

PYTHA GORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

IEDEREEN GEMATCHT
met het huwelijksalgoritme

Magische zeshoeken
Cantors visie op oneindigheid

48ste JAARGANG - NUMMER 3 - JANUARI 2009

NIEUW: SANGAKUPOSTER



Een poster in A1-formaat met zes kleurrijke sangaku's uit recente nummers van Pythagoras. Bestel deze poster voor maar € 3,50*. Kijk op de webshop op www.pythagoras.nu of bel 0522-855175 om de poster te bestellen.

BEDENK ZELF EEN SANGAKU!

Heb je zelf een goed idee voor een sangaku? Stuur je ontwerp naar ons op [via post@pythagoras.nu](mailto:post@pythagoras.nu) en wie weet zie je jouw sangaku in een volgende *Pythagoras*! Of... op een volgende poster!

* Exclusief verzendkosten à 8 euro in een stevige koker (maximaal drie posters per koker). De verzendkosten worden na plaatsing van de bestelling berekend en via een acceptgirokaart in rekening gebracht.

INHOUD



DE HUWELIJSSTELLING VAN HALL

Het thema-artikel gaat deze keer over een stelling uit de grafentheorie met de illustere naam 'huwelijksstelling'. Wanneer kunnen dames, waarbij ieder haar eigen voorkeurslijstje heeft, worden gekoppeld aan beschikbare heren en wanneer lukt dat niet?

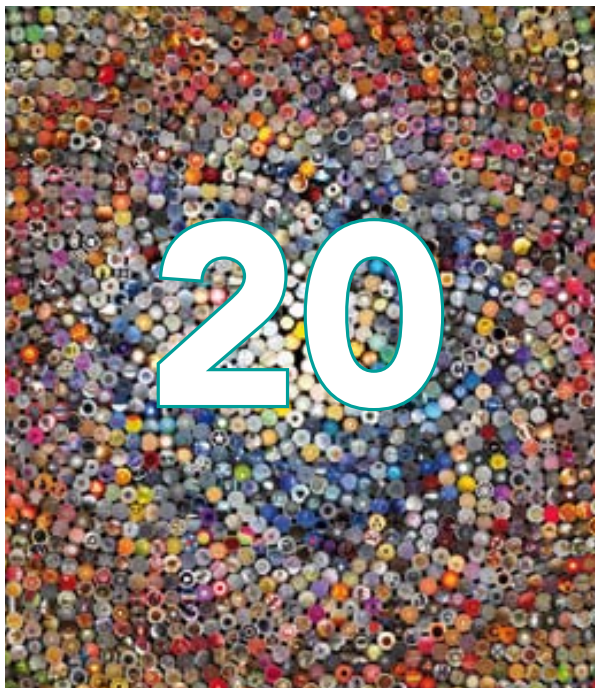


GEORG CANTOR (1845-1918): BEDWINGER VAN HET ONEINDIGE

Georg Cantor geldt als grondlegger van de verzamelingenleer. Zijn opvattingen over verzamelingen ondervonden veel oppositie, maar later bleek zijn kijk op oneindige verzamelingen heel vruchtbaar.

PRIEMGETALLEN EN FIBONACCI, DEEL 2

Voor de doorzetter: het vervolg van het artikel over verrassende verbanden tussen priemgetallen en Fibonacci-getallen.



EN VERDER

- 2 Kleine nootjes
- 4 Groener gras, blauwere lucht en meer hagelslag
- 6 Journaal
- 13 Regelmatige veelhoeken op volgorde
- 14 Zeshoekmagie
- 16 De record-octaëder van aluin
- 18 Problemen - Oplossingen
- 25 Prijsuitreiking Wiskunde Olympiade
- 26 Pythagoras Olympiade
- 33 Oplossingen Kleine nootjes nr. 2

■ **NIVEAUBALKJES** Pagina's met één of meer zwarte balkjes (onder de paginanummering) geven de moeilijkheidsgraad aan. Eén balkje: lastig. Twee balkjes: vereist wiskundekennis uit de vijfde of zesde klas. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden.

De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

■ door Dick Beekman en Jan Guichelaar

NIEUWJAAR

Hiernaast zie je de eerste tien Fibonacci-getallen (zie ook het artikel op pagina 20). Zet de rij verder voort, en probeer dan door optellen van Fibonacci-getallen het jaartal 2009 te vormen.

Wat is het kleinste aantal getallen dat je nodig hebt?

VERKNIPT VIERKANT

Verdeel een vierkant in zes gelijkbenige driehoeken, waarvan er vijf een gelijke oppervlakte hebben.

BLAUWE KNIKKERS

In een hoed zitten rode, witte en blauwe knikkers; vijftien in totaal. Paul pakt heel vaak twee knikkers uit de hoed (na elke greep legt hij de twee getrokken knikkers terug). In eenderde van de grepen pakt Paul een rode en een witte knikker. Hoeveel blauwe knikkers zitten er in de bak?

HAZENSPRONG

Een haas zit op een hoekveld van een bord van 3×3 velden. Hij kan elk veld in één sprong bereiken. De haas maakt drie sprongen (nooit recht omhoog; hij belandt dus nooit op hetzelfde veld als waarvan hij vertrekt). Op hoeveel manieren kan de haas eindigen op het hoekveld schuin tegenover?

SOMMEN VAN KWADRATEN

Sommige getallen kun je schrijven als de som van twee kwadraten, bijvoorbeeld $13 = 2^2 + 3^2$.
Wat is het kleinste getal dat je op twee manieren kunt schrijven als de som van twee kwadraten?

Het gras bij de buren is altijd groener, en de boterham van m'n buurman aan tafel is altijd dikker belegd met hagelslag. Daar staat tegenover dat het prachtige blauwe gat in een wolkenlucht meestal precies boven mijn hoofd hangt. Toeval? Nee, het is maar hoe je het bekijkt.

■ door Simon Biesheuvel



GROENER GRAS, BLAUWERE LUCHT EN MEER HAGELSLAG

4



Toen ik een keer op de fiets naar school reed, merkte ik op dat ik in de zon reed. Maar er was maar één blauwe plek tussen de wolken boven mij, waardoor de zon precies op mij scheen. Verder was tot aan de horizon alles zwaar bewolkt: als ik meer zijdelings om mij heen keek, zag ik een aaneengesloten wolkendek. Wat had ik een geluk: net waar ik reed, scheen de zon. Maar dit was me al veel vaker overkomen. Ben ik zo bijzonder dat ik steeds in de zon mag rijden?

Niet als je bedenkt, dat het wolkendek best overal dezelfde gaten kan vertonen. Maar alleen die plek net boven mijn hoofd geeft mij uitzicht op de blauwe hemel. Tegen die andere gaten kijk ik veel schuiner aan, zodat de wolken daar als een soort lamellen de blauwe lucht afdekken. Anderen zien weer niet de opening in de wolken waar ik sta en denken misschien ook dat zij erg veel geluk hebben.

In andere situaties werkt dat precies omgekeerd, en kan je denken dat je zelf altijd pech hebt of benadeeld wordt. Zo luidt een spreekwoord: 'Bij de burens lijkt het gras altijd groener.' Het betekent dat het lijkt of anderen het altijd beter hebben. Maar het is echt waar: het gras ziet er werkelijk groener uit bij de burens. Kijk je naar je eigen gras, dan zie je veel kale plekjes omdat je er bijna verticaal bovenop kijkt. Je kunt de aarde tussen de grassprietjes zien, zodat het niet een groen geheel is. Maar bij de burens zie je de aarde niet en kijk je alleen maar tegen groen aan. Vergeleken met het eerste voorbeeld is de aarde nu de blauwe lucht en zijn de grassprietjes de wolken.

Gewapend met deze kennis kunnen we nu bepaalde ruzies aan de eettafel onderzoeken. Want natuurlijk krijg je wel eens op je kop van je moeder omdat je te veel hagelslag op je brood had. En dat, terwijl je duidelijk kon zien dat ze zelf meer had dan jij! Dat komt doordat ze op haar eigen boterham, waar ze recht bovenop kijkt, tussen de korrels nog boter ziet en bij jouw boterham niet. Het lijkt dus alleen maar of jij veel meer hagelslag hebt. Tegelijkertijd zie jij op je eigen brood meer boter en bij haar minder. De snelste oplossing is om de twee borden naast elkaar te zetten en er om de beurt van bovenaf op neer te kijken. Weer een generatieconflict in de kiem gesmoord... ■

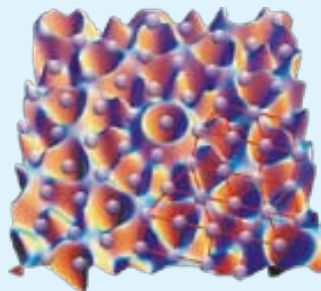
JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof

Wat een toestand!

Quasikristallen zijn materialen met een ingewikkelde chemische structuur. Twee onderzoekers uit Stuttgart hebben de atoomstructuur van quasikristallen nagebootst en ontdekten iets verrassends.

Een stof heet een quasikristal als de atomen zich in een a-periodiek rooster bevinden. Dit rooster correspondeert met de beroemde a-periodieke Penrosebetegeling. Jules Mikhael en Clemens Bechinger van de universiteit van Stuttgart hebben de atoomstructuur van quasikristallen nagebootst op een iets grotere schaal, en zonder de scheikundige complicaties, om de eigenschappen van quasikristallen te onderzoeken. Zij legden een groot aantal kleine plastic balletjes in een bak met water. Door hun negatieve lading vormen de balletjes in water een perfect periodiek, driehoekig rooster. De balletjes proberen zo ver mogelijk uit elkaar te gaan liggen. Stoffen waarbij de atomen zich in een soortgelijk rooster bevinden, heten kristallen. Vervolgens werden er vijf laserstralen door de bak water heen gestuurd. De balletjes worden aangetrokken door de plaatsen waar de intensiteit van de laserstralen het grootst is, dat zijn de snijpunten van de laserstralen. Daardoor konden Mikhael en Bechinger de lasers zo plaatsen dat de balletjes zich na inschakeling van de lasers verplaatsten naar de



Het patroon bij een tussenliggende laserintensiteit (afbeelding: Jules Mikhael)

gewenste a-periodieke toestand.

In het proces ontdekten de onderzoekers iets verrassends. Ze speelden wat met de intensiteit van de laserstralen en merkten dat de balletjes bij een hele lage intensiteit terugkeerden naar hun oorspronkelijke, periodieke toestand. Dat was zoals verwacht. Bij een tussenliggende intensiteit ontstond er echter ook een tussenliggend patroon, een patroon dat leek op een Archimedische vlakvulling: een vlakvulling met twee

of meer soorten regelmatige veelvlakken, waarvan de zijden allemaal even lang zijn en waarbij alle punten waar verschillende veelvlakken elkaar raken identiek zijn. In de tussenliggende toestand vormden de balletjes afwisselend rijen van driehoeken en rijen van vierkanten (zie illustratie). Het zo verkregen rooster zou een Archimedische vlakvulling zijn, maar de periodieke structuur wordt onderbroken doordat er om de zoveel rijen een extra rij driehoeken is. Hierdoor zijn er punten waar twee vierkanten en drie driehoeken elkaar raken, maar ook punten waar zes driehoeken samenkomen. Niet al deze punten zijn dus identiek. Opmerkelijk is het dat de rij rangnummers van plaatsen waar zo'n extra rij driehoeken voorkomt, de rij van Fibonacci vormt.

Bron: *Nieuw Archief voor Wiskunde* / www.sciencenews.org

Pythagoras op Wetenschapsdag

Op de Wetenschapsdag 2008, die in de herfstvakantie onder het motto 'Kraak de code' in heel Nederland plaatsvond, was *Pythagoras* in Amsterdam en Leiden vertegenwoordigd. Bezoekers konden bij de Pythagorasstand meedoen aan een prijsvraag: wie een vercijferde boodschap correct wist

te ontcijferen, maakte kans op een houten labyrint van Arabesk.

Van alle goede inzendingen heeft *Pythagoras* een winnaar getrokken. De prijs is gegaan naar Iwan, Gerdien en Simon van Holst uit Almere, die samen hun oplossing instuurden. Van harte gefeliciteerd!

Een leuke vrijdagmiddag!

Vind je wiskunde leuk en heb je zin in een extra uitdaging? Heb je wel eens getwijfeld om naar een wiskundekamp te gaan, maar besloot je dat een hele week achter elkaar wiskunde doen wel een beetje veel is? Of ben je wel eens op wiskundekamp geweest en mis je de wiskunde die je daar doet de rest van het jaar?

Dan is de Wiskundekring misschien wel wat voor jou! De Wiskundekring, een initiatief van de VU en stichting Vier-

kant, komt eens in de twee weken bij elkaar op de VU in Amsterdam en is bedoeld voor jongeren tussen 13 en 16 jaar oud. De deelnemers van de Wiskundekring voeren korte wiskundige onderzoeken uit en lossen uitdagende puzzels op. Docenten van de VU geven workshops, waarin dieper wordt ingegaan op bepaalde onderwerpen. Allerlei verrassende aspecten van de wiskunde komen zo aan de orde!

De meeste deelnemers horen

van de Wiskundekring via hun wiskundeleraar, maar je kunt je ook gewoon zelf aanmelden. Je kunt een hele reeks meedoen, maar je mag ook af en toe komen als je zin hebt. Elke twee weken is er een bijeenkomst op vrijdagmiddag van 16 tot 18 uur. Kijk voor meer informatie op www.math.vu.nl/wiskundekring. Je leest daar ook hoe je je kunt aanmelden.

Dikke vonken flitsen sneller

Bliksem, een spectaculaire kortsluiting tussen hemel en aarde, is heel bekend maar nog niet goed begrepen. Reden voor het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) uit Amsterdam om eens goed te gaan rekenen aan bliksemflitsen. Het verbazende resultaat: dikke flitsen gaan sneller dan dunne, maar alleen als de vonk van de aarde naar het geladen object slaat.

Vonken die van de wolken naar de aarde overspringen, heten 'negatieve ontladingen'. De andere kant op is ook mogelijk, maar in de natuur heel zeldzaam. In het laboratorium is het juist omgekeerd: daar blijkt het makkelijk om vonken van de aarde naar een geladen voorwerp te laten springen. Bij dat soort vonken, 'positieve ontladingen' geheten, gaan dikke flit-



sen sneller dan dunne. Bovendien zijn positieve vonken meestal sneller dan negatieve, ook al verwachtten onderzoekers precies het omgekeerde. Deze effecten werden voor het eerst berekend door Alejandro

Luque, Valeria Ratushaya en Ute Ebert van het CWI. De simulaties bevestigen uitkomsten van recente bliksemexperimenten aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Bron: Kennislink

In de vorige twee afleveringen heb je al kennis kunnen maken met het begrip *graaf* en hoe grafen worden gebruikt door Google's zoekmachine en door de NS bij het maken van een optimale dienstregeling. De grafentheorie is een vrij jong vakgebied dat in 1936 op de kaart werd gezet door de Hongaar Dénes König. In dit artikel duiken we in de theorie van matchings, met als een hoogtepunt de stelling van Hall.

