

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Spoorwegwiskunde

Prijsvraag: de Pyth-actie

Riemann: mensenschuw maar geniaal

48ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2008

ARABESK levert de trofeeën voor de *Pyth-actie*: lees alles over deze prijsvraag op pagina 4. De hoofdprijzen in maar liefst zes categorieën zijn unieke objecten van kunstenaar Koos Verhoeff.



ARABESK

de spannendste speelgoedwinkel van Nederland

Arabesk verkoopt artikelen waarbij kunstenaars en ontwerpers zich hebben laten inspireren door wetenschap, natuurkunde en logica. De resultaten zijn zeer verrassende puzzels, spellen en objecten, soms ingewikkeld, soms eenvoudig, maar altijd intrigerend en mooi.

Bij Arabesk kun je altijd terecht als je op zoek bent naar iets bijzonders. Zelfs als wij iets niet in voorraad hebben, weten we vaak wel de weg er naar toe. In onze winkel met 130 m² verkoopruimte en acht etalages kan iedereen naar hartelust ronddwalen en zich (laten) verbazen. Je mag overal aankomen. En alles kan uitgelegd worden.

Kom eens langs in de leukste en vreemdste winkel van Rotterdam en verre omstreken! Of bezoek onze uitgebreide website met de catalogus.



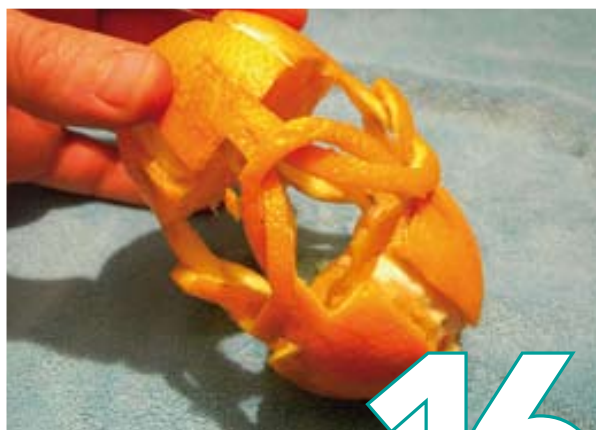
Arabesk
Oostzeedijk Beneden 113
3061 VP Rotterdam
010-2140361
Webwinkel: www.arabesk.nl

INHOUD



PYTH-ACTIE: DE PRIJSVRAAG 2008-2009

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras* en win een *fractale boom* van wiskunstenaar Koos Verhoeff.

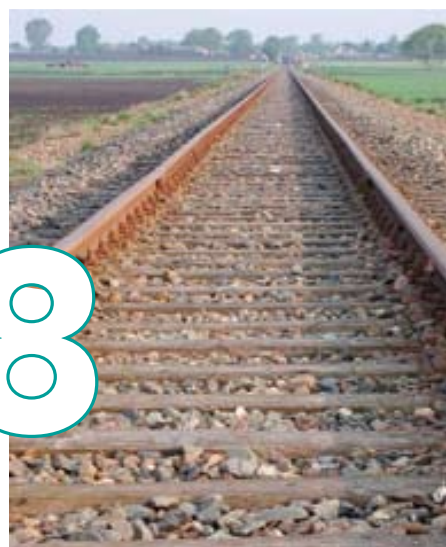


TOPOLOGISCH SCHILLEN

Pak een sinaasappel en een mes en maak een bizar object!

WISKUNDE ACHTER HET SPOORBOEKJE

De NS-dienstregeling is 'de enige vorm van hogere wiskunde die heftige emoties oproept in het land'. Lees alles over die hogere wiskunde achter het Spoorboekje in de tweede aflevering van het thema 'discrete wiskunde'.



EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 7 Journaal
- 13 Prijsreis naar New York
- 14 Problemen - Oplossingen
- 18 Priemgetallen en Fibonacci, deel 1
- 22 Pythagoras Olympiade
- 24 Eén probleem, drie oplossingen
- 27 Sangaku: de oplossing van april 2008
- 28 Bernhard Riemann (1826-1866): het mysterieuze mensenschuwe meesterbrein
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 1

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

BROOD VERGETEN

Appie vertrekt om acht uur op de fiets naar school en rijdt gemiddeld 12 kilometer per uur. Zijn moeder brengt hem met de auto zijn vergeten broodtrommel na. Zodra ze Appie ontmoet, geeft ze hem de broodtrommel en keert onmiddellijk om. Ze vertrekt om kwart over acht en is na tien minuten weer thuis. Hoe hard reed ze?

PAARDEN

Neem een 'schaakbord' van 4×4 velden. Hoeveel paarden moet je minimaal op het bord zetten om elk veld te 'bedreigen'? Een paard mag in één sprong twee velden recht en één dwars. Ook een veld waarop een paard staat, moet bedreigd worden (door een ander paard).

KREEFTGETAL

Een palindroom schrijf je van achter naar voren hetzelfde, bijvoorbeeld 'LEPEL'. Elk woord is gedeeltelijk palindroom, bijvoorbeeld 'fruiTschAALTje'. Ik noem het kreeftgetal K van dit woord $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ (4-letterpalindroom uit een 14-letterwoord). Een kreeft loopt naar achteren, vandaar. Zo is $K(\text{Bob}) = 1$, $K(\text{erwt}) = \frac{1}{4}$ en $K(\text{Bram leest Pythagoras al jaren}) = \frac{9}{26}$. Een zin mag dus ook.

Maak eens een zin met 'Pythagoras' erin en K groter dan $\frac{1}{2}$. De P moet in het palindroomstuk zitten.

LOPEN OP EEN KUBUS

Een mier staat op een van de zes middens van een kubus met ribben van 2 centimeter. Hoeveel moet de mier minstens lopen om ook de andere vijf middens aan te doen?

HOEVEEL BREUKEN?

Vic neemt een positief geheel getal en schrijft dat op alle mogelijke manieren als som van drie positieve gehele getallen a , b en c , maar alleen zó, dat van a , b en c een gebroken getal $a\frac{b}{c}$ te maken is, waarbij $\frac{b}{c}$ een vereenvoudigde breuk is waar de helen zijn uitgehaald.

Dus bij het getal 11 noteert Vic wel de breuk $4\frac{2}{5}$, maar niet $5\frac{2}{4} (= 5\frac{1}{2})$ en $6\frac{3}{2} (= 7\frac{1}{2})$.

Er is een getal G dat met deze spelregels op G manieren te breken is. Welk getal is G ?

Doe mee met de nieuwe prijsvraag van *Pythagoras*! De basis is dat je getallen uitschrijft in letters en deze telt. Je kunt meedoen in zes categorieën; in elke categorie kun je een object van 'wiskunstenaar' Koos Verhoeff winnen. Later deze jaargang publiceren we de uitslag.

■ door Matthijs Coster

PYTH-ACTIE

DE PRIJSVRAAG 2008-2009

- 4 Neem een getal, bijvoorbeeld 13, en schrijf dit uit in letters: 'dertien'. Dit woord heeft 7 letters. We noteren dit zo: $\mathcal{P}(13) = 7$. Het vervangen van een getal door zijn aantal letters noemen we de *Pyth-actie*. Nog twee voorbeelden: $\mathcal{P}(23) = 13$ (want het woord 'drieëntwintig' heeft dertien letters) en $\mathcal{P}(5) = 3$.

De opdracht van de prijsvraag van dit jaar is om correcte wiskundige vergelijkingen te zoeken waarin maximaal zes verschillende getallen worden gebruikt, die ook correct blijven als je op alle getallen de Pyth-actie toepast. Zo'n vergelijking noemen we een *Pythagorasvergelijking*. Een simpel voorbeeld is $13 + 16 = 29$, want er geldt ook: $\mathcal{P}(13) + \mathcal{P}(16) = \mathcal{P}(29)$: $7 + 7 = 14$.

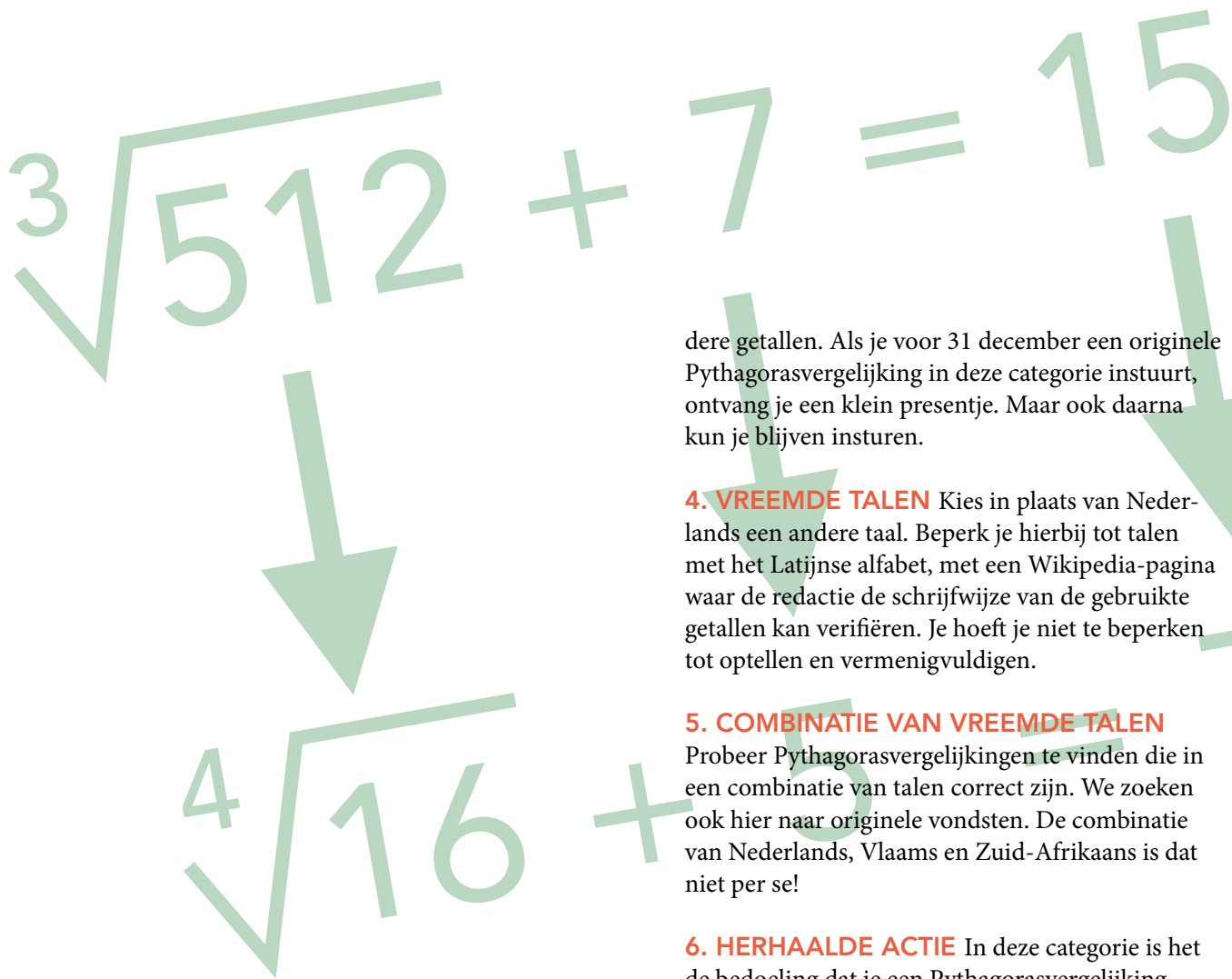
Er zijn zes categorieën. De categorie 'onderbouw' is, zoals de naam zegt, voorbehouden aan leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3. Ook als klas kun je inzenden. De overige categorieën staan open voor iedereen.

1. ONDERBOUW Gebruik alleen optelling en vermenigvuldiging. Als je eenmaal één Pythagorasvergelijking hebt gevonden, krijg je er vaak nog een heleboel gratis bij. We gaven al als voorbeeld

van een Pythagorasvergelijking $13 + 16 = 29$. De Pyth-actie werkt dan ook op $13 + 123.000.016 = 123.000.029$, waarbij je in plaats van 123 elk ander getal onder de duizend kunt invullen. Dat is natuurlijk erg flauw. Het aantal écht verschillende vergelijkingen met drie getallen is heel beperkt. Als je het met meer dan drie getallen probeert, zal het aantal mogelijke Pythagorasvergelijkingen toenemen. Met zes getallen zijn het er al heel veel. Kun je aangeven waarom het er juist met zes getallen zo veel zijn? De redactie weet niet hoe het zit met Pythagorasvergelijkingen met vier of vijf getallen. Ga gerust zelf op onderzoek uit!

Stuur geen ellenlange opsommingen van flauwe Pythagorasvergelijkingen in. We zijn geïnteresseerd in je origineelste vondsten. Het gaat om kwaliteit, niet om kwantiteit!

2. MEERDERE OPERATIES Behalve optellen en vermenigvuldigen, mag je ook aftrekken, delen en machtsverheffen. Ook mag je wortels, binomiaalcoëfficiënten, faculteit (!) en logaritmen gebruiken. We geven een paar voorbeelden. $\log 1000 - \log 100 = 4 - 3$ is een Pythagorasvergelij-



king, want $\log \mathcal{P}(1000) - \log \mathcal{P}(100) = \mathcal{P}(4) - \mathcal{P}(3)$:
 $\log 7 - \log 7 = 4 - 4$.

Ook ${}^8\log 512 + 6 = 9$ is een Pythagorasvergelijking, want ${}^{\mathcal{P}(8)}\log \mathcal{P}(512) + \mathcal{P}(6) = \mathcal{P}(9)$:
 ${}^4\log 16 + 3 = 5$.

Je ziet aan dit laatste voorbeeld dat op elk getal in de vergelijking, dus ook het grondtal van de logaritme, de Pyth-actie moet worden toegepast. Maar bij de logaritme met grondtal 10 ben je gewend om het grondtal niet te noteren. Dan hoeft je er natuurlijk ook niet de Pyth-actie op toe te passen, zoals uit het eerste voorbeeld blijkt. Maar als het voor jouw vergelijking goed uitkomt om de 10 wel te noteren, doe je dat gewoon!

We geven nog een paar voorbeelden:

$$\sqrt{289} + \sqrt{4} + 7 = 26$$

$$\sqrt[3]{512} + 7 = 15$$

$$\binom{6}{5} = (4 - 1)!$$

Controleer zelf dat dit goede Pythagorasvergelijkingen zijn!

3. NIEUWJAAR Hier gelden dezelfde spelregels als bij 'Onderbouw', maar het jaartal 2009 moet in de vergelijking voorkomen, met maximaal vier an-

dere getallen. Als je voor 31 december een originele Pythagorasvergelijking in deze categorie instuurt, ontvang je een klein presentje. Maar ook daarna kun je blijven insturen.

4. VREEMDE TALEN Kies in plaats van Nederlands een andere taal. Beperk je hierbij tot talen met het Latijnse alfabet, met een Wikipedia-pagina waar de redactie de schrijfwijze van de gebruikte getallen kan verifiëren. Je hoeft je niet te beperken tot optellen en vermenigvuldigen.

5. COMBINATIE VAN VREEMDE TALEN Probeer Pythagorasvergelijkingen te vinden die in een combinatie van talen correct zijn. We zoeken ook hier naar originele vondsten. De combinatie van Nederlands, Vlaams en Zuid-Afrikaans is dat niet per se!

6. HERHAALDE ACTIE In deze categorie is het de bedoeling dat je een Pythagorasvergelijking maakt die na herhaaldelijk toepassen van de Pyth-actie geldig blijft.

Een voorbeeld: $4 + 7 = 2 + 9$,

$$\mathcal{P}(4) + \mathcal{P}(7) = \mathcal{P}(2) + \mathcal{P}(9): 4 + 5 = 4 + 5,$$

$$\mathcal{P}(4) + \mathcal{P}(5) = \mathcal{P}(4) + \mathcal{P}(5): 4 + 3 = 4 + 3.$$

Je kunt nu natuurlijk oneindig vaak de Pyth-actie toepassen.

Nog een voorbeeld:

$$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = 1,$$

$$\sqrt{\mathcal{P}(1)} \times \sqrt{\mathcal{P}(1)} = \mathcal{P}(1): \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3,$$

$$\sqrt{\mathcal{P}(3)} \times \sqrt{\mathcal{P}(3)} = \mathcal{P}(3): \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4,$$

$$\sqrt{\mathcal{P}(4)} \times \sqrt{\mathcal{P}(4)} = \mathcal{P}(4): \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4,$$

enzovoorts.

Het is niet noodzakelijk dat de Pyth-actie oneindig vaak toegepast moet kunnen worden. Wel is het noodzakelijk dat tussenliggende vergelijkingen ook juist moeten zijn. Dus als $a + b = c$ en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a)) + \mathcal{P}(\mathcal{P}(b)) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(c))$, maar $\mathcal{P}(a) + \mathcal{P}(b) \neq \mathcal{P}(c)$, dan heb je geen goede vergelijking voor deze categorie!

PRIJZEN EN SPELREGELS In één van de categorieën kent de jury de hoofdprijs toe: een *fractale boom* van kunstenaar Koos Verhoeff. In elk van de overige categorieën is er een prijs uit de serie *Loop-12*, houten objecten van Koos Verhoeff. Daarnaast worden twaalf exemplaren van de vouwpuzzel *De-*

cathlon vergeven. Tot slot zijn er nog kleinere prijzen, zoals de bouwplatenboekjes van *Pythagoras*. De kunstwerken van Koos Verhoeff worden beschikbaar gesteld door *Arabesk*, zie de binnenkant van het omslag van dit nummer.

