johanne Ostorf. Zij kregen drie kinderen: Joseph, Minna en Louis, alledrie vernoemd naar astronomen. De laatste bevalling in 1809 bleek te zwaar voor Johanne, en ze stierf, kort daarop gevolgd door de kleine Louis die maar vijf maanden oud werd. Gauss

trouwde snel opnieuw, met de beste vriendin van zijn eerste vrouw: Minna Waldeck.

In 1807 vertrok Gauss naar Göttingen, om directeur te worden van de sterrenwacht. Hij had in de voorgaande jaren ook andere aanbiedingen gekregen, maar Gauss koos voor Göttingen omdat hem beloofd was dat daar een nieuwe sterrenwacht zou komen, dat hij een goede, eigen assistent zou krijgen en dat hij losjes aan de universiteit verbonden zou zijn. Gauss moest zich nog lang met de oude sterrenwacht behelpen: de nieuwe Göttingse

sterrenwacht was pas in 1816 af. In de jaren daarna installeerden Gauss en zijn assistent Harding de astronomische instrumenten. Gauss' interesse in de astronomie, en later ook in de landmeetkunde, leidde ertoe dat hij geïnteresseerd raakte in methoden om de grootte van meetfouten te bepalen. Zo kwam hij terecht bij de kansrekening en statistiek. Gauss' bijdragen hieraan zijn erg belangrijk geweest voor de ontwikkeling van onze moderne theorieën. In 1809 verscheen zijn eerste publicatie over de kleinste-kwadratenmethode (die al in 1806 door Laplace gepubliceerd was), en in 1816 kwam de beroemde *Gausskromme* (de kromme die hoort bij de normale verdeling) aan de orde. Gauss nam waarschijnlijk zijn eigen metingen van een bepaalde grootte en hij keek hoe de verschillende gemeten waarden verspreid waren rond het gemiddelde daarvan. De Gausskromme, die hij vond na wat wiskundige aannames gedaan te hebben, bleek deze verdeling goed te beschrijven.

Al die tijd vond Gauss naast zijn werk in de sterrenwacht tijd om aan andere onderwerpen te werken, ook in de zuivere wiskunde. In 1817 stopte hij met zijn theoretische astronomische werk, maar hij bleef wel observaties doen. Vanaf 1818 hield hij zich bezig met weer een heel ander vakgebied: de landmeetkunde. Hij was gevraagd om de staat Hannover te meten, zodat Hannover aangesloten kon worden op de metingen van Denemarken die er al waren. Dat gebeurde door zogenaamde driehoeksmetingen.

26

LANDMETING Stel dat je de afstand wil weten tussen twee ver van elkaar verwijderde punten A en B (bijvoorbeeld het punt A waar je staat en een boom of toren in de verte op punt B). Kies dan een derde punt C zó dat je de afstand tussen A en C kunt meten (we noemen AC dan wel de *basislijn*). De punten A , B en C vormen natuurlijk een driehoek. Dan zet je instrumenten om hoeken te meten op de punten A en C , en dan meet je de hoeken in de driehoek bij A en C . Dan kun je de derde hoek van de driehoek en de lengtes van de twee andere zijden (in het bijzonder dus de zijde AC , die je wilde weten) uitrekenen. Als je de afstand van twee nog veel verder uit elkaar liggende punten wil meten, kun je hetzelfde doen met een heleboel driehoeken die naast elkaar liggen. Om een land in kaart te brengen, kun je dus het land in driehoekjes verdelen waarvan je de zijden op deze manier gemeten hebt, en dan kun je ook afstanden tussen verder uit elkaar gelegen punten berekenen.

In de achttiende eeuw stond landmeten al erg in de belangstelling, ook omdat dergelijke metingen

iets kunnen vertellen over de precieze vorm van de aarde. De aarde is ongeveer een bol, maar niet helemaal, en landmeten zou uitsluitel kunnen geven over de kromming van de aarde.