■ door Dion Gijswijt



8

Manifestatie van de Koreaanse Moon-sekte in februari 2000. Bij zulke gelegenheden treden honderden Moonies tegelijk met elkaar in het huwelijk.

We beginnen met een uitstapje naar een fictief dorpje waar zich elk jaar een spectaculair huwelijksfeest voltrekt. De traditie bepaalt namelijk dat ieder jaar de ongehuwde jonge vrouwen gekoppeld zullen worden aan beschikbare vrijgezelle mannen. Een groot feest, maar niet zonder de nodige kopzorgen, zoals gauw zal blijken. De jonge dames zijn nogal kieskeurig, ze willen natuurlijk niet aan de eerste de beste uitgehuwelijkt worden. Na veel wiken en wegen komt elke dame met een verlanglijstje bestaande uit een aantal van de vrijgezelle mannen die ze wel leuk vindt en waarmee ze wel in het huwelijksbootje zou willen stappen. De mannen zijn minder kieskeurig: een man is gelukkig met elke vrouw die hem hebben wil.

Nadat de vrouwen hun wensen kenbaar hebben gemaakt, trekt de Raad der Wijzen zich terug om te beraadslagen over de mogelijkheden om de dames elk met een man te *matchen*, zó dat de wensen van de vrouwen worden gerespecteerd. De hamvraag is: *kunnen alle vrouwen aan een partner van hun keuze worden gekoppeld?*

Dit jaar staat de raad voor een moeilijk raadsel. Er zijn precies zes huwbare dames en ook slechts zes vrijgezelle mannen. Hier zie je de exacte wensen van de dames. De dames zijn aangegeven met *a* tot en met *f* en de mannen met 1 tot en met 6.

Dame	Partnerkeuze
<i>a</i>	{2, 3}
<i>b</i>	{1, 2, 4, 5}
<i>c</i>	{2, 6}
<i>d</i>	{2, 6}
<i>e</i>	{3, 4, 5}
<i>f</i>	{3, 6}

In figuur 1 zie je hetzelfde lijstje weergegeven in een matrix. Om vier van de dames te koppelen is niet zo lastig: dat kan bijvoorbeeld zo: *a-2, b-1, e-3, f-6*. Voor *c* en *d* is nu geen vrijgezel meer over. Na veel beraadslagen lukte het de raad uiteindelijk ook om zelfs vijf van de dames aan een van hun gewilde vrijgezellen te koppelen.

Opgave 1. Kun jij vijf dames koppelen met een vrijgezel van hun keuze?

Als het inderdaad mogelijk is om alle zes de dames te koppelen, dan zal de raad in zijn wijsheid wel een oplossing vinden. Maar stel nu eens dat het *niet* mogelijk is om alle dames te koppelen. Na lang puzzelen bekruipt de wijzen het gevoel dat de puzzel onoplosbaar is, maar hoe kunnen ze daar zeker van zijn? Hoe kun je *bewijzen* dat er geen oplossing bestaat?

		mannen					
		1	2	3	4	5	6
vrouwen	<i>a</i>		♥	♥			
	<i>b</i>	♥	♥		♥	♥	
	<i>c</i>		♥				♥
	<i>d</i>		♥				♥
	<i>e</i>			♥	♥	♥	
	<i>f</i>			♥			♥

Figuur 1 Zes vrouwen vallen elk op een aantal van zes vrijgezelle mannen. Kunnen de zes vrouwen met de zes mannen worden gekoppeld, zó dat elke vrouw een man van haar keuze trouwt?

BEWIJS VAN ONMOGELIJKHEID In sommige gevallen is het eenvoudig te zien dat er geen oplossing is. Als er bijvoorbeeld een dame is die *niemand* leuk vindt gaat het feest niet door. Ook als er twee dames zijn die allebei enkel één en dezelfde man willen, gaat het mis. Voor het bestaan van een oplossing moeten eveneens iedere drie dames samen ten minste drie mannen op hun verlanglijstjes hebben staan. In het algemeen kan het huwelijksprobleem alleen een oplossing hebben als geldt:

Gezamenlijk willen iedere k dames ten minste k vrijgezellen trouwen, voor elke k.

Dit heet wel de *huwelijksvoorwaarde* en het is duidelijk dat de voorwaarde noodzakelijk is. Heel verrassend is echter, dat het omgekeerde ook geldt: als aan de voorwaarde is voldaan, is er ook echt altijd een oplossing voor het huwelijksprobleem!

Stelling (Huwelijksstelling van Hall). Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een oplossing van het huwelijksprobleem is, dat iedere *k* dames samen ten minste *k* verschillende mannen willen trouwen.

Deze stelling werd bewezen door de Engelse wiskundige Philip Hall. Hij was niet zozeer geïnteresseerd in vrouwen en huwelijksproblemen als wel in de *groepentheorie*. In abstracte termen zegt de stelling van Hall onder welke conditie een aantal gegeven verzamelingen (de lijstjes van partnerkeuzes) een *transversaal* hebben. Een transversaal is een keuze van één element uit elke verzameling, zó dat de gekozen elementen verschillend zijn.

Opgave 2. Vind een transversaal van de verzamelingen $\{1, 4, 5\}$, $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ en $\{2, 4\}$.

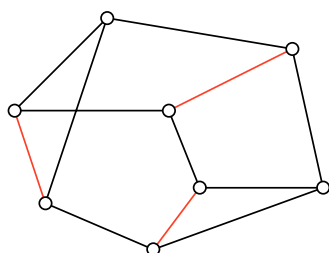
Terugkerend naar het gegeven huwelijksprobleem zien we dat dames a, c, d en f samen maar drie mannen willen huwen, namelijk nummers 2, 3 en 6. Er is dus geen mogelijkheid om alle zes dames uit te huwelijken!

Als het zo is dat we niet altijd *alle* dames kunnen uithuwelijken, dan rijst de vraag: Wat is het maximale aantal dames dat kan worden gekoppeld?

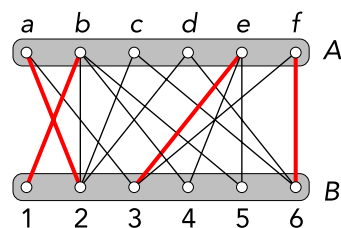
MATCHING IN GRAFEN Om dit huwelijksprobleem op te lossen, vertalen we het naar een probleem op grafen. Ter herinnering: een graaf bestaat uit een verzameling *punten* (of *knopen*) en een verzameling *lijnen* (of *takken*). Een lijn verbindt twee punten van de graaf. Twee punten die door een lijn verbonden zijn, heten *buren* van elkaar. Vaak wordt een lijn getekend als een lijnstuk of kromme tussen de twee eindpunten. Hoe de lijn precies getekend wordt, is onbelangrijk: welke twee punten verbonden worden, is het enige dat telt. Een graaf kan bijvoorbeeld als puntenverzameling alle Nederlanders hebben, waarbij twee personen verbonden worden door een lijn als ze bevriend zijn op Hyves.

Een deelverzameling M van de lijnen van een graaf heet een *matching* als de lijnen in M 'los van elkaar liggen', dat wil zeggen: geen twee lijnen in M hebben een gemeenschappelijk eindpunt. Het totaal aantal lijnen in een matching kan dus hoogstens gelijk zijn aan de helft van het aantal punten van de graaf. In figuur 2 zie je een voorbeeld van een graaf en een matching in die graaf.

Het huwelijksprobleem kan als volgt worden gemodelleerd. De verzameling punten van de graaf is opgedeeld in twee verzamelingen A en B . Voor iedere vrouw is er een bijbehorend punt in A en voor iedere man is er een punt in B . We trekken een lijn tussen een vrouw en een man, als zij met hem zou willen trouwen. De resulterende graaf heet *bipartiet* omdat de punten in twee verzamelingen zijn opgedeeld en lijnen altijd punten uit verschillende verzamelingen verbinden. Het voorbeeld uit de inleiding geeft op deze manier de graaf in figuur 3. In



Figuur 2 Een graaf met een matching



Figuur 3 In rood de koppeling van vier dames

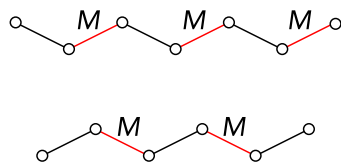
rood is de koppeling van vier dames gegeven. De mogelijke uithuwelijkingen van de dames corresponderen precies met matchings in de bipartiete graaf. We zijn dus op zoek naar een matching die alle punten in A matcht (aan punten in B). De stelling van Hall vertaalt zich als volgt.

Er bestaat een matching die heel A matcht, precies dan als iedere k punten uit A samen ten minste k buren in B hebben (voor iedere $k = 1, 2, \dots$).

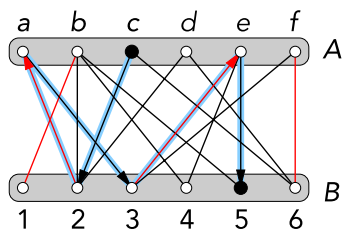
Opgave 3. Je kunt een schaakbord zien als een graaf met de velden als punten, waarbij twee velden een lijn vormen als ze een zijde gemeen hebben. Waarom is dit een bipartiete graaf? Een (gedeeltelijke) betegeling met dominostenen vertaalt zich als een matching. Wanneer twee velden op een diagonaal worden verwijderd, is het dan mogelijk de resterende 62 velden te betegelen met 31 dominostenen?

VERBETER DIE MATCHING! Stel dat je een graaf hebt met een matching M . Hoe kom je er achter of er een matching is met meer lijnen? Je zou gewoon vanaf nul kunnen beginnen en op goed geluk een nieuwe matching zoeken. Er blijkt echter een truc te zijn waarmee je de matching die je al hebt, kunt aanpassen tot een matching met meer lijnen (als die bestaat). We bekijken daarvoor paden in de graaf die afwisselend een lijn *buiten* de matching en een lijn *in* de matching doorlopen. Zo'n pad heet een *M -alternerend pad*. In figuur 4 zie je schematisch hoe zo'n pad eruit ziet.

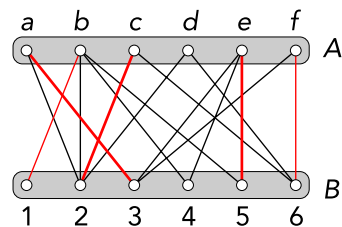
Als beide eindpunten van een M -alternerend pad *niet* door M worden gematcht, dan heet het pad *M -verbeterend*. De reden voor deze naam is dat een M -verbeterend pad een manier geeft om uit M



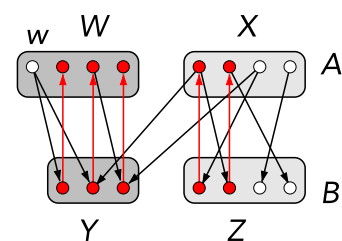
Figuur 4 Twee M -alternerende paden



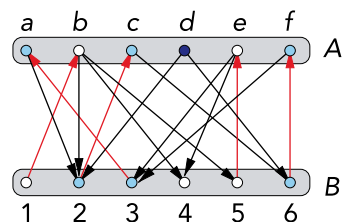
Figuur 5 Een verbeterend pad



Figuur 6 Een betere matching



Figuur 7 De punten in W en Y zijn bereikbaar vanuit punt w



Figuur 8 Alleen de blauwe punten zijn bereikbaar vanuit d

een grotere matching te maken. Eerst verwijderen we alle lijnen uit M die op het verbeterende pad liggen. Daarna voegen we de andere lijnen op het pad juist toe aan de matching M . Dit resulteert in een matching (ga na!) met één lijn meer: als extra zijn nu ook de eindpunten van het pad gematcht. Een voorbeeld van een verbeterend pad voor de gevonden matching met 4 koppels zie je in figuur 5. Door de matching langs dit verbeterende pad te wijzigen, vinden we een betere matching met 5 koppels, zie figuur 6.

Het idee van verbeterende paden gaat terug op de Deense wiskundige Julius Petersen. Hij merkte op dat als er een grotere matching dan de huidige matching M bestaat, er ook altijd een M -verbeterend pad is. Voor het vinden van een zo groot mo-

gelijke matching volstaat het dus om te beginnen met een enkele lijn en die matching stap voor stap te vergroten met verbeterende paden.

Opgave 4. Vind een verbeterend pad voor de matching in figuur 2.

BIPARTIETE GRAFEN Hoewel het in een willekeurige graaf moeilijk kan zijn om een verbeterend pad te vinden, gaat dat in bipartiete grafen heel eenvoudig. We zullen ons in de rest van dit artikel beperken tot bipartiete grafen. De twee puntverzamelingen heten steeds A en B . Een M -verbeterend pad heeft altijd een oneven aantal lijnen, zodat een eindpunt in A ligt en een eindpunt in B . We mogen daarom wel aannemen dat een verbeterend pad altijd in A begint. Omdat het pad afwisselend van A naar B en van B naar A loopt via afwisselend een niet-matching lijn en een matchinglijn, wordt een matchinglijn dus altijd doorlopen van B naar A en een niet-matchinglijn van A naar B . Daarom veranderen we elke matchinglijn in een pijl van B naar A en de overige lijnen in pijlen van A naar B . Nu zijn de M -verbeterende paden precies de gerichte paden van een ongematcht punt w in A naar een ongematcht punt in B . Zo'n gericht pad is makkelijk te vinden door vanuit w te kijken welke punten via één pijl bereikt kunnen worden, vervolgens te kijken welke punten vanuit die punten in één stap kunnen worden bereikt, etcetera.

BEWIJS VAN HALL Stel dat M een grootst mogelijke matching is en dat er toch nog een ongematcht punt w in A is. We willen dan bewijzen dat er een k -tal punten in A is met samen minder dan k burens. Bekijk eens welke punten te bereiken zijn vanuit w met een gericht pad. Laat W de verzameling bereikbare punten in A zijn en Y de bereikbare punten binnen B . De verzameling niet-bereikbare punten in A en B geven we aan met X en Z . Zie figuur 7.

Ieder punt y in Y moet gematcht zijn, want anders is er een verbeterend pad van w naar y en dat is onmogelijk omdat M al maximale grootte had. De partner van y is dan ook bereikbaar en ligt dus in W . Omdat alle matchingpartners van punten in Y in W liggen en W bovendien nog een ongematcht punt w heeft, geldt $|W| > |Y|$ (met $|W|$ wordt het aantal punten in W bedoeld). De punten in Z zijn niet bereikbaar vanuit w , dus er bestaat geen lijn tussen W en Z . De $k := |W|$ punten in W hebben dus gezamenlijk minder dan k burens, precies wat we wilden bewijzen.

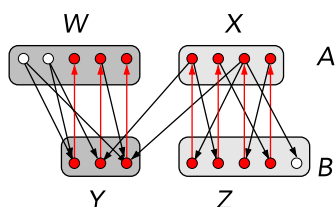
Opgave 5. Vind in figuur 8 vier punten in A met samen drie burens in B .

Een direct gevolg van de stelling van Hall is het volgende nuttige feit.