Je mag in meerdere categorieën inzenden, maar je kunt in maximaal één categorie een kunstwerk van Koos Verhoeff winnen. De jury behoudt zich het recht voor om niet alle vijf objecten uit de serie *Loop-12* als prijs toe te kennen.

Vermeld duidelijk de categorie(ën) (Onderbouw, Meerdere operaties, Nieuwjaar, Vreemde talen, Combinatie van vreemde talen, Herhaalde actie). Vermeld verder je naam, adres, telefoonnummer en e-mailadres. Als je scholier bent, vermeld dan tevens de naam en het adres van de school, je leeftijd

en je klas. Bij een klasseninzing moet bovendien de naam van de wiskundedocent worden opgegeven.

Je inzending kun je opsturen naar:

Pythagoras – Pyth-actie
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden

e-mail: prijsvraag@pythagoras.nu

Inzendingen moeten bij ons binnen zijn
vóór 1 april 2009.

Veel succes! ■

SCHRIJFWIJZER

Er zijn enkele afspraken nodig over hoe we getallen gaan opschrijven. Het getal 3 levert geen problemen op: 'drie'. Maar hoe zit het met 2395: 'tweeduizend driehonderd vijfennegentig' of 'drieëntwintighonderd vijfennegentig'? En telt daarbij de ij als één letter of als twee letters?

Voor het uitschrijven van getallen kun je terecht op www.pythagoras.nu. Klik in het linker menu op 'Prijsvraag'. Klik je vervolgens op 'schrijfwijzer', dan kun je een getal in cijfers invoeren en krijgt dan het getal uitgeschreven in letters, met tussen haakjes ook het aantal letters, wat veel telfouten kan schelen.

Veel getallen kun je op meer dan één manier schrijven. Voer je 2395 in, dan krijg je als output 'tweeduizend driehonderd vijfennegentig (35)' en niet 'drieëntwintighonderd vijfennegentig (33)'. De schrijfwijzer houdt zich aan de volgende regels:

- Spaties tellen niet mee als letter; het maakt dus niet uit of je 'vierentwintig' of 'vier en twintig' schrijft.
- De ij telt als één letter. Dus 'vijf' heeft 3 letters: $\mathcal{P}(5) = 3$.
- De getallen tussen 1.100 en 1.999, 2.100 en

2.999, enzovoorts, schrijf je niet met 'honderd', maar met 'duizend'. Bijvoorbeeld 8.765 wordt geschreven als 'achtduizend zeventienhonderd vijfenzestig' en niet als 'zevenentachtighonderd vijfenzestig'. Dus $\mathcal{P}(8765) = 34$.

- De getallen tussen 1.100.000 en 1.999.999, 2.100.000 en 2.999.999, enzovoorts, schrijf je met 'miljoen', dus 2.500.000 schrijf je als 'tweemiljoen vijfhonderdduizend' en niet als 'vijfentwintighonderdduizend'.
- De getallen tussen 1.100.000.000 en 1.999.999.999 schrijf je als 'miljard', dus 2.500.000.000 schrijf je als 'tweemiljard vijfhonderdmiljoen'.

Je mag afwijken van de schrijfwijze die de schrijfwijzer op onze website geeft (voor sommige getallen is dat logischer: 1100 spreken de meeste mensen uit als 'elfhonderd'), als je dat voor elke vergelijking dan maar consequent doet en zonodig duidelijk maakt welke regel je hanteert. Je mag dus niet links van het =-teken een andere schrijfwijze hanteren dan rechts, of on-even getallen anders uitschrijven dan even getallen.

Het grootste getal dat je mag gebruiken om op te schrijven, is 10.000.000.000.

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Nieuwe priemgiganten

Voor het eerst in de geschiedenis kennen we priemgetallen, getallen die slechts deelbaar zijn door 1 en door zichzelf, van meer dan tien miljoen cijfers.

Op 23 augustus werd een nieuw reuzenpriemgetal gevonden: $2^{43.112.609} - 1$, een getal van maar liefst 12.978.189 cijfers. Ter vergelijking: het totale aantal cijfers van alle telefoonnummers in De Telefoongids van Amsterdam is ongeveer twee miljoen. Nooit eerder werd een priemgetal van meer dan tien miljoen cijfers gevonden. Het werd gevonden door (de computer van) de Ame-

rikaan Edson Smith, in het kader van GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), een project waarbij duizenden vrijwilligers de ongebruikte reken capaciteit van hun computer beschikbaar stellen voor via internet gedistribueerde berekeningen.

Twee jaar lang was het stil aan het GIMPS-front. Maar zonder dat de priemspoorzoekers het zelf wisten, bleek er uiteindelijk sprake te zijn van een nek-aan-nek-race: twee weken nadat het oude priemrecord, daterend uit 2006, was gebroken, bleek dat de Duitse GIMPS-deelnemer Hans-Michael Elvenich eveneens een priemgetal had gevonden:

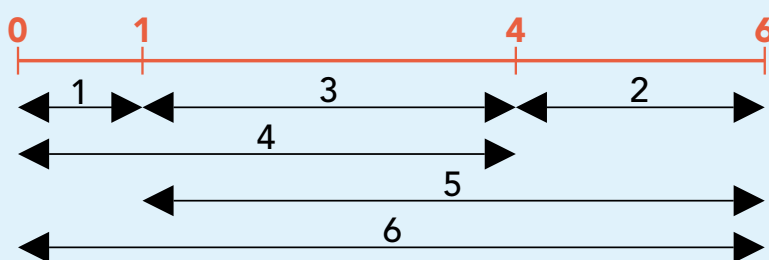
$2^{37.156.667} - 1$. Dit getal is met 11.185.272 cijfers iets kleiner dan dat van Edson Smith. Dat de twee nieuwe priemgetallen zo snel na elkaar zijn gevonden, is opmerkelijk. Want ondanks dat er oneindig veel priemgetallen bestaan, zijn ze steeds dunner gezaaid naarmate we hoger in de wereld van getallen komen.

GIMPS heeft honderdduizend dollar uitgelooft voor de eerste vinder van een priemgetal van meer dan tien miljoen cijfers. Dit bedrag gaat dus naar Smith. Het is zuur voor Elvenich: het prijzengeld gaat aan zijn neus voorbij. Bezoek de website van GIMPS: www.mersenne.org.

Optimale Golomb-liniaal gevonden

Een Golomb-liniaal is een reeks niet-negatieve gehele getallen waarbij geen twee getallen uit deze reeks hetzelfde verschil hebben. De reeks 0, 1, 4, 6 vormt een Golomb-liniaal: elke twee getallen uit de reeks hebben een ander verschil, zoals in het plaatje is te zien.

Golomb-linialen kunnen verschillende eigenschappen hebben. Een *perfecte* liniaal bevat alle verschillen tussen 1 en zijn eigen lengte. Een *optimale* liniaal is de kortste liniaal met n getallen (waarbij kortste betekent dat het laatste getal uit de reeks zo klein mogelijk is). De genoemde liniaal 0, 1, 4, 6 is zowel optimaal als perfect.



Het zoeken van optimale linialen is niet eenvoudig, sterker nog, er wordt vermoed dat dit een zogeheten *NP-volledig probleem* is. Onlangs is er een optimale Golomb-liniaal met 25 getallen gevonden: 0, 12, 29, 39, 72, 91, 146, 157, 160, 161, 166, 191, 207, 214, 258, 290, 316, 354, 372, 394, 396, 431, 459, 467, 480.

Het duurde jaren rekenen met duizenden computers om te be-

wijzen dat deze Golomb-liniaal inderdaad de kortste is voor 25 getallen. De reeks zelf was overigens al in 1984 gevonden. Op naar een liniaal met 26 getallen!

Heeft het zin om te zoeken naar grote *perfecte* Golomb-linialen? Nee: er is bewezen dat deze niet bestaan voor meer dan vijf getallen.

Bron: [wiskundemeisjes.nl / distributed.net](http://wiskundemeisjes.nl/distributed.net)

Bij de invoering van het *Spoorboekje 2007* in december 2006 omschreef *NRC Handelsblad* de NS-dienstregeling als 'de enige vorm van hogere wiskunde die heftige emoties oproept in het land'. Die 'hogere wiskunde' was van de hand van professor Alexander Schrijver, wiskundige aan het Centrum Wiskunde & Informatica en de Universiteit van Amsterdam. De 'heftige emoties' kwamen onder andere voort uit de claim van de president-directeur van de NS dat de *meerderheid* erop vooruitgaat.

Hoewel deze president-directeur het nieuwe spoorboekje 'het beste wat met deze infrastructuur mogelijk is' noemde, is optimaliteit een relatief begrip. Want wat bepaalt optimaliteit? Het reizigerscomfort, de bedrijfswinst, de personeelsroosters, de materieelomloop of de punctualiteit? Elk op zich is al lastig te kwantificeren, maar als dat al zou lukken, hoe zwaar moeten elk van deze aspecten onderling tegen elkaar worden afgewogen? In dit tweede thema-artikel vertelt Schrijver over het wiskundige model dat hij voor de NS maakte.

■ door Lex Schrijver

WISKUNDE ACHTER HET SPOORBOEKJE



8

In december 2006 werd bij de Nederlandse Spoorwegen het *Spoorboekje 2007* ingevoerd. Hiermee kreeg de dienstregeling van NS een geheel nieuwe structuur, met veel nieuwe verbindingen en overstapmogelijkheden, maar ook met wat ruimere rij- en stoptijden en enkele verbroken rechtstreekse verbindingen. Tot 2006 werden nieuwe dienstregelingen bij NS gemaakt door het 'met de hand' aanpassen van de dienstregeling die in 1970 was ingevoerd ('Spoorslag 70'). Nieuwe treinen werden tussengevoegd door de tijden van bestaande treinen wat op te schuiven. De dienstregelingplanners bij NS beseften echter dat zij computeralgoritmen nodig hadden om de capaciteit van het spoorwegnetwerk beter te benutten. Hiervoor riep NS de hulp in van het Centrum Wiskunde & Informatica in Amsterdam.

Hoewel Nederland geen groot land is, heeft het wel een aantal kenmerken die het uitzonderlijk maken voor spoorwegplanning. Nederland is heel dicht bevolkt en daardoor is ook het spoorwegnetwerk tamelijk dicht, met veel korte verbindingen, waarop veel treinen rijden die verschillende aansluitingen hebben, onderweg en aan de eindpunten.

Ook is er slechts zeer beperkte ruimte voor uitbreiding van de capaciteit van het spoorwegnetwerk, waardoor het nog veel knelpunten kent.

Door deze uitzonderlijke positie was er in andere landen geen algoritme beschikbaar die in Nederland gebruikt kon worden, en moesten nieuwe algoritmen worden ontwikkeld. Deze maken gebruik van methoden uit de *discrete wiskunde*.

HET BASIS UUR PATROON De basis van de Nederlandse spoorwegdienstregeling is het *Basis Uur Patroon* (BUP): de dienstregeling herhaalt zich elke 60 minuten. Aan deze basis worden extra spits-treinen toegevoegd, en in de avond, nacht en in het weekend zijn er andere afwijkingen, maar het Basis Uur Patroon is het onderliggende patroon. Het betekent bijvoorbeeld dat elk uur, om 26 minuten over het hele uur, een stoptrein van Zwolle naar Emmen vertrekt, van 's morgens vroeg tot 's avonds laat, zie figuur 1. Makkelijk te onthouden dus, deze 'kloktijden'.

Elke uurlijkse vertrek- en aankomsttijd wordt gegeven door een getal uit de verzameling $\{0, 1, 2, \dots, 59\}$. Het is handig om deze getallen te zien als

Zwolle	9:56	10:26	10:56	11:26	11:56	12:26	12:56	13:26	13:56	14:26
Dalton	10:05	10:34	11:05	11:34	12:05	12:34	13:05	13:34	14:05	14:34
Ommen	10:15	10:44	11:15	11:44	12:15	12:44	13:15	13:44	14:15	14:44
Marken		10:51		11:51		12:51		13:51		14:51
Harderwijk	10:26	10:57	11:26	11:57	12:26	12:57	13:26	13:57	14:26	14:57
Gramsbergen		11:01		12:01		13:01		14:01		15:01
Coevorden	10:36	11:07	11:36	12:07	12:36	13:07	13:36	14:07	14:36	15:07
Dalen		11:11		12:11		13:11		14:11		15:11
Nieuw-Amsterdam	10:44	11:18	11:44	12:18	12:44	13:18	13:44	14:18	14:44	15:18
Emmen		11:23		12:23		13:23		14:23		15:23
Emmen	A 10:51	11:26	11:51	12:26	12:51	13:26	13:51	14:26	14:51	15:26

Figuur 1 De dienstregeling op het traject Zwolle-Emmen

getallen modulo 60, waarmee je dan kunt optellen en aftrekken: als de uitkomst boven de 60 is trek je er 60 van af, en als de uitkomst negatief is tel je er 60 bij op. Dus $45 + 8 = 53$, $55 + 8 = 3$, $45 - 8 = 37$, $5 - 8 = 57$. Het vaststellen van de tijden in het BUP komt dan neer op het toekennen van getallen modulo 60 aan 'onbekenden'. Wat zijn dit en waaraan moeten ze voldoen?

DE UURLIJKE TREINEN Bekijk allereerst, als voorbeeld, een uurlijkse trein van Amsterdam naar Amersfoort, de 'treinserie' 15. Deze stopt onderweg in Hilversum, zie figuur 2.

Voor de vast te stellen vertrek- en aankomsttijden voeren we 'onbekenden' in:

$$x_{15,Asd,V}, x_{15,Hvs,A}, x_{15,Hvs,V}, x_{15,Amf,A}.$$

Hierin zijn Asd, Hvs en Amf de NS-afkortingen voor Amsterdam, Hilversum en Amersfoort, en V en A staan voor vertrek en aankomst.

Voor het maken van de dienstregeling moeten we tijden vaststellen voor deze onbekenden. Als eis wordt gesteld dat de rijtijd van Amsterdam naar Hilversum minimaal 20 en maximaal 22 minuten moet zijn. In Hilversum dient de trein minimaal 1 en maximaal 2 minuten te stoppen. Van Hilversum naar Amersfoort is de rijtijd minimaal 12 en maximaal 13 minuten. Deze eisen kunnen worden beschreven als:

$$x_{15,Hvs,A} - x_{15,Asd,V} \in [20, 22],$$

$$x_{15,Hvs,V} - x_{15,Hvs,A} \in [1, 2],$$

$$x_{15,Amf,A} - x_{15,Hvs,V} \in [12, 13].$$

treinnummer		4837	HC	1539
Amsterdam Centraal		11:20		11:27
Amsterdam Mulderpoort		11:25		
Diemen		11:30		
Hoofddorp				
Schiphol	A			
Schiphol				
Amsterdam Zuid	A			
Amsterdam RAI				
Duivendrecht	A			
Duivendrecht				
Diemen Zuid				
Weesp	A	11:36		
Weesp				
Naarden-Bussum				
Bussum Zuid				
Hilversum Noord				
Hilversum	A			11:48
Hilversum				
Baarn				
Amersfoort	A			12:02

Figuur 2 Een uurlijkse trein van Amsterdam Centraal naar Amersfoort

Getallen modulo 60 die voldoen aan deze eisen geven voor deze treinserie de uurlijkse vertrek- en aankomsttijden. Dus, zoals in de lopende dienstregeling, $x_{15,Asd,V} = 27$, $x_{15,Hvs,A} = 48$, $x_{15,Hvs,V} = 49$ en $x_{15,Amf,A} = 2$ is toegestaan als oplossing van deze eisen, want $2 - 49$ zit in $[12, 13]$ modulo 60.

We kunnen de eisen aan deze treintijden grafisch weergeven zoals in figuur 3. Elke vast te stellen vertrek- of aankomsttijd wordt voorgesteld door een punt en elk van de eisen wordt aangegeven met een pijl waarlangs het voorgeschreven interval staat.

Dit zijn de eisen voor één uurlijkse treinserie, en ook voor elke andere uurlijkse treinserie kunnen we de eisen aan de tijden als boven beschrijven. Zo is er ook een treinserie 15 terug van Amersfoort naar Amsterdam, waarbij we in de naamgeving van de variabelen even moeten uitkijken dat geen dubbele variabelen ontstaan, bijvoorbeeld voor de tijden in Hilversum. De teruggaande trein zouden we met 15t in plaats van 15 kunnen aangeven.

Alle treinseries tezamen geven dan een grote gerichte graaf, met zo'n 1800 punten en 1600 pijlen, bestaande uit ongeveer 200, los van elkaar liggende, gerichte paden, elk corresponderend met een treinserie heen of terug.

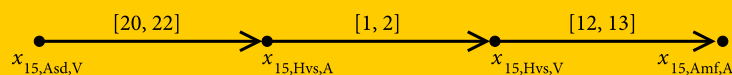
AANSLUITINGEN Als de bovenbeschreven voorwaarden alle eisen zouden zijn, zou het niet zo moeilijk zijn de tijden vast te stellen, maar er zijn meer condities. Ten eerste de condities die ontstaan doordat we overstapmogelijkheden tussen verschillende treinseries willen creëren. Zo is er een uurlijkse treinserie 5 van Rotterdam via Amersfoort naar Leeuwarden, waarop de treinserie 15 uit Amsterdam in Amersfoort dient aan te sluiten. Hierdoor ontstaat een eis voor twee verschillende treinseries:

$$x_{5,Amf,V} - x_{15,Amf,A} \in [5, 8].$$

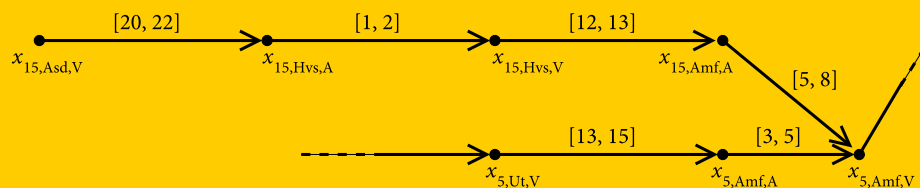
Dus de trein naar Leeuwarden moet minimaal 5 en maximaal 8 minuten na aankomst van de trein uit Amsterdam van Amersfoort vertrekken. (De overstaptijd houdt rekening met de perronsituatie in Amersfoort.)