Helaas bleken de basislijnen niet zo precies gemeten te zijn, en was het netwerk van driehoeken ook niet zo goed, waardoor de resultaten een beetje tegenvielen. Maar Gauss' werk leverde wel een praktische uitvinding op: de heliotroop. Dat is een instrument dat direct een lichtsignaal in een bepaalde richting kan geven, door zonlicht te reflecteren. Zo kun je snel signalen doorgeven over een tamelijk grote afstand. In de driehoeksmetingen is het bovendien natuurlijk handig om een stralend, vast lichtpunt op enkele kilometers afstand te kunnen zien.

In 1832 kwam natuurkundeprofessor Weber naar Göttingen. Gauss had al eerder aan natuurkunde gewerkt, en samen met Weber ging hij het aardmagnetisme onderzoeken. In de zes jaar dat ze samenwerkten, bereikten ze veel. Zo bouwden ze samen de eerste werkende (natuurlijk nog wat primitieve) telegraaf. In 1837 verliet Weber Göttingen, en vanaf die tijd nam Gauss' activiteit langzaam af. In 1849 gaf hij zijn gouden-jubileumlezing, vijftig jaar na zijn promotie. Vanaf 1850 was zijn werk weer vooral van praktische aard. Langzaam ging zijn gezondheid achteruit en hij stierf in zijn slaap op 23 februari 1855.

PERFECTIONIST Een kenmerk van Gauss was dat hij zijn ideeën heel precies en helemaal perfect uitgewerkt wilde hebben voor hij ze publiceerde. Hij heeft veel van zijn ideeën daardoor niet gepubliceerd, zoals bijvoorbeeld te zien is aan zijn later teruggevonden dagboek. Hij heeft verscheidene keren geclaimd, na het horen over een nieuwe ontdekking in de wiskunde, dat hij dat ook al had bedacht, zie het kader over de kleinste-kwadratenmethode.

Gauss heeft zich met zoveel verschillende problemen en ideeën beziggehouden dat het ondoenlijk is om een goed beeld te geven van zijn verscheidenheid. In de kaders kun je meer lezen over twee van zijn bekende resultaten. Maar je moet daarbij bedenken dat twee voorbeelden nog lang geen compleet beeld kunnen geven van Gauss' invloed op de wiskunde van nu. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

E.T. Bell, *Men of Mathematics*

Tord Hall, *Carl Friedrich Gauss – A Biography*

W.K. Bühler, *Gauss – A Biographical Study*

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Gauss.html

Flipit is een spelletje dat je kunt spelen op de computer of je mobiele telefoon. In het aprilnummer gaven Jaap en Jordi Top een analyse van het spel. Een interessante reactie kwam van een aantal Belgische leerlingen.