Stelling. Als ieder punt van een bipartiete graaf hetzelfde aantal burens heeft, dan heeft de graaf een matching die alle punten matcht.

Het bewijs gaat als volgt. Elk punt heeft d burens. Laat W een deelverzameling van A zijn en noem Y de verzameling burens van punten in W . Het aantal lijnen dat tussen W en Y loopt is dan $d \cdot |W|$, want vanuit elk punt in W vertrekken d lijnen. Maar het aantal lijnen is ook hoogstens $d \cdot |Y|$. Dus $|Y| \geq |W|$. Omdat dit voor iedere deelverzameling W geldt, volgt uit de stelling van Hall dat er een matching is die alle punten in A matcht. Deze matcht ook alle punten uit B , want $d \cdot |A| = d \cdot |B|$, dus $|A| = |B|$. (Einde bewijs.)

Uit het bewijs van de stelling van Hall kunnen we nog meer informatie verkrijgen. We bekijken weer alle punten die te bereiken zijn met een gericht pad, maar nu niet alleen vanuit één ongematcht punt w , maar tegelijk vanuit alle ongematchte punten in A . We noemen de verzameling bereikbare punten binnen A en B weer W en Y . De onbereikbare punten geven we weer aan met X en Z , zie figuur 9.



Figuur 9 De punten in W en Y zijn bereikbaar, de punten in X en Z onbereikbaar

Opnieuw kan er geen lijn zijn tussen W en Z . Met andere woorden: iedere lijn van de graaf heeft een eindpunt in X of in Y (of allebei). Elk punt in X is gematcht (de ongematchte punten zitten in W), maar niet met een punt uit Y , want de punten in Y waren al gematcht met punten in W . Het aantal matchinglijnen is dus precies gelijk aan het aantal punten in X en Y samen. We noemen een verzameling punten een *puntbedekking* als iedere lijn één of meer eindpunten in deze verzameling heeft. We hebben dus bewezen dat er een matching en een puntbedekking zijn met even veel elementen. Omdat een puntbedekking altijd minstens zoveel ele-

menten heeft als er lijnen zijn in een matching (iedere matchinglijn vereist een apart punt) hebben we de stelling van König bewezen.

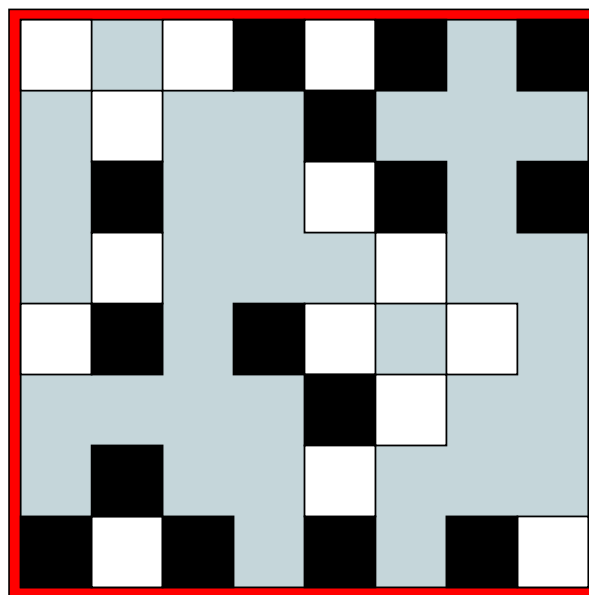
Stelling (König). In een bipartiete graaf is het maximale aantal lijnen in een matching gelijk aan het minimale aantal punten in een puntbedekking.

Opgave 6. Wijs in figuur 8 de verzamelingen W , X , Y en Z aan. Orden de rijen en kolommen van figuur 1, zó dat de kolommen in Z links staan en de rijen in W bovenaan. Wat valt je op?

PUZZELS

Opgave 7. Een geblinddoekte goochelaar heeft een glas met daarin een rode, groene, blauwe, gele en zwarte knikker. Zijn assistente laat een vrijwilliger twee knikkers uit het glas pakken. Daarna verwijdert de assistente zelf nog een knikker uit het glas. De goochelaar krijgt het glas met de twee overgebleven knikkers te zien en voorspelt correct welke twee knikkers de vrijwilliger heeft. Hoe werkt deze truc?

Opgave 8. Hoeveel torens kun je op de gegeven vakjes van een schaakbord zetten, zó dat geen twee torens elkaar aanvallen?

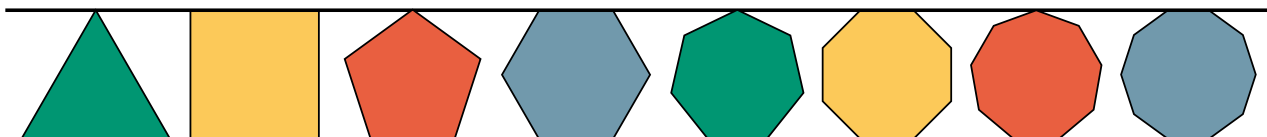


VERDER LEZEN Een goede internetpagina over de stelling van Hall is www.cut-the-knot.org/arithmetic/elegant.shtml.

Een online boek over grafentheorie kun je vinden op www.ecp6.jussieu.fr/pageperso/bondy/books/gtwa/gtwa.html. ■

Stel je een rechte strook (tussen twee evenwijdige lijnen) voor met alle regelmatige veelhoeken erin. Ze moeten precies passen, met één zijde op de onderkant. Dus in die strook staan de driehoek, het vierkant, de vijfhoek, de zeshoek, en zo verder. We vragen ons nu af: in welke volgorde moeten die veelhoeken staan, gerangschikt naar hun oppervlakte?

■ door Leon van den Broek



REGELMATIGE VEELHOEKEN OP VOLGORDE

Sommige paren van regelmatige veelhoeken zijn meetkundig gemakkelijk te vergelijken, zoals driehoek/vierkant, vierkant/achthoek of driehoek/zeshoek. Kun je de verhouding van hun oppervlaktes vinden? Bij andere koppels is het veel minder duidelijk welke de grootste is, bijvoorbeeld vijfhoek/zevenhoek.

Met meetkundige argumenten lukte het mij dan ook niet om in het algemeen te bepalen welke van twee regelmatige veelhoeken de grootste is. Wel vond ik met flink wat rekenwerk (dat we hier weglaten) een formule voor de oppervlakte van een regelmatige n -hoek.

EEN VERRASSEND RESULTAAT De juiste volgorde van klein naar groot is:

driehoek, vijfhoek, zevenhoek, negenhoek, ..., cirkel, ..., tienhoek, achthoek, zeshoek, vierhoek.

Je weet dus bijvoorbeeld meteen, dat de regelmatige 111-hoek kleiner is dan de regelmatige 38-hoek. Halverwege de – oneindig lange – strook staat de cirkel: groter dan de regelmatige n -hoeken voor oneven n en kleiner dan de regelmatige n -hoeken voor even n .

Waarom is dit de juiste volgorde? Om dat in te zien, gaan we uit van een strook waar precies een cirkel met straal 1 in past, dus 2 hoog. Dan is de oppervlakte van een veelhoek voor even n gelijk aan

$$f_{\text{even}}(n) = n \tan\left(\frac{1}{n}\pi\right)$$

en voor oneven n gelijk aan

$$f_{\text{oneven}}(n) = 2n\left(\tan\left(\frac{1}{2n}\pi\right) - \tan^3\left(\frac{1}{2n}\pi\right)\right).$$

Als je goed overweg kunt met differentiëren, zul je zien dat f_{oneven} een positieve afgeleide (naar n) heeft, waaruit volgt dat de oppervlakte van *oneven* veelhoeken toeneemt als n *groter* wordt. De functie f_{even} heeft een negatieve afgeleide, waaruit volgt dat de oppervlakte van *even* veelhoeken toeneemt als n *kleiner* wordt.

Om te bewijzen dat de in het kader vermelde volgorde de juiste volgorde is, moet je ten slotte aantonen dat de cirkel groter dan alle oneven veelhoeken is en kleiner dan alle even veelhoeken. Dat betekent dat de limiet voor $n \rightarrow \infty$ van zowel f_{even} als f_{oneven} gelijk moet zijn aan π , de oppervlakte van de cirkel. Ook dat rekenen we hier niet voor, maar als je een beetje handig bent met limieten, zul je zien dat dit klopt. ■

Een magisch vierkant bestaat uit $n \times n$ hokjes waarin je de getallen 1 tot en met n^2 invult, zodanig dat de som in elke rij en elke kolom gelijk is. Magische vierkanten werden in maart 2007 opeens groot nieuws, omdat drie Brabantse scholieren een vierkant hadden ontdekt met nog allerlei extra 'magische' eigenschappen. Misschien kunnen ze hun krachten ook eens beproeven op de magische zeshoek, die we in dit artikel introduceren.

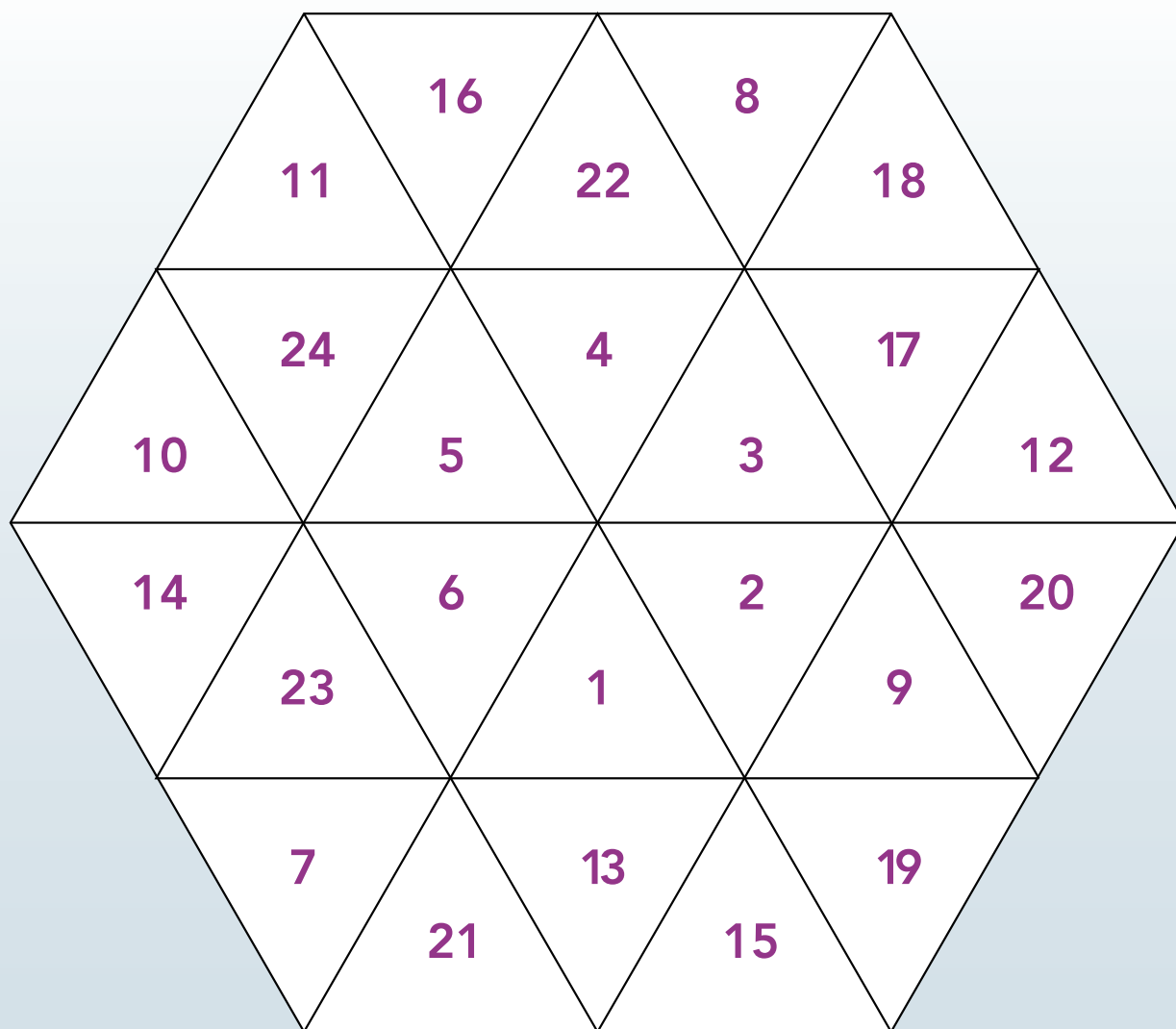
■ door Matthijs Coster

ZESHOEKMAGIE

We gaan uit van een zeshoek die uit 24 driehoekjes bestaat. Hierin moet je de getallen 1 tot en met 24 invullen. De totale som is $1 + 2 + 3 + \dots + 24 = 300$. We eisen van een magische zeshoek dat de vier rijen dezelfde som hebben: $300 : 4 = 75$. Natuurlijk willen we ook dat het niet uitmaakt hoe je tegen de zeshoek aankijkt, dus geldt ook voor de banden van

linksonder naar rechtsboven en voor die van rechtsboven naar linksboven, dat de som 75 moet zijn.

Van tevoren is niet meteen duidelijk dat magische zeshoeken bestaan, maar er blijken er heel veel te zijn. Zoveel zelfs dat we nog een extra eis kunnen stellen, namelijk dat de vier getallen in een taartpunt ook steeds gelijke som hebben. Omdat



Figuur 1 Een magische zeshoek

de zeshoek uit zes taartpunten bestaat, is die som natuurlijk $300 : 6 = 50$. Ik heb mijn computer een dagje laten rekenen aan het aantal oplossingen van de magische zeshoek en hij vond er 4.290.132. Eén voorbeeld zie je in figuur 1.

AAN DE SLAG Door twaalf getallen zelf te kiezen, ligt de hele magische zeshoek vast. Dit kan op veel manieren. In de zeshoek van figuur 2 hebben we het vrij makkelijk gemaakt om alle vraagtekens in te vullen, mits je bedenkt dat in de rode driehoek de som van de getallen 75 moet zijn. Kun je inzien waarom dat is?