Grafisch kan dit worden weergegeven als in figuur 4. Dit is een voorbeeld van één gewenste overstapmogelijkheid; over het hele land zijn er zo'n

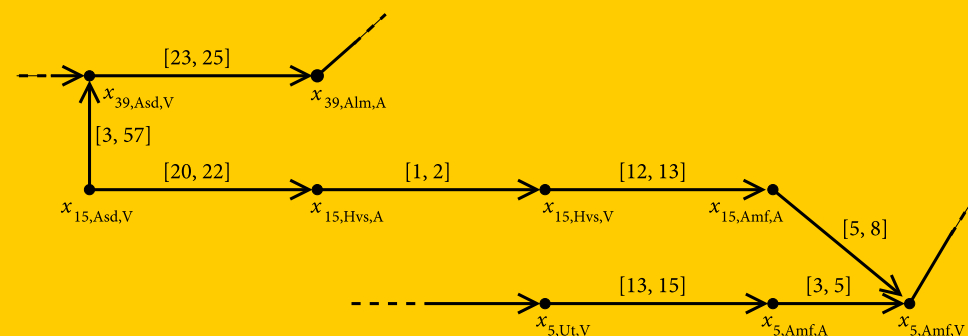
Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5



600. Alle aansluitingsvoorwaarden tezamen geven dus veel meer samenhang aan de graaf.

VOORKOMEN VAN CONFLICTEN Alle gewenste aansluitingen, over het hele land, geven al een wat ingewikkelder patroon van eisen aan de tijden, maar dat is nog niet alles. Ook moeten zogenaamde ‘conflicten’ worden voorkomen: twee verschillende treinen mogen niet gelijktijdig van hetzelfde spoor gebruik maken, bijvoorbeeld op een kruising of op enkelspoor, maar ook langs een traject: om te zorgen dat er voldoende ruimte tussen twee treinen wordt gepland, wordt een minimale ‘opvolgtijd’ van 3 minuten geëist, dit ook om kleine vertragingen op te kunnen vangen. (De seinen moeten zorgen voor de uiteindelijke veiligheid.)

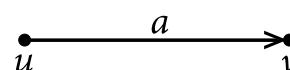
Als voorbeeld bekijken we de treinserie 39 van Hoofddorp via Amsterdam naar Lelystad, zie figuur 5. Deze heeft op het traject Amsterdam-Weesp een traject gemeenschappelijk met de bovengenoemde treinserie 15 van Amsterdam naar Amersfoort. Op dit traject moeten de treinen een minimale afstand van 3 minuten in tijd hebben. Dit kan als volgt worden aangegeven:

$$x_{39,Asd,V} - x_{15,Asd,V} \in [3, 57].$$

Door deze eis te stellen wordt dus voorkomen dat het verschil in de vertrektijden vanuit Amsterdam gelijk is aan 58, 59, 0, 1 of 2 (modulo 60) – dan zouden de treinen te dicht op elkaar zitten. Toevoeging van deze eisen (die alle op zich een vrij ruim interval hebben) zorgt voor de grootste toevoeging van pijlen aan de graaf, meer dan 8000.

GRAAFKLEURING Al deze eisen aan rij-, stop-, overstap- en opvolgtijden tezamen vormen alle voorwaarden waaraan de vast te stellen tijden moeten voldoen. Ze geven een heel verknoopt patroon, maar ze hebben wel een eenvoudige structuur. Ze zijn in feite wiskundig alle van hetzelfde type: elke voorwaarde schrijft voor dat het verschil van twee variabelen in een voorgeschreven interval zit (modulo 60). Ze passen alle in het model van de gerichtete graaf.

We geven de verzameling punten van de graaf aan met V (‘vertices’) en de verzameling pijlen met A (‘arrows’ of ‘arcs’). Een pijl a die van punt u naar punt v loopt wordt aangegeven met (u, v) :



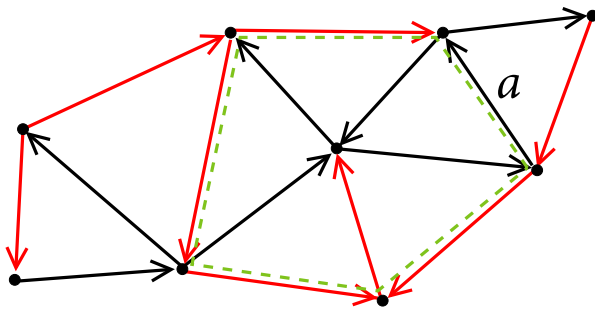
Met $[l_a, u_a]$ geven we het langs pijl a staande interval aan. (De letters l en u staan voor ‘lower bound’ en ‘upper bound’.)

De taak is nu om getallen modulo 60 bij de punten neer te zetten zo dat voor elke pijl a , het verschil van het getal bij de kop en het getal bij de staart in het interval $[l_a, u_a]$ zit. Dat wil zeggen, we moeten een functie $t : V \rightarrow \{0, \dots, 59\}$ vinden zó dat

$$t(v) - t(u) \in [l_a, u_a] \pmod{60} \quad (1)$$

voor elke pijl $a = (u, v)$.

Dit doet denken aan het aloude kaartkleuringsprobleem, waarbij landen worden voorgesteld door punten, en een lijn tussen twee punten aangeeft dat de twee corresponderende landen aan elkaar grenzen. Kaartkleuring met 4 kleuren komt dan neer op



Figuur 6 In rood een opspannende boom; de groene streepjeslijn geeft de met pijl a gevormde ‘fundamentele cykel’ aan.

het zodanig neerzetten van getallen modulo 4 bij de punten, dat voor elke lijn het verschil van de getallen bij de uiteinden in het interval $[1, 3]$ (modulo 4) zit.

REDUCTIE VAN DE ZOEKRUIJMT Naïef zou je nu natuurlijk kunnen denken: er zijn maar eindig veel mogelijkheden om getallen modulo 60 aan n punten toe te wijzen (namelijk 60^n), en dus zou de computer alle mogelijkheden kunnen afdraaien en kijken of daar een oplossing tussen zit die aan alle eisen voldoet.

Voor $n = 1800$ duurt dit natuurlijk veel en veel te lang, en je doet ook te veel: als je bij alle tijden van een oplossing 1 minuut optelt, krijg je weer een oplossing, want de verschillen veranderen daardoor niet. Dus je zou één vast te stellen tijd op 0 kunnen zetten. Hierdoor reduceert de ‘zoekruimte’ met een factor 60, maar dat is uiteraard niet voldoende.

Hoe kun je de zoekruimte flink reduceren? We verlaten het ‘modulo 60 model’ en zien de intervallen als intervallen van gehele getallen. We zetten dan bijvoorbeeld $[58, 3]$ om naar $[58, 63]$. Als $t : V \rightarrow \mathbb{Z}$ een oplossing is, dan bestaat er een functie $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$ zo, dat

$$t(v) - t(u) \in [l_a + 60k(a), u_a + 60k(a)] \quad (2)$$

voor elke pijl $a = (u, v)$.

De ‘modulo 60’ voorwaarde in (1) wordt hier dus omzeild door een geheel veelvoud van 60 toe te voegen.

We kunnen de zoekprocedure nu omdraaien: we zoeken naar een functie $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$ zodanig dat er een functie $t : V \rightarrow \mathbb{Z}$ bestaat die voldoet aan (2). Nu is het mogelijk om voor vaste $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$ snel te bepalen of een dergelijke functie $t : V \rightarrow \mathbb{Z}$ bestaat. Dit kan met behulp van een aanpassing van het zogeheten *Bellman-Ford kortste pad algoritme*: zet eerst $t(v) := 0$ voor elk punt v . Doe daarna het volgende:

voor elke pijl $a = (u, v)$ met $t(v) - t(u) \notin [l_a + 60k(a), u_a + 60k(a)]$:

- als $t(v) - t(u) < l_a + 60k(a)$, d.w.z.
 $t(v) < t(u) + l_a + 60k(a)$, verhoog $t(v)$ tot
 $t(v) := t(u) + l_a + 60k(a)$,
- als $t(v) - t(u) > u_a + 60k(a)$, d.w.z.
 $t(u) < t(v) - u_a - 60k(a)$, verhoog $t(u)$ tot
 $t(u) := t(v) - u_a - 60k(a)$.

Herhaal dit recept $|V|$ keer. Als t hierna aan alle eisen voldoet, heb je een oplossing voor (2). Als de uiteindelijke t niet aan alle eisen voldoet, dan kan bewezen worden dat (2) helemaal geen oplossing heeft (voor deze $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$), en dan moeten we k anders kiezen.

Voor vaste $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$ vergt dit $|V| \times |A|$ stappen, en je kunt het met wat eenvoudige ingrepen versnellen. Voor het NS-probleem kost het een fractie van een seconde – er is geen exponentieel snel groeiende zoekboom meer nodig.

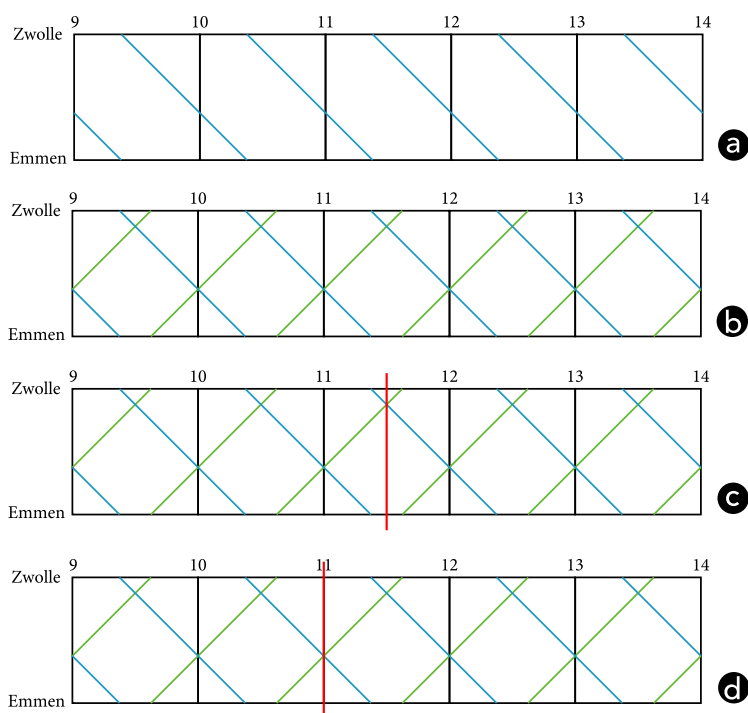
Het probleem is nu dus gereduceerd tot: hoe vinden we $k : A \rightarrow \mathbb{Z}$ waarvoor (2) een oplossing $t : V \rightarrow \mathbb{Z}$ heeft? In eerste instantie zijn er oneindig veel mogelijkheden om k te kiezen. We kunnen dit aantal echter eindig maken door een willekeurige opspannende boom B te kiezen, zie figuur 6. (We nemen aan dat de graaf samenhangend is – dat is bij de NS inderdaad het geval.) Dan kunnen we aannemen dat $k(a) = 0$ als a in B zit. Vervolgens blijven er nog maar eindig veel mogelijkheden over voor de waarden van $k(a)$ als a niet in B zit. Dit kunnen we zien door naar de cykel te kijken die a met B maakt (de ‘fundamentele cykel’), en te zien dat de intervallen langs de pijlen in dit circuit een onder- en een bovengrens voor $k(a)$ impliceren.

Het aantal mogelijkheden voor $k(a)$ is afhankelijk van de ‘ruimte’ die deze cykel toelaat. Soms is $k(a)$ hierdoor volledig vastgelegd, soms is er keus uit slechts twee mogelijkheden, soms ook is het aantal mogelijkheden iets groter. Hiermee wordt het zoekproces flink gereduceerd.

SYMMETRISCHE DIENSTREGELING Een uurlijks patroon van treinen geeft een interessante symmetrie, die handig is bij het onthouden van treintijden. Deze symmetrie kan worden uitgelegd met de *dienstregelinggrafiek*, waarmee dienstregelingen vaak worden weergegeven.

De uurlijkse stoptreinen Zwolle-Emmen, zie figuur 1, geven bijvoorbeeld de grafiek in figuur 7a (van 9.00 uur tot 14.00 uur). De horizontale as correspondeert met de tijd, de verticale as met het traject Zwolle-Emmen.

We kunnen ook de uurlijkse stoptreinen terug

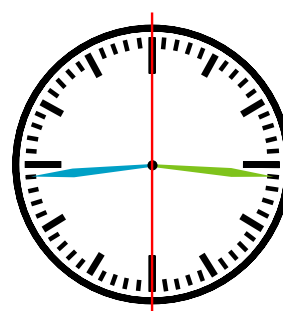


Figuur 7 De dienstregelinggrafiek (hier op het traject Zwolle-Emmen) vertoont een interessante symmetrie

in de grafiek aangeven, zie figuur 7b. Je ziet dan een interessante symmetrie in het plaatje: als je spiegelt om de rode as in figuur 7c, dan gaan de treinen heen en terug in elkaar over. In feite is er elk half uur een symmetrie-as, ook bijvoorbeeld de rode as in figuur 7d. Deze symmetrie-as ligt op .00 en .30.

Wanneer je nu deze symmetrie-as kent en je weet dat de stoptrein Zwolle-Emmen om .44 in Ommen aankomt, dan weet je ook dat de stoptrein Emmen-Zwolle om .16 uit Ommen vertrekt, zie figuur 8. Iedere treinserie heeft dus een symmetrie-as. Nu is het interessante dat deze as voor alle treinseries, over het hele land, dezelfde is! Dit komt doordat in de dienstregeling aansluitingen tussen treinseries in de ene richting ook in de andere richting bestaan, met (vrijwel) dezelfde overstaptijden. Dus als treinserie 15 heen in Amersfoort aansluit op treinserie 5 heen, dan sluit treinserie 5 terug in Amersfoort aan op treinserie 15 terug. Hierdoor moeten de treinseries 5 en 15 dezelfde symmetrie-as hebben. Door de verknoping van aansluitingen tussen verschillende treinseries door het hele land, impliceert dit dat er één symmetrie-as is die geldt voor alle treinseries. Een symmetrie-as plant zich als het ware voort over het hele net.

Overigens is de landelijke symmetrie-as niet .00/.30, maar .59/.29, en daarop zijn weer flink wat uitzonderingen, onder andere doordat sommige trajecten of bruggen enkelsporig zijn, en gelijkvloerse splitsingen vaak ook asymmetrische verschuivingen in de treintijden nodig maken.



Figuur 8 Als de stoptrein Zwolle-Emmen om .44 in Ommen aankomt, dan weet je vanwege de symmetrie dat de stoptrein Emmen-Zwolle om .16 uit Ommen vertrekt.

OPTIMAAL? De meeste treinseries in Nederland hebben een frequentie van 30 minuten in plaats van 60. Door overal 60 te vervangen door 30 is het model natuurlijk eenvoudig om te zetten. Toch hebben nog steeds enkele series een uurlijkse frequentie, en ook goederentreinen hebben vaak een uurlijkse dienstregeling (althans: ruimte in de dienstregeling). Om de capaciteit van het spoorwegnetwerk goed te benutten wordt bij NS nog steeds van een uurlijks patroon uitgegaan. Frequenties van 30 minuten kunnen ook in het model als eis worden opgenomen, bijvoorbeeld door te eisen

$$x_{15,Asd,V} - x_{115,Asd,V} \in [30, 30].$$

Hierin vertrekt treinserie 115 precies 30 minuten na treinserie 15.

Ten slotte: de NS wil niet zomaar een dienstregeling, maar graag een optimale... Hiermee raken we een open zenuw: behalve stop- en overstaptijden zijn er nog andere variabelen: het reizigerscomfort, de bedrijfswinst, de personeelsroosters, de materieelomloop en de punctualiteit.

Binnen het hier beschreven model kunnen bepaalde aspecten worden geoptimaliseerd, zoals stop- en overstaptijden. Ook zijn er speciale algoritmen voor de materieelomloop en het personeelsrooster ontwikkeld. Maar één geïntegreerd systeem, dat alle onderdelen simultaan optimaliseert, is op dit moment nog een paar stations te ver. De wiskunde achter het Spoorboekje is voorlopig nog niet af! ■

Op 19 september vond het Wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit Nijmegen plaats. Van honderd teams van scholieren uit heel Nederland kwamen de besten uit de hoofdstad: het Vossiusgymnasium werd eerste, het Barlaeusgymnasium tweede. Deze teams ontvingen uit handen van burgemeester Thom de Graaf van Nijmegen de hoofdprijs: een ticket naar New York. Vijfdeklasser Michiel van der Staaij van het Vossius doet verslag van de reis, die plaatsvond van 15 tot 20 oktober.