VERBREIDING VAN

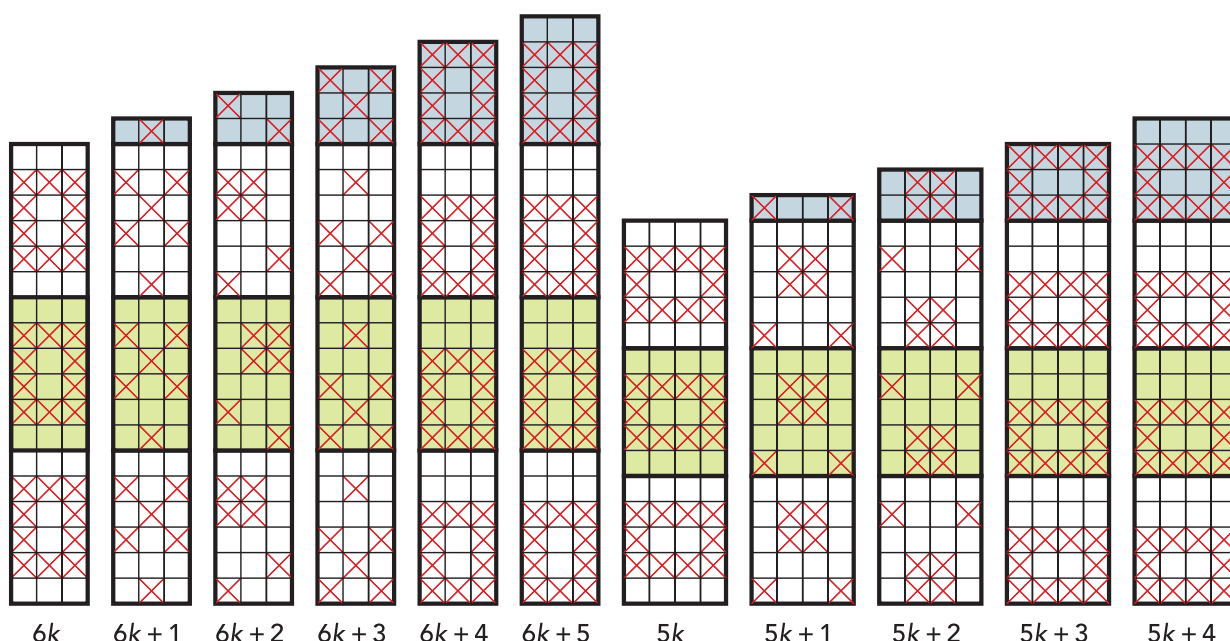
FLIPIT

Het spelletje *Flipit* bestaat uit een aantal schijven, aan de ene kant wit, aan de andere kant zwart. Je begint met alleen witte schijven en moet ze allemaal zwart maken door een deel van de schijven om te draaien. De regel die dit spel interessant maakt is: zodra je een zekere schijf omdraait, moet je ook al z'n naaste burens (links, rechts, boven, onder, voor zover aanwezig) omdraaien.

Jaap en Jordi Top gaven in april onder meer een algemene oplossing voor een bord met $2 \times n$ schijven en wierpen de vraag op, of er een algemene oplossing bestaat voor een $3 \times n$ bord.

Fabian Hulpia, Liesbeth Decrock, Wouter

Vandewalle, Dario Rens en Frederick Fasseur, leerlingen van EDUGO Campus in Zomergem (België), namen onder leiding van hun wiskundeleer Luc Van den Broeck de uitdaging aan en vonden een algemene oplossing voor het $3 \times n$ en zelfs het $4 \times n$ bord. De strategie op een $3 \times n$ bord is opgesplitst in zes gevallen (al naargelang de rest van n bij deling door 6) en de strategie op een $4 \times n$ bord in vijf gevallen (al naargelang de rest van n bij deling door 5). Het team vermoedt dat er ook zulke strategieën bestaan voor nog bredere borden. Ze zetten hun onderzoek voort. ■



De aangekruiste schijven in elk vak zijn de schijven die je vooraf selecteert om om te draaien. Als je dat gaat doen, worden natuurlijk veel meer schijven omgedraaid, waarvan sommige meerdere malen, want iedere keer dat je een aangekruiste schijf omdraait, moet je ook al z'n burens omdraaien.

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



28

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 oktober 2008.

OPGAVE 158

Bij een schaaktoernooi is gepland dat iedere speler precies één wedstrijd speelt tegen elke andere speler. Nadat elke speler precies één wedstrijd gespeeld heeft, trekken vijf spelers zich terug. Daarna gaat het toernooi verder waarbij alle wedstrijden die nog gespeeld kunnen worden ook gespeeld worden. In totaal worden er 140 wedstrijden gespeeld. Hoeveel deelnemers nemen er in totaal deel aan het toernooi?

OPGAVE 159

Bepaal alle reële oplossingen van de vergelijking

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

($\lfloor x \rfloor$ is het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is. Voorbeelden:

$$\lfloor 3,14 \rfloor = 3 \text{ en } \lfloor -3,14 \rfloor = -4.)$$

OPLOSSING

154

Bepaal alle positieve gehele getallen x , y en z die voldoen aan

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{z+2}.$$

Oplossing. Omdat de opgave symmetrisch is in x en y , kunnen we beginnen met aannemen dat $x \leq y$. Dit geeft $\frac{2}{x+2} \geq \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{z+2} > \frac{1}{3}$, zodat $\frac{x+2}{2} < 3$. Dit betekent $x+2 < 6$, dus $x < 4$. Nu kunnen we drie gevallen onderscheiden:

- $x = 1$. Er moet gelden $\frac{1}{3} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{z+2}$. Hieraan voldoet $y = z$ voor elke positieve gehele waarde van z .
- $x = 2$. Er moet gelden dat $\frac{1}{4} + \frac{1}{y+2} > \frac{1}{3}$, en dus $\frac{1}{y+2} > \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ zodat $y+2 < 12$. Dit geeft $y < 10$, en we hadden aangenomen dat $2 = x \leq y$. Nu kunnen we testen voor $y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en vinden de oplossingen $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 10)$, $(2, 6, 22)$, $(2, 7, 34)$, $(2, 8, 58)$, $(2, 9, 130)$.
- $x = 3$. Er moet gelden dat $\frac{1}{5} + \frac{1}{y+2} > \frac{1}{3}$, en dus $\frac{1}{y+2} > \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, zodat $y+2 < \frac{15}{2}$. Dit geeft $y \leq 5$, en we hadden aangenomen dat $3 = x \leq y$. Nu kunnen we testen voor $y \in \{3, 4, 5\}$ en vinden de oplossingen $(3, 3, 13)$, $(3, 4, 28)$, $(3, 5, 103)$.

Nu mogen we wegens de symmetrie nog x en y verwisselen, dus we vinden als oplossingen: $(1, y, y)$, $(y, 1, y)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 10)$, $(2, 6, 22)$, $(2, 7, 34)$, $(2, 8, 58)$, $(2, 9, 130)$, $(4, 2, 10)$, $(6, 2, 22)$, $(7, 2, 34)$, $(8, 2, 58)$, $(9, 2, 130)$, $(3, 3, 13)$, $(3, 4, 28)$, $(3, 5, 103)$, $(4, 3, 28)$, $(5, 3, 103)$, met y een positief geheel getal.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Frederic Fasseur** van Edugo Campus de Toren te Oostakker, **Alexander van Hoorn** uit Abcoude, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Laziz el Mallouki** uit Amersfoort, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Celina Szanto** van Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel, **Jan Verbakel** uit Eindhoven en **Bart Wiersma** van het Dalton Voorburg te Voorburg.
De boekenbon gaat naar Celina Szanto.

OPLOSSING

155

De functie f heeft domein $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (alle reële getallen behalve 0). Deze functie heeft verder de volgende eigenschappen:

- voor alle x en y in het domein geldt:
 $f(x) - f(y) = f(x)f(\frac{1}{y}) - f(y)f(\frac{1}{x})$;
- er is een x in het domein met $f(x) = \frac{1}{2}$.

Bepaal $f(-1)$.

Oplossing. Laat a het getal zijn met $f(a) = \frac{1}{2}$. Vul nu in de eerste eigenschap in dat $x = a$ en $y = \frac{1}{a}$. Dit geeft $f(a) - f(\frac{1}{a}) = f(a)^2 - f(\frac{1}{a})^2 = (f(a) - f(\frac{1}{a}))(f(a) + f(\frac{1}{a}))$. Dit levert op dat $f(a) - f(\frac{1}{a}) = 0$ of $f(a) + f(\frac{1}{a}) = 1$. Omdat $f(a) = \frac{1}{2}$, geeft dit $\frac{1}{2} - f(\frac{1}{a}) = 0$ of $\frac{1}{2} + f(\frac{1}{a}) = 1$. Dit komt echter allebei neer op $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{2}$. Vul nu in de eerste eigenschap in $x = -1$ en $y = a$. Dit geeft $f(-1) - \frac{1}{2} = f(-1)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(-1) = 0$, zodat $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **Henrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Alexander van Hoorn** uit Abcoude, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Tiara Kobald** van het KSG te Apeldoorn, **Laziz el Mallouki** uit Amersfoort, **Celina Szanto** van Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel, **Jan Verbakel** uit Eindhoven en **Bart Wiersma** van het Dalton Voorburg te Voorburg.
De boekenbon gaat naar Tiara Kobald.