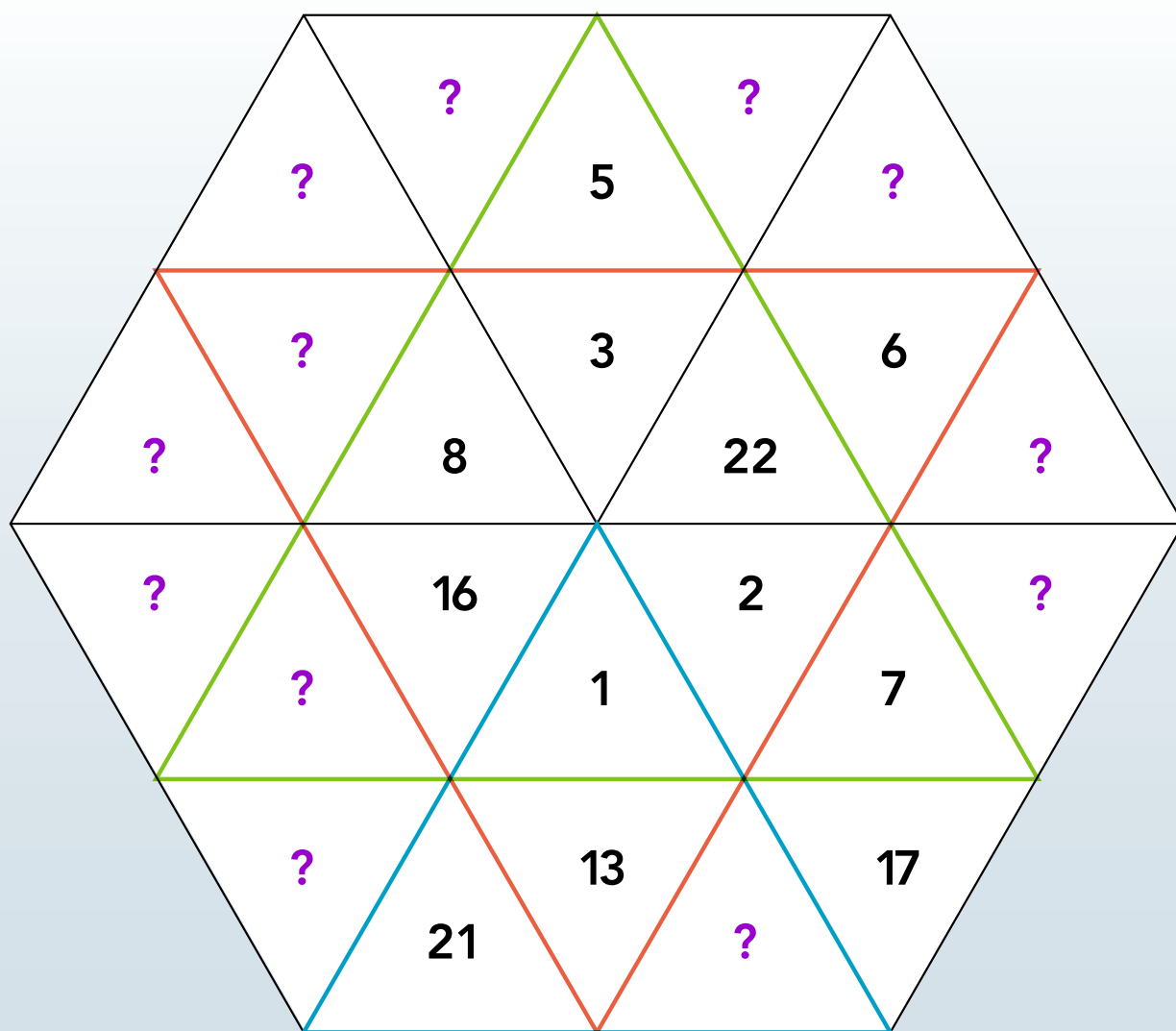
In de rode driehoek staat maar één vraagteken, dus dan is duidelijk welk getal dat is. Voor de groene driehoek geldt hetzelfde. Vervolgens kan steeds per taartpunt of per band op de plaats van een vraagteken een getal worden ingevuld totdat de hele zeshoek vol staat.

Nog een aardigheidje: de onderste taartpunt

heeft som 50. De onderste band heeft som 75. Door hieruit overeenkomstige getallen te elimineren, ontstaat een relatie tussen enerzijds het bovenste getal van de taartpunt en anderzijds de uiterste vakjes van de band. Deze vergelijking kan worden gebruikt om getallen in te vullen. Snap je waarom er bovenin een taartpunt geen 23 of 24 kan staan?

Er is een belangrijk verschil tussen een magische zeshoek en een magisch vierkant. In een magisch vierkant kun je alle getallen met 1 verhogen of verlagen en dan is het vierkant nog steeds magisch, want de som neemt in elke rij en elke kolom met hetzelfde getal toe. In een zeshoek is dit niet het geval, want de banden waarvan de sommen gelijk moeten blijven, bevatten vijf of zeven getallen.

We besluiten met een interessant probleem om zelf uit te zoeken: kun je met 24 opeenvolgende getallen altijd een magische zeshoek maken, ongeacht met welk getal je begint? Stuur je bevindingen naar de redactie via post@pythagoras.nu. ■



Figuur 2 Bereken de waarden van de getallen op de vraagtekens in deze magische zeshoek

DE RECORD-OCTA

Het opkweken van kristallen uit een oververzadigde zoutoplossing is een veel geduld eisende, maar fascinerende bezigheid. Vooral aluin is daarvoor geschikt. Rik Wagenaar heeft er jaren over gedaan om zijn recordkristal met een diagonaal van 162,5 millimeter te kweken. Deze prestatie was zo bijzonder, dat de bekende figuratieve kunstschilder Henk Helmantel het aluinkristal vereeuwigde in olieverf op paneel. Dat is de illustratie die je hier ziet.

■ door Henk Kubbinga

Kristallen hebben een belangrijke rol gespeeld in de geschiedenis van de ruimtemeetkunde. De antieke Griekse wiskundigen hebben natuurlijk kwartskristallen en vele andere onder ogen gehad, maar de echte 'eye-openers' waren naar alle waarschijnlijkheid de pyrietkristallen. Van pyriet vind je immers niet alleen kubussen (van heel kleine, tot vrij grote, met ribben van wel 5 centimeter), maar ook achthoekjes en zelfs vijfhoekjes- en ruitentwaalfhoeken. Bij Theaitetos en, iets later, bij Plato vinden we voor het eerst de vijf regelmatige veelvlakken als geïdealiseerde kristalvormen, compleet met één product van hun eigen mathematisch vernuft, het twintigvlak.

Pyriet-kristallen worden tegenwoordig tot de stollingsgesteenten gerekend: men stelt zich voor dat zij, op een afkoelende aarde of rondom een vulkaan, ontstaan zijn uit vloeibaar ijzersulfide. Van belang hierbij is dat we pyrietkristallen, zoals we ze in de natuur vinden, niet kunnen namaken. Laat je ijzer met zwavel reageren, dan ontstaat namelijk altijd een vormeloze hoeveelheid product.

Bij andere stoffen is het wél mogelijk de natuurlijke vorm in het laboratorium te reproduceren. Dat betreft hoofdzakelijk wateroplosbare zouten. Natriumchloride, bijvoorbeeld, wordt als haliet (steenzout) in de natuur aangetroffen: dit mineraal heeft, als het goed gekristalliseerd is (uit opgedroogde zeeën), meestal een kubische vorm. Dergelijke kristallen kun je 'namaken': als je zoveel haliet oplost in heet water dat een verzadigde oplossing resulteert en die verzadigde oplossing vervolgens langzaam laat afkoelen, zie je na enige tijd kleine kristalletjes

Henk Helmantels impressie van Wagenaars aluinkristal (olieverf op paneel; 2007); zie www.helmantel.nl. Met dank aan Art Revisited (www.artrevisited.com).

ontstaan. Allemaal piepkleine kubusjes, zoals je met een loupe kunt constateren. In feite zijn keukenzoutkorrels zo 'gemaakt'. Controleer maar: het zijn zonder uitzondering klokgave kubusjes van overigens variabele afmetingen. De eerste beschrijvingen van bewust uitgevoerde proeven met het kweken van kristallen dateren uit de zeventiende eeuw. Het ging toen, bij Pierre Gassendi (1598-1655), om de veelgebruikte stoffen steenzout en aluin.

NIEUW RECORD Het verschil tussen Gassendi's favoriete stoffen is dat aluinkristallen verder opgekweekt kunnen worden tot steeds grotere en steenzoutkristallen niet. Sinds 1980 worden in Nederland wedstrijden georganiseerd in het laten groeien van zo groot en fraai mogelijke aluinkristallen. De records volgden elkaar aanvankelijk jaarlijks op,



AEDËR VAN ALUIN



maar in 1988 werd een record gevestigd dat pas recentelijk is gesneuveld. Daniel Blom (Het Waterlant-College; opgegaan in het Bernard Nieuwentijt-College, Amsterdam-Noord) kweekte in dat jaar zijn kristal op tot het een grootste diagonaal had van 151,5 mm. Recentelijk heeft Rik Wagenaar dat record gebroken: hij kwam uit op 162,5 mm voor die diagonaal, bij een gewicht van 1299,23 gram (de metingen zijn uitgevoerd aan de Rijksuniversiteit Groningen). Belangrijk verschil is de helderheid van Wagenaars kristal en de nagenoeg perfecte octaëdrische vorm. Spelenderwijs heeft hij zijn kweektechniek in de loop der jaren geperfectioneerd.

Beeldend kunstenaar Henk Helmantel vond het kristal zo interessant, dat hij er in 2007 een schilderij van maakte. De opvallende paarse kleur in

de kern wordt veroorzaakt doordat Wagenaar begon met chroom-aluïn. Ook de recensenten nemen Helmantels hyperrealistische werk serieus: hij werd in 2008 tot Kunstenaar van het Jaar uitgeroepen, waarbij hij concurrenten als Anton Corbijn, Armando en Marlene Dumas achter zich liet.

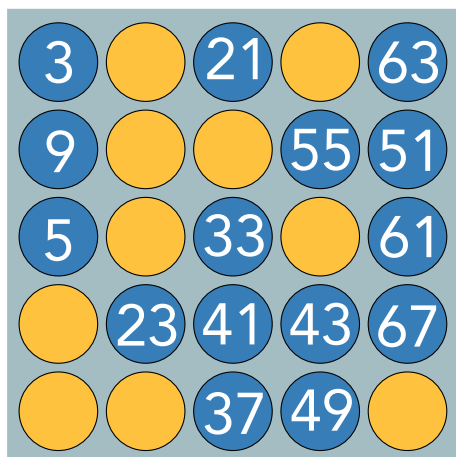
MEER LEZEN In het boek *L'Histoire du Concept de 'Molécule'* beschrijft Henk Kubbinga de opkomst en de ontwikkeling van de molecuultheorie. Je vindt er onder andere wetenswaardigheden over de proeven van Pierre Gassendi.

Over kristallen in de geschiedenis van de ruimtemeekunde kun je meer lezen in bijvoorbeeld *Geschiedenis van de wiskunde* van Dirk Struik, en in *Regelmaat in de ruimte* van Anne Klaas van der Vegt. ■

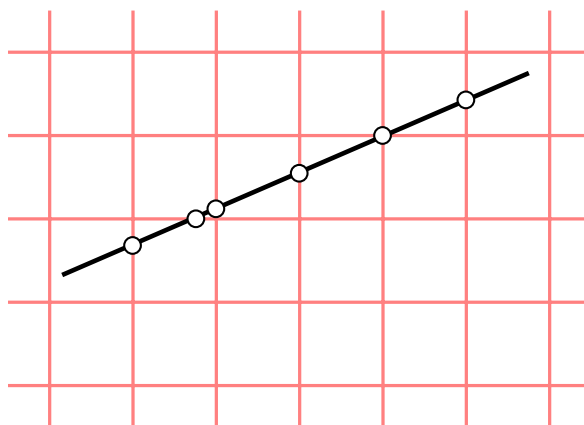
PROBLEMEN

■ door Dion Gijswijt

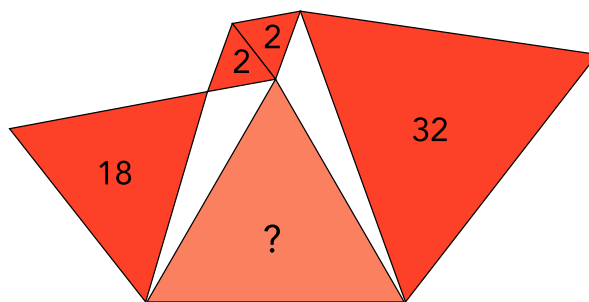
LINGO In de finale van het televisiespel *Lingo* hebben de kandidaten een *Lingokaart* bestaande uit $5 \times 5 = 25$ genummerde vakjes, waarvan er al 10 zijn weggestreept. De kandidaten mogen (middels ballen) een aantal uit de overgebleven 15 getallen trekken. Zonder te kijken natuurlijk! De getrokken getallen worden op de Lingokaart weggestreept en de kandidaten winnen als een hele rij, kolom of diagonaal is weggestreept. Hoe vaak moeten de kandidaten minimaal trekken om met zekerheid te winnen?



NAALD Op een ruitjespapier met ruitjes van 1 bij 1 centimeter ligt een naald van 5 centimeter lang (een lijnstuk). Wat is het maximale aantal snijpunten dat de naald maakt met het ruitjespatroon? En als de naald 15 centimeter lang zou zijn?



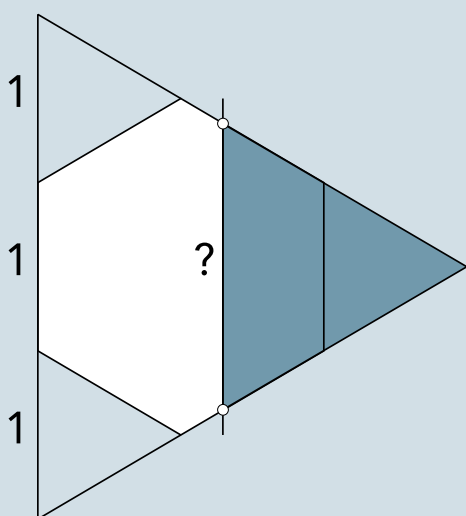
VLEERMUIS In de figuur zie je vijf gelijkzijdige driehoeken. Van vier daarvan is de oppervlakte gegeven. Wat is de oppervlakte van de vijfde driehoek?



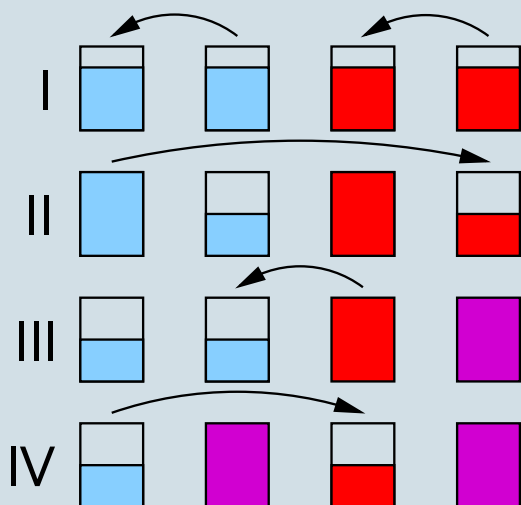
KNIKKERS In een zak zitten witte, zwarte en gouden knikkers. Je pakt (zonder te kijken) een aantal knikkers. Als je 17 knikkers pakt, heb je zeker een gouden of een witte knikker gepakt. Als je 11 knikkers pakt, heb je ten minste een witte én een zwarte knikker. In beide gevallen lukt het niet altijd met minder knikkers. Hoeveel knikkers zitten in de zak als er meer zwarte dan witte knikkers zijn?