■ door Michiel van der Staaij

PRIJSREIS NAAR NEW YORK



Groepsfoto van de winnaars en begeleiders met rechts John Nash en rechts van de linker zuil Eric Maskin voor het huis van Einstein

Het Empire State Building, het Vrijheidsbeeld en Chinatown: het zijn hoogtepunten die in een reis naar New York niet mogen ontbreken. Maar naast deze bekende attracties stond onze reis in het teken van de *speltheorie*: het onderwerp van het middag-onderdeel van het Wiskundetoernooi op 19 september. John Nash is misschien wel de beroemdste wiskundige op het gebied van de speltheorie. Op de Columbia University bezochten we een voordracht door Sylvia Nasar, de biografe van John Nash. Haar boek *A beautiful mind* is later verfilmd onder dezelfde titel.

Ook werd er een dag verzorgd door de hoofdsponsor van het Wiskundetoernooi, APG (Algemene Pensioen Groep). Op die dag waren er onder andere lezingen over de risico's van verzekeraars en over de speltheorie. Een van die lezingen was op de 66ste verdieping van het Chrysler Building. Dit gebouw is normaal gesproken niet voor bezichti-

ging toegankelijk. Verder hebben we een bezoek gebracht aan de NYMEX, de grootste fysieke grondstoffenbeurs ter wereld, en hebben we door Wall Street gelopen.

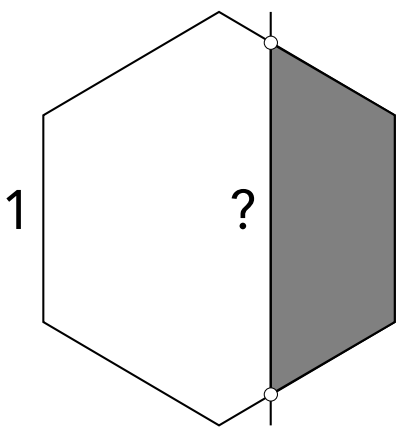
Een ander hoogtepunt van onze reis was een bezoek aan Princeton. Princeton is een universiteitsstadje en verscheidene Nobelprijswinnaars wonen of werken daar. We hebben op de Princeton University niemand minder dan John Nash (Nobelprijswinnaar Economie in 1994) en Eric Maskin (winnaar in 2007) ontmoet! Zij vertelden over respectievelijk de speltheorie en het *mechanism design*. Na de lezingen zijn we met hen naar het voormalige huis van Albert Einstein gegaan. Dat huis wordt tegenwoordig bewoond door Eric Maskin en wij hebben van hem een rondleiding door het huis gehad.

Deze reis was een fantastische ervaring. Heel veel dank aan de Radboud Universiteit! ■

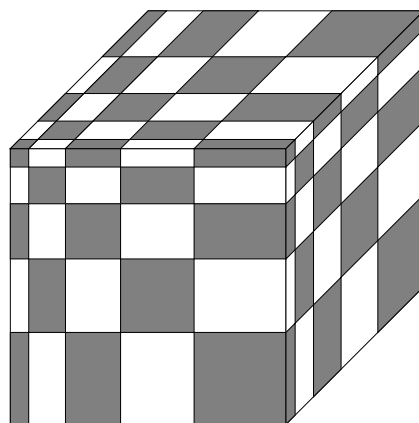
PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

VERJAARDAGSTAART Mark krijgt op zijn verjaardag een taart in de vorm van een regelmatige zeshoek. Hij snijdt evenwijdig aan een zijde de taart in twee stukken, het ene stuk dubbel zo groot als het andere. Hoe lang is de snede als de taart zijde 1 heeft?



ZWART EN WIT Een kubus van zijde 15 is in drie richtingen gesneden in plakken van dikte 1, 2, 3, 4 en 5. De 125 resulterende blokjes zijn elk zwart of wit gekleurd in een schaakbordpatroon. Wat is het gezamenlijke volume van de zwarte blokjes?



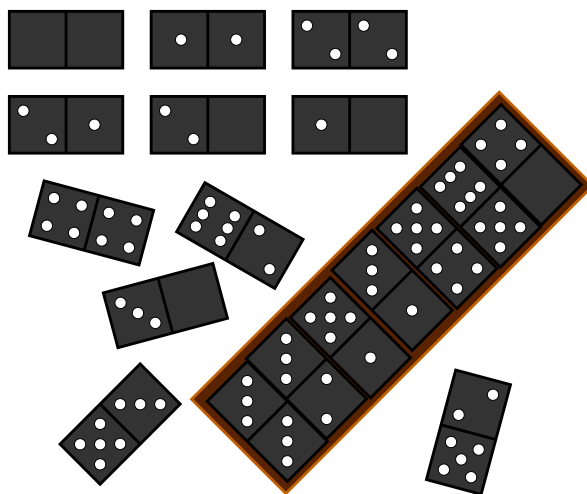
IN KANNEN EN KRIUKEN Vier kruiken van 4 liter zijn elk voor 3 liter gevuld: twee bevatten water en twee bevatten wijn. Kun je alle water en wijn in gelijke verhouding mengen? Je mag vloeistof van een kruik overgieten in een andere kruik tot de andere kruik vol is, of tot de ene kruik leeg is.

WORTELS

Vereenvoudig de volgende uitdrukking:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{16}} \times \dots \times \sqrt{1 - \frac{1}{49^2}}$$

DOMINOSTENEN Er zijn 28 dominostenen. Kun jij ze verdelen in zeven groepjes van vier, zó dat elk aantal ogen (0 tot en met 6) in elk groepje op een domino voorkomt?



OPLOSSINGEN

HEKSENKRING Wanneer je 1 tot en met 10 op volgorde in een kring zet, is ieder getal een deler van het verschil van de kwadraten van zijn burens en vormen de getallen een *heksenkring*.

In een heksenkring heeft een *even* getal nooit een *even* en een *oneven* buur, dus staan er in een heksenkring altijd minstens zoveel *oneven* als *even* getallen. De getallen 2 tot en met 2008 vormen dus geen heksenkring.

Als $x, \dots, 19, 20$ een heksenkring vormen, moet x *oneven* zijn en wisselen *even* en *oneven* getallen elkaar rond de kring af. Het is makkelijk te zien dat 19 als burens 20 en 18 heeft en 17 burens 18 en 16. De andere buur van 20 kan alleen 1, 9 of 11 zijn. Als de buur 11 is, is de andere buur van 11 gelijk aan 2, zodat $x = 1$. Als de buur 9 is, is de andere buur van 9 gelijk aan 16 of 2. Maar 16 kan niet, dus $x = 1$.

ZWAARTELIJNEN In een parallellogram is de som van de kwadraten van de diagonalen gelijk aan de som van de kwadraten van de zijden. Driehoek ABC is een 'half' parallellogram, met AC als diagonaal en BQ als halve diagonaal. Er volgt:

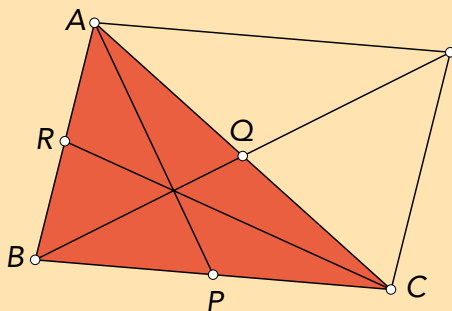
$$(2|BQ|)^2 = 2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2.$$

Voor de zijden AB en BC geldt een analoge vergelijking. Optellen geeft

$$4(|BQ|^2 + |CR|^2 + |AP|^2) =$$

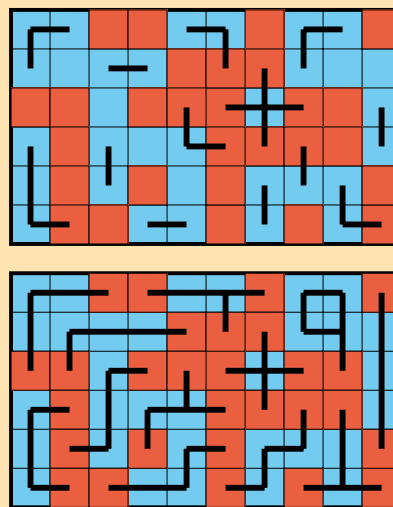
$$3(|AC|^2 + |AB|^2 + |BC|^2) = 36,$$

$$\text{zodat } |BQ|^2 + |CR|^2 + |AP|^2 = 9.$$

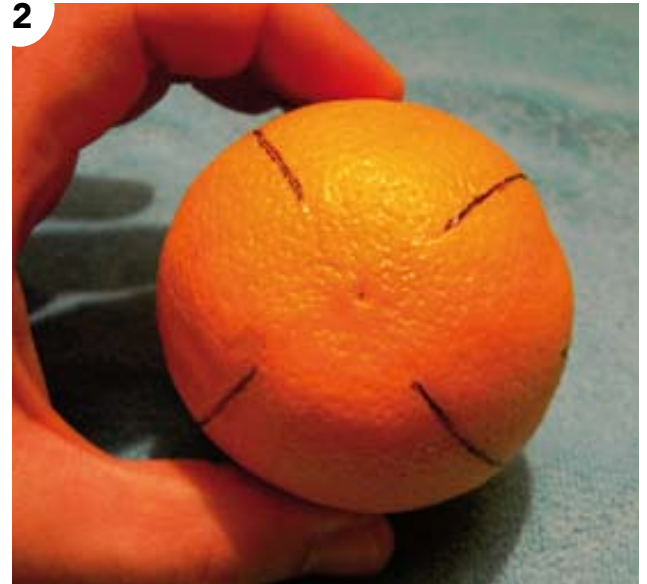


RARE RIJ De rij $1, 1, 0, 1, -1, 2, \dots$ waarbij $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ heeft oneindig veel negatieve termen. Want als dat *niet* zo zou zijn, zou er een laatste negatief getal a_k in de rij zijn. Er geldt dan $0 < a_{k+2} - a_k = a_k^2 - a_{k-1}^2$, zodat $|a_k| > |a_{k-1}|$. Maar aan de andere kant volgt uit $a_k = a_{k-2}^2 - a_{k-1} < 0$ dat $|a_k| \leq |a_{k-1}|$, een tegenspraak!

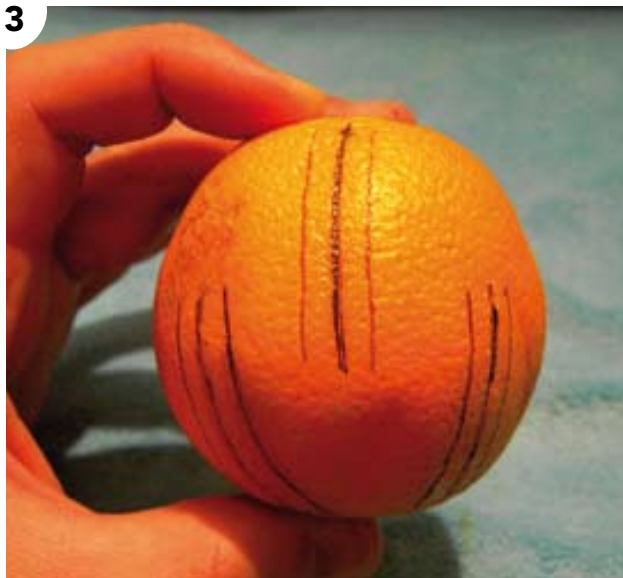
PENTOMINO-PUZZEL Elk rood vierkantje zit met precies één buurvierkantje in dezelfde pentomino en die buur is blauw. Elk blauw vierkantje zit met ten minste twee van z'n burens in dezelfde pentomino. Dit geeft meteen een aantal paren van burens die in eenzelfde pentomino zitten (zie bovenste figuur). Herhalen van deze regels (en een klein beetje puzzelen) geeft de unieke oplossing (onderste figuur).



TOPOLOGISCH SCHILLEN



Neem een sinaasappel en teken er acht lijnen op: vier op de 'noordelijke', vier op de 'zuidelijke' helft. Het ene einde van iedere lijn ligt op ongeveer 1,5 cm afstand van een van de 'polen' van de sinaasappel. De lijnen snijden net de 'evenaar' van de sinaasappel.



Voeg vervolgens links en rechts van iedere lijn nog een lijn van dezelfde lengte toe, parallel aan de lijn die je eerder hebt getekend.

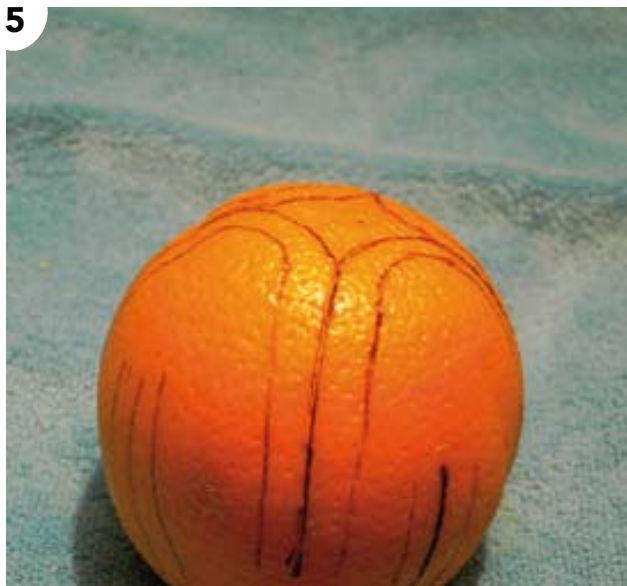


Nu verbind je vlak bij de polen van de sinaasappel de lijnen op de manier die je hier ziet afgebeeld.

In de negentiende eeuw vond je in puzzelboekjes vaak een mengelmoes van wiskundige raadsels, goocheltrucs en natuurkundige experimenten. Tilman Andris kreeg op zijn twaalfde een herdruk van zo'n boek cadeau: *Kolumbuseier* van Edi Lanners. Het meest intrigerende plaatje in het boek vond Tilman een sinaasappel die in tweeën was gesneden, waarbij echter de helften van de schil nog steeds aan elkaar hingen door middel van een aantal lussen. In dit artikel legt hij uit hoe je een sinaasappel op deze krankzinnige manier kunt schillen.

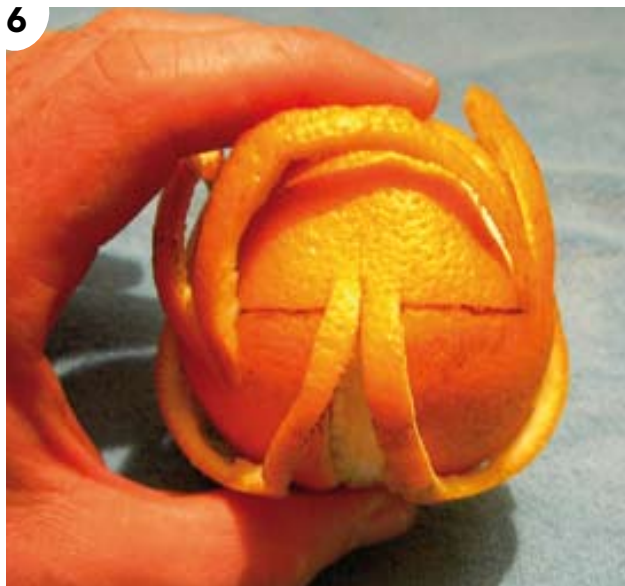
■ door Tilman Andris

5



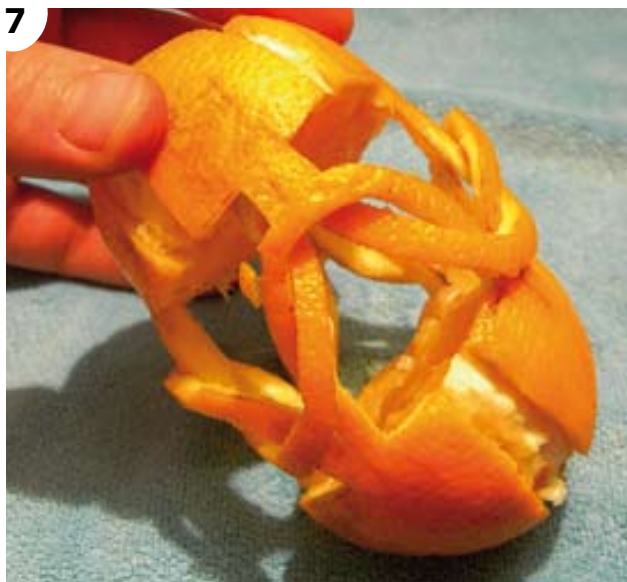
Hier zie je nogmaals de vorige stap, gefotografeerd vanuit een andere hoek. Nu wordt het tijd om het mes te pakken. Wees voorzichtig!

6



Snij met het mes langs alle lijnen die je op de sinaasappel hebt getekend. Snij daarbij alleen door de schil heen en niet door het vruchtvlees! Op die manier ontstaan een aantal riempjes, die je heel voorzichtig van de sinaasappel kunt afpellen.

7



Op foto 6 is de evenaar van de sinaasappel met een zwarte lijn zichtbaar gemaakt. Snij met het mes langs de evenaar zonder de riempjes te beschadigen. Snij diep en scheid daarbij het vruchtvlees van de sinaasappel in twee helften. Trek voorzichtig de twee helften van de sinaasappel uit elkaar. Het resultaat is een sinaasappel met een vreemde topologische structuur.

8



Als dit is gelukt, heb je misschien zin om te experimenteren met meer of minder lussen. Op deze foto zie je wat er ontstaat als je met twaalf, in plaats van acht, lijnen begint.