De Internationale Wiskunde Olympiade vond deze zomer plaats in Spanje. Het Nederlandse team wist in Madrid maar liefst vier medailles in de wacht te slepen: twee zilveren en twee bronzen, het beste resultaat sinds 1983. In het officiële landenklassement eindigde Nederland op de gedeelde 33ste plaats, van de in totaal 97 landen.
■ door Birgit van Dalen

TOPPRESTATIE

OP INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE



Het Nederlandse team, van links naar rechts: Maarten, Raymond (brons), Alexander, Floris (zilver), Remy (brons) en Milan (zilver)

De zes leerlingen die dit jaar Nederland mochten vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO), waren Raymond van Bommel, Remy van Dobben de Bruyn, Floris van Doorn, Alexander van Hoorn, Milan Lopuhaä en Maarten Roelofsma. Het team werd in Madrid begeleid door Quintijn Puite en Birgit van Dalen.

Op maandagochtend 7 juli vertrok de Nederlandse delegatie van Schiphol. Niet omdat de IMO op het punt stond te beginnen; dat zou pas een week later gebeuren. Eerst stond nog een trainingskamp in Madrid op de planning. Je zou misschien denken dat de leerlingen dat niet meer nodig hadden, aangezien ze al vanaf november aan het trainen waren en vier van de zes zelfs al twee of drie jaar training achter de rug hadden. Maar niets is minder waar. Zelfs na een paar jaar trainen zijn de IMO-breinbrekers te moeilijk om alle zes te kunnen

oplossen. Enkele deelnemers uit China, Rusland of de Verenigde Staten lukt dat wel, maar het doel van de meeste Nederlandse leerlingen is om één of twee opgaven op te lossen; dat is al een hele prestatie.



Een deel van de wedstrijdzaal



Op het vliegveld in Madrid ontmoetten de Nederlanders het team uit Nieuw-Zeeland, met wie ze het trainingskamp zouden houden. In een moderne accommodatie in een rustige buitenwijk werd elke dag getraind. 's Ochtends werd er regelmatig een wedstrijddag gesimuleerd: vier en een half uur werken aan drie zeer pittige opgaven. Op het programma stonden verder 'problemen oplossen in paren' en enkele sessies die geheel besteed werden aan één onderwerp, zoals 'samengestelde getallen'. Omdat de voertaal Engels was, was er ook elke dag een uurtje of twee 'werken in eigen taal' ingeroosterd. Dan zaten de teams even apart en kon er eindelijk weer Nederlands gesproken worden.

KLEINE ONGEMAKKEN Het Spaanse eten was wel even wennen. Bij elke lunch en elk diner kreeg je twee volle borden met lauw eten dat onze verwachtingen van de mediterrane keuken niet waarmaakte. Gelukkig waren er altijd voldoende droge, keiharde broodjes beschikbaar, die behalve als maaltijd ook als voetbal konden dienen. Een week later verhuisden we naar een nieuwe locatie voor het begin van de IMO en troffen daar dezelfde broodjes aan.

Uiteenlopende andere dingen veranderden eveneens niet door de overgang naar de andere kant van de stad. Zat Alexander op een ochtend tijdens de eerste week nog opgesloten in de douche wegens een klemmende deur, in de tweede week was het Milan die het slot uit een wc-deur liet vallen zodat ook hij niet meer naar buiten kon. De regelmatige bezoeken aan de supermarkt om grote hoeveelheden mineraalwater in te slaan, bleven ook: in totaal heeft het Nederlandse team zo'n 225 liter weggevoerd. De faciliteiten veranderden wel: de pingpongtafel van de eerste week werd ingeruild voor een zwembad om de hoek in de tweede week; de computerkamer twee deuren verderop werd vervangen door een overvolle computerzaal op vijftien minuten lopen; en in plaats van airconditioning hadden de nieuwe slaapkamers verwarming. De temperatuur van 35 graden en de houten panelen bij het raam maakten dat de slaapkamers al gauw omgedoopt werden tot sauna's.

DE WEDSTRIJD De IMO werd officieel geopend met de openingsceremonie in een circustheater.

IMO 2008 OPGAVE 1

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H . De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde BC snijdt de lijn BC in A_1 en A_2 . De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde CA snijdt de lijn CA in B_1 en B_2 en de cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde AB snijdt de lijn AB in C_1 en C_2 .