OPLOSSINGEN

VERJAARDAGSTAART Verleng drie zijden zodat een gelijkzijdige driehoek wordt gevormd met zijde 3. We moeten hiervan precies $\frac{1}{3}$ afsnijden. Omdat de oppervlakte evenredig is met het kwadraat van de zijde, moet de lengte van de snede $\sqrt{\frac{1}{3}}$ maal de lengte maal de zijde van de driehoek zijn: $\sqrt{3}$.



IN KANNEN EN KRUIKEN De truc om alles in kannen en kruiken te krijgen is om niet direct water bij de wijn te doen.



WORTELS

Als

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \times \dots \times \sqrt{1 - \frac{1}{49^2}},$$

dan berekenen we

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{49^2 - 1}{49^2} = \\ &= \frac{(1 \cdot 3)(2 \cdot 4)(3 \cdot 5) \dots (47 \cdot 49)(48 \cdot 50)}{(2 \cdot 2)(3 \cdot 3)(4 \cdot 4) \dots (48 \cdot 48)(49 \cdot 49)}. \end{aligned}$$

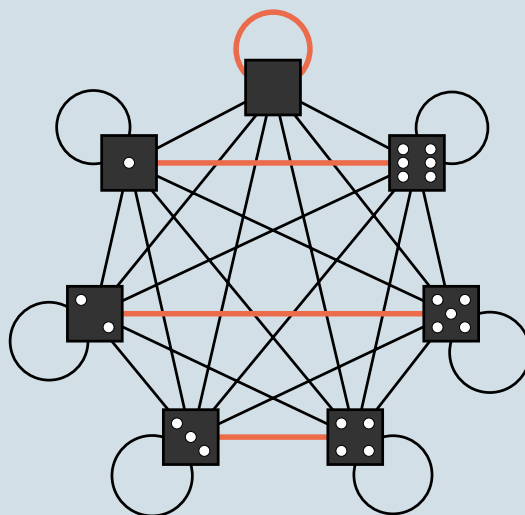
Boven en onder de deelstreep komen de factoren 3, 4, ..., 48 precies tweemaal voor en vallen tegen elkaar weg. Er blijft over:

$$x^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 50}{2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 49} = \frac{25}{49}.$$

Dus $x = \frac{5}{7}$.

ZWART EN WIT De zwarte blokjes zijn de blokjes waarvan óf alledrie de zijden oneven zijn, óf precies één van de drie zijden oneven is. Het antwoord is dus $(1 + 3 + 5)^3 + 3(1 + 3 + 5)(2 + 4)^2 = 1701$.

DOMINOSTENEN In het plaatje stelt elke lijn een dominosteen voor. Eén groepje van vier stenen waarin elk aantal ogen voorkomt is aangegeven. De zes andere groepjes krijg je door de eerste een aantal slagen te draaien.



Bart Zevenhek is leraar in het voortgezet onderwijs en deed daarnaast de laatste twee jaar onderzoek aan de Universiteit Leiden. In het vorige nummer van *Pythagoras* schreef hij al over de verrassende verbanden tussen de rij van Fibonacci en de priemgetallen. In dit nummer kun je het vervolg lezen van zijn onderzoeksresultaten.

■ door Bart Zevenhek

PRIEMGETALLEN EN FIBONACCI

deel 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

20

Zoals je weet, is een priemgetal een getal met precies twee delers: 1 en zichzelf. Ieder niet-priemgetal kun je schrijven als *product van priemgetallen*, bijvoorbeeld $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. We noemen dit de *priemfactorontbinding*. Elk getal kun je op precies één manier ontbinden in priemfactoren. Dat is helemaal niet eenvoudig om te bewijzen, net als de volgende stelling:

Stelling 1. Als het product van twee getallen deelbaar is door een priemgetal, dan is een van de factoren van het product dat ook.

Dat deze stelling alleen voor priemgetallen geldt, zie je in het volgende voorbeeld. Het product 6×4 is deelbaar door 3 en inderdaad: 6 is deelbaar door 3. Ditzelfde product 6×4 is deelbaar door 12, maar 6 noch 4 is deelbaar door 12. Priemgetallen zijn als het ware de onsplitbare bouwstenen van getallen, zoals atomen dat zijn in de scheikunde.

We halen nu het *binomium van Newton* van stal, dat je wellicht in de vierde klas vwo bent tegenge-

komen. Je weet dat $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Met behulp hiervan kun je $(a + b)^3$ uitwerken:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \end{aligned}$$

De getallen 1, 3, 3, 1 worden de *binomiaalcoëfficiënten* genoemd. Ze zijn zo belangrijk dat er de volgende notatie voor is:

$$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1.$$

Deze binomiaalcoëfficiënten kun je voor $k > 0$ als volgt berekenen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdots 1}.$$

Reken hiermee zelf na dat bijvoorbeeld geldt $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Nu gaan we de volgende stelling, die uitsluitend voor priemgetallen geldt, bewijzen.

Stelling 2. Voor een priemgetal p en voor een getal k met $0 < k < p$ geldt dat $\binom{p}{k}$ deelbaar is door p .

Het bewijs gaat als volgt. Voor $k > 0$ geldt:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} & \binom{p}{k} \cdot k(k-1)(k-2)\cdots 1 = \\ & = p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1). \end{aligned}$$

Nu is de rechterkant deelbaar door p , de linkerkant moet dat dus ook zijn. Maar omdat $k < p$, is $k(k-1)(k-2)\cdots 1$ niet deelbaar door p . Omdat p een priemgetal is, volgt uit stelling 1 dat $\binom{p}{k}$ dan deelbaar moet zijn door p . Klaar!

MODULOREKENEN Voordat we verder gaan, is het handig om de modulonotatie in te voeren. Wanneer je twee getallen a en b deelt door hetzelfde getal n , kan het gebeuren dat de resten gelijk zijn. Dit wordt genoteerd door $a \equiv b \pmod{n}$. Bijvoorbeeld: $17 \equiv 65 \pmod{12}$. Als $a \equiv 0 \pmod{n}$ wil dat zeggen dat a deelbaar is door n , de rest is dan immers 0. In de vorige *Pythagoras* zagen we dat de rest van de som van twee getallen, na deling door een getal, gelijk is aan de rest van de som van de resten. In modulo-notatie wordt dit: wanneer $a \equiv c$ en $b \equiv d$, dan is $a + b \equiv c + d \pmod{n}$. Hetzelfde geldt ook voor vermenigvuldigen: als $a \equiv c$ en $b \equiv d$, dan is $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$. Ga ook na dat je stelling 1 en stelling 2 met de modulo-notatie als volgt kunt opschrijven:

Stelling 3. Voor een priemgetal p geldt:

- Als a en b gehele getallen zijn met $a \cdot b \equiv 0 \pmod{p}$, dan $a \equiv 0 \pmod{p}$ of $b \equiv 0 \pmod{p}$;
- Als k een geheel getal is met $0 < k < p$, dan $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$.

Het eerste deel van de stelling herken je vast uit de ‘gewone’ algebra. Bij modulorekenen geldt dit echter alleen voor priemgetallen!

Uit het tweede deel van deze stelling volgt:

$$\begin{aligned} (a+b)^p & \equiv a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \\ & + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \cdots + \\ & + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p \pmod{p} \\ & \equiv a^p + b^p \pmod{p}. \end{aligned}$$

Alle binomiaalcoëfficiënten vallen immers weg omdat ze deelbaar zijn door p . We hebben dus alweer een stelling:

Stelling 4. Voor een priemgetal p geldt $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Deze stelling is zeker niet waar in de ‘gewone’ algebra en bij modulorekenen uitsluitend voor priemgetallen!

Verder halen we nog de volgende belangrijke stelling uit de getaltheorie uit de kast.

Stelling 5 (Kleine Stelling van Fermat). Voor een priemgetal p en voor een willekeurig getal n geldt: $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Deze stelling zegt bijvoorbeeld dat als je 10^{11} deelt door 11, de rest gelijk is aan 10, net als wanneer je 10^{13} deelt door 13. Reken maar na om te zien of het klopt. Het bewijs gebruikt een slimme methode, die in de wiskunde *volledige inductie* heet. Die bewijsmethode gaat als volgt: eerst kijk je of het gestelde waar is voor $n = 1$; dat is hier duidelijk het geval: $1^p \equiv 1 \pmod{p}$ (dit heet de *basis* van het bewijs). Vervolgens *neem je aan* dat de stelling waar is voor een of ander getal n (dit heet de *inductiehypothese*), waarmee je *bewijst* dat het gestelde waar is voor het volgende getal $n + 1$ (dit heet de *inductiestap*). Aangezien de stelling waar is voor $n = 1$ (dat was de ba-

Fibonaccigetallen duiken ook in de natuur op. Een bekend voorbeeld is het hart van de zonnebloem (hier nagemaakt met buttons), waar de zaadjes in gebogen 'armen' rond het middelpunt liggen. Het aantal armen dat met de klok mee loopt en het aantal dat tegen de klok in loopt, zijn opeenvolgende Fibonacci-

naccigetallen (21-34 of 34-55, enzovoort). De reden is dat zaadjes telkens door jongere zaadjes uit het centrum weggedrukt worden. Om toch een zo volledig mogelijk gevuld hart te behouden, moeten de zaden op deze manier gerangschikt liggen.



22

sis van het bewijs), moet de stelling vervolgens ook waar zijn voor $n = 2$ (op grond van de inductiestap), dan voor $n = 3, \dots$ en zo voor ieder getal!

Goed, *neem dus aan* dat voor een getal n geldt: $n^p \equiv n \pmod{p}$. Om te laten zien dat de stelling nu ook geldt voor $n + 1$, gebruiken we stelling 5:

$$(n + 1)^p \equiv n^p + 1^p \equiv n + 1 \pmod{p}$$

(bij de laatste stap wordt de inductiehypothese gebruikt). Dit zegt precies dat de stelling ook geldt voor $n + 1$. Klaar!

PSEUDO-PRIMTEST De Kleine Stelling van Fermat wordt onder andere gebruikt als pseudopriemtest. Zo'n test vertelt je *soms* met 100 procent zekerheid dat een getal *niet* een priemgetal is en anders dat het *waarschijnlijk* wel een priemgetal is.

Dat gaat zo. Stel, we willen weten of 10 een priemgetal is en we hebben geen zin om op zoek te gaan naar een deler. Dan kijken we of de Kleine Stelling van Fermat geldt voor 10. We nemen bijvoorbeeld $n = 5$ en berekenen $5^{10} = 9765625 \equiv 5 \pmod{10}$. Hieruit mogen we *niet* concluderen dat 10 een priemgetal is; de Kleine Stelling van Fermat zegt immers niets over wat er geldt voor getallen die niet priem zijn. We nemen een andere waarde voor n , $n = 2$, en berekenen $2^{10} = 1024 \equiv 4 \pmod{10}$. Als nu 10 een priemgetal was, zou hier niet 4 uit moeten komen maar 2. De conclusie is dat 10 onmogelijk een priemgetal kan zijn!

Deze pseudo-priemtest lijkt erg onpraktisch, omdat 2^n veel groter is dan n zelf. Maar door allerlei handige trucjes waar computers heel efficiënt mee kunnen werken, blijkt deze methode voor grote getallen veel sneller te werken dan het zoeken naar delers.

HOOFDSTELLING Ten slotte gaan we doen wat we aan het eind van het eerste artikel beloofden, namelijk de volgende stelling bewijzen.

Stelling 6. Als p een priemgetal ongelijk aan 5 is, dan is p een deler van F_{p-1} of van F_{p+1} .

Voor dat bewijs gebruiken we twee formules die we eerder hebben afgeleid. Dat waren de *formule van Kepler*:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

en de *formule van Binet*:

$$F_n = \frac{s^n - t^n}{s - t}$$

met

$$s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{en} \quad t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(dit zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$).

We gaan eerst peuteren aan de formule van Binet, om aan een uitdrukking te komen voor F_p waarin geen wortels meer voorkomen. In de formule komen vormen voor zoals

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^p = \frac{(1 + \sqrt{5})^p}{2^p}.$$

De teller gaan we nu uitwerken met het binomium van Newton. Je krijgt dan:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{5})^p &= 1^p + \binom{p}{1}\sqrt{5} + \binom{p}{2}\sqrt{5^2} + \\ &+ \binom{p}{3}\sqrt{5^3} + \dots + \\ &+ \binom{p}{p-1}\sqrt{5^{p-1}} + \sqrt{5^p}. \end{aligned}$$

Nu nemen we aan dat p een *oneven* priemgetal is, dus dat p niet gelijk is aan 2. Voor $p = 2$ weten we al dat 2 een deler is van F_3 , dus voor $p = 2$ hoeven we de stelling niet te bewijzen! Voor $(1 - \sqrt{5})^p$ krijgen we nu:

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{5})^p &= 1^p - \binom{p}{1}\sqrt{5} + \binom{p}{2}\sqrt{5^2} + \\ &- \binom{p}{3}\sqrt{5^3} + \dots + \\ &+ \binom{p}{p-1}\sqrt{5^{p-1}} - \sqrt{5^p}. \end{aligned}$$

Dat bijvoorbeeld de laatste term negatief is, komt doordat p oneven is.

Nu gaan we dan echt de formule van Binet uitwerken voor F_p , waarbij we gebruik maken van dat wat we net vonden. Daarbij gaat het een en ander wegvallen. De noemer van de formule van Binet is trouwens gelijk aan $\sqrt{5}$, reken maar na! Nou, daar gaat hij.

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{s^p - t^p}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{2 \cdot \binom{p}{1}\sqrt{5} + 2 \cdot \binom{p}{3}\sqrt{5^3} + \dots + 2 \cdot \sqrt{5^p}}{2^p \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Omdat p oneven is, moet er een getal n zijn met $p = 2n + 1$. In bovenstaande formule wordt $\sqrt{5^p}$ dan gelijk aan $\sqrt{5^{2n+1}} = 5^n \sqrt{5}$. Ook in alle andere wortels komen alleen oneven exponenten voor, zodat we hier een factor $\sqrt{5}$ uit kunnen halen. Bijvoorbeeld: $\sqrt{5^5} = 5^2 \sqrt{5}$. Bij de hele teller kunnen we dan $\sqrt{5}$ buiten haakjes halen en wegdelen tegen de $\sqrt{5}$ in de noemer. Als we met dit alles rekening houden, blijft er het volgende over:

$$F_p = F_{2n+1} = \frac{2 \cdot \binom{p}{1} + 2 \cdot \binom{p}{3} \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 5^n}{2^p}$$

Het is gelukt om de wortels kwijt te raken! Het blijft enigszins verbazend dat hier altijd een geheel getal uitkomt (F_p is nu eenmaal een geheel getal), maar die rare wortels zijn tenminste verdwenen.