17

Bart Zevenhek is leraar in het voortgezet onderwijs en deed daarnaast de laatste twee jaar onderzoek aan de Universiteit Leiden. In dit en het volgende nummer van *Pythagoras* vertelt hij over de verrassende verbanden die hij bestudeerde tussen de rij van Fibonacci en de priemgetallen.

■ door Bart Zevenhek

PRIEMGETALLEN EN FIBONACCI deel 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

18

‘Heb je wel eens gehoord van de rij van Fibonacci?’ Ik vroeg het aan een Engelse vriend van me, nadat hij me gevraagd had om iets te vertellen over het wiskundig onderzoek waarmee ik me bezig-houd. ‘Ehh, is dat niet een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers? 2 mijl is ongeveer 3 kilometer, 3 mijl is 5 kilometer, 5 mijl is 8 kilometer, enzovoort.’ ‘Hoe bedoel je dat? Is 8 mijl dan 13 kilometer, soms?’ Het begon me te dagen: $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$, inderdaad, de rij van Fibonacci wordt gebruikt! ‘En hoe doe je het dan met een getal dat niet in de rij voorkomt, zoals 7?’ ‘Dan,’ zei hij, ‘neem je een getal in de rij dat daardoor deelbaar is, bijvoorbeeld 21. Dan weet je: 21 mijl is $13 + 21 = 34$ kilometer, dus 7 mijl is $34 : 3 = 11\frac{1}{3}$ kilometer.’

Het klonk niet erg praktisch, maar theoretisch was het interessant: hoe weet je zeker dat, als je een getal hebt, er dan altijd een getal in de rij van Fibonacci is dat daardoor deelbaar is? Dat was trouwens bijna dezelfde vraag die in janunari 2005 in de problemenrubriek van dit tijdschrift stond: *De rij van Fibonacci, waarvan de elementen genoteerd worden met F_p , wordt als volgt geconstrueerd: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$,*



en verder geldt: $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Bewijs dat er voor elk positief geheel getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n .

Waarom werkt die truc om mijlen in kilometers om te rekenen eigenlijk? Volgens de truc zou een Engelse mijl (ongeveer) gelijk moeten zijn aan: $\frac{3}{2} = 1,5$, $\frac{5}{3} \approx 1,667$, $\frac{8}{5} = 1,6$, $\frac{13}{8} = 1,625$, $\frac{21}{13} \approx 1,615$, enz. De verhouding van opvolgende Fibonacci-getallen nadert naar de *gouden-snede-verhouding* $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$ (verderop in dit artikel zullen we zien waarom dit zo is). En toevallig is het zo dat een Engelse mijl omgerekend in kilometers daar ongeveer gelijk aan is: een Engelse mijl is 1,609344 kilometer.

DELERS VAN FIBONACCI-GETALLEN Nu het probleem waar we op stuiten: waarom is er, gegeven een getal n , altijd een Fibonacci-getal dat door n deelbaar is? Hoe pak je zoiets aan? Wat vaak werkt als je geen idee hebt, is: probeer maar eens wat getallen uit. Om te beginnen ga je de opgave dan beter begrijpen. Ten tweede ga je dan misschien een patroon, een regelmaat, een structuur ontdekken. Die kun je testen in meer gevallen en vervolgens ga je die proberen te bewijzen. Laten we deze methode eens proberen.

Delen door 1 kan natuurlijk altijd, dat is flauw, dus testen we eerst met 2. Het derde Fibonacci-getal F_3 is 2. Maar zijn er oneindig veel deelbaar door 2? Verder speuren levert op: $F_6 = 8$, $F_9 = 34$, $F_{12} = 144$. Ieder derde Fibonacci-getal *lijkt* deelbaar door 2. Maar hoe weten we het *zeker*? Kijk beter naar het patroon: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Steeds: oneven, oneven, even. Dat is logisch, want oneven + oneven = even en oneven + even = oneven. We hebben ingezien dat er oneindig veel Fibonacci-getallen deelbaar zijn door 2!

Hoe gaat het met 3? We vinden: $F_4 = 3$, $F_8 = 21$, $F_{12} = 144$. Ha! Ieder vierde Fibonacci-getal is deelbaar door 3. Maar hoe bewijzen we dit? Bij 2 was het onderscheid even/oneven van belang. Zo kun je op het idee komen om, in plaats van de rij van Fibonacci, de rij te bekijken die je krijgt door de *resten* na deling door een getal op te schrijven. Bij het eerste voorbeeld, met 2, krijg je dan: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, ... Als je dit doet met 3, krijg je de '3-resten-rij' 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, ... Deze lijkt weer periodiek, net als bij 2, maar waarom, en waarom er nullen in voorkomen is nog steeds de vraag!

We schrijven nog maar eens een rijtje resten op. Met 8 krijg je: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, ... Je ziet dat alleen de getallen 0 tot en met 7 voorkomen. Dat is logisch, want het zijn de enige resten die je kunt krijgen als je deelt door 8. De rij is weer periodiek, maar *waarom*? Nog steeds geen idee. Maar kijk eens goed: de 8-resten-rij is weer een soort Fibonacci-rij, alleen moet je steeds als je boven de 7 uitkomt, er 8 aftrekken. Probeer het maar en doe dat ook eens bij de rijen met resten van 2 en 3. Dit is een verschijnsel dat in de wiskunde *modulorekenen* wordt genoemd. Daar leer je dat

de rest van de som van twee getallen gelijk is aan de rest van de som van de resten. Dus bij deling door 8 is de rest van $13 + 21$ gelijk aan de rest van $5 + 5$.

Nu hebben we de ingrediënten voor een bewijs. Neem weer eens een getal, bijvoorbeeld 11. Er zijn dan 11 mogelijke resten: 0 tot en met 10. Nu zijn er voor twee opeenvolgende resten in de 11-resten-rij, (0,1), (1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,8), (8,2), (10,1), (1,0), (0,1), enzovoorts, maar $11 \times 11 = 121$ mogelijkheden. Dit betekent dat, als ik de eerste 122 opeenvolgende tweetallen in de 11-resten-rij bekijk, er twee tweetallen hetzelfde *moeten* zijn! In dit geval zie je dat het tweetal (0,1) na een tijdje terugkomt. Dan komt het getal dat volgt op dat tweetal ook twee keer voor in de 11-resten-rij, want je kunt altijd een getal in de 11-resten-rij uitrekenen als je de twee voorgaande weet. Maar dan komen ook de daarop volgende getallen overeen, ... en de hele rij erna. Dan moet de rij die volgt op het eerste tweetal op een gegeven moment gaan samenvallen met de rij vanaf het tweede tweetal. Kortom, de rij is periodiek vanaf het eerste tweetal!

We kunnen nog iets meer zeggen. Twee opeenvolgende getallen x, y in de rij van Fibonacci leggen ook het voorgaande getal vast, namelijk $y - x$, want $y - x + x = y$. Dit betekent dat ook het stuk vóór het eerste gelijke tweetal periodiek doorloopt.

We hebben nu een merkwaardig resultaat. Als we het bovenstaande herhalen voor een willekeurig getal n , dan zie je dat de rij met resten periodiek is. Dus als er ergens een 0 zit (wat betekent dat het bijbehorende Fibonacci-getal deelbaar is door n), dan komt dat oneindig vaak voor. Maar F_0 is gelijk aan 0! Doordat de n -resten-rij periodiek is, komt die 0 steeds weer terug en vind je oneindig veel Fibonacci-getallen die deelbaar zijn door n .

Zo is de opgave bewezen, maar kom je weer op andere vragen zoals: hoe vind je, bij een gegeven getal n , de periode en wanneer komt het eerste getal dat deelbaar is door n , dus het eerste nulpunt bij de Fibonacci n -resten?

Probeer voor de getallen 2 tot en met 13 een getal in de rij van Fibonacci te vinden dat erdoor deelbaar is. En kijk eens of je iets opvalt. Er is iets speciaals aan de hand als n een priemgetal is. Als je dit eerst zelf wilt ontdekken, moet je nu niet omslaan.

FIBONACCI EN DE GULDEN SNEDE

Misschien heb je daarnet zelf al het volgende gevonden: als n een priemgetal is, dan is n een deler van F_{n-1} of F_{n+1} , behalve 5, dat is een deler van F_5 . En als n niet een priemgetal is, dan is n niet een deler van F_{n-1} of F_{n+1} . Is dat niet wonderlijk!

Nu is het wel erg voorbarig om uit een paar testjes een conclusie te trekken. Als je een stukje verder kijkt, tot 323 om precies te zijn, dan zal je ontdekken dat $323 = 17 \times 19$ en dus geen priemgetal is, maar F_{324} (een getal van 68 cijfers!) is wel deelbaar door 323.

Maar het leuke is dat we de eerste uitspraak wel kunnen bewijzen!

Stelling. Als n een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is n een deler van F_{n-1} of van F_{n+1} .

Makkelijk is het bewijs niet. In dit artikel leiden we twee mooie formules af die te maken hebben met de rij van Fibonacci. Uit beide formules valt een verband tussen de rij van Fibonacci en de gulden snede af te leiden. Met behulp van die formules geven we in de volgende *Pythagoras* het bewijs van de bovenstaande stelling.

Voor drie opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci, zeg F_{n-1} , F_n en F_{n+1} , geldt per definitie: $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$. Er is echter een ander verband tussen drie opeenvolgende termen:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \quad (1)$$

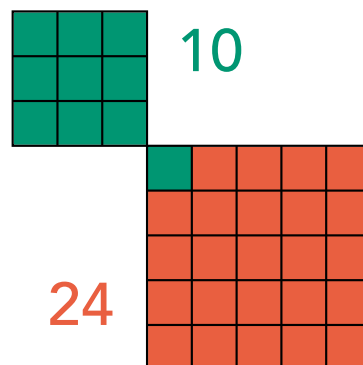
Deze formule gaan we bewijzen.

Stel: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = H_n$. Dan moeten we bewijzen dat $H_n = (-1)^n$. We gaan naar vier opeenvolgende termen, F_{n-1} tot en met F_{n+2} kijken. Stel $a = F_{n-1}$ en $b = F_n$. Dan is $F_{n+1} = a + b$ en $F_{n+2} = b + a + b = a + 2b$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = \\ &= (a + 2b) \cdot b - (a + b)^2 = \\ &= ab + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = \\ &= b^2 - a^2 - ab = b^2 - a(a + b) = \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -H_n. \end{aligned}$$

Maar $H_2 = F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, en met het voorgaande volgt hieruit: $H_3 = -1$, $H_4 = 1$, ... en $H_n = (-1)^n$.

Deze formule werd rond 1600 door niemand minder dan Johannes Kepler gevonden, alhoewel hij het niet als formule presenteerde maar als meetkundige constructie, zie onderstaande figuur.



Keplers visualisatie van de eigenschap dat $2 \times 5 = 3^2 + 1$ en $3 \times 8 = 5^2 - 1$. Op dezelfde manier: $5 \times 13 = 8^2 + 1$ en $8 \times 21 = 13^2 - 1$, enzovoorts

Bekijk nu de rij die je krijgt door opeenvolgende termen van de rij van Fibonacci op elkaar te delen. Die begint zo: 1, 2, $1\frac{1}{2} = 1,5$, $1\frac{2}{3} \approx 1,667$, $1\frac{3}{5} = 1,6$, $1\frac{5}{8} = 1,625$. De getallen in deze rij komen steeds dichterbij de gulden-snede-verhouding! Dit valt als volgt in te zien.

Als je in formule (1) alles deelt door $F_n F_{n-1}$, dan krijg je:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}}.$$

Nu wordt F_n snel groter wanneer n toeneemt, dus de rechterkant van de vergelijking gaat heel snel naar 0 toe als n groter wordt. Dit betekent dat $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ en $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ steeds dichterbij elkaar komen. Noem nu het getal waar $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ naar toe gaat x . Onbekenden worden in de wiskunde nu eenmaal vaak x genoemd.

Gebruik dat $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ en dus $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$, waaruit volgt:

$$1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}}.$$

Voor x geldt dan $1 + \frac{1}{x} - x = 0$, ofwel $x + 1 - x^2 = 0$ of $x^2 - x - 1 = 0$. Precies de vergelijking die bij de gulden snede hoort! De positieve oplossing hiervan is dus het getal dat we zochten en je ziet: de verhouding tussen opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci komt steeds dichtbij de gulden-snede-verhouding.

DE GULDEN SNEDE



We zeggen dat C het lijnstuk AB verdeelt in de *gulden-snede-verhouding* als $\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{BC}$, dus als het langste stuk in gelijke verhouding staat tot het kortste als het geheel tot het langste. Stel het kortste stuk is 1 en het langste x , dan moet dus gelden: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$. Daaruit volgt $x + 1 = x^2$, oftewel $x^2 - x - 1 = 0$. Met bijvoorbeeld de *abc*-formule vind je dan:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

(de andere oplossing is negatief en vervalt dus).

DE FORMULE VAN BINET

Nu gaan we naar een andere beroemde formule voor de rij van Fibonacci: de formule van Binet. Daarvoor gebruiken we ook de gulden-snede-verhouding. De oplossingen van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ noemen we s en t . Dus

$$s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Controleer zelf dat $s > 1$, $-1 < t < 0$ en $s^2 = s + 1$.

De rij $1, s, s^2, s^3, s^4, \dots$ is een rij waarvoor, net als bij de rij van Fibonacci, de som van twee opeenvolgende getallen het volgende getal is, want er geldt:

$$s^n + s^{n+1} = s^n(1 + s) = s^n \cdot s^2 = s^{n+2}.$$

Als a en b twee willekeurige getallen zijn, heeft de rij $G_n = as^n + bt^n$ diezelfde eigenschap. Nu is de truc dat we a en b zo gaan kiezen dat de startwaarden gelijk zijn aan die van de rij van Fibonacci: $G_0 = 0$ en $G_1 = 1$. Invullen geeft dan: $as^0 + bt^0 = 0$ en $as^1 + bt^1 = 1$. Uit de eerste vergelijking volgt dat $a = -b$. Wanneer je dit invult in de tweede vergelijking, krijg je $as - at = 1$, ofwel $a = \frac{1}{s-t}$. Dan is dus $b = \frac{-1}{s-t}$ en $G_n = \frac{1}{s-t}s^n + \frac{-1}{s-t}t^n = \frac{s^n - t^n}{s-t}$. Maar

omdat G_n hetzelfde begint en op dezelfde manier verder gaat als F_n , moeten deze twee rijen hetzelfde zijn! We krijgen dan de formule van Binet:

$$F_n = \frac{s^n - t^n}{s - t} \quad (2)$$

Dit is een merkwaardige, doch zeer handige formule. Merkwaardig, omdat $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ niet-gehele getallen zijn, maar de uitkomst van de formule wel altijd een geheel getal oplevert. Met de formule kun je bijvoorbeeld in één keer het honderdste Fibonacci-getal berekenen, zonder dat je alle voorafgaande getallen hoeft te bepalen. De formule van Binet is een zogeheten *directe* formule voor de rij van Fibonacci. Wat ook mooi is aan de formule, is de *eenvoud* en de *symmetrie*: als je s en t verwisselt blijft de formule geldig.

Met behulp van de formule van Binet kun je op een tweede manier inzien dat de verhouding van de opeenvolgende Fibonacci-getallen steeds dichtbij de gulden-snede-verhouding komt. Probeer dat zelf eens uit te zoeken.

Met behulp van de formules (1) en (2) leveren we in het volgende nummer een bewijs voor de stelling in het kader op pagina 20. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Anne de Haan, Arno Kret, Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



22

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:
Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2008.

OPGAVE 160

Bestaat er een getal n van drie cijfers (tientallig geschreven) met de eigenschap dat n gelijk is aan $s + 2m$, met s de som van de drie cijfers van n en m het getal dat je krijgt door de drie cijfers van n in omgekeerde volgorde op te schrijven?

OPGAVE 161

Gegeven is een geheel getal n dat geen macht van een priemgetal is. Laat zien dat er een n -hoek bestaat, waarvan alle hoeken gelijk zijn, en waarvan de zijden de lengtes 1 tot en met n hebben, in een of andere volgorde.

OPLOSSING 156

De getallen 1 tot en met 9 worden op twee verschillende manieren in groepjes verdeeld. Bewijs dat er twee getallen x en y zijn, die bij elke verdeling in groepjes van dezelfde grootte terecht komen (bijvoorbeeld eerst allebei in een groepje van grootte 2, en daarna allebei in een groepje van grootte 1).

Oplossing. Wanneer we negen getallen in verschillende groepjes verdelen, kunnen er nooit meer dan drie groepjes van verschillende groottes ontstaan. Vier groepjes van verschillende groottes bevatten immers ten minste $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ getallen.

Claim: er worden altijd ten minste vier getallen in groepjes van dezelfde grootte gestopt.

Bewijs: Wanneer we willen vermijden om vier getallen in groepjes van dezelfde grootte te stoppen, mogen we geen groepjes van grootte 4 of meer gebruiken, en maximaal één groepje van grootte 3, één groepje van grootte 2 en drie groepjes van grootte 1. Dan hebben we echter pas acht getallen

verdeeld. Om negen getallen te verdelen, worden er dus vier getallen in groepjes van dezelfde grootte gestopt. Bij de volgende verdeling van onze negen getallen zijn echter opnieuw slechts drie verschillende groeps groottes in gebruik. Twee van onze vier getallen worden dus opnieuw in groepjes van dezelfde grootte ingedeeld.

Deze opgave werd goed opgelost door **Mark Broersma** uit Vlissingen, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Sander Konijnenberg** van RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp en **Bart Wiersma** van het Dalton Voorburg te Voorburg.
De boekenbon gaat naar Bart Wiersma.