Bewijs dat A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 op één cirkel liggen.

Op de website van IMO2008 kun je alle opgaven vinden. Verder vind je er zaken als het overzicht van de scores per land, veel foto's, enzovoort. Zie www.imo-2008.es.

Van hoog bovenin de tribune was het genieten van de circusacts en (in mindere mate) de Spaanse toespraken. De volgende ochtend begon het eerste deel van de wedstrijd. De omstandigheden waren bepaald niet ideaal: op de gladde, schuine tafels bleven papieren en pennen niet goed liggen en vier en een half uur op een kruk zitten is ook niet erg aangenaam. De teamleden hadden bovendien slecht geslapen door de warmte en hadden moeite om zich te concentreren op de opgaven. Na afloop was de stemming in het team gemengd. Remy had een elegante oplossing voor opgave 1 bedacht en ook Floris en Milan dachten 7 punten (de maximale score voor een opgave) binnen te hebben, maar Maarten was bang dat hij als eerste Nederlander in meer dan dertig jaar 0 punten zou gaan halen. Onze nieuwe vrienden uit Nieuw-Zeeland meldden dat vijf van hen opgave 1 opgelost hadden, wat ons aan het twijfelen bracht over onze eigen capaciteiten. Was het dan toch niet zo moeilijk geweest? Hadden we nu onze kansen op medailles vergooid?

Na een middagje ontspannen in het park was iedereen helemaal klaar voor de tweede wedstrijddag. Floris en Raymond besloten dat in de ideale situatie het tweede deel van de wedstrijd zou bestaan uit een functievergelijking, een combinatoriekopgave en een meetkundeopgave, in die volgorde. Na een diner wat er wel mee door kon en een goede nacht slaap kwam er nog een positief voor-teken: de deelnemers van Nieuw-Zeeland hadden zichzelf toch wat overschat en bij nader inzien hadden slechts twee van hen opgave 1 opgelost. Goedgehumeurd hierdoor sloegen de Nederlanders om negen uur de map met de opgaven open.

Tot hun vreugde en verbazing bleek de wens van Floris en Raymond precies uitgekomen te zijn! Het lukte alle leerlingen om opgave 4 (grotendeels) op te lossen en drie van de zes hadden ook nummer 5 gekraakt. De uitslag zou nog even op zich laten wachten, maar het team was tevreden en kon stiekem al gaan dromen van medailles.

Het was tijd voor excursies. Tijdens het trainingskamp hadden de teams het centrum van Madrid al bezocht en nu werden daar nog eens uitstapjes naar Segovia, El Escorial en Toledo aan toegevoegd. Met ruim vijfhonderd jonge wiskundigen uit honderd verschillende landen werd gegeven in een stadion dat normaal gesproken gebruikt wordt voor stierenvechten, een aparte ervaring.

DE UITSLAG De vreugde werd alleen maar groter toen de uitslag arriveerde en Nederland het buitengewoon goed gedaan bleek te hebben: onze zes leerlingen hadden tweederde van de andere

teams achter zich gelaten. Floris en Milan wisten op het nippertje met 22 punten een zilveren medaille binnen te slepen en Raymond en Remy hadden voldoende punten (beiden 16) voor brons. Ook Alexander (10 punten) en Maarten (8 punten) konden zeer tevreden zijn over hun prestatie. De medailisten werden gehuldigd tijdens de sluitingsceremonie, waarbij behalve de ongeveer duizend deelnemers, begeleiders en gidsen ook de Spaanse kroonprins en prinses aanwezig waren.