Nu gaan we over tot de tweede grote stap in ons bewijs. We gaan modularekenen. Dat mag, want we hebben nu te maken met gehele getallen! We zagen dat alle binomiaalcoëfficiënten $\binom{p}{k}$ door p deelbaar zijn als p een priemgetal is en $0 < k < p$. Dus als we modulo p gaan rekenen, worden die allemaal 0. Dat ruikt lekker op! Verder gebruiken we nog eventjes de Kleine Stelling van Fermat om 2 op te schrijven

in plaats van 2^p . Die 2 kunnen we dan meteen weg-
delen tegen de 2 die boven voorkomt. Ten slotte
krijgen we dan:

$$F_p \equiv 5^n \pmod{p}$$

Nu gaan we kwadrateren. Je ziet straks wel waarom.
Tevens gebruiken we dat $p = 2n + 1$, zodat
 $2n = p - 1$. Dan gaan we naar de Kleine Stelling
van Fermat toewerken en ... Kijk maar goed!

$$F_p^2 \equiv 5^{2n} \equiv 5^{p-1} \equiv \frac{5^p}{5} \equiv \frac{5}{5} \equiv 1 \pmod{p}$$

Deze laatste afleiding is trouwens hartstikke fout
voor $p = 5$. Als p namelijk gelijk is aan 5, dan is
 $5 \equiv 0 \pmod{5}$ en wordt $F_5 \equiv 5^n \equiv 0 \pmod{5}$. De
rest klopt dan niet: delen door 0 mag nu eenmaal
niet. Het bewijs gaat dus mank voor $p = 5$. Maar dat
moest ook wel: 5 is nu net de enige uitzondering
op de regel! Mooi dat we die uitzondering tegenko-
men, anders zou er toch iets goed fout zijn aan ons
bewijs. Wel lieten we zien dat 5 een deler is van F_5 .
Dat klopt goed, want $F_5 = 5$.

24

Eindelijk kunnen we overgaan tot de finale. We
zetten onze laatste troef in: de formule van Kepler.
Aangezien p een oneven priemgetal is, weten we
dat $(-1)^p$ gelijk is aan -1 . De formule van Kepler
wordt dus:

$$F_{p+1}F_{p-1} - F_p^2 = -1.$$

Nu gaan we dit invullen in onze modulo-vergelij-
king en we krijgen:

$$F_{p+1}F_{p-1} + 1 \equiv 1 \pmod{p},$$

oftewel:

$$F_{p+1}F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nu gebruiken we de eerder vermelde regel van mo-
dulorekenen die alleen geldt voor priemgetallen
en we zijn waar we wezen willen: $F_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$
of $F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, dus p is een deler van F_{p+1} of
 F_{p-1} .

VRAGEN Nu het bewijs geleverd is, blijven er nog
wel wat vragen over. Is te voorspellen of p een deler is
van F_{p-1} , of van F_{p+1} ? Valt er iets te zeggen over ge-
tallen die niet een priemgetal zijn? De eerste vraag is
makkelijk te beantwoorden: als het priemgetal eindigt
op 2, 3 of 7, is het een deler van F_{p-1} , als het eindigt
op 1 of 9, is het een deler van F_{p+1} . Het bewijs hier-
van is moeilijk en gebruikt veel geavanceerder gereed-
schappen dan we nu gebruikt hebben. Over de tweede
vraag kunnen we wat meer zeggen: het is mogelijk bij
ieder getal n een getal in de rij van Fibonacci te voor-
spellen dat er door deelbaar is. Maar F_{n+1} of F_{n-1} is
dat over het algemeen niet. Soms wel, zoals we zagen
bij $323 = 17 \times 19$, dat een deler is van F_{324} . Zulke ge-
tallen worden Fibonacci-pseudopriemgetallen ge-
noemd. Daar zijn er niet veel van, onder de 250.000
zijn er precies 100, maar er is wel bewezen dat er on-
eindig veel van zijn.

Deze stelling geeft je ook een pseudo-priemtest in
handen. Als n namelijk geen deler is van F_{n-1} en F_{n+1} ,
kan n onmogelijk een priemgetal zijn. Helaas is ook
hier het omgekeerde niet waar, zoals we zagen met het
getal 323. Samen met de pseudo-priemtest gebaseerd
op de Kleine Stelling van Fermat, blijf je wel een heel
goed testpakket in handen te hebben. Er is bijvoor-
beeld nog nooit een tegenvoorbeeld gevonden van een
samengesteld getal n met: a) $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$,
b) $F_{n+1} \equiv 0 \pmod{n}$ en c) $2^n \equiv 2 \pmod{n}$. Dit soort
getallen blijken dus altijd priemgetallen te zijn. Er is
een prijs uitgelooft voor degene die een tegenvoor-
beeld vindt!

Het resultaat dat we in dit artikel bewezen is niet
nieuw. In 1846 werd door H. Siebeck bewezen dat een
meer algemeen type rij dan de rij van Fibonacci deze
eigenschap bezit. Getaltheoretici zijn voortdurend op
zoek naar priemtests. Van wat we in dit artikel heb-
ben bewezen, valt geen goede priemtest te maken: veel
te langzaam en het levert geen 100 procent garantie
dat een getal priem is. Maar in het spoor van dit soort
onderzoek is er wel een priemtest gevonden voor zo-
geheten Mersenne-priemgetallen, die gebaseerd is op
eigenschappen van de gulden snede. Daarmee wor-
den hele grote priemgetallen gevonden. In septem-
ber vorig jaar werd bekend dat de Mersenne-getallen
 $2^{43.112.609} - 1$ en $2^{37.156.667} - 1$ priem zijn. Deze ge-
tallen bevatten elk meer dan tien miljoen cijfers en
zijn daarmee recordhouders! ■

Wouter Berkelmans uit Amstelveen heeft voor het derde achtereenvolgende jaar de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gewonnen. Hij heeft daarmee de eerste prijs van 500 euro in de wacht gesleept. Zijn jongere broer Guus Berkelmans (3vwo) werd tiende. Het is vrij uitzonderlijk dat een derdeklasser tot de prijswinnaars doordringt.

■ door Quintijn Puite



PRIJSUITREIKING

WISKUNDE OLYMPIADE

De winnaars van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (zie het vorige nummer van *Pythagoras* voor een uitgebreide bespreking van een van de opgaven) werden bekend gemaakt tijdens de feestelijke prijsuitreiking op vrijdagmiddag 14 november op de Technische Universiteit Eindhoven.

Een overzicht van de tien prijswinnaars staat hieronder. Deze tien leerlingen hebben het beste gescoord van de 123 deelnemers die zich na de eerste ronde in januari voor de tweede ronde hadden gekwalificeerd. Bij een gelijke score in de tweede ronde bepaalt het aantal punten uit de eerste ronde de einduitslag. Al deze prijswinnaars zullen samen met nog achttien andere hoog geëindigde vierde-, vijfde- en

zesdeklagers in training gaan voor de Internationale Wiskunde Olympiade. In juni zullen uiteindelijk zes leerlingen geselecteerd worden voor het team dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Duitsland van 13 tot 22 juli 2009.

Ook werden op 14 november de medaillewinnaars van de Internationale Wiskunde Olympiade van afgelopen zomer door de Nederlandse Onderwijscommissie voor de Wiskunde (NOCW) in het zonnetje gezet. Milan Lopuhaä en Floris van Doorn, die daar een zilveren medaille hadden gewonnen, ontvingen uit handen van NOCW-voorzitter prof. dr. Dirk Siersma elk een premie van 500 euro. Raymond van Bommel en Remy van Dobben de Bruyn, winnaars van een bronzen plak, kregen elk 200 euro van de NOCW.



V.l.n.r.: Guus Berkelmans, Raymond van Bommel, Jelle van den Hooff, Harm Campmans, Wouter Berkemans, Wadim Sharshov, Maarten Roelofsma, Tim den Dulk, Vlad Sandu Dragu.

OOK MEEDOEN? Dat kan! De volgende eerste ronde wordt op scholen in heel Nederland georganiseerd op vrijdagmiddag 30 januari 2009. Vraag je wiskundeleraar voor meer informatie. De wedstrijd is gericht op havo- en vwo-leerlingen uit de klassen 3, 4 en 5 met belangstelling voor wiskunde. Ook enthousiaste eerste- en tweedeklassers mogen meedoen. Van elk van de categorieën (vijfdeklagers, vierdeklagers, onderbouwleerlingen) gaan de beste leerlingen door naar de tweede ronde in september 2009. Mocht je school onverhoopt niet meedoen, geef je dan op voor een andere wedstrijdlocatie via Melanie.Steentjes@cito.nl. ■

nr	prijs	2e	1e	naam	woonplaats	school	klas
1	€ 500	50	36	Wouter Berkelmans	Amstelveen	Barlaeusgymnasium, Amsterdam	6vwo
2	€ 400	48	36	Maarten Roelofsma	Apeldoorn	Gymnasium Apeldoorn	6vwo
3	€ 300	47	31	Jelle van den Hooff	Amstelveen	Vossiusgymnasium, Amsterdam	6vwo
4	€ 200	44	34	Raymond van Bommel	Hoofddorp	College Hageveld, Heemstede	6vwo
5	€ 150	39	34	Harm Campmans	Borne	SG De Grundel, Hengelo	5vwo
5	€ 150	39	34	Wadim Sharshov	Leiden	Stedelijk Gymnasium Leiden	6vwo
7	€ 100	38	36	Tim den Dulk	Zeist	Montessori Lyceum Herman Jordan, Zeist	6vwo
8	€ 100	37	31	Vlad Sandu Dragu	Hillegom	Fioretti College, Lisse	5vwo
9	€ 100	36	26	Leendert Los	Sauwerd	Gomarus College, Groningen	6vwo
10	€ 100	36	22	Guus Berkelmans	Amstelveen	Barlaeusgymnasium, Amsterdam	3vwo

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Thijs Notenboom en Iris Smit

Uitdagende opgaven die je doorgaans niet in de schoolboeken tegenkomt: dat is de *Pythagoras Olympiade*. In elk nummer staan twee opgaven, en twee oplossingen van de opgaven uit twee afleveringen terug. Ga de uitdaging aan en stuur ons je oplossing! Onder de goede leerling-inzenders wordt per opgave een boekenbon van 20 euro verloot. Bovendien kun je je via de Pythagoras Olympiade plaatsen voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, mocht het via de eerste ronde niet lukken.

Aan het eind van de jaargang wordt gekeken wie in totaal de meeste opgaven heeft opgelost. Deze persoon, die geen leerling hoeft te zijn, wint een boekenbon van 100 euro.



26

HOE IN TE ZENDEN?

Insturen kan per e-mail:
pytholym@pythagoras.nu
of op papier naar het volgende adres:

Pythagoras Olympiade
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidersgracht 24
1018 TV Amsterdam

Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld behalve je naam, ook je adres, school en klas.

Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 28 februari 2009.

OPGAVE 162

Hoeveel priemgetallen kunnen er maximaal zijn onder een rij van twintig opeenvolgende gehele getallen, die alle groter zijn dan 50? Laat zien dat dat aantal ook mogelijk is.

OPGAVE 163

In een schaakcompetitie van acht spelers worden zeven rondes gespeeld. Elke speler speelt één wedstrijd tegen elke andere speler. Na de laatste ronde blijken er geen twee spelers te zijn met hetzelfde aantal punten. Wat is het kleinste aantal punten dat de winnaar gescoord kan hebben? Bij elke schaakwedstrijd wordt 1 punt verdeeld: 1 voor de winnaar, 0 voor de verliezer en $\frac{1}{2}$ voor beide spelers bij remise.

OPLOSSING

158

Bij een schaaktoernooi is gepland dat iedere speler precies één wedstrijd speelt tegen elke andere speler. Nadat elke speler precies één wedstrijd gespeeld heeft, trekken vijf spelers zich terug. Daarna gaat het toernooi verder waarbij alle wedstrijden die nog gespeeld kunnen worden ook gespeeld worden. In totaal worden er 140 wedstrijden gespeeld. Hoeveel deelnemers nemen er in totaal deel aan het toernooi?

Oplossing. Noem het aantal deelnemers n . Na de eerste ronde zijn er $m = n - 5$ deelnemers over. Tussen deze m deelnemers worden alle mogelijke wedstrijden gespeeld; dit zijn er $\frac{1}{2}m(m - 1)$. De 5 deelnemers die vertrokken, hebben elk 1 wedstrijd gespeeld. Dit kunnen 5 verschillende wedstrijden zijn, maar ook 4 (wanneer een paar weglopers tegen elkaar speelde) of 3 (wanneer twee paren weglopers tegen elkaar speelden). Het totaal aantal wedstrijden is nu $\frac{1}{2}m(m - 1) + 5$, $\frac{1}{2}m(m - 1) + 4$ of $\frac{1}{2}m(m - 1) + 3$ en dit moet gelijk zijn aan 140. Dit zijn drie kwadratische vergelijkingen in m , die we met de *abc*-formule kunnen oplossen. Alleen de middelste heeft een gehele positieve oplossing: $m = 17$. Het aantal wedstrijden is dus $n = m + 5 = 22$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Guus Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Marian Blom** van het Pascal College te Zaandam, **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Rens de Haas** van het St. Bonifatius college te Utrecht, **Jeroen Huiben** van het Theresialyceum te Tilburg, **Stefan Klootwijk** van het Bonhoeffer College te Enschede, **Sander Konijnenberg** van het RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Merel Kooi** van het Nehalennia te Middelburg, **Laziz el Mallouki** uit Amersfoort, **Peter Mulder** uit Houten, **Erzsebet Nandorfi** van het Rijnlands Lyceum te Oegstgeest, **Stijn van Opstal** van het Stedelijk Gymnasium Breda, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Fred Schalekamp** uit Brakel, **Lynace Schoot** van het Stedelijk Gymnasium Arnhem, **Marieke van der Wegen** van het Stedelijk Lyceum locatie Kottenpark te Enschede, **Simon Vandeveld** van de Edugo Campus de Toren te Oostakker en **H.J. Wagenaar** van het Groene Hart Lyceum te Alphen aan den Rijn.
De boekenbon gaat naar Stefan Klootwijk.

OPLOSSING

159

Bepaal alle reële oplossingen van de vergelijking $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}$. ($\lfloor x \rfloor$ is het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is.)

Oplossing. Er moet gelden dat $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}$ en dus dat $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor + \frac{1}{4} = x^2$. Dit kunnen we omschrijven tot $(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2})^2 = x^2$, zodat we vinden $x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ of $x = -\lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$. In dit tweede geval zou moeten gelden dat $x + \lfloor x \rfloor = -\frac{1}{2}$. Echter, als $x \geq 0$, dan $x + \lfloor x \rfloor \geq 0$ en als $x < 0$, dan $x + \lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor \leq -1$. De optie $x = -\lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ kan dus niet voorkomen. Er moet dus gelden dat $x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ en dus is x van de vorm $n + \frac{1}{2}$ voor een geheel getal n . Anderzijds geldt voor een x van deze vorm ook netjes: $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = n^2 + n = (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. De oplossingsverzameling is dus $\{x = n + \frac{1}{2} \mid n \text{ geheel}\}$.