In het vorige nummer bleef **Fabian Hulpia** per ongeluk ten onrechte onvermeld bij de correcte inzenders van opgave 154.

OPLOSSING 157

Van het telefoonnummer van een professor komen de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 allemaal precies één keer voor. Als je het nummer omgekeerd opschrijft, is het eerste cijfer deelbaar door 1, het getal gevormd door de eerste twee cijfers deelbaar door 2, het getal gevormd door de eerste drie cijfers deelbaar door 3, en zo verder zodat het gehele getal deelbaar door 10 moet zijn. Wat is zijn telefoonnummer?

Oplossing. Het omgekeerde telefoonnummer $abcde fghij$ is deelbaar door 10, dus $j = 0$. $abcde$ is een 5-voud en de 0 is al vergeven, dus $e = 5$. Omdat ab , $abcd$, $abcde f$ en $abcde fgh$ even zijn, zijn b , d , f en h even. Dus a , c , g en i zijn oneven. Omdat $abcd$ en $abcde fgh$ 4-vouden zijn, zijn cd en gh 4-vouden. Daar c en g oneven zijn, zijn $10c$ en $10g$ even, maar geen 4-vouden. Dit betekent dat dit ook voor d en h geldt. Dus d en h zijn 2 of 6. Dus b en f zijn 4 of 8. Omdat abc , $abcde f$ en $abcde fghi$ 3-vouden zijn, geldt dat $a + b + c$, $a + b + c + d + e + f$ en $a + b + c + d + e + f + g + h + i$ 3-vouden zijn, zodat ook $d + e + f$ en $g + h + i$ 3-vouden zijn. Omdat $d \in \{2, 6\}$, $e = 5$ en $f \in \{4, 8\}$, is $def = 258$ óf $def = 654$. In beide gevallen is f even, dus $100abcde f$ is een 8-voud. Ook $abcde fgh$ is een 8-voud, dus gh is een 8-voud. Bovendien is g oneven en geen 5, en is h gelijk aan 2 of 6,

en niet aan d . Hieruit volgt: $defgh \in \{25816, 25896, 65432, 65472\}$. Nu moeten we bij elk van deze getallen een oneven i vinden, die niet gebruikt is, zodat $g + h + i$ een 3-voud is. Voor 25816 gaat dit niet; verder krijgen we $defghi \in \{258963, 654321, 654327, 654723, 654729\}$. Omdat a en c oneven zijn, is elk van deze getallen op slechts twee manieren aan te vullen tot een kandidaat voor $abcde fghij$. Zo krijgen we $\{1472589630, 7412589630, 7896543210, 9876543210, 1896543270, 9816543270, 1896547230, 9816547230, 1836547290, 3816547290\}$ als verzameling van mogelijke oplossingen. Testen of $abcde fgh$ een 7-voud is, laat slechts één mogelijkheid over en deze blijkt aan alle gevraagde eigenschappen te voldoen.
Conclusie: $abcde fghij = 3816547290$, en dus is het telefoonnummer 0927456183.

Deze opgave werd goed opgelost door **Leonie Broersen** van het Stedelijk Gymnasium te Haarlem, **Mark Broersma** uit Vlissingen, **Elias C. Buissant des Amorie** uit Castricum, **P. Dekker** uit Krimpen aan de Lek, **Hendrik Jan van Eijsden** uit Capelle aan den IJssel, **Alexander van Hoorn** uit Abcoude, **Ernst van de Kerkhof** uit Sittard, **Sander Konijnenberg** van RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Eddie Nijholt** van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren en **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp.
De boekenbon gaat naar Leonie Broersen.

Op 12 september deden 123 leerlingen uit heel Nederland mee aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die gehouden werd op de Technische Universiteit Eindhoven. De genodigden waren leerlingen die in januari op hun eigen school bij de eerste ronde hoog hadden gescoord. Nieuw dit jaar was dat al deze leerlingen in de tussentijd hebben kunnen deelnemen aan een training, speciaal gericht op deze tweede ronde.

■ door Quintijn Puite

ÉÉN PROBLEEM, DRIE OPLOSSINGEN

Waar de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade nog bestaat uit meerkeuzevragen en open opgaven met een getal als antwoord, wordt bij de tweede ronde naar echte bewijzen gevraagd. Dan kan een beetje oefenen natuurlijk geen kwaad! De leerlingen die na de eerste ronde door waren naar de tweede ronde, zijn dit jaar dan ook allemaal uitgenodigd om in de aanloop daarnaartoe deel te nemen aan een training voor de tweede ronde door oud-olympiadedeelnemers op een universiteit in hun regio. Hierbij ging het onder andere over onderwerpen uit de getaltheorie en meetkunde, terwijl ook werd ingegaan op de vraag hoe je nu een probleem kunt aanpakken en hoe je een bewijs goed opschrijft. Daarnaast kwamen algemene bewijstechnieken aan bod, zoals bewijzen uit het ongerijmde, volledige inductie en het ladenprincipe. Het materiaal is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/trt.

Goed voorbereid konden de meeste deelnemers op deze manier op 12 september aan de tweede ronde beginnen. In dit artikel gaan we nader in op een van de pittigste opgaven:

We spelen een spel met een rij van 2008 gehele getallen. Alle getallen in de rij zijn groter dan of gelijk aan 0. Een zet bestaat uit het kiezen van een getal b uit de rij, waarvan de twee buurgetallen a en c positief (dus groter dan 0) zijn. We vervangen dan a , b en c door respectievelijk $a - 1$, $b + 7$ en $c - 1$. Het eerste en het laatste getal van de rij mogen niet gekozen worden omdat ze maar één buur hebben. Als we geen getal b meer kunnen vinden waarvan beide buurgetallen positief zijn, kunnen we geen zet meer doen en stopt het spel. Bewijs dat het spel altijd op een gegeven moment stopt, met welke rij getallen we ook beginnen en welke zetten we ook doen.

1 ^e	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	som	gewogen som
7	7 ²	7 ³	7 ⁴	7 ⁵		◀ gewichten
3	6	10	4	5	28	97384
-1	+7	-1				
2	13	9	4	5	33	97377
	-1	+7	-1			
2	12	16	3	5	38	97328
		-1	+7	-1		
2	12	15	10	4	43	96985
-1	+7	-1				
1	19	14	10	4	48	96978
-1	+7	-1				
0	26	13	10	4	53	96971
	-1	+7	-1			
0	25	20	9	4	58	96922
	-1	+7	-1			
0	24	27	8	4	63	96873
		-1	+7	-1		
0	24	26	15	3	68	96530
	-1	+7	-1			
0	23	33	14	3	73	96481
		-1	+7	-1		
0	23	32	21	2	78	96138
		-1	+7	-1		
0	23	31	28	1	83	95795
		-1	+7	-1		
0	23	30	35	0	88	95452

De eerste twaalf zetten van een mogelijk spelverloop bij een rij van 5 getallen

EEN BEETJE PROBEREN Om de opgave tot ons door te laten dringen, bekijken we eerst maar eens een voorbeeld. We spelen voor het gemak een spel met 5 getallen in plaats van 2008 en beginnen bijvoorbeeld met **3-6-10-4-5**. We kiezen als eerste zet voor b het tweede getal. Dan wordt dit tweede getal dus met 7 opgehoogd, terwijl zijn twee burens met 1 afnemen. We krijgen dan **2-13-9-4-5**. Laten we nu eens een zet doen met het derde getal en dan een zet met het vierde getal (zie de tabel), dan is het resultaat **2-12-15-10-4**. En als we nu weer voor b het tweede getal kiezen, komen we op **1-19-14-10-4** uit. Wat is er nu met de getallen gebeurd? Sommige zijn toegenomen, andere afgenomen. In elk geval zijn de twee getallen aan de buitenkant afgenomen. Dat is ook best logisch; ze kunnen nooit toegenomen zijn, want voor b mogen we niet het eerste of laatste getal van de rij kiezen.

We gaan maar weer door en kiezen voor b nog een keer het tweede getal; dan komen we uit op **0-26-13-10-4**. Die nul aan het begin: dat is goed nieuws! We mogen voor b nu namelijk nooit meer het tweede getal uit de rij kiezen; hij wordt geblokkeerd door zijn linkerbuurman. Nu hebben we voor b dus alleen nog de keuze tussen het derde en het vierde getal.

Vervolgens kunnen we hiervoor net zo'n redenering opzetten als hierboven. Bij het kiezen van het derde getal neemt het tweede getal steeds met 1 af en bij het spelen van het vierde getal gebeurt er

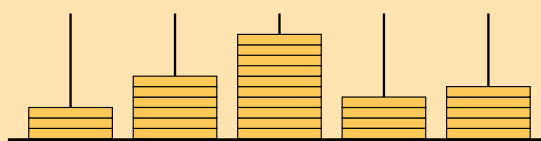
niets met het tweede getal. Omdat het tweede getal op dit moment 26 is, kunnen we maar hooguit 26 maal een zet met het derde getal doen. In de tabel is een verder mogelijk spelverloop weergegeven en we zien inderdaad dat het tweede getal langzaam aan afneemt. Omdat we al hebben beredeneerd dat deze zet maar eindig vaak kan voorkomen (namelijk hooguit 26 keer vanaf het hierboven genoemde 'goed-nieuws-moment'), moet er een laatste keer zijn dat hij voorkomt in het spel dat hier gespeeld wordt. Het hangt natuurlijk van het daadwerkelijke spelverloop af of al deze 26 zetten ook nog echt worden gespeeld. We nemen even aan dat de laatste zet met het derde getal ons heeft gebracht tot de situatie **0-23-33-14-3**. We hadden voor b alleen nog de keuze tussen het derde en het vierde getal, maar omdat we alle keren dat het derde getal als b werd gekozen zojuist hebben afgesloten, is vanaf nu alleen nog het vierde getal mogelijk. Daardoor neemt het derde (en ook het vijfde) getal steeds met 1 af. En dát kan niet oneindig lang zo doorgaan!

FORMALISEREN Met bovenstaand voorbeeld zijn we voor onszelf wel redelijk overtuigd dat de bewering klopt. We hebben een behoorlijk algemeen voorbeeld gepakt en een aantal willekeurige zetten gedaan. Weliswaar hebben we het aantal 2008 vervangen door 5, maar dat lijkt niet echt relevant. Toch moeten we nu nog aan onze netversie van het bewijs beginnen. En we moeten dat zo

BEWIJS 1: RECHT TOE RECHT AAN

Bekijk een willekeurige beginrij $n_1, n_2, \dots, n_{2008}$ en een willekeurige rij zetten. Het eerste getal n_1 neemt elke keer met 1 af wanneer we $b = n_2$ kiezen; dan is immers $a = n_1$. Als we voor b een andere n_k kiezen, blijft n_1 onveranderd. We kunnen dus maar hooguit n_1 keer $b = n_2$ kiezen.

Ergens in onze chronologische rij zetten wordt $b = n_2$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. de eerste zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_3$ tot en met $b = n_{2007}$. We bekijken nu de rest van de zetten vanaf deze genoemde zet. Laat n_2 nu de waarde zijn van het tweede getal bij aanvang van die zet (bedenk dat n_2 in de zetten daarvoor steeds met 7 is opgehoogd bij elke zet $b = n_2$ en met 1 is verlaagd bij elke zet $b = n_3$, dus de nieuwe waarde van n_2 kan heel anders zijn dan de beginwaarde). Vanaf die zet neemt n_2 elke keer met 1 af wanneer we $b = n_3$ kiezen, en als we voor b een andere n_k kiezen ($b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$) blijft n_2 onveranderd. We kunnen



vanaf die zet dus maar hooguit n_2 keer $b = n_3$ kiezen. Ergens in onze rij zetten vanaf die zet wordt $b = n_3$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. nog steeds de eerder genoemde zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$. Dit argument kunnen we blijven herhalen, totdat we concluderen: ergens in onze rij zetten vanaf een zekere zet wordt $b = n_{2007}$ voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet). Nu waren alle andere $b = n_k$ al eerder voor de laatste keer gekozen; vanaf deze zet kan er daarom geen enkele zet $b = n_k$ meer gekozen worden en is ons spel dus afgelopen.

doen dat we niet alleen een voorbeeld uitwerken, maar dat we voor alle mogelijke begingetallen en alle mogelijke spelverlopen bewijzen dat het spel altijd stopt. In kader 1 vind je het volledige bewijs dat gebaseerd is op bovenstaand voorbeeld. Er wordt uitgegaan van een willekeurige beginrij van 2008 getallen en van een willekeurig (eindig of oneindig) spelverloop. We laten zien dat in dat spelverloop het tweede getal maar eindig vaak kan worden gekozen, en daarna hetzelfde voor het derde, vierde, etc. getal. Dan moet het gegeven willekeurige spelverloop dus wel eindig zijn.

UIT HET ONGERIJMDE Als je het bewijs in kader 1 goed bekijkt, zie je dat de gevolgde redenering eigenlijk 2005 keer moet worden herhaald (wat we gelukkig niet daadwerkelijk hebben uitgeschreven). Met iets meer techniek zouden we dat ook kunnen voorkomen. In kader 2 vind je een kort en elegant bewijs dat gebruik maakt van drie onderwerpen van de tweederondetraining (zie www.wiskunde-olympiade.nl/trt). Het bewijs gaat nu uit het ongerijmde. Bovendien gebruiken we het oneindige ladenprincipe (als je oneindig veel balletjes verdeelt over maar eindig veel laatjes, dan is ten minste één laatje gevuld met oneindig veel balletjes). En ten slotte halen we ook het extremenprincipe nog van stal: als er een natuurlijk getal is met een of andere eigenschap, dan is er ook een kleinste natuurlijk getal met die eigenschap.

BEWIJS 2: KORT MAAR KRACHTIG

We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er een oneindige rij zetten is. Uit het (oneindige) ladenprincipe volgt dat er ten minste een zet $b = n_k$ is die oneindig vaak voorkomt. Kies nu k minimaal zodat $b = n_k$ oneindig vaak voorkomt (extremenprincipe). Het getal n_{k-1} wordt alleen maar opgehoogd (namelijk met 7) bij een zet $b = n_{k-1}$ en dat gebeurt dan maar eindig vaak. Het wordt echter oneindig vaak met 1 verlaagd, namelijk bij elke zet $b = n_k$; tegenspraak. Dus elke rij zetten is eindig.

BEWIJS 3: MET EEN POTENTIAAL

Voor elke rij van 2008 elementen $n_1, n_2, \dots, n_{2008}$ berekenen we een gewogen som, namelijk met de gewichten $7, 7^2, 7^3, 7^4, \dots$, dus

$$S = 7 \cdot n_1 + 7^2 \cdot n_2 + 7^3 \cdot n_3 + \dots + 7^{2007} \cdot n_{2007} + 7^{2008} \cdot n_{2008}.$$

Als we in deze rij a, b, c vervangen door $a - 1, b + 7, c - 1$, zeg met $b = n_k$ ($2 \leq k \leq 2007$), dan wordt S door $S - 7^{k-1} + 7 \cdot 7^k - 7^{k+1} = S - 7^{k-1}$ vervangen, dus S wordt met elke stap kleiner. Anderzijds is S volgens zijn definitie als gewogen som van niet-negatieve gehele getallen zelf ook altijd niet-negatief. Als we na elke zet de nieuwe S opschrijven, krijgen we dus een dalende rij gehele getallen. Omdat deze getallen nooit negatief mogen worden, kan deze rij niet oneindig lang zijn. Het spel moet daarom wel stoppen.

EEN POTENTIAAL Onze rij bestaat uit niet-negatieve getallen: getallen groter dan of gelijk aan 0. De som van deze getallen is natuurlijk ook weer niet-negatief. Als het nou zo was geweest dat de som bij elk zet toch afnam, dan was het dus direct duidelijk geweest dat we het spel niet eindeloos zouden kunnen doorspelen. Maar helaas, de som neemt elke keer juist met 5 toe (zie ook de tabel).

Zouden we echter een van de burens, a of c , 7 keer zo zwaar tellen als b , dan wordt de toename van $+7$ bij b precies gecompenseerd door de -1 (die dan 7 keer zo zwaar wordt geteld) van a of c . Laten we daarom de volgende gewogen som S bekijken, waarin we het k -de getal n_k uit de rij met factor 7^k wegen (voor het gemak eerst weer even voor rijtjes van lengte 5):

$$S = 7 \cdot n_1 + 7^2 \cdot n_2 + 7^3 \cdot n_3 + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5.$$

Als we nu een zet doen met het tweede getal, dan worden in $S = S_0$ de getallen n_1, n_2 en n_3 vervangen door $n_1 - 1, n_2 + 7$ en $n_3 - 1$. Daarmee wordt de nieuwe waarde van de gewogen som

$$\begin{aligned} S_1 &= 7 \cdot (n_1 - 1) + 7^2 \cdot (n_2 + 7) + 7^3 \cdot (n_3 - 1) + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5 = \\ &= (7 \cdot n_1 - 7) + (7^2 \cdot n_2 + 7^3) + (7^3 \cdot n_3 - 7^3) + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5 = \\ &= S_0 - 7. \end{aligned}$$

Doen we een zet met het derde of het vierde getal,

dan neemt de gewogen som zelfs af met 7^2 of 7^3 . Het nuttige hiervan is dat de gewogen som S in ieder geval bij elke zet afneemt, zeg voor het gemak met minstens 1 (in feite is het met minstens 7): $S_i > S_{i+1}$. Om die reden noemen we S wel een *potentiaal* van de rij: welke zet we ook doen, de zojuist gedefinieerde potentiaal van de rij neemt altijd af. (Wie iets van natuurkunde weet, snapt waar deze naamgeving vandaan komt.)