Na de officiële sluiting van de IMO door de Spaanse kroonprins volgde nog het afscheidsbanket, wat de teamleden deed verzuchten dat ze eindelijk eens goed eten kregen. Beter laat dan nooit. Na nog wat muziek, gezelligheid, het uitwisselen van souvenirs en een mislukte poging tot het stelen van de Duitse mascotte inclusief twee medailles, was het dan echt afgelopen. Het trotse Nederlandse team keerde, mét vier medailles, terug naar huis. ■

TAARTVERDEELSLEUTEL

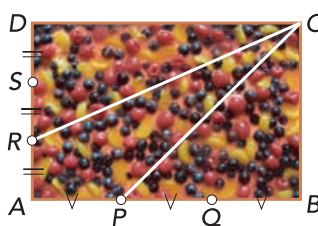
In het artikel 'Gesneden koek' uit de vorige *Pythagoras* vroegen we om een rechthoekige taart met zes keer snijden door eenzelfde hoekpunt te verdelen in zeven gelijke stukken. De snijlijnen moeten worden *geconstrueerd*: je mag alleen gebruikmaken van een passer en een latje zonder maatverdeling.

32

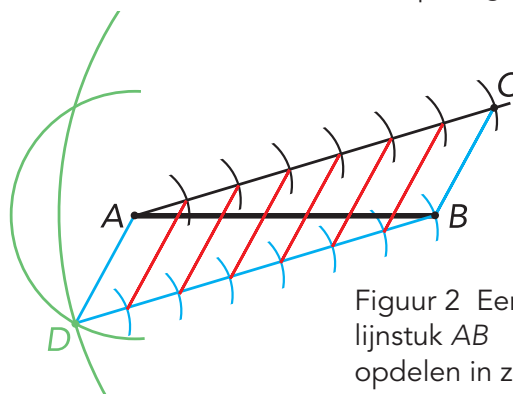
DRIE GELIJKE STUKKEN Als voorbeeld van een constructie gaven we het verdelen van een lijnstuk in drie even lange segmenten. Hier ligt de sleutel van de oplossing om de taart in drie gelijke stukken te verdelen, met twee keer snijden vanuit één hoekpunt. Verdeel de zijden AB en AD van de rechthoek in figuur 1 elk in drie even lange segmenten; zo vind je de punten P , Q , R en S . De lijnen PC en RC zijn nu de snijlijnen van de taart $ABCD$.

ZEVEN GELIJKE STUKKEN Dezelfde manier als bij het verdelen van een lijnstuk in drie even lange segmenten, werkt bij het verdelen van een lijn in n even lange segmenten, zie figuur 2 voor $n = 7$ (constructievolgorde: zwart-groen-blauw-rood). Verdeel de zijden AB en AD elk in zeven even lange segmenten, zodat je de punten O , P , Q , ..., Z vindt, zie figuur 3. De snijlijnen zijn nu OC , QC , ..., YC .

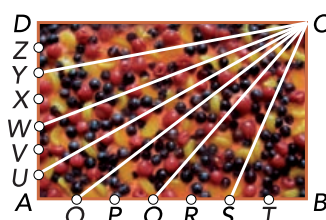
Er bestaan meerdere taartverdeelsleutels die, naast het te hanteren mes, enkel gebruik maken van een passer en een latje. ■



Figuur 1 De constructie om een rechthoekige taart in drie gelijke stukken te verdelen, waarbij de snijlijnen door eenzelfde hoekpunt gaan



Figuur 2 Een lijnstuk AB opdelen in zeven even lange segmenten



Figuur 3 De manier om de taart in zeven gelijke stukken te verdelen

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 6

VERMENIGVULDIGEN

$$402 \times 39 = 15678$$

BOEKENBON

De boeken kosten 17, 19 en 21 euro.

EEN TIEN VOOR DE 10

In de tweede eeuw en in de elfde eeuw (de jaren 1 . . en 10 . . komt het tien keer voor dat de som van de cijfers precies 10 is. De jaren in die eeuwen zijn dan: 09, 90, 18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54.

GATEN IN EEN KUBUS

De oppervlakte is $6 \times (3 \times 3) - 6 \times 1 + 6 \times 4 = 72$.
Als de gaten elkaar niet 'kruisen', is de oppervlakte
 $54 - 6 + 3 \times (4 \times 3) = 84$.

VREEMDE ZIN

Ik heb een grote afkeer van rijden op de verkeerde weghelft. Dan kan ik anderen benadelen.