Deze opgave werd goed opgelost door **Guus Berkelmans** van het Barlaeusgymnasium te Amsterdam, **Mark Boersma** uit Vlissingen, **Hendrik Jan van Eijdsen** uit Capelle aan den IJssel, **Rens de Haas** van het St. Bonifatius college te Utrecht, **Jeroen Huiben** van het Theresialyceum te Tilburg, **Stefan Klootwijk** van het Bonhoeffer College te Enschede, **Sander Konijnenberg** van het RSG 't Rijks te Bergen op Zoom, **Laziz el Mallouki** uit Amersfoort, **Peter Mulder** uit Houten, **Erzsebet Nandorfi** van het Rijnlands Lyceum te Oegstgeest, **Tunnis Oosterhof** uit Groningen, **Stijn van Opstal** van het Stedelijk Gymnasium Breda, **Marcel Roggeband** uit Hoofddorp, **Fred Schalekamp** uit Brakel, **Rik Scheffer** van het Vossiusgymnasium te Amsterdam en **H.J. Wagenaar** van het Groene Hart Lyceum te Alphen aan den Rijn.
De boekenbon gaat naar Jeroen Huiben.

27

Liggen er meer punten op een lijn dan op een vlak? Lang gold dit als een onzinnige vraag, totdat Cantor ontdekte dat er meer dan één soort oneindigheid is – ontelbaar veel zelfs. In het begin waren er wiskundigen die hem voor gek verklaarden, wat hij later in zijn leven inderdaad werd. Maar tegenwoordig geldt de verzamelingenleer die hij ontwikkelde als het fundament van de wiskunde, 'een paradijs waar niemand ons uit kan verdrijven'.

■ door Klaas Pieter Hart

GEORG CANTOR (1845-1918):

BEDWINGER VAN HET ONEINDIGE



28

Georg Cantor werd in 1845 in Sint-Petersburg geboren. Zijn vader was een welvarend koopman en zijn moeder kwam uit een artistieke familie; Cantor zelf was later een verdienstelijk violist. In 1856 verhuisde de familie, om gezondheidsredenen, naar Frankfurt am Main. Cantor was op school een goede leerling die al snel wist dat hij later wiskunde wilde studeren, maar zijn vader vond een ingenieursopleiding beter voor zijn zoon.

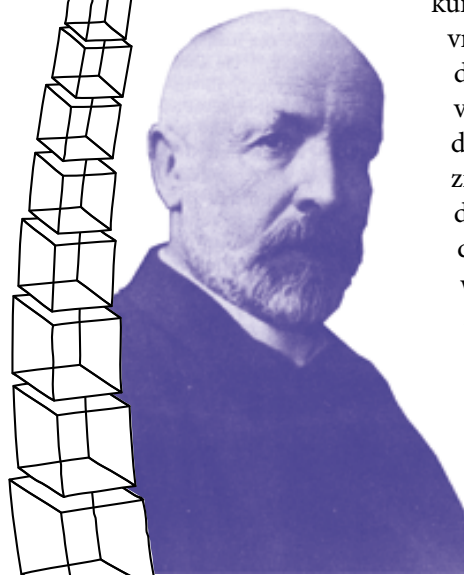
Pas nadat Georg drie jaar in Darmstadt de ingenieursopleiding had gevolgd, kreeg hij alsnog toestemming van zijn vader om wiskunde te gaan studeren. In 1862 ging hij daarvoor naar Zürich en in 1863 naar Berlijn, waar hij collega kreeg van de beste wiskundigen van die tijd: Kummer, Weierstraß en Kronecker. Aan het latere werk van Cantor is te zien dat de invloed van Weierstraß het grootst is geweest.

Het proefschrift waarop Cantor in 1867 promoveerde, ging over kwadratische vergelijkingen. Een van de bijgevoegde stellingen luidde: *In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi*, hetgeen betekent: In de wiskunde is de kunst van het stellen van vragen waardevoller dan die van het oplossen ervan. Je zou kunnen zeggen dat Cantor die stelling met zijn werk steeds beter onderbouwd heeft: de vragen die hij zich stelde, leveren wiskundigen nog steeds stof tot nadenken.

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi, hetgeen betekent: In de wiskunde is de kunst van het stellen van vragen waardevoller dan die van het oplossen ervan. Je zou kunnen zeggen dat Cantor die stelling met zijn werk steeds beter onderbouwd heeft: de vragen die hij zich stelde, leveren wiskundigen nog steeds stof tot nadenken.

EENDUIDIGHEID

In 1869 werd Cantor in Halle aangesteld; de wiskundige Eduard Heine die daar hoogleraar was,



daagde Cantor uit de eenduidigheidsstelling voor trigonometrische reeksen te bewijzen.

Wat zegt die stelling? We bekijken eerst een eenvoudiger geval. Neem vijf getallen a_1, a_2, b_0, b_1 en b_2 en bekijk de functie

$$f(x) = b_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x).$$

Stel dat je weet dat $f(x) = 0$ voor alle x in het interval $[-\pi, \pi]$; wat betekent dat voor die vijf getallen?

Het antwoord klinkt nogal flauw: die moeten alle vijf nul zijn. Dat kun je nagaan door een paar geschikte waarden voor x in te vullen en de vergelijkingen die zo ontstaan op te lossen. Vul achtereenvolgens $x = -\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0$ en $\frac{1}{2}\pi$ in, dan krijg je het stelsel

$$\begin{aligned} b_0 - b_1 + b_2 &= 0 \\ b_0 - a_1 - b_2 &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 &= 0 \\ b_0 + a_1 - b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Na wat elimineren vind je dat $b_0 = b_1 = b_2 = a_1 = 0$; vul dan nog $x = \frac{1}{4}\pi$ in en je ziet dat ook $a_2 = 0$.

Het kan ook handiger en dat is wat in die tijd ook al bekend was: integreer $f(x)\cos x$ van $-\pi$ tot π . Met wat volharding zul je zien dat er weinig overblijft:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x \, dx = b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx.$$

Omdat f de nulfunctie is, volgt meteen dat $b_1 = 0$. Door ook met de andere functies te vermenigvuldigen, zie je ook dat de andere getallen nul moeten zijn.

Het wordt pas echt interessant als je $f(x)$ opbouwt uit nog meer termen van de vorm $\cos kx$ en $\sin kx$, sterker nog, als je toelaat dat k elk natuurlijk getal mag zijn ($k \in \mathbb{N}$). Bij de oneindige sommen die je dan krijgt, moet je heel goed oppassen. Hoe dan ook, Cantor slaagde erin te bewijzen dat de stelling ook voor die oneindige sommen opgaat: als de som voor alle x nul is, moeten alle getallen a_k en b_k gelijk aan nul zijn.

In ons voorbeeld hadden we bij de invulmethode maar vijf (goedgelozen) punten nodig waar de functie nul was en de integratiemethode lukt als in

een aantal punten $f(x) \neq 0$ geldt. Cantor begon zich af te vragen hoe dat zat bij de oneindige sommen: voor hoeveel punten mag je de eis $f(x) = 0$ laten vallen terwijl je toch kunt bewijzen dat de getallen b_k en a_k gelijk aan 0 zijn? Die vraag leidde hem tot wat zijn levenswerk zou worden, de verzamelingenleer.

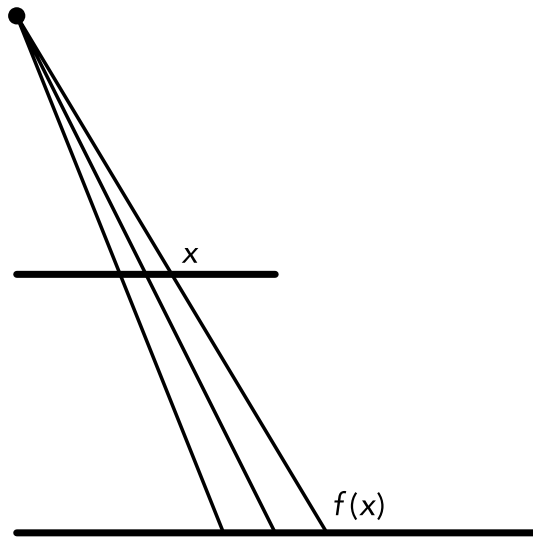
PUNTEN OP EEN LIJNSTUK Het gebeurt niet vaak dat één persoon een heel vakgebied van de grond tilt, maar aan het eind van de negentiende eeuw deed Cantor precies dat met de verzamelingenleer. De vraag die hij zich hierboven stelde, riep een andere vraag op; één die al vaker gesteld was, maar waar Cantor op een geheel nieuwe manier naar keek. In 1872 had hij kennis gemaakt met Richard Dedekind en in hun briefwisseling kunnen we zien hoe hij met die vraag omging.

Die vraag is: hoeveel punten liggen er op een lijnstuk? Het antwoord 'oneindig veel' bevredigde Cantor niet. In een brief aan Dedekind vroeg hij zich af of er niet meer soorten 'oneindig' bestaan. Heel concreet: zijn er even veel natuurlijke als reële getallen? Cantor formuleerde duidelijk wat hij met 'even veel' bedoelde: bestaat er een functie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat voor elk reëel getal x precies één natuurlijk getal n bestaat met $f(n) = x$? In dat geval bestaat er een *bijjectie* (*bijjectieve afbeelding*) van \mathbb{N} naar \mathbb{R} .

Dit is precies de manier waarop je twee verzamelingen kunt vergelijken: om te zien of er in twee emmers even veel appels als peren zitten, neem je telkens uit beide emmers een appel en een peer, tot een emmer leeg is; dan weet je of er meer appels dan peren waren (of minder of even veel), en dat zonder echt te tellen.

Cantor bedacht dat je dat vergelijken ook kunt doen zonder daadwerkelijk stap voor stap beide verzamelingen leeg te maken. Zo heeft een lijnstuk van lengte 1 even veel punten als een lijnstuk van lengte 2. Figuur 1 laat zien hoe je, in één keer, voor elk punt op het korte lijnstuk een beeldpunt op het lange lijnstuk kunt vinden zó dat elk punt op het lange lijnstuk bij precies één punt op het korte hoort.

Op dezelfde manier kun je inzien dat het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ en de hele verzameling \mathbb{R} even veel punten hebben: neem de functie $f: x \mapsto \tan x$ maar.



Figuur 1

Cantor bleef aan dit soort vragen werken; zo bewees hij een paar jaar later een, ook voor hemzelf, onverwachte stelling: er zijn even veel punten in het interval $[0, 1]$ als in het vierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. Hij

was zo verbaasd dat hij aan Dedekind schreef: 'Je le vois, mais je ne le crois pas.' ('Ik zie het, maar ik geloof het zelf niet.')

Wat misschien niet zo duidelijk is, is dat er even veel natuurlijke getallen (de verzameling \mathbf{N}) als rationale getallen (de verzameling breuken, aangeduid met \mathbf{Q}) bestaan. Op het eerste gezicht zou je misschien denken dat er meer breuken zijn, want tussen elk tweetal breuken liggen oneindig veel andere breuken. Cantor liet echter zien dat er wél even veel natuurlijke getallen als breuken bestaan, zie het kader op deze pagina.

DIAGONAALARGUMENT Hoe zit het nu met \mathbf{N} en \mathbf{R} ? Cantor bewees dat de situatie daar anders ligt. Je kunt *nooit* alle reële getallen tussen 0 en 1 achter elkaar opschrijven zonder er één over te slaan (wat met de breuken nog wel lukt); met andere woorden: er bestaat geen bijectie tussen \mathbf{N} en het interval $[0, 1]$. Hoe bewijs je zoiets? Neem een willekeurige functie $f: \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$; we laten zien dat er een getal uit $[0, 1]$ is dat ongelijk is aan alle $f(n)$. Figuur 2 geeft een beeld van hoe de lijst $f(1)$,

EVEN VEEL BREUKEN ALS NATUURLIJKE GETALLEN

Cantor liet zien dat je alle *paren* (m, n) , met m en n natuurlijke getallen, in een lijst kunt zetten, zonder dat er een paar wordt overgeslagen. Daarmee is meteen duidelijk dat je de verzameling van *positieve breuken* in een lijst kunt zetten, want een breuk kun je zien als een paar gehele getallen: een teller en een noemer. Rangschik alle breuken zoals in het onderstaande plaatje.

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	...
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

De pijltjes geven aan hoe je heen-en-weer slingerend door alle positieve breuken wandelt, waarbij je telkens van 'zuidwest' naar 'noordoost' loopt. Zo krijg je de volgende opsomming van alle breuken:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \dots$

Hiermee hebben we nog geen bijectie tussen \mathbf{N} en de verzameling positieve breuken, want sommige breuken komen vaker voor; zo zijn $1/1, 2/2, 3/3, \dots$ allemaal gelijk aan 1. Sla de dubbeltellers gewoon over en je krijgt wél een bijectie: bij elk natuurlijk getal $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ hoort precies één positief rationaal getal $(1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots)$, en omgekeerd.

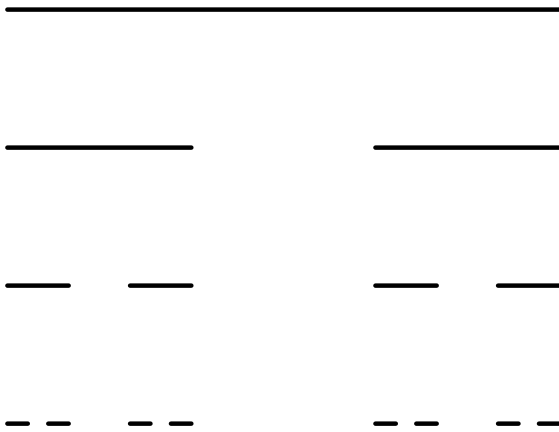
Kun je zelf bedenken hoe je visueel duidelijk kunt maken dat er even veel rationale getallen (positief én negatief) als natuurlijke getallen zijn?

Cantor was niet zo visueel ingesteld; zijn bewijs dat \mathbf{N} en \mathbf{Q} even veel elementen hebben, schreef hij als volgt op. Schrijf elk rationaal getal q als een vereenvoudigde breuk $\frac{m}{n}$ en maak hieruit het getal $N_q = |m| + |n|$. Elk getal N hoort bij eindig veel rationale getallen. Het getal $N = 0$ hoort bij geen q ; het getal $N = 1$ hoort alleen bij $0 = \frac{0}{1}$; het getal $N = 2$ hoort bij $-1 = \frac{-1}{1}$ en $1 = \frac{1}{1}$; het getal $N = 3$ hoort bij $-2 = \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$ en $2 = \frac{2}{1}$, enzovoort. We kunnen een functie $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ construeren door de rationale getallen eerst te sorteren door middel van N_q en dan door hun volgorde binnen \mathbf{R} . Dus

$0, -1, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \dots$

DE CANTORVERZAMELING

Een van de bekendste deelverzamelingen van het interval $[0,1]$ is de *Cantorverzameling*. Haal uit het interval $[0, 1]$ het open interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, het middelste derde deel dus, weg. Haal vervolgens het middelste derde deel weg van de twee overgebleven stukken links en rechts. Herhaal deze procedure voor alle stukken die dan nog over zijn, en doe dit oneindig vaak. Wat je overhoudt, heet de Cantorverzameling. Maar wat is het precies?