Het mooie is dat we nóg iets kunnen zeggen over S . Bij elk (eindig of oneindig) spelverloop krijgen we na elke zet een rijtje dat bestaat uit niet-negatieve getallen (a en c moesten immers positief zijn). Als we zo'n rijtje wegen met de factoren $7, 7^2, 7^3, 7^4$ en 7^5 , blijft dat een niet-negatief getal. Bij elk spelverloop is na elke zet de corresponderende waarde van S dus niet-negatief. Maar dan zijn we eruit! De gewogen som S is altijd niet-negatief en neemt toch elke keer met minstens 1 af:

$$S_0 > S_1 > S_2 > \dots \geq 0.$$

Dat kan nooit oneindig lang zo doorgaan! Zo zou je in bovenstaand voorbeeld meteen kunnen zeggen dat er hooguit 97384 zetten gedaan kunnen worden (wat een zeer ruime bovengrens is, maar goed, eindig is eindig). We hebben opnieuw een argument gevonden waarom elk spelverloop eindig is. Het volledig uitgewerkte bewijs vind je in kader 3.

NIEUWE RONDE, NIEUWE KANSEN De eerstvolgende eerste ronde van de Wiskunde Olympiade wordt op vrijdagmiddag 30 januari 2009 op scholen in heel Nederland georganiseerd. Scholen kunnen zich hiervoor opgeven door voor 20 december 2008 een e-mail te sturen aan Melanie.Steentjes@cito.nl. Mocht jouw school onverhoopt niet meedoen dit jaar en mocht je toch graag willen deelnemen, stuur dan zelf een e-mail zodat we op zoek kunnen naar een andere plek waar je de eerste ronde kunt maken. ■

SANGAKU

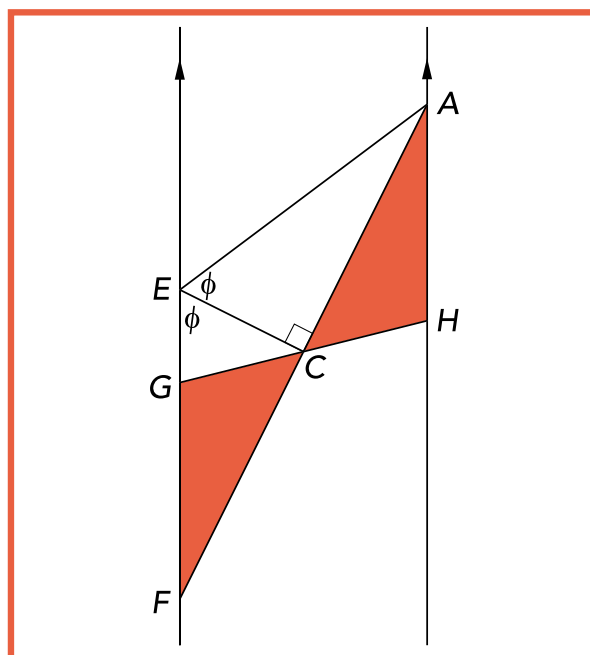
DE OPLOSSING VAN APRIL 2008

In het vorige nummer van *Pythagoras* presenteerden we de oplossingen van de sangaku's van de vorige jaargang. Bij onze oplossing van de sangaku van april 2008 moesten gonio en verdubbelingsformules uit de kast worden getrokken: een plomper bewijs kun je haast niet bedenken. Van Aad Goddijn kregen we een oplossing die wél elegant is.

Gegeven (zie de figuur): twee evenwijdige lijnen; de twee hoeken ϕ bij E zijn gelijk en $\angle ECA$ is recht; HG gaat door C .

Te bewijzen: de driehoeken AHC en FGC zijn congruent.

Bewijs: Alle hoeken van de twee rode driehoeken komen paarsgewijs overeen; dat volgt uit de evenwijdigheid voor A en F en voor G en H ; de hoeken bij C zijn dus ook gelijk (je kunt daarvoor ook het argument 'overstaande hoeken' gebruiken). Rest nog de gelijkheid van één paar zijden aan te tonen. Kies FC en AC . Dat is een goede keus, omdat we meer weten van de driehoeken ECF en ECA : deze hebben EC als gemeenschappelijke zijde, elk een hoek ter grootte ϕ bij E , en elk een rechte hoek bij C , dus $\triangle ECF$ en $\triangle ECA$ zijn congruent (congruentiegeval HZH). ■



De intens verlegen Bernhard Riemann uit de 19de eeuw zat het liefst de hele dag in zijn een-tje over wis- en natuurkunde na te denken. Hij werd gehinderd door een extreem perfectionisme, waardoor hij nooit iets wilde opschrijven totdat hij meende dat het precies klopte, echt de kern van de zaak raakte en niks prijs gaf van alle eenvoudigere inzichten en doodlopende wegen die tot zijn uiteindelijke resultaat hadden geleid. Maar de paar keer dát Riemann zijn ideeën opschreef, bleken deze ideeën altijd geniaal, vernieuwend en hun tijd ver vooruit.

■ door Vincent van der Noort

BERNHARD RIEMANN (1826-1866):

HET MYSTERIEUZE MENSENSCHUWE MEESTERBREIN

Riemanns vader was pastoor in het dorpje Quickborn, in het tegenwoordige Duitsland. De eerste jaren van zijn leven gaf zijn vader hem zelf les. Op zijn veertiende, vlak nadat zijn moeder overleed, ging hij naar het gymnasium in Hannover, waar hij bij zijn oma woonde. Twee jaar later overleed zijn oma ook en verhuisde hij terug naar Quickborn. De dichtstbijzijnde school was in Lüneburg, zestig kilometer verderop. Erg gelukkig was hij daar niet: de dagelijkse heen- en terugreis was natuurlijk geen pretje en zijn klasgenoten, die elkaar al veel langer kenden, vonden de nieuwkomer maar een rare jongen.

Riemanns resultaten op school waren nogal uiteenlopend. Hij onthield alleen de dingen die hij interessant vond. Vreemde talen lezen ging hem prima af, maar spreken of schrijven lukte hem nauwelijks, mede dankzij zijn overdreven precieze formuleringen in het Duits. Als hij huiswerk moest maken, leverde hij dit vaak veel te laat, maar wel foutloos in. Het idee om dingen half of niet perfect te doen vond hij onverdraaglijk, ook als dit hem veel te veel tijd kostte. Met deze houding dreef de jonge Riemann zijn leraren nogal eens tot wanhoop, maar ondanks de strenge schoolregels probeerden ze hem zo veel mogelijk te helpen. Een van de leraren nam hem in huis, zodat hij niet elke dag zo ver hoefde te reizen, en een ander gaf hem wiskundeboeken van Archimedes en Euclides te lezen. Hoogtepunt was een modern boek uit 1808 van Legendre over getaltheorie. De volgende week gaf Riemann het 900 pagina's tellende boek terug met de



woorden 'dit is een wonderbaarlijk boek, ik ken het uit mijn hoofd'. Zoals de directeur van de school later zou opmerken: 'Toen al was hij een wiskundige naast wiens rijkdom een leraar zich arm voelt.'

Ondanks alle goede bedoelingen werd Riemanns leven niet echt leuker. Zijn klasgenoten lieten hem nog steeds links liggen en als hij bij zijn leraar logeerde, werd hij gekweld door heimwee, waardoor hij toch nog vaak de ommelandse reis naar Quickborn ondernam. Door zijn bizarre per-

fectionisme (waardoor hij bij proefwerken nauwelijks iets opschreef) twijfelden zijn leraren lange tijd of hij ooit wel in staat zou zijn examen te doen, maar op wonderbaarlijke wijze lukte het hem toch en zonder al te veel moeite. Een belangrijke drijfveer hierbij was dat hij boven alles zijn vader niet teleur wilde stellen. Om dezelfde reden verhuisde hij op twintigjarige leeftijd naar Göttingen om aan de universiteit aldaar theologie te studeren. Zoals alle vaders hoopte de oude Riemann dat zijn zoon in zijn voetsporen zou treden – bovendien was er in die tijd veel vraag naar goede predikanten. Riemanns familie was niet heel rijk en een studie met ‘baangarantie’ leek een goed idee.

GÖTTINGEN EN BERLIJN Aan de universiteit van Göttingen was echter meer te beleven. Sinds de bouw van de nieuwe sterrenwacht en de aanstelling van Gauss als directeur daarvan (zie het vorige nummer van *Pythagoras*) had Göttingen zich ontwikkeld tot een centrum van onderzoek in de natuurwetenschappen. Nu moet gezegd worden dat Gauss zich het liefst helemaal niet met studenten bemoeide, maar het idee dat hier Grote Ontdekkingen werden gedaan, hing er wel in de lucht. Riemann kon geen weerstand bieden aan de verleiding om de wiskundeboeken in de fantastische bibliotheek in Göttingen, zie figuur 1, te bestuderen. Hij schreef zijn vader dat hij overwoog om van theologie naar wiskunde over te stappen. Toen zijn vader hem toestemming gaf, hield niemand hem meer tegen om zich geheel aan zijn grote liefde, de wiskunde, te wijden.

Zoals gezegd droeg de aanwezigheid van Gauss meer bij aan de goede naam van de universiteit dan aan het leven van de studenten. En de andere wiskundigen in Göttingen waren in het beste geval degelijke maar weinig inspirerende docenten, die zelf weinig aan de ontwikkeling van de wiskunde bijdroegen. Daarom trok Riemann na twee jaar Göttingen zijn stoute schoenen aan en verhuisde naar Berlijn. Dit was een goede zet. Göttingen was een geïsoleerde provincieplaats, maar in Berlijn kwamen mensen van over de hele wereld die interessante, ook wiskundige, ideeën meebrachten. Riemanns medestudenten beschreven hem als een aardige en interessante jongen, maar klaagden ook dat het wel moeilijk was om echt contact met hem te maken. Een van Riemanns inspirators was Peter Lejeune Dirichlet, die in zijn colleges de studenten ademloos mee wist te slepen langs de wonderbaarlijkste bergen en dalen van de toen bekende wiskunde. Na twee jaar was Riemann overtuigd dat hij wilde provomeren in de wiskunde. Hij ging terug naar Göttingen, waar Gauss zijn promotor werd.



Figuur 1 De bibliotheek in Göttingen in Riemanns tijd

GENIALE IDEEËN Riemanns proefschrift ging over complexe getallen. Complexe getallen zijn getallen die je krijgt door de wortel van -1 , sinds Euler bekend onder de naam i , aan de gewone getallen toe te voegen. Nu kun je beargumenteren dat $\sqrt{-1}$ niet kan bestaan, maar met evenveel recht kun je betogen dat -1 zelf ook niet bestaat. Met i kun je prima rekenen, net als met negatieve getallen. Als je eenmaal i en de reële getallen tot je beschikking hebt, kun je daar allerlei nieuwe getallen mee maken door ze bij elkaar op te tellen of met elkaar te vermenigvuldigen. Zo krijg je bijvoorbeeld $1 + i$ en $\sqrt{2} - 3i$: dit zijn zogeheten *complexe getallen*. Vervolgens kun je je afvragen wat er gebeurt als je daar weer wortels van trekt. Het lijkt erop dat je eeuwig bezig kunt blijven met het verzinnen van nieuwe getallen, maar soms kom je toch voor een verrassing te staan.

Leibniz had in de zeventiende eeuw al opgemerkt dat $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, zoals je zelf kunt nagaan door beide kanten van de vergelijking te kwadrateren. In 1799 maakte Gauss een einde aan de speculatie door te bewijzen dat iedere uitdrukking die te schrijven is met behulp van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken ook bondig te schrijven is als $a + bi$, dus als complex getal. In het voorbeeld van Leibniz:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{-3}} &= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \\ \sqrt{1 - \sqrt{-3}} &= \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

WAT IS EEN FUNCTIE? Je kunt je afvragen wat er nog voor Riemann overgebleven was om over na te denken. Het antwoord is: functies. Op school kom je al allerlei functies tegen zoals x^2 , $1/x$ en $\sqrt{x}$. Riemann vroeg zich af wat er gebeurt als je voor x een willekeurig complex getal kiest. Bij $x \rightarrow x^2$ kun je dat gewoon uitrekenen en in veel andere gevallen ook. Maar hier komt de eerste geniale gedachte-sprong van Riemann: een functie hoeft niet nood-

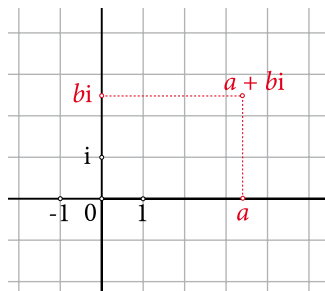
zakelijk door een formule als hierboven beschreven te worden.

De temperatuur aan het ene eind van een ijzeren staaf waarvan je het andere eind in het vuur steekt, is een functie van de tijd. Niemand in Riemanns tijd kon een formule voor deze functie opschrijven. Toch kun je wel iets zinnigs over de functie zeggen, bijvoorbeeld dat de grafiek nergens een sprong maakt: de staaf wordt niet van het ene moment op het andere 10 graden warmer. Ook kun je wel voorspellen dat de temperatuur alleen maar hoger wordt en nooit lager. Riemanns eerste grote bijdrage aan de wiskunde is het idee dat je heel goed over dit soort abstracte eigenschappen van functies kunt nadenken zonder te weten wat de functie is. Voor Riemann (en sindsdien voor alle wiskundigen) is een functie een ding waar je iets (bij voorkeur een complex getal) instopt en waar vervolgens iets (weer een complex getal) uitkomt.

FUNCTIONIES ALS VERVORMINGEN VAN HET VLAK

Dit brengt ons meteen op het volgende geniale idee van Riemann: soms is het beter om over de dingen die je in de functie stopt niet na te denken als getallen, maar als *punten in een vlak*, zie figuur 2. Een functie is nu een recept dat ieder punt in het vlak naar een ander punt in het vlak stuurt. Om te kijken wat een functie doet, kun je een poppetje op het getallenvlak tekenen en kijken wat er mee gebeurt als je ieder punt van de tekening in de functie stopt. De functie $x \rightarrow 3x$ maakt ieder getal drie keer zo groot en je poppetje dus ook. De functie $x \rightarrow ix$ draait de hele tekening 90 graden tegen de klok in. Dit zijn allemaal vriendelijke functies.

Waar we niet op zitten te wachten, zijn functies die het poppetje onthoofden en alle ledematen of zelfs losse punten naar verschillende uithoeken van het getallenvlak sturen. Riemann ging nog een stap verder en eiste van zijn functies dat ze *hoekbehoudend* zijn: de hoek waaronder twee lijnen elkaar snijden is voor de vervorming hetzelfde als daarna, zie figuur 3. Riemann ontdekte dat bijna alle mooie functies die je in het dagelijks leven tegenkomt deze

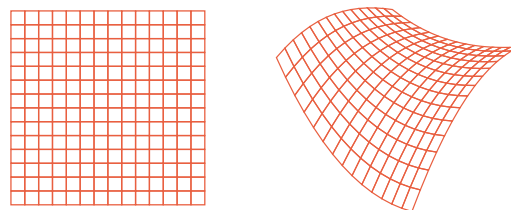


Figuur 2 Complexe getallen getekend in een vlak: het punt met coördinaten (a, b) hoort bij het getal $a + bi$

eigenschap hebben wanneer je ze als functies op het (complexe getallen-)vlak ziet, en omgekeerd dat hoekbehoudendheid een heel strenge eis is. Als je van een hoekbehoudende afbeelding weet hoe hij een klein stukje van het vlak vervormt, dan weet je (althans in theorie) meteen wat hij met de rest van het vlak doet. Het beroemdste voorbeeld van een situatie waarin dit idee heel handig uitpakt, werd tien jaar later door Riemann zelf gegeven: de Riemann-zeta-functie (zie pagina 32). Een van Riemanns grootste prestaties uit zijn proefschrift is het geven van een precieze beschrijving van hoe je aan een functie kunt zien of hij hoekbehoudend is of niet, zonder te praten over vlakken, tekeningen en hoeken. Dit is belangrijk, want in Riemanns tijd werden bewijzen met behulp van tekeningen met groot wantrouwen bekeken.

BOL OF FIETSBAND Maar getallen bekijken als punten op een vlak maakt het leven niet altijd makkelijker. Neem de functie $x \rightarrow -1/x$. Het is niet zo duidelijk hoe die het vlak vervormt – alleen al omdat we niet weten waar we 0 naartoe moeten sturen. Ook hiervoor heeft Riemann een geniale oplossing: we plaatsen de punten niet op een vlak, maar op een bol!