**PYTHA
GORAS**

48ste jaargang nummer 1
september 2008
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. *Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünwald

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor

Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 14,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

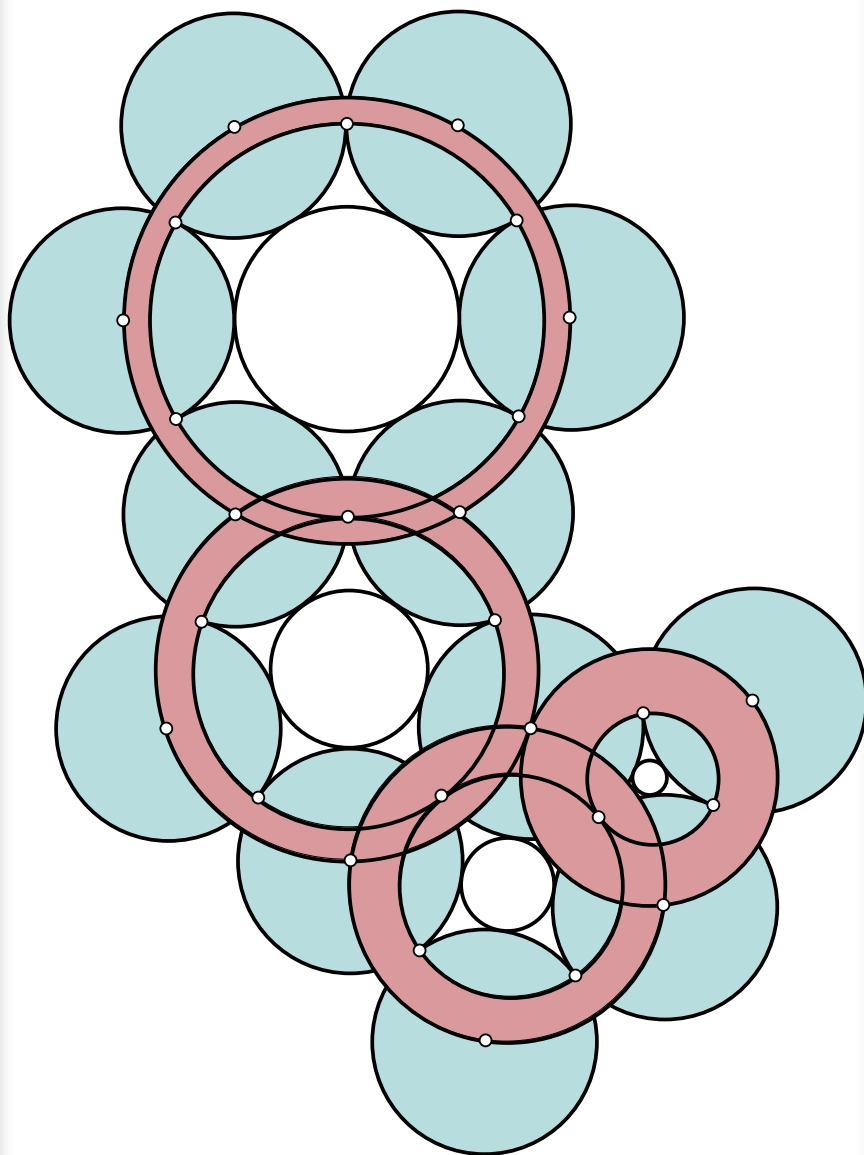
Aan dit nummer werkten mee

C.L. Alons, student bedrijfswiskunde en informatica aan de VU (clalons@few.vu.nl), ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl), dr. S. Bhulai, docent toegepaste kansrekening aan de VU (sbhulai@few.vu.nl), drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr. J. Brandts, docent wiskunde aan de UvA (brandts@science.uva.nl), dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu), drs. J. Daems, aio wiskunde aan de UL (jeanine@pythagoras.nu), drs. B.E. van Dalen, aio wiskunde aan de UL (dalen@math.leidenuniv.nl), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu), dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu), A. de Haan, student wiskunde aan de UvA (anne@pythagoras.nu), dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu), A. Kret, student wiskunde aan de UL (arno@pythagoras.nu), drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu), I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (iris@pythagoras.nu)

Sponsors *Pythagoras* wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.