Je denkt misschien eerst dat er niets overblijft, maar je ziet heel makkelijk in dat bijvoorbeeld de punten $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ in de verzameling zitten, en ook het punt $\frac{1}{4}$. Sterker nog: de Cantorverzameling

bevat even veel punten als het oorspronkelijke lijnstuk ('even veel' in de zin die Cantor bedoelde)! Anderzijds haal je met iedere stap eenderde van de overgebleven lengte weg, dus uiteindelijk hou je een verzameling met lengte 0 over.

Cantor beschreef zijn verzameling niet op een meetkundige manier zoals hierboven. Hij deed het als volgt.

Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_v}{3^v} + \dots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten c_v nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

De Cantorverzameling is dus de verzameling van alle getallen die in het *drietallig* stelsel met alleen nullen en tweeën te beschrijven zijn.

De Cantorverzameling, en variaties er op, komt in de hele wiskunde voor: in de analyse, in de theorie (en praktijk) van dynamische systemen, ... heel vaak kom je een kopie van Cantors verzameling tegen als een belangrijke bouwsteen.

$f(2), f(3), \dots$ eruit zou kunnen zien. Het plaatje is slechts een voorbeeld; de volgorde van de getallen zou anders kunnen zijn, maar dat doet er niet toe. Cantor kwam op het verbluffend eenvoudige idee om naar de oneindige reeks cijfers op de *diagonaal* te kijken (de rode cijfers). Maak een nieuw getal door de diagonaal langs te lopen en elk cijfer te veranderen; zo krijg je bijvoorbeeld het getal dat onderaan figuur 2 vet staat gedrukt (daar is elk cijfer met 1 vermeerderd; een 9 wordt een 0). Dit getal is verschillend van *elk* getal in de lijst! Immers, de waarde van de k -de decimaal van het 'nieuwe' getal verschilt van de k -de decimaal van het k -de getal in de lijst. Hiermee is bewezen dat er géén bijjectie tussen \mathbb{N} en $[0, 1]$ bestaat. En dan bestaat er natuurlijk ook geen bijjectie tussen \mathbb{N} en \mathbb{R} , want $[0, 1]$ is een deelverzameling van \mathbb{R} .

Dit bewijs wordt tegenwoordig het *diagonaalargument van Cantor* genoemd. In deze vorm heeft Cantor het zelf echter nooit opgeschreven. Cantor deed het algemener; hierover kun je lezen in de volgende paragraaf.

0,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.	.	.
0,	0	2	1	0	2	3	9	8	6	.	.	.
0,	6	9	7	2	2	9	8	0	1	.	.	.
0,	2	1	4	4	9	6	3	1	0	.	.	.
0,	1	5	7	3	4	0	5	6	4	.	.	.
0,	4	2	3	7	8	9	5	1	2	.	.	.
0,	0	1	2	4	3	4	2	9	0	.	.	.
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	.	.	.
0,	1	3	8	5	5	0	3

Figuur 2

HOVEEL ONEINDIGHEDEN? Cantor had dus twee verschillende oneindigheden ontdekt: die van \mathbb{N} , die hij *afelbaar* noemde, en die van \mathbb{R} . Toen Cantor zijn theorieën hierover publiceerde, stuitte hij aanvankelijk op nogal wat scepsis bij sommige

collega's. Het idee dat je over het oneindige überhaupt iets zinnigs kon zeggen, was zo vreemd dat velen Cantor eerst niet serieus namen.

Toch hield Cantor vol; hij geloofde zelf heilig in de door hem ontwikkelde theorie. De vraag 'of er qua grootte nog iets tussen \mathbf{N} en \mathbf{R} in zit', zou Cantor voor de rest van zijn leven bezighouden. Zelf dacht hij van niet en hij probeerde heel hard de volgende uitspraak te bewijzen: als X een willekeurige oneindige verzameling reële getallen is, dan bestaat er een bijectieve afbeelding $f: \mathbf{N} \rightarrow X$ óf een bijectieve afbeelding $f: \mathbf{R} \rightarrow X$. Deze uitspraak heet nu de *Continuümhypothese*. In 1940 toonde Gödel aan dat het tegendeel niet te bewijzen is en in 1963 deed Cohen hetzelfde voor de *Continuümhypothese* zelf. Dit betekent dat met de uitgangspunten (de axioma's) van de gangbare wiskunde, de *Continuümhypothese* niet waar of onwaar is, maar onbeslisbaar.

In 1890 bewees Cantor dat er geen grootste oneindigheid is. Het bewijs heeft hetzelfde stramien als het hierboven beschreven diagonaalargument, wat in feite een speciaal geval is van Cantors veel algemenere stelling dat er geen grootste oneindigheid bestaat. Cantors bewijs hiervan gaat als volgt.

Neem eens een willekeurige verzameling X en bekijk de familie $\mathcal{P}(X)$ van alle deelverzamelingen van X . Die familie is ten minste zo groot als X , want $x \mapsto \{x\}$ laat zien dat $\mathcal{P}(X)$ een kopie van X bevat. Maar is er ook een bijectieve afbeelding $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$? Het antwoord is: nee. Neem een willekeurige afbeelding f ; we maken een A in $\mathcal{P}(X)$ met $A \neq f(x)$ voor alle x . Die A is eenvoudig op te schrijven: $A = \{x : x \notin f(x)\}$. Neem nu een willekeurige $x \in X$; als $x \in A$, dan $x \notin f(x)$ dus $f(x) \neq A$, en als $x \notin A$, dan $x \in f(x)$ dus weer $f(x) \neq A$.

Dit idee is zo krachtig dat het op veel gebieden toepasbaar is. Het ligt ten grondslag aan de onvolledigheidsstellingen van Gödel, aan de oplossing van het stop-probleem (er is geen computerprogramma dat van andere programma's kan controleren of ze zullen stoppen) en nog veel meer.

Het keerde zich bijna nog tegen Cantors eigen verzamelingenleer. Cantor had een ruime opvatting van verzameling; in het kort vond hij dat elke collectie dingen die we in gedachten bijeen kunnen brengen een verzameling is. In 1905 liet Bertrand Russell zien, na bestudering van Cantors algemene diagonaalargument, dat die opvatting te ruim was. Neem maar eens V , de *verzameling van alle verzamelingen*, en vorm daaruit de verzameling $R = \{X : X \notin X\}$, de verzameling van alle verzamelingen die niet zichzelf bevatten. Dan geldt voor R zelf dat $R \in R$ dan en slechts dan als $R \notin R$. Deze redenering staat nu bekend als de paradox van Russell. Je kunt hem ook als raadseltje formuleren: 'De

barbier scheert iedereen die niet zichzelf scheert. Wie scheert de barbier?'

Dit was een onwelkome conclusie, want de verzamelingenleer was ondertussen een belangrijk stuk gereedschap voor wiskundigen geworden. De oplossing was om iets voorzichtiger met het begrip 'verzameling' om te gaan. Ernst Zermelo stelde in 1908 axioma's voor de verzamelingenleer op waarmee de paradox van Russell vermeden kon worden, maar die 'rijk' genoeg waren om de resultaten van Cantor en zijn navolgers overeind te houden. De verzamelingenleer zit overal in de wiskunde; als een nieuwe structuur gedefinieerd wordt, dan luiden de eerste woorden meestal: 'een verzameling met ...'

David Hilbert onderstreepte het belang van Cantors werk met de volgende uitspraak: *Aus den Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.* ('Uit het paradijs dat Cantor voor ons geschapen heeft, zal niemand ons kunnen verdrijven.') In zijn colleges illustreerde Hilbert de verschillende ordes van oneindigheid aan zijn studenten aan de hand van een fictief hotel, waarover twee jaar geleden een artikel in *Pythagoras* stond: 'Hilbert Hotel volgeboekt', jaargang 46 nr. 4 (februari 2007).

GEKTE In de tweede helft van zijn leven leed Cantor aan een depressie, waardoor zijn productiviteit verminderde en hij regelmatig moest worden opgenomen. Hij raakte soms het spoor volledig bijster. Zo gaf hij een verificatie van het Vermoeden van Goldbach ('elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen') voor alle gehele getallen onder de 1000, terwijl enkele decennia eerder reeds een verificatie voor de getallen tot 10.000 was gepubliceerd. Hij begon zich bezig te houden met literatuur en probeerde te bewijzen dat Francis Bacon de werkelijke auteur was van de werken van Shakespeare. Hij publiceerde over religie en ontwikkelde zijn concept van het 'absoluut oneindige' dat hij gelijkstelde aan God. Aan het eind van de Eerste Wereldoorlog stierf hij in een psychiatrische instelling in Halle, Duitsland. We zullen nooit weten of zijn werk aan 'het oneindige' heeft bijgedragen aan zijn psychiatrische ziekte, maar een verband met zijn geniale obsessies valt niet uit te sluiten.

VERDER LEZEN Het Zebraboekje *Blik op oneindig* van Leon van den Broek en Arnoud van Rooij biedt een mooie inleiding in het wiskundige werken met 'oneindig'. ■

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 2

BROOD VERGETEN

Ze ontmoet na vijf minuten Appie om twintig over acht. Ze rijdt dus vier keer zo snel: 48 kilometer per uur.

PAARDEN

	9		
	9		9
	9		9
	9		

KREEFTGETAL

K(Koos las Pythagoras ook) = $\frac{11}{20}$.

LOPEN OP EEN KUBUS

In vijf keer twee stapjes kan de mier alle middens van de kubus bereiken, steeds via het midden van een ribbe. In totaal loopt de mier dan 10 centimeter.

HOEVEEL BREUKEN?

$G = 8$; de acht mogelijke manieren om dit getal te breken zijn $1\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$ en $5\frac{1}{2}$.

PYTHAGORAS

48ste jaargang nummer 3
januari 2009
ISSN 0033 4766

Pythagoras wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en richt zich tot alle leerlingen van vwo en havo. Pythagoras stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.

Internet www.pythagoras.nu

Hoofdredacteur Arnout Jaspers

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Dion Gijswijt, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart

Bladmanager Tilman Grünwald

Vormgeving Grafisch Team, Zoetermeer

Druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap

Verantwoordelijk uitgever Chris Zaal

Redactiesecretariaat Chris Zaal, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde,

Plantage Muidergracht 24,
1018 TV Amsterdam.

Lezersreacties en kopij Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pythagoras.nu en kopij naar Arnout Jaspers, arnout@pythagoras.nu. Eventueel per post naar Jan Guichelaar, Pedro de Medinalaan 162, 1086 XR Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties

Mirjam Worst, Drukkerij Giethoorn Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon 0522 855 175, fax 0522 855 176.

Abonnementsprijs

(6 nummers per jaargang)
€ 22,00 (Nederland),
€ 24,00 (België),
€ 28,00 (overig buitenland),
€ 18,00 (leerlingabonnement Nederland),
€ 20,00 (leerlingabonnement België),
€ 12,00 (bulkabonnement Nederland),
€ 14,00 (bulkabonnement België).
Zie www.pythagoras.nu voor toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee

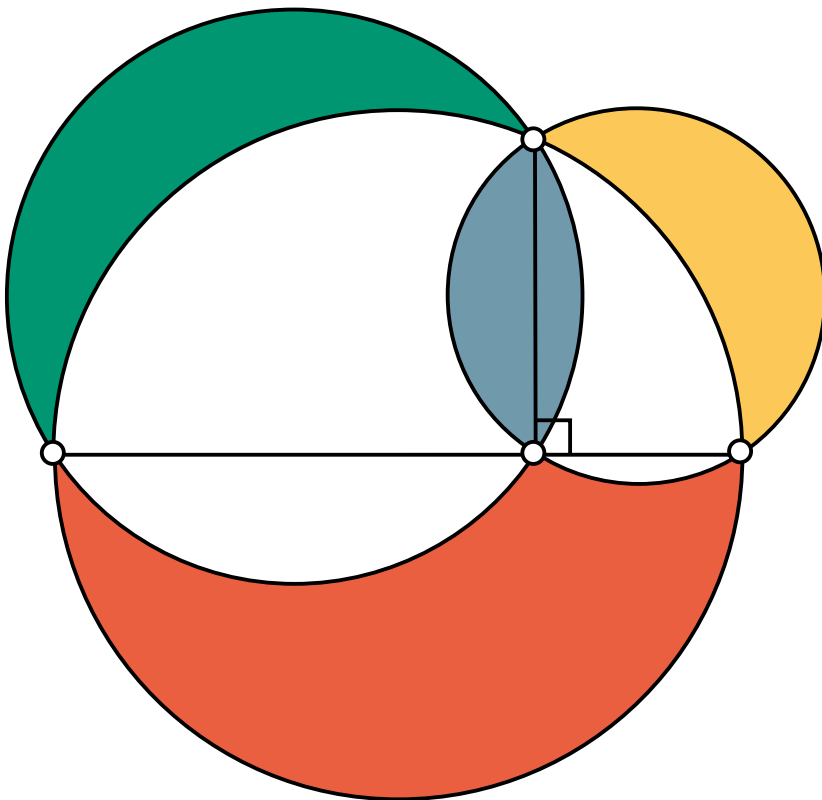
ir. D. Beekman, auteur van diverse breinbrekerboeken (dh.beekman@hetnet.nl),
drs. S. Biesheuvel, docent wiskunde op het Willem de Zwijger College te Bussum (biesheuvel@zonnet.nl),
drs. A.J. van den Brandhof, docent wiskunde op het

Vossiusgymnasium te Amsterdam (alex@pythagoras.nu),
dr. L.A.M. van den Broek, voormalig docent wiskunde op RSG Pantarijn te Wageningen (l.vandenbroek@math.ru.nl),
dr. M.J. Coster, wetenschappelijk onderzoeker bij het Ministerie van Defensie (matthijs@pythagoras.nu),
drs. J. Daems, aio wiskunde aan de UL (jeanine@pythagoras.nu),
dr. D.C. Gijswijt, postdoc combinatorische optimalisering aan de UvA (dion@pythagoras.nu),
dr. J. Guichelaar, voormalig directeur van Interconfessionele Scholengroep Amsterdam (jan@pythagoras.nu),
dr. K.P. Hart, docent topologie aan de TU Delft (kp@pythagoras.nu),
drs. A. Jaspers, wetenschapsjournalist (arnout@pythagoras.nu),
dr. H.H. Kubbinga, wetenschapshistoricus aan de RUG (h.h.kubbinga@home.nl),
drs. T. Notenboom, voormalig docent wiskunde op de Hogeschool van Utrecht (thijs@pythagoras.nu),
dr. G.W.Q. Puite, docent wiskunde aan de TUE en de Hogeschool Utrecht (g.w.q.puite@tue.nl),
I.M. Smit, student wiskunde aan de UvA (iris@pythagoras.nu),
drs. B. Zevenhek, docent wiskunde op het Barlaeusgymnasium te Amsterdam (bartzevenhek@gmail.com)

Sponsors Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen:



SANGAKU



Een Sangaku beeldt zonder woorden een stelling uit. De kunst is om uit het diagram af te leiden welke stelling dat is en die te bewijzen.