Stel je een bol voor die op het getallenvlak ligt – de zuidpool rust op het getal nul. De bol is doorzichtig en in de noordpool zit een lampje dat naar alle kanten licht uitzendt. Ieder punt (en dus getal) in het vlak wordt geraakt door precies één lichtstraal van het lampje en diezelfde lichtstraal is eerder één keer door de rand van de bol gegaan. Op de plek waar dit gebeurt, zetten we het getal neer dat de lichtstraal uiteindelijk raakt. Zo komt ieder getal op een unieke plek op de bol terecht en heeft ieder punt op het oppervlak van de bol, behalve de noordpool, een eigen getal. Het getal op de noordpool noemen we ∞ omdat wanneer je in het vlak in welke richting dan ook naar oneindig loopt, dit op de bol altijd overeenkomt met een wandeling naar de noordpool. Nu we getallen als punten op een bol kunnen zien, kijken we nog eens naar de functie $-1/x$ en wat blijkt: hij ziet er opeens heel



Figuur 3 Hoekbehoudende vervorming: de rechte lijnen in de linker tekening zijn in de rechter tekening kromgebogen, maar de hoek waaronder twee lijnen elkaar snijden, blijft onveranderd

DE RIEMANNINTEGRAAL EN RIEMANN'S VIEZE FUNCTIE

De integraal van een functie kun je uitrekenen door te kijken naar de oppervlakte onder de grafiek, maar voor sommige grafieken is het niet meteen duidelijk wat deze oppervlakte is. Riemanns idee is het volgende: benader de oppervlakte met een heleboel kleine rechthoekjes met een vaste breedte en als hoogte de waarde van de functie in het midden van het rechthoekje. De echte oppervlakte is de limiet van deze benadering als we steeds meer steeds kleinere rechthoekjes gebruiken. Deze methode leer je in de vijfde klas bij wiskunde B.

Dit idee is natuurlijk al slim, maar het klinkt als iets wat je ook wel zelf had kunnen bedenken. Riemann bewijst echter dat deze methode voor veel functies bruikbaar is dan 'concurrerende' methoden uit zijn tijd. Als voorbeeld ontwikkelde hij een bijzonder vieze functie.

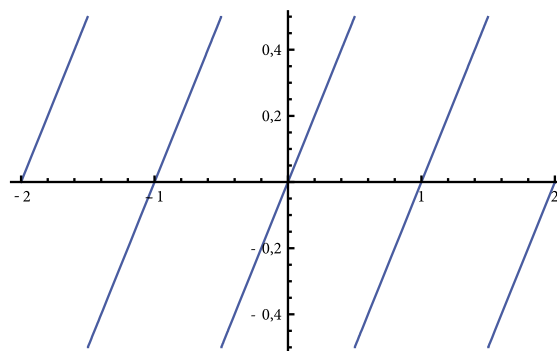
Riemann begint met de functie $r(x) = x$ voor $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $r(x) = 0$ voor $x = \pm \frac{1}{2}$. Hier maakt hij een functie van op alle reële getallen door de grafiek steeds 1 naar links en rechts te verschuiven, zie figuur 4a.

Vervolgens bekijkt hij de functies die je krijgt door de functie $r(x)$ twee, drie, vier etc. keer zo snel te laten verlopen, zie figuur 4b. Riemanns vieze functie is nu gedefinieerd als

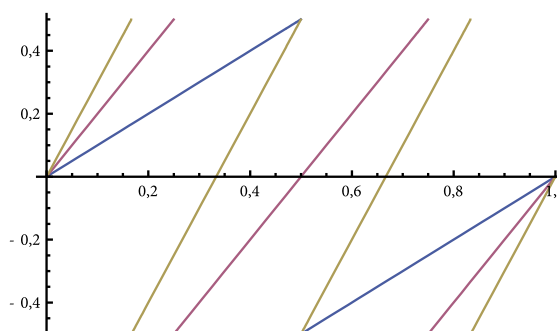
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(nx)}{n^2}.$$

Met de computer kunnen we een *artist impression* van de grafiek geven, zie figuur 5.

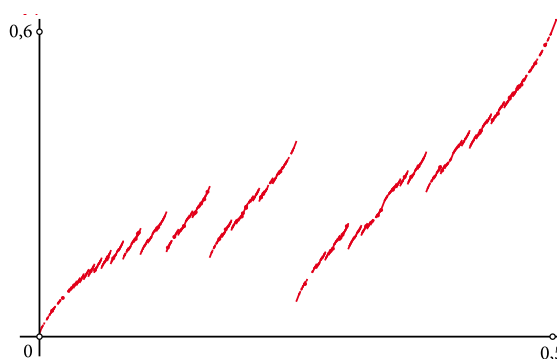
Zoals je ziet, zitten er nogal wat sprongen in de grafiek. Sterker nog: Riemann bewijst dat er tussen iedere twee getallen, hoe dicht op elkaar ook, altijd een sprong zit. Toch geeft Riemanns methode netjes een uitkomst als je probeert de oppervlakte onder deze grafiek uit te rekenen.



Figuur 4a De functie $r(x)$ op het interval $[-2, 2]$



Figuur 4b De functies $r(x)$ (blauw), $r(2x)$ (rood) en $r(3x)$ (groen) op het interval $[0, 1]$



Figuur 5 Riemanns vieze functie $f(x)$. Ondanks de vele sprongpunten kun je toch de 'oppervlakte' onder de grafiek uitrekenen, deze is $\frac{7}{32} \zeta(3) \approx 0,26295$

simpel uit! De functie stuurt namelijk ieder punt van de bol naar zijn tegenvoeter. Het is opeens ook duidelijk dat dit hoeken behoudt. De bol met op deze manier de complexe getallen en oneindig erover verdeeld heet tegenwoordig de *Riemannsfeer*.

Maar de functie $-1/x$ staat niet alleen: als klap op de vuurpijl bewijst Riemann dat er voor iedere (niet te bizarre) functie een oppervlak bestaat waarop je alle getallen en oneindig zo kunt neerzetten, dat de functie als vervorming van dat oppervlak beschouwd, opeens mooi en makkelijk wordt. Het oppervlak in kwestie hoeft niet altijd een vlak

of een bol te zijn, soms is het ook een fietsband bijvoorbeeld, en soms is het nodig om sommige getallen op twee of meer verschillende plaatsen op het oppervlak te zetten, maar het kan altijd. Deze revolutionaire nieuwe manier om tegen functies (en eigenlijk ook tegen getallen) aan te kijken, werd niet meteen door iedereen begrepen, maar heeft uiteindelijk heel veel invloed gehad omdat moeilijke functies op deze manier een stuk makkelijker te begrijpen zijn. Riemann's rare getallenoppervlakken worden tegenwoordig, geheel terecht, *Riemannoppervlakken* genoemd.

DE JAREN VIJFTIG Gauss regelde dat Riemann na zijn promotie (tegen een heel klein salaris) aan de universiteit mocht blijven om aan een *Habilitationsschrift* te werken: een soort tweede proefschrift dat men in Duitsland moest schrijven om toestemming te krijgen les te geven aan de universiteit. Hierin bekeek Riemann ook functies, maar vanuit een heel ander standpunt. Kort daarvoor had Fourier ontdekt dat veel functies benaderd kunnen worden door mooie sinusvormige functies bij elkaar op te tellen. Tegenwoordig wordt dit principe gebruikt door synthesizers om de ingewikkeld gevormde geluidsgolven van violen en piano's na te bootsen. Riemann stortte zich in zijn Habilitationsschrift op de vraag welke functies wel en welke niet op deze manier te schrijven zijn. Hierbij ontwikkelde hij de later beroemd geworden *Riemannintegraal*, zie het kader op de vorige pagina.

Riemann publiceerde in 1857 twee artikelen over functies van complexe getallen met daarin de revolutionaire ideeën uit zijn proefschrift plus een paar nieuwe. De artikelen sloegen in als een bom in de wetenschappelijke wereld – plotseling werd Riemann uitgenodigd om op allerlei buitenlandse universiteiten over zijn werk te spreken.

In Riemanns persoonlijke leven was deze tijd minder vrolijk: in korte tijd stierven achter elkaar zijn vader, zijn broer en een zus. Hij nam zijn overgebleven twee zussen in huis. Zijn financiële situatie werd hier niet beter van, maar zijn sociale leven wel. Uiteindelijk trouwde hij zelfs, met een vriendin van een van zijn zussen.

De grootste eer die Riemann op professioneel gebied ten deel viel, was het lidmaatschap van de Berlijnse Academie van Wetenschappen in 1857. Het was ter ere van deze benoeming dat hij zijn beroemd geworden artikel schreef over wat later de *Riemann-zeta-functie* is gaan heten. De vraag die hij in het artikel stelt lijkt op de vraag uit zijn proefschrift: wat gebeurt er als je complexe getallen invult in de volgende, door Euler bedachte, interessante functie:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Het antwoord kwam voor de meeste lezers als een donderslag bij heldere hemel: door dit te doen bleek Riemann in staat allerlei verregaande conclusies over priemgetallen te kunnen trekken. Priemgetallen! De meest mysterieuze objecten uit de wiskunde en bovendien een onderwerp waar Riemann zich nooit mee beziggehouden leek te hebben.

RIEMANN, HET MYSTERIE Riemanns beroemde zeta-artikel lijkt, tegen zijn karakter in, een beet-

je in de haast geschreven te zijn. Veel ideeën zijn niet of half uitgewerkt en Riemann beweert er zelfs dingen in waarvan hij niet zeker weet of ze waar zijn. Er wordt wel gespeculeerd dat de benoeming hem overviel en hij snel iets over priemgetallen wilde schrijven om zijn (kort daarvoor overleden) grote voorbeelden Gauss en Dirichlet te eren. Hoe dat ook zij: het artikel heeft bepaald hoe de wiskundige wereld de daarop volgende 150 jaar tegen priemgetallen heeft aangekeken, en inmiddels is een terloopse observatie van Riemann over de nulpunten van de zeta-functie uitgegroeid tot DE heilige graal van de wiskunde: de *Riemannhypothese* (zie *Pythagoras* september 2005 en juni 2006).

Na Riemanns vroege dood (hij werd veertig jaar) drong het besef door dat hij veel meer van wiskunde geweten moet hebben dan hij opschreef. Een ander voorbeeld waar dat uit bleek was de toespraak die hij hield bij zijn habilitatie: in een uur schetste hij een groot aantal spectaculaire ideeën over de meetkunde van gekromde ruimten die later de wiskundige formulering van Einsteins algemene relativiteitstheorie mogelijk maakten. Daarvoor wist niemand dat hij überhaupt over meetkunde nadacht – in zijn Habilitationsschrift is er niks over terug te vinden. Maar het verhaal is nog sterker: Riemann bereidde voor die gelegenheid maar liefst drie verschillende toespraken voor en liet Gauss er een uitkiezen. De andere twee gingen over elektromagnetisme, maar de inhoud daarvan zullen we nooit weten.

In de jaren 1920, toen de Riemannhypothese de wiskundige gemoederen net zo bezig hield als nu, dook de wiskundige Carl Ludwig Siegel in de nageblaten boeken en schriften van Riemann om te zien of deze niet toch meer over zijn eigen vermoeden wist dan hij had opgeschreven. Tot ieders verbazing ontdekte hij dat Riemann in staat geweest was een groot aantal nulpunten van de zeta-functie te berekenen met een manier die veel eleganter en efficiënter was dan het beste dat de wiskundigen van Siegels tijd in staat waren geweest te produceren. Meer dan zestig jaar na zijn dood bleek Riemann de volledige wiskundige wereld nog altijd te slim af te zijn.

Achteraf kunnen we alleen maar concluderen dat Riemann een van de meest invloedrijke wiskundige aller tijden geweest is, die we graag een leuker leven hadden gegund. ■

GEBRUIKTE LITERATUUR

Detlef Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826-1866: Turning points in the conception of mathematics* (translated by Abe Shenitzer), Birkhäuser, Boston, 1999

Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*, Harper Collins.

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

AAP, NOOT, MIES
 $553 + 8664 = 9217$

SCHRIKKELJAAR
In 2036 is Liesje voor het eerst weer
jarig op dezelfde dag
van de week.

GETALLEN SCHRIJVEN
TIEN schrijf je met 10 lucifers.

PATRIJSPOORTEN
Het goedkoopste is twee patrijspooten
van 4 m^2 en één van 1 m^2 .
De prijs is dan $2 \times 4 \times 400 + 2 \times 8 \times 200 +$
 $1 \times 1 \times 100 + 1 \times 4 \times 200 = 7300$ euro.
Eén patrijspoot van 9 m^2 kost
 $9 \times 900 + 12 \times 200 = 10500$ euro.
Negen van 1 m^2 kosten
 $9 \times (100 + 4 \times 200) = 8100$ euro.

ZAGEN
De cirkel en het vierkant hebben precies
dezelfde oppervlakte.

**PYTHA
GORAS**

48ste jaargang nummer 2
november 2008
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder
auspiciën van de Nederlandse Onder-
wijscommissie voor Wiskunde en richt
zich tot alle leerlingen van vwo en havo.
Pythagoras stelt zich ten doel jongeren
kennis te laten maken met de leuke en
uitdagerende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine
Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar,
Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünewald

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig
Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal,
Korteweg-de Vries Instituut voor
Wiskunde,

Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per
e-mail; lezersreacties naar Jan Guiche-
laar, jan@pythagoras.nu en kopij naar
Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu.
Eventueel per post naar Jan Guichelaar,
Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Am-
sterdam.

**Abonnementen, bestellingen en
mutaties**

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten
Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel.
Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 14,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

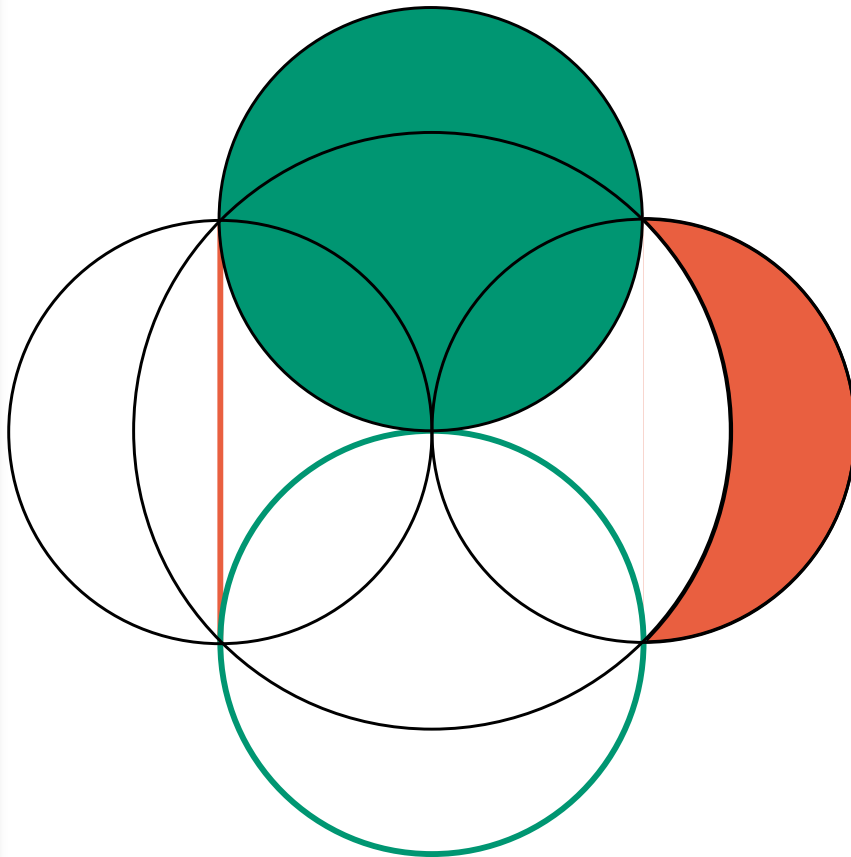
T. Andris, goochelaar ([tilman@pythago-
ras.nu](mailto:tilman@pythago-
ras.nu)), ir. D. Beekman, auteur van diverse
breinbrekerboeken ([dh.beekman@het-
net.nl](mailto:dh.beekman@het-
net.nl)), drs. A.J. van den Brandhof, do-
cent wiskunde op het Vossiusgymnasium
te Amsterdam (alex@pythagoras.nu), dr.

M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker
bij het Ministerie van Defensie ([mat-
thijs@pythagoras.nu](mailto:mat-
thijs@pythagoras.nu)), drs. J. Daems, aio
wiskunde aan de UL ([jeanine@pythagoras.
nu](mailto:jeanine@pythagoras.
nu)), dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinato-
rische optimalisering aan de UvA ([dion@
pythagoras.nu](mailto:dion@
pythagoras.nu)), dr. J. Guichelaar, voorma-
lig directeur van Interconfessionele Scho-
lengroep Amsterdam ([jan@pythagoras.
nu](mailto:jan@pythagoras.
nu)), A. de Haan, student wiskunde aan
de UvA (anne@pythagoras.nu), dr. K.P.
Hart, docent topologie aan de TU Delft
(kp@pythagoras.nu), drs. A. Jaspers, we-
tenschapsjournalist ([arnout@pythagoras.
nu](mailto:arnout@pythagoras.
nu)), A. Kret, student wiskunde aan de
UL (arno@pythagoras.nu), drs. V. van der
Noort, aio wiskunde aan de UU ([noort@
math.uu.nl](mailto:noort@
math.uu.nl)), drs. T. Notenboom, voormalig
docent wiskunde op de Hogeschool van
Utrecht (thijs@pythagoras.nu), dr. G.W.Q.
Puite, docent wiskunde aan de TUE en de
Hogeschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl),
prof.dr. A. Schrijver, hoogleraar wiskunde
aan de UvA en het CWI ([lex.schrijver@
cwi.nl](mailto:lex.schrijver@
cwi.nl)), I.M. Smit, student wiskunde aan
de UvA (iris@pythagoras.nu), M. van der
Staaïj, leerling van het Vossiusgymnasium
te Amsterdam ([michiel_staaay@hotmail.
com](mailto:michiel_staaay@hotmail.
com)), drs. B. Zevenhek, docent wiskunde
op het Barlaeusgymnasium te Amsterdam
(bartzevenhek@gmail.com)

Sponsors Pythagoras wordt mede mo-
gelijk gemaakt door de bijdragen van de
volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.